Ордена Ленина
Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

ИАЭ-2286

В. Г. Носов, А. М. Камчатнов

Теория магических ядер

Москва 1973

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И.В.КУРЧАТОВА

В.Г.Носов,
А.М.Камчатнов

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ ЯДЕР

Москва
1973

Ключевые слова:
ядерная физика, теория, магические ядра, ферми-жидкость, энергетические спектры, структура, размеры, масса.
0503

АННОТАЦИЯ

На основе ферми-жидкостных представлений о структуре энергетического спектра ядерной материи развита последовательная теория оболочечных и магических осцилляций масс сферических ядер. Найдено "магическое" соотношение между размерами системы и граничным импульсом ферми-распределения квазичастиц: на диаметре ядра должно укладываться целое число дебройлевских полуволн (см.формулу (22)). Получено выражение для скачка энергии связи нуклона в окрестности магического ядра. Проанализирована роль остаточного взаимодействия, без которого сферическая конфигурация системы вообще не отвечала бы устойчивому равновесию (см. [19]). Доказано, что ширина зоны размытия ферми-границы остаточным взаимодействием пропорциональна квадрату вектора орбитального момента квазичастицы. Значения соответствующего коэффициента пропорциональности (константа связи между квазичастицами) определены из экспериментальных данных, касающихся 52 магических ядер. Продемонстрировано стремительное падение интенсивности остаточного взаимодействия с ростом размеров ядра.

THE THEORY OF MAGIC NUCLEI

V.G.Nosov, A.M.Kamchatnov

ABSTRACT

A consistent theory of the shell and magic oscillations of the spherical nuclei masses is developed on the basis of the Fermi liquid concept of nuclear matter energy spectrum. A "magic" relationship between the system dimensions and the limiting momentum of the quasiparticle distribution is derived: an integer number of the de Broglie half-waves would fall on the nuclear diameter (see formula (22)). An expression for the discontinuity in nucleon binding energy in the vicinity of a magic nucleus is obtained. The role of the residual interaction is analyzed. It is shown that the width of the Fermi-surface diffuseness due to residual interaction is proportional to the squared vector of the quasiparticle orbital angular momentum. The values of the corresponding proportionality factors (the coupling constant for quasiparticles) are determined from the experimental data for 52 magic nuclei. It is demonstrated the rapid drop of the residual interaction with increasing nuclear size.

I. ВВЕДЕНИЕ

Изучение атомного ядра, рассматриваемого как макроскопическое тело, берет свое начало от известной работы Вейцзекера [I] . Усовершенствование полуэмпирической формулы Вейцзекера, осуществленное Бете [2] и Ферми [3] , позволило описывать с хорошей относительной точностью полные энергии связи огромного большинства ядер. Это, однако, лишь углубило интерес к всевозможным отклонениям от формулы Вейцзекера, и вопрос о них в той или иной форме многократно возникал за истекшие 35 лет. Наиболее легко воспринимаемой причиной отклонений является то очевидное обстоятельство, что протоны и нейтроны могут добавляться к ядру лишь целочисленными порциями. Однако широко распространенное мнение, что так называемые магические и оболочечные отклонения имеют также не макроскопическое происхождение [4,5] , выглядит скорее как догматическое утверждение, а не как прямо вытекающий из опыта факт. Теоретическое изучение макроскопических свойств тела естественно связывать с наблюдаемыми на опыте особенностями хода термодинамических величин. Это способствует обнаружению и детальному исследованию характерных явлений типа фазовых переходов. Специфика ядра состоит в непосредственной достижимости абсолютного нуля температуры (основное состояние), и наиболее актуальной термодинамической величиной оказывается соответствующая энергия, то есть масса ядра. Насколько можно судить по схематически изображенным на рис.I экспериментальным данным, рассматриваемые особенности, по-видимому, представляют собой "изломы", то есть скачки производной от энергии по числу частиц. Когда по одну сторону от сингулярности ход кривой становится вялым, почти горизонтальным, мы вступаем в область несферических ядер. Соответствующая точка Кюри отвечает рассмотренному в [7] фазовому переходу, следствием которого является, в частности, изменение равновесной формы ядра. Кроме того, на рис.I отчетливо видны и сингулярности несколько иного типа. Это магические "каспы" сферических ядер, то есть обращенные вниз заострения, в вершинах которых расположены соответствующие магические ядра. Подчеркнем отличие этой особенности от обычной точки Кюри. Качественное различие между фазами – разные значения химического потенциала – возникает лишь вблизи такой "изолированной" точки перехода. Вдали от нее не представляется возможным указать такое качество, которым, допустим, обладала бы одна из фаз, тогда как другая была бы его лишена. Само же состояние тела, по-видимому, скачка не испытывает (с макроскопической точностью, разумеется; см.следующий раздел), так что в иных отношениях мы имеем как бы переход второго рода.

"Традиционное" объяснение магических чисел [4,5] непосредственно апеллирует к картине заполнения фермионами $2j+1$ – кратно вырожденных одночастичных уровней в

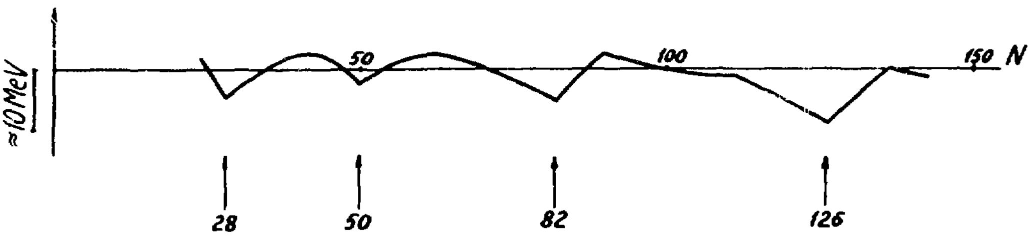

Рис.I. Описываемая формулой Вейцзекера "плавная" часть массы не имеет особенностей; она принята за нуль отсчета схематически изображенного здесь оболочечного эффекта. Более детальный и точный график содержал бы всю совокупность кривых, отвечающих различным химическим элементам (см.,например, [6]). В зависимости от числа протонов Z ход массы обнаруживает не менее резко выраженные особенности аналогичного характера.

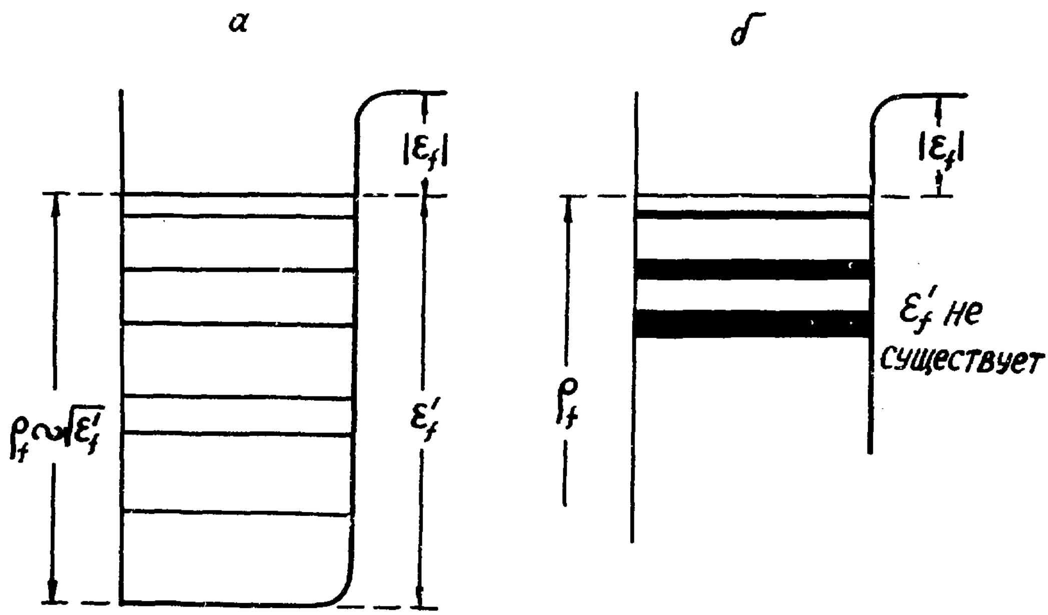

Рис.2. Изображенное на рис.2б нарастание затухания (ширины) одноквазичастичных состояний в реальной ферми-жидкости делает невозможным корректное определение положения" дна" потенциальной ямы. Поэтому в случае б) в отличие от а) существует только энергия квазичастиц, отсчитываемая от нуля кинетической энергии свободного нуклона. Рисунок крайне схематичен; уровни квазичастиц изображены как дискретные. В действительности основные результаты следующих разделов (см.,например, (I9) и (20)) получены в "макроскопическом" приближении, в котором энергетический спектр квазичастиц еще можно считать сплошным.

некоторой сферически симметричной потенциальной яме. После заполнения оболочки следующий нуклон приближается к нижнему краю области состояний сплошного спектра и энергия связи нуклона $\mathcal{E}$ (химический потенциал, взятый с обратным знаком) соответственно падает. Слабый пункт подобного истолкования заключается в том, что аналогичная ситуация должна была бы возникать и после заполнения каждого уровня в отдельности (подмаги), а не только всей определенной их группы (маги). По сравнению с расстояниями, разделяющими соседние оболочки, расстояния между уровнями внутри каждой из них не могут быть всегда малыми, так как в данном случае не существует соответствующего безразмерного малого параметра. Конкретные расчеты схем однонуклонных уровней подтверждают справедливость этого соображения (см., например, схему нейтронных уровней из монографии [8]). Мы должны были бы обнаружить целый частокол "каспов", отвечающих каждому подмагу. Но в действительности для не слишком легких ядер за магическим числом 28 наблюдаются лишь изображенные на рис.I заострения, соответствующие гораздо реже встречающимся истинным магическим числам.

Более того, не все характеристики "ямы", о которой идет речь, допускают на самом деле четкое физическое определение: положение дна ямы не является строгим количественным понятием из-за сильного затухания глубинных квазичастиц. Это естественное соображение теоретического характера подтверждается также и экспериментальными данными по выбиванию глубинных протонов из ядер [9] . Отличие реальной ферми-жидкости от примитивной модели ферми-газа во внешне заданном поле схематически показано на рис.2. В обоих случаях можно говорить об энергии квазичастицы, если отсчитывать ее от нуля кинетической энергии внешнего, свободного нуклона. На границе ферми-распределения эта величина сводится к химическому потенциалу $\mathcal{E}_f = -\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ - энергия связи нуклона. Кроме того, в случае, соответствующем рис.2а, существует и энергия $\mathcal{E}'$, отсчитываемая от "дна" потенциальной ямы. Она определяет граничный импульс $\rho_f = k_f R \sim \sqrt{\mathcal{E}'_f}$ (R - радиус ямы). В случае же ядерной ферми-жидкости (см.рис.2б) ситуация невзаимодействующих квазичастиц может иметь место лишь в ближайшей окрестности ферми-границы, и $\mathcal{E}'_f$ не существует. Тем не менее понятие граничного импульса сохраняет смысл. В принципе мы могли бы судить о величине ρ_f по виду волновой функции последней квазичастицы. Важное предположение, на котором основана развиваемая в следующих разделах теория, состоит в том, что граничный импульс ρ_f определяется полным числом частиц N :

$$N = N(\rho_f) \tag{I}$$

(о фактическом виде этой функции см. разделы 2 и 5).

Полная энергия ядра в зависимости от ρ_f (или N) испытывает осцилляции из-за осцилляций плотности одноквазичастичных состояний вблизи ρ_f . Последние в конечном счете обусловлены сохранением орбитального момента ℓ в сферических ядрах, и собственные значения $\rho = kR$ могут быть графически представлены точками на плоскости ℓ , ρ . Из рис.3 легко усмотреть, как они группируются в области сравнительно небольших орбитальных моментов при

$$\rho \gg 1. \tag{2}$$

Здесь проведенные по правилу $2n + \ell = p$ (n - главное квантовое число; p - номер траектории) редженские траектории [IO] расположены вблизи своего максимума, где их форма задается уравнением

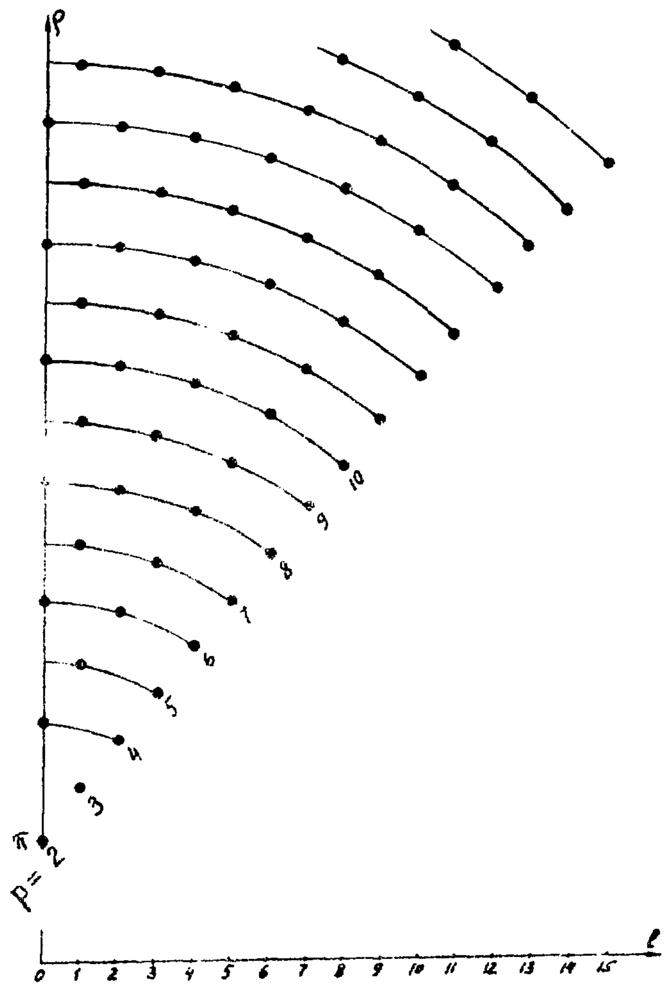

Рис.3. Нули сферических функций Бесселя $j_\ell(\rho)$ изображены на плоскости ℓ, ρ (см. раздел 2 и Приложение). Затухание квазичастиц (см. рис. [illegible]) во внимание не принималось. Оболочечные осцилляции обусловлены ближайшей окрестностью $\rho \approx \rho_f$ ферми-границы, где соответствующая ширина пренебрежимо мала.

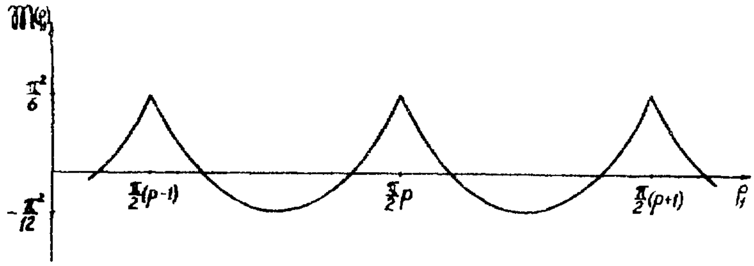

Рис.4. График функции $\mathcal{M}(\rho_f)$ (см. формулы (21) и (23)).

$$\Delta \rho = -\frac{(\ell + \frac{1}{2})^2}{2\rho} \tag{3}$$

(см.Приложение).

По оси ординат расстояние между кривыми равно $\frac{\pi}{2}$ - это интервал между соседними оболочками в ρ - шкале[1]. Представим себе, что ферми-граница

$$\rho = \rho_f \tag{4}$$

продвигается, скажем, вверх. После исчерпания уровней последней реджевской траектории в точке касания (см.рис.3) плотность состояний $\frac{d\tilde{N}}{d\rho}$ ($\tilde{N}$ - число одноквазичастичных состояний, расположенных ниже границы ρ) упадет скачком. В более формальном духе это естественно интерпретировать как наличие у функции $\tilde{N}(\rho)$ осциллирующей компоненты $\tilde{N}_1(\rho)$ (см.также [II]), период которой определяется расстоянием между траекториями на рис.3. Тогда осциллирующая составляющая E_1 полной энергии $E = E_o + E_1$ ядра (E_o - плавно зависящая от ρ_f часть энергии) равна

$$E_1(\rho_f) = -\varepsilon \tilde{N}_1(\rho_f), \tag{5}$$

где коэффициент пропорциональности - ε есть первая вариационная производная от энергии по функции распределения [I3, I4] или, другими словами, энергия одной квазичастицы вблизи границы Ферми.

Фактически найти осциллирующую составляющую $\tilde{N}_1(\rho_f)$ можно с помощью строгого вычисления числа заполненных фермионами одноквазичастичных состояний по формуле Пуассона [I5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \frac{1}{2}\varphi(0) + \int_0^{\infty} \varphi(n)\,dn + \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{i2\pi\nu n} + e^{-i2\pi\nu n})\,\varphi(n)\,dn. \tag{6}$$

Основной вклад в последний осциллирующий член вносят ближайшие к границе ферми-распределения квазичастицы (это соответствует рассмотренному выше наглядному истолкованию рис.3). Действительно, стоящий под знаком суммы по ν осциллирующий интеграл был бы крайне мал при достаточно плавной функции $\varphi(n)$. Однако при вычислении термодинамических функций ферми-систем $\varphi(n)$ содержит в качестве множителя статистическое распределение квазичастиц, резко меняющееся в окрестности ферми-границы. Примером подобного осциллирующего поведения характеристик "обычных" ферми-систем может служить эффект де-Гааза-ван-Альфена в металлах [I6, I7] . Для конечных размеров ядра, по-видимому, невозможно каноническое преобразование к таким квазичастицам, в отношении которых осуществлялся бы случай (4) идеально резкого, "ступенчатого" ферми-распределения. Это обстоятельство в ядерной физике часто называют "остаточным" взаимодействием между нуклонами. Вызываемое им "размытие" ферми-границы будет, вообще говоря, подавлять осцилляции. Однако далеко не любого типа размытие ферми-границы способно хотя бы качест-

---

[1] В связи с рис.3 любопытно отметить простое подтверждаемое экспериментом следствие: каждая ядерная оболочка содержит либо одно s - , либо одно p - состояние, а по энергии соответствующие одночастичные уровни расположены близко к концу заполнения этой оболочки. Пространственно неоднородная структура атома является в этом смысле более сложной, и для нее нет подобной теоремы; см., например, [I2] .

венно соответствовать характеру экспериментальных данных. Например, температурного типа статистическое распределение

$$w_T = \frac{1}{e^{\frac{\rho-\rho_f}{\tau}} + 1} \tag{7}$$

приводит к аналитическому выражению для $\tilde{N}_1(\rho_f)$, и, следовательно, магических каспов нет в этом случае [2].

Какие величины или функции характеризуют остаточное взаимодействие? Можно, конечно, представить себе ситуацию, когда остаточное взаимодействие между квазичастицами задано в форме соответствующего гамильтониана: один такой модельный пример будет рассчитан в разделе 3. Существенно, однако, не упускать из вида следующее обстоятельство: хотя из-за взаимодействия энергия отдельной квазичастицы перестает, строго говоря, быть точно определенной величиной, это не повлияет на применимость формулы (5) в представляющем интерес приближении. Действительно, пусть область размытия ферми-распределения, обусловленного остаточным взаимодействием, имеет ширину $\delta\varepsilon$ – это естественно истолковать как возникновение у квазичастицы неопределенности энергии того же порядка величины. С другой стороны, в ρ – шкале (см.рис.3, а также следующий раздел) характерное для осцилляций $\delta\rho$ оказывается порядка единицы. Поэтому в существенной для осцилляций области $\delta\varepsilon \sim \frac{d\varepsilon}{d\rho}\delta\rho \sim \frac{\varepsilon}{\rho_f}$. Принимая во внимание (2), имеем

$$\delta\varepsilon \ll \varepsilon, \tag{8}$$

то есть первый множитель в правой части (5) остается с достаточной степенью точности определенным. Другими словами, вызываемое остаточным взаимодействием перераспределение квазичастиц по состояниям должно в принципе определяться из условия минимума энергии ядра как целого. Однако после этого осцилляции можно вычислять уже без учета дополнительной энергии взаимодействия между квазичастицами. Эту любопытную черту теории иллюстрирует и рассмотренный в разделе 3 конкретный пример.

"Динамическая", так сказать, трактовка – имеется в виду явное задание гамильтониана взаимодействия между квазичастицами – страдает существенной неоднозначностью. Поскольку приводящего к абсолютно резкой ферми-границе (4) канонического преобразования все равно не существует, у нас, по-видимому, нет достаточно разумного критерия для однозначного выбора преобразования к новому, квазичастичному гамильтониану. В соответствии с (8) более адекватной характеристикой остаточного взаимодействия представляется прямое задание функции распределения квазичастиц по состояниям. Рассматривая эту функцию $w(\rho,\ell)$ в известном смысле слова как понятие первичное, можно, по-видимому, рассчитывать на успешное использование ее простых однопараметрических аппроксимаций. При этом неплохо улавливается и такая характерная черта явления, как стремительное уменьшение остаточного взаимодействия с ростом размеров ядра. К относящимся сюда вопросам мы вернемся в заключительных разделах, а в следующем разделе рассмотрим теорию без остаточного взаимодействия, то есть с резкой ферми-границей (4).

---

[2] Последнее утверждение можно рассматривать и как следствие теоремы более общего характера. Нетрудно убедиться, что любые непрерывные распределения квазичастиц по состояниям, которые не зависят от ℓ, особенностей типа каспа не дают. Установлению зависимости ширины зоны размытия ферми-распределения от квантового числа ℓ, которая совместима с экспериментально наблюдаемой картиной магических каспов, посвящены разделы 3 и 4.

2. ОБОЛОЧЕЧНАЯ СТРУКТУРА СФЕРИЧЕСКОГО ЯДРА ПРИ ОТСУТСТВИИ ОСТАТОЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Асимптотическое разложение функции $N=N(\rho_f)$ при больших ρ_f (см.(I) и (2)) должно быть оборвано на конечном числе членов:

$$N(\rho_f) = \frac{2\cdot 2}{9\pi}\rho_f^3 - s\rho_f^2 + q\rho_f . \tag{9}$$

Действительно, пятый член разложения $\sim\rho_f^{-1}$ давал бы физически бессмысленные дробные добавки к числу частиц. При последовательно макроскопической трактовке требуется, по-видимому, отбрасывать и четвертый член как описывающий "эффект одиночной частицы" (см.введение). Все такие немакроскопические члены типа $\rho_f^0\sim 1$ мы в дальнейшем будем всюду опускать. Корректность третьего члена выражения (9) также могла бы показаться сомнительной, поскольку $2\ell+1\sim\rho_f$ частиц заполняли бы один-единственный уровень в сферически симметричном поле (см. во введении обсуждение традиционной точки зрения на маги). Однако неизбежные нулевые колебания деформации α имеют масштаб $\Delta\alpha\sim\rho_f^{-2}$ и таков же порядок относительной величины сдвига энергии квазичастицы (этот эффект хорошо известен благодаря Рейнвотеру [I8]). В итоге вырождение по энергии снимается в достаточной степени, тогда как, с другой стороны, столь малые деформации еще не нарушают сохранения интеграла движения ℓ (см. [I9]). Таким образом, подразумеваемое в (9) "высреднение" функции $N(\rho_f)$ в реальной ситуации осуществляется автоматически. Коэффициент при первом члене правой части (9) отвечает (с учетом дополнительного спинового удвоения) объемному вкладу в число ячеек фазового пространства, то есть равен соответствующему выражению для идеального ферми-газа[3]. Поверхностный член $-s\rho_f^2$ и "член кривизны" $q\rho_f$ учитывают структуру переходного слоя на поверхности ядра, спин-орбитальную связь внутри него и т.п. Численные значения коэффициентов s и q должны определяться из опыта (см.раздел 5).

Вычисление осциллирующей составляющей $\tilde{N}_1(\rho_f)$ числа одноквазичастичных уровней мы сначала проведем в несколько "наивной" манере, обратившись к модели [I9] газа, помещенного в яму с постоянным потенциалом внутри нее (последнее обстоятельство физически соответствует однородности пространственного распределения материи во внутренней области ядра). Для вычисления $\tilde{N}(\rho_f)$ следует просуммировать по ℓ и n величину[4]

$$\varphi(\ell,n) = 2\,(2\ell+1)\,w_f(\ell,n). \tag{I0}$$

Через посредство собственных значений $\rho=\rho_{\ell n}$ распределение Ферми

$$w_f(\ell,n) = \begin{cases} \text{I} & \text{при } \rho_{\ell n}<\rho_f, \\ 0 & \text{при } \rho_{\ell n}>\rho_f \end{cases} \tag{II}$$

---

3) Только в этом объемном приближении $\tilde{N}(\rho_f)$ может быть отождествленно с числом N истинных частиц. Подобное приближение оказывается слишком грубым для целей ядерной физики.

4) Ввиду макроскопического характера изучаемого эффекта наличие спина у нуклона учитывается простым удвоением. Заметим, что на данном этапе вычислений нумерацию главного квантового числа n естественнее начинать не с единицы, а с нуля. $1s$ -состоянию, например, приписывается $n = 0$. Это обеспечит возможность формально равноправного, симметричного применения соотношения (6) к суммированию по обоим квантовым числам (см.ниже,формулу (I4)).

зависит от тех же квантовых чисел. Для определения собственных значений служит правило квантования Бора-Зоммерфельда [I2]

$$\int_a^R k_\ell(r)\,dr = \pi(n+\gamma), \tag{I2}$$

где внутренняя точка поворота $r = a$ обусловлена центробежным барьером, а $\gamma < 1$ определяет дополнительную фазу, зависящую от характера граничных условий. Вычислять заново интеграл (I2) нет необходимости, ибо в данном случае хорошо известны как сами волновые функции (сферические функции Бесселя), так и их квазиклассическая асимптотика. Придерживаясь близких к принятым в [I9] обозначений, имеем

$$\rho(\sin\beta - \beta\cos\beta) = \pi\left(n+\tfrac{3}{4}\right),$$
$$\beta = \arccos\frac{\ell+\frac{1}{2}}{\rho}, \qquad dn\,d\ell = \frac{\rho\,d\rho}{\pi}\sin^2\beta\,d\beta. \tag{I3}$$

Двукратное суммирование функции (I0) по формуле (6) дает

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\varphi(\ell,n) = \frac{1}{4}\varphi(0,0) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\iint_0^{\infty}\left(e^{i2\pi\nu n} + e^{-i2\pi\nu n}\right)\varphi(\ell,n)\,d\ell\,dn +$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\iint_0^{\infty}\left(e^{i2\pi\lambda\ell} + e^{-i2\pi\lambda\ell}\right)\varphi(\ell,n)\,d\ell\,dn +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}\varphi(0,n)\,dn + \sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(e^{i2\pi\nu n} + e^{-i2\pi\nu n}\right)\varphi(0,n)\,dn\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}\varphi(\ell,0)\,d\ell + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(e^{i2\pi\lambda\ell} + e^{-i2\pi\lambda\ell}\right)\varphi(\ell,0)\,d\ell\right\} + \iint_0^{\infty}\varphi(\ell,n)\,d\ell\,dn +$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\iint_0^{\infty}\left[e^{i2\pi(\lambda\ell+\nu n)} + e^{-i2\pi(\lambda\ell+\nu n)} + e^{i2\pi(\lambda\ell-\nu n)} + e^{-i2\pi(\lambda\ell-\nu n)}\right]\varphi(\ell,n)\,d\ell\,dn. \tag{I4}$$

Формула (I4) содержит интегралы двух существенно различных типов. Те из них, которые обусловлены практически всей областью $0 < \rho = kR < \rho_f$ значений волнового числа частицы, не допускают обобщения на реальную ферми-жидкость. Однако они плавно зависят от ρ_f и не представляют для нас интереса. Осциллирующие же в зависимости от ρ_f интегралы быстро сходятся при $\rho \approx \rho_f$, и обобщение их вклада на случай ферми-жидкости является очевидным. Из рассмотрения рис.3 (см. введение) видна важная роль нижнего края шкалы угловых моментов, где $\beta \approx \frac{\pi}{2}$. Поэтому удобно ввести дополнительный угол:

$$\tilde{\beta} = \frac{\pi}{2} - \beta. \tag{15}$$

Теперь легко классифицировать все члены правой части (I4) по упомянутым выше признакам. Немакроскопический характер первого из них очевиден; после интегрирования легко убедиться, что и второй член макроскопического вклада не дает. В результате интегрирования по тем же формулам (I3), (I5) и последующего суммирования по λ находим, что третий член равен $-\frac{\rho_f}{6\pi}$. Он плавно зависит от граничного импульса. То же самое можно сказать о двух парах последующих членов, заключенных в соответствующие фигурные скобки.

Осцилляции описываются двойной суммой по λ и ν (последний член формулы (I4)). Интеграл под знаком суммы, вообще говоря, имеет ту же структуру, что и во втором члене правой части (I4), то есть не макроскопичен. Однако при определенном соотношении между λ и ν на нижнем краю оси моментов (то есть при $\tilde{\beta} = 0$; см.также рис.3) возникает седловая точка, и она дает макроскопический вклад.

Принимая во внимание (I3) и (I5), разложение показателя экспоненты в ряд по степеням $\tilde{\beta}$ выпишем до квадратичных членов включительно:

$$2\pi(\lambda l + \nu n) \cong -\pi\lambda - \frac{3}{2}\pi\nu + 2\nu\rho + \pi(2\lambda - \nu)\rho\tilde{\beta} + \nu\rho\tilde{\beta}^2. \tag{16}$$

Исчезновение линейного члена (условие существования седла при $\tilde{\beta} = 0$) требует, чтобы

$$\nu = 2\lambda. \tag{17}$$

Тогда, используя (I0), (II), (I3) и (I5), получаем

$$\iint\limits_0^\infty e^{i2\pi(\lambda l + \nu n)} \varphi(l,n)\, dl\, dn \cong \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\rho_f} d\rho \cdot \rho^2 e^{i4\lambda\rho} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i2\lambda\rho_f\tilde{\beta}^2}\tilde{\beta}\, d\tilde{\beta} \cong \frac{\rho_f}{4\pi}\,\frac{e^{i4\lambda\rho_f}}{\lambda^2}. \tag{18}$$

Добавление комплексно-сопряженного выражения и суммирование по единственному оставшемуся свободным индексу приводит к

$$\tilde{N}_1 = \frac{\rho_f}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 4\nu\rho_f}{\nu^2}. \tag{19}$$

Для перехода к осциллирующей части энергии ядра E_1 используем формулу (5):

$$E_1 = -\varepsilon\frac{\rho_f}{2\pi}\mathfrak{M}(\rho_f). \tag{20}$$

Таким образом, при абсолютно резкой, "ступенчатой" ферми-границе для квазичастиц (это соответствует отсутствию остаточного взаимодействия между ними; см.введение) оболочечные эффекты описываются некоторой универсальной периодической функцией

$$\mathfrak{M}(\rho_f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 4\nu\rho_f}{\nu^2}, \tag{21}$$

график которой представлен на рис.4. Ее производная испытывает скачок при значениях аргумента

$$k_f R = \frac{\pi}{2} p, \qquad p = 2,3,4,5\ldots, \tag{22}$$

которые соответствуют магическим каспам. Поскольку $1S$ – состоянию (в качестве примера можно привести дважды магическое ядро ${}_2He_2^4$) соответствует $\rho_f = \pi$, область возможных значений целочисленного номера мага p начинается с двух [5)].

Легко убедиться, что правая часть формулы (21) представляет собой ряд Фурье для элементарной функции, которую мы выпишем явно в виде, справедливом для двух примыкающих к магическому ядру p периодов:

$$\mathfrak{M}(\rho_f) = \frac{\pi^2}{6} - 2\pi\left|\rho_f - \frac{\pi}{2}p\right| + 4\left(\rho_f - \frac{\pi}{2}p\right)^2, \tag{23}$$
$$\frac{\pi}{2}(p-1) < \rho_f < \frac{\pi}{2}(p+1).$$

Знак модуля отражает неаналитичность функции в магическом каспе. Применяя здесь индексы $+$ и $-$ для различения значений разрывной функции справа и слева от него соответственно, имеем

$$\left(\frac{d\mathfrak{M}}{d\rho_f}\right)_{\pm} = \mp 2\pi. \tag{24}$$

Теперь, обращаясь к (20), получаем выражение для скачка производной от осциллирующей части энергии ядра

$$\Delta\left(\frac{dE_1}{d\rho_f}\right) = \rho_f(\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-) = 2\rho_f\bar{\mathcal{E}}. \tag{25}$$

Чтобы перейти от граничного импульса к истинному числу частиц (1), нужно умножить обе части на $\frac{d\rho_f}{dN}$. Одновременно учтем, что плавная составляющая E_0 не имеет особенности в каспе, так что формула (25) фактически дает скачок производной от всей энергии E :

---

5) Подразумеваемое в (22) определение эффективного радиуса R ядра апеллирует исключительно к его внутренней структуре. Поскольку мы сводим задачу к модели с непроницаемой стенкой [19] , ее следует представлять себе проведенной там, где обращается в нуль экстраполированная из внутренней области волновая функция соответствующей квазичастицы. Другими словами, этой эффективной границей ядра всегда можно распорядиться так, чтобы для играющих основную роль квазичастиц дополнительная фаза из правила Бора–Зоммерфельда (12) приняла в соответствии с (13) значение $\gamma = 3/4$ (см.также Приложение). В тесной связи с этим обстоятельством формулы, выражающие оболочечные осцилляции через ρ_f, универсальны; они не зависят от спин-орбитального взаимодействия или от структуры поверхностного слоя, где оно имеет место. После перехода к N -шкале такая универсальность утратится (см.также формулу (9) и пояснения к ней).

$$\Delta\left(\frac{dE}{dN}\right) = \bar{\varepsilon}\,\frac{d\rho_t^2}{dN}. \tag{26}$$

Это соотношение можно также рассматривать и как формулу для скачка энергии связи нуклона $\varepsilon = -\frac{dE}{dN}$

$$\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}\,\frac{d\rho_t^2}{dN} \tag{27}$$

в окрестности магического ядра. Тогда, очевидно, следует подразумевать $\Delta\varepsilon = \Delta\left(\frac{dE}{dN}\right) = \varepsilon_- - \varepsilon_+$.

3. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ОСТАТОЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

При выборе модельного гамильтониана желательно учесть тот опытный факт, что спин четно-четного ядра в основном состоянии равен нулю, а у нечетных ядер он, в рамках представлений оболочечной модели, всегда имеет одночастичное значение (см.,например, [12]). Поэтому напрашивается выражение

$$H_{int}^{j} = -G_j \sum_{m,m'>0} a_{m'}^{+} a_{-m'}^{+} a_{-m} a_m \tag{28}$$

для взаимодействия между квазичастицами, относящимися к одному и тому же j -уровню. Здесь a_m^+ и a_m – операторы рождения и уничтожения квазичастицы с z – проекцией момента, равной m. Гамильтониан (28) диагонализируется точно (см., например, [20]); собственные значения даются известной формулой Рака и Моттельсона

$$E_{int}^{j} = -G_j b_j (\Omega_j - b_j + 1), \tag{29}$$

где $2\Omega = 2j+1$ – полное число вакансий; b_j – число пар взаимодействующих квазичастиц с $j_z = \pm m$ на j -уровне. Для ядра как целого дело сводится к минимизации суммы

$$E = \sum_j \left[2\varepsilon_j b_j - G_j b_j (\Omega_j - b_j + 1)\right] \tag{30}$$

по j -уровням (ε_j -исходное значение энергии квазичастицы) при равной нулю вариации величины

$$\tilde{N} = \sum_j 2 b_j . \tag{31}$$

Это дополнительное условие легко учесть методом неопределенных множителей Лагранжа. Принимая во внимание также принцип Паули (то есть условие $0 \leqslant b_j \leqslant \Omega_j$) , находим

$$w_j = \frac{b_j}{\Omega_j} = \begin{cases} 1 & \varepsilon_j - \varepsilon_f < -\frac{G_j}{2}(\Omega_j - 1), \\ \dfrac{G_j(\Omega_j+1) - 2(\varepsilon_j - \varepsilon_f)}{2G_j\Omega_j} & \text{при} \quad -\frac{G_j}{2}(\Omega_j-1) < \varepsilon_j - \varepsilon_f < \frac{G_j}{2}(\Omega_j+1), \\ 0 & \varepsilon_j - \varepsilon_f > \frac{G_j}{2}(\Omega_j+1), \end{cases} \tag{32}$$

где ε_f - химический потенциал. Приведем также значение энергии взаимодействия (29), отвечающее равновесному распределению:

$$E^j_{int} = \begin{cases} -G_j\Omega_j & \varepsilon_j - \varepsilon_f < -\frac{G_j}{2}(\Omega_j - 1), \\ -\dfrac{G_j^2(\Omega_j+1)^2 - 4(\varepsilon_j - \varepsilon_f)^2}{4G_j} & \text{при} \quad -\frac{G_j}{2}(\Omega_j-1) < \varepsilon_j - \varepsilon_f < \frac{G_j}{2}(\Omega_j+1), \\ 0 & \varepsilon_j - \varepsilon_f > \frac{G_j}{2}(\Omega_j+1). \end{cases} \tag{33}$$

При макроскопической трактовке, которой мы придерживаемся, $\Omega_j \pm 1$ можно заменить на $\Omega_j = j + \frac{1}{2}$; с такой же точностью можно заменить момент j квазичастицы на ее орбитальный момент ℓ и пренебречь спин-орбитальным взаимодействием. Перейдем к более удобным переменным (13), (15):

$$\Omega_j \cong \rho \sin\tilde{\beta} \cong \rho_f \tilde{\beta}, \quad \tilde{\beta} = \arcsin\frac{\tilde{\ell}}{\rho}, \quad \tilde{\ell} = \ell + \frac{1}{2},$$

$$G_j = \left.\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right|_f \cdot g_j . \tag{34}$$

Здесь учтено, что для осцилляций существенны малые $\tilde{\beta}$. В этом пределе зависимость константы связи от $\tilde{\beta}$ будем считать степенной:

$$g_j = g\,\tilde{\beta}^{\,K-1} . \tag{35}$$

В переменных ρ и $\tilde{\beta}$ распределение (32) приобретает вид

$$w(\rho,\tilde\beta)=\begin{cases}1 & \rho-\rho_f<-\frac{g}{2}\rho_f\tilde\beta^{K},\\ \frac{1}{2}-\frac{\rho-\rho_f}{g\rho_f\tilde\beta^{K}} \quad \text{при} & -\frac{g}{2}\rho_f\tilde\beta^{K}<\rho-\rho_f<\frac{g}{2}\rho_f\tilde\beta^{K},\\ 0 & \rho-\rho_f>\frac{g}{2}\rho_f\tilde\beta^{K}\end{cases} \tag{36}$$

(см.рис.5). Результаты предшествующего раздела позволяют заключить, что

$$\tilde N_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\tilde N^{\nu}+\tilde N^{\nu *}\right),$$

$$\tilde N^{\nu}=\iint_0^{\infty} e^{i\nu 2\pi(2n+\ell)}\cdot 2(2\ell+1)\,w(\ell,n)\,d\ell\,dn\cong \qquad \xi=\rho-\rho_f$$

$$\cong\frac{4}{\pi}\rho_f^2 e^{i\nu 4\rho_f}\int_0^{\infty} d\tilde\beta\cdot\tilde\beta\, e^{i\nu 2\rho_f\tilde\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty} w(\rho,\tilde\beta)\,e^{i\nu 4\xi}d\xi, \tag{37}$$

в общем случае. После простого интегрирования по ξ получаем

$$\tilde N^{\nu}=-\frac{\rho_f e^{i\nu 4\rho_f}}{4\pi g\nu^2}\int_0^{\infty} e^{i\nu 2\rho_f\tilde\beta^2}\left(e^{i\nu 2g\rho_f\tilde\beta^{K}}-e^{-i\nu 2g\rho_f\tilde\beta^{K}}\right)\frac{d\tilde\beta}{\tilde\beta^{K-1}}. \tag{38}$$

Чтобы определить, какие значения показателя степени K совместимы с характером экспериментальных данных, проще всего обратиться к тому предельному случаю, когда сходимость интеграла (38) обусловлена главным образом пропорциональным g членом в показателе экспоненты. Разлагая другую экспоненту $e^{i\nu 2\rho_f\tilde\beta^2}$ в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами, подставляем их в (37);это дает с учетом форулы (5) выражение для осциллирующей части энергии (энергия каждой квазичастицы предполагается равной $-\mathcal{E}$; см.ниже, в конце раздела):

$$E_1\cong-\frac{\varepsilon\rho_f}{\pi K g}\left\{\frac{(2g\rho_f)^{2-\frac{4}{K}}}{g}\int_0^{\infty}\frac{\sin y\,dy}{y^{2-\frac{4}{K}}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 4\nu\rho_f}{\nu^{\frac{4}{K}}}+\right.$$

$$\left.+(2g\rho_f)^{1-\frac{2}{K}}\int_0^{\infty}\frac{\sin y\,dy}{y^{2-\frac{2}{K}}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 4\nu\rho_f}{\nu^{1+\frac{2}{K}}}\right\}, \qquad g\gg\rho_f^{\frac{K}{2}-1}. \tag{39}$$

Особенности выражения (39) обусловлены тригонометрическими рядами, которые легко исследуются. Сингулярность типа каспа (то есть конечного скачка производной $dE/d\rho_f$; см.рис.I) способен дать только четный по $t=4\rho_f-2\pi p$ ряд с косинусами. При $K<2$ имеем $\frac{4}{K}>2$, и ряд из производных сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Итак, при $K<2$ каспов нет [6]. Напротив, в случае $K>2$ сумма ряда обнаруживает более сильные особенности. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим производную интересующего

[6] В особом случае $K=0$ отсутствие каспов доказывается без труда.

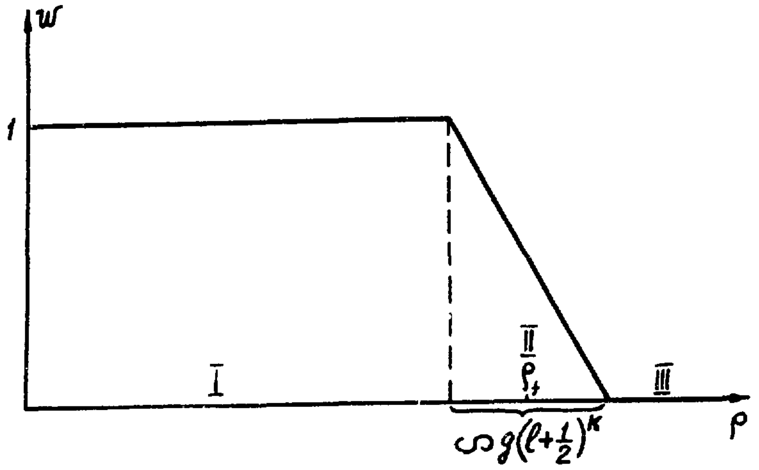

Рис.5. Модель Рака-Моттельсона (гамильтониан (28)) для ядра как целого. Здесь изображено распределение квазичастиц по состояниям при фиксированном значении $\tilde{\ell}$ (или $\tilde{\beta}$). Функция распределения $W(\rho,\tilde{\beta})$ имеет особенность при $\rho=\rho_t$, $\tilde{\beta}=0$ (см. формулы (36) и (4I)), которую трудно было бы изобразить на плоском графике.

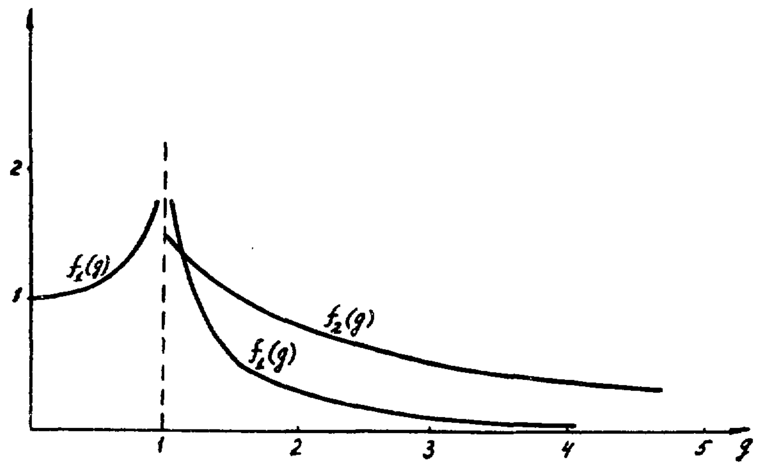

Рис.6. Графики функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ (см. формулу (43)).

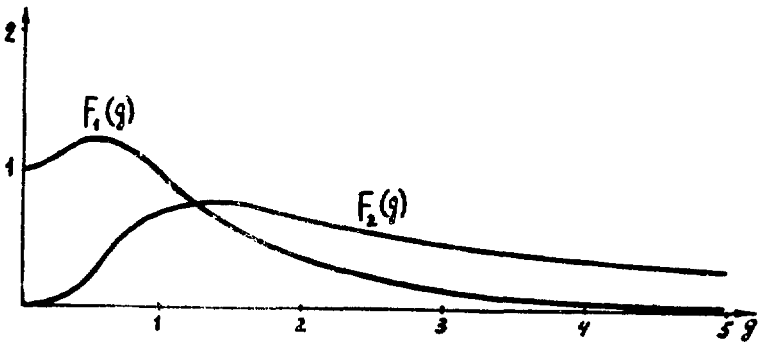

Рис.7. Графики функций $F_1(g)$ и $F_2(g)$ (см. формулу (49)).

нас ряда, которая имеет вид $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu t}{\nu^{\alpha}}$; $\alpha<1$. Вблизи особой точки имеем $\sin\nu t\sim\nu t$ вплоть до некоторого предельного $\nu=\tilde{\nu}\sim\frac{1}{|t|}$.

Заменяя суммирование на интегрирование, производим оценку:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\nu t}{\nu^{\alpha}}\sim t\int\limits_{0}^{\tilde{\nu}}\nu^{1-\alpha}d\nu\sim t\,\tilde{\nu}^{2-\alpha}\sim\frac{t}{|t|^{2-\alpha}}. \tag{40}$$

Следовательно, при $K>2$, $\alpha=\frac{4}{K}-1<1$ производная от первого члена выражения (39) испытывает бесконечный скачок в точке t = 0 (результат (40) согласуется со строгими математическими теоремами; см.,например, [2I]). Итак, только

$$K=2 \tag{4I}$$

совместимо с экспериментально наблюдаемыми магическими каспами. Чтобы освободиться от ограничения $g\gg$ I на константу связи снизу, подставляем (4I) в (38) и интегрируем; в результате получаем окончательно

$$E_1=-\frac{\varepsilon\rho_f}{2\pi}\left\{f_1(g)\mathcal{M}(\rho_f)+f_2(g)\mathcal{N}(\rho_f)\right\}, \tag{42}$$

где

$$f_1(g)=\frac{1}{2g}\ln\left|\frac{1+g}{1-g}\right|,\qquad \theta(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad x>0,\\ 0 & \text{при}\quad x<0,\end{cases}$$

$$f_2(g)=\frac{\pi}{2g}\theta(g-1), \tag{43}$$

– функции, графики которых представлены на рис.6. Здесь появилась также функция

$$\mathcal{N}(\rho_f)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin 4\nu\rho_f}{\nu^2}, \tag{44}$$

характерная для осцилляций в присутствии остаточного взаимодействия. Она стремится к нулю в каспе. Дифференцируя (42), находим скачок

$$\Delta\mathcal{E}=\bar{\mathcal{E}}\,\frac{d\rho_f^2}{dN}f_1(g) \tag{45}$$

энергии связи нуклона в ядре. Согласно (43), он неограниченно растет при $g\to$ I. Физическая, качественная причина этого состоит в том, что при g = I одна из границ зоны взаимодействия II (см.(36) и рис.5)накладывается на реджевские траектории (см.(3) и рис.3). Реальность существования столь четко очерченной границы области промежуточных значений чисел заполнения представляется весьма сомнительной, и в действительности коэффициент при функции $\mathcal{M}(\rho_f)$, по-видимому, нигде не должен обращаться в бесконечность. В этой связи хочется отметить любопытную возможность построить для функции $f_1(g)$ простую интерполяционную формулу. Поскольку переход $g \to 0$ к случаю (27) отсутствия остаточного взаимодействия дает $f_1 \to 1$, а в асимптотической области $g \gg 1$ согласно (43) $f_1 \cong \frac{1}{g^2}$, напрашивается интерполяция

$$f_1(g) \approx \frac{1}{1+g^2}. \tag{46}$$

Отклонение скачка $(\Delta \mathcal{E})_0$ в теории без остаточного взаимодействия (см.формулу (27)) от результата (45) можно охарактеризовать величиной (см.также [II])

$$\omega \equiv \frac{(\Delta \mathcal{E})_0}{\Delta \mathcal{E}} - 1 = \frac{1}{f_1(g)} - 1 \approx g^2. \tag{47}$$

Как видим, при грубой интерполяции (46) она непосредственно выражается через константу остаточного взаимодействия. Все же более естественным, пожалуй, кажется исходить с самого начала из аналитических или близких к ним выражений для функции $w(\rho, \tilde{\beta})$ распределения. Один такой привлекательно выглядящий пример будет рассмотрен в следующем разделе.

Вернемся, наконец, к сделанному выше предположению о том, что каждая квазичастица имеет определенную энергию - $\mathcal{E}$. Существует еще и энергия (33) взаимодействия между квазичастицами. Несложное вычисление ее осциллирующей части приводит к $E_1^{int} \sim \mathcal{E}\rho_f^0 \sim \mathcal{E}$. Таким образом, вклад энергии взаимодействия в осцилляции не макроскопичен, и учитывать его не следует. Это обстоятельство, видимо, не случайно, и сколько-нибудь специфической особенностью данной модели оно не является. С более общей и физически наглядной точки зрения этот вопрос уже анализировался во введении.

4. СЛУЧАЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Несущественный характер вклада энергии взаимодействия в осцилляции (при заданной функции распределения квазичастиц) позволяет переформулировать проблему так, как было обрисовано во введении: осциллирующая часть энергии основного состояния сферического ядра определяется функцией $w(\rho, \tilde{\beta})$ (по отношению к базису рассматриваемых квазичастиц она представляет собой диагональную часть матрицы плотности). Строго говоря, ее вид нам не известен; он, однако, подчинен физически очевидным ограничениям весьма общего характера. В асимптотических областях она должна быстро стремиться к нулю и единице; немонотонность этой функции представляется мало правдоподобной. Далее, приведенный в предыдущем разделе анализ (см.в особенности соотношения (4I) и (42)) наталкивает на мысль, что только квадратичная зависимость ширины зоны размытия ферми-распределения от орбитального момента может быть согласована с наблюдаемым на опыте характером магических явлений при более или менее произвольных интенсивностях остаточного взаимодействия. И действительно, легко показать, что для любых распределений вида $w\left(\frac{\rho - \rho_f}{\beta^2}\right)$ осциллирующая часть энергии E_1 всегда сводится к линейной комбинации выражений $\mathcal{M}(\rho_f)$ и $\mathcal{N}(\rho_f)$. Поэтому естественно попытаться использовать функцию типа обычного ферми-распределения (7), но с зависящим квадратично от угла $\tilde{\beta}$ модулем:

$$w(\rho,\tilde{\beta}) = \frac{1}{e^{\frac{\rho-\rho_f}{\tau\tilde{\beta}^2}} + 1}. \tag{48}$$

Вычисление осциллирующей части энергии E_1 по формулам (5), (37) дает

$$E_1 = -\frac{\varepsilon\rho_f}{2\pi}\left\{F_1(g)\mathcal{M}(\rho_f) + F_2(g)\mathcal{N}(\rho_f)\right\},$$

$$F_1(g) = \frac{1}{2\pi g}\int_0^\infty \frac{\sin\frac{u}{\pi g}}{sh\frac{u}{2}}\, u\, du, \tag{49}$$

$$F_2(g) = \frac{1}{2\pi g}\int_0^\infty \frac{\cos\frac{u}{\pi g}}{sh\frac{u}{2}}\, u\, du = \frac{\frac{\pi}{2g}}{ch^2\frac{1}{g}}$$

(здесь положено $\tau = \frac{1}{4}g\rho_f$; удобство такого переобозначения станет ясным из дальнейшего). Графики функций $F_1(g)$ и $F_2(g)$ представлены на рис.7. Как и для модельного примера (36), (4I) предшествующего раздела, в области $g \gg 1$ сильного остаточного взаимодействия преобладает, вообще говоря, член с функцией $\mathcal{N}(\rho_f)$, причем она входит здесь с коэффициентом

$$F_2(g) \cong \frac{\pi}{2g}, \qquad g \gg 1. \tag{50}$$

При нашем выборе нормировки константы связи g (см.выше) (50) совпадает со второй из формул (43). Продолжая эту аналогию, заметим, что в неаналитической модели (42), (43) член с $\mathcal{N}(\rho_f)$ вообще отсутствовал при $g \ll$ I.В нашем же случае этому соответствует его экспоненциальная малость при слабой связи между квазичастицами:

$$F_2(g) \cong \frac{2\pi}{g}e^{-\frac{2}{g}}, \qquad g \ll 1. \tag{5I}$$

С более формальной точки зрения любопытно отметить, что предельное поведение (5I) свидетельствует о наличии существенно особой точки при $g = 0$. Не исключено, что это математическое свойство предельного случая $g \to 0$ абсолютно резкой ферми-границы имеет весьма общий характер.

За магические особенности (каспы) ответственна только функция $\mathcal{M}(\rho_f)$. Приведем характеризующие их формулы:

$$\Delta\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}\,\frac{d\rho_f^2}{dN}F_1(g),$$

$$\omega \equiv \frac{(\Delta\mathcal{E})_0}{\Delta\mathcal{E}} - 1 = \frac{1}{F_1(g)} - 1. \tag{52}$$

Как видно из рис.7, функция $F_1(g)$ имеет максимум в области промежуточных значений константы связи. Таким образом, интересующий нас эффект зависит от интенсивности остаточного взаимодействия немонотонно.

5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Перейдем окончательно к шкале числа частиц, определив для ядерной ферми-жидкости численные значения входящих в (9) коэффициентов S и q из экспериментальных данных. Для этого проведем кривую (9)

I) через магические числа 50 (ρ =5) и 82 (ρ = 6),

2) через магические числа 82 (ρ =6) и 126 (ρ = 7),

3) методом наименьших квадратов через магические числа 28, 50, 82, 126. Получаем три соответствующих набора параметров S и q :

$$
\begin{aligned}
&1) \quad S = 1{,}0, \quad q = 5{,}2,\\
&2) \quad S = 1{,}1, \quad q = 6{,}8,\\
&3) \quad S = 1{,}0, \quad q = 5{,}6.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

Результаты расчета по формуле (9) с этими значениями S и q сопоставлены с известными магическими числами в табл.I. Начиная с N = 28 наблюдается согласие, которое, по-видимому, следует считать хорошим. Для легчайших же магических ядер нет даже качественного согласия. Однако рассмотрение магических явлений как макроскопических все равно утрачивает применимость при переходе к легчайшим ядрам. При $N, Z <$ 28 наблюдаемая оболочечная поправка E_1 описывается отдельными точками, через которые трудно провести сплошную кривую (см., например, [6]). Надо полагать, это трудность до некоторой степени принципиальная, а не только практическая. Нарушение условия (2) приводит, по-видимому, к исчезновению достаточно четких критериев для отыскания магических каспов. С этой точки зрения магические числа 2 и 8 следует скорее рассматривать как экстраполяцию указанного в подстрочном примечании[I)] правила на область легчайших ядер (см.также (22) и рис.3). Заметим, что наблюдавшееся до сих пор совпадение протонных и нейтронных магических чисел свидетельствует о практически одинаковых значениях параметров S и q для обеих компонент ядерной материи. Можно думать, что это обусловлено относительной малостью таких эффектов, различающих протоны и нейтроны в ядре, как, например, "кривой кулон" (радиальная зависимость электростатического потенциала во внутренней области ядра).

С учетом двухкомпонентности ядерной материи осциллирующий член дается суммой выражений типа (49) для нейтронных и протонных квазичастиц[7)]

$$
E_1(N,Z) = -\varepsilon_N \frac{\rho_f^N}{2\pi}\left\{F_1(g_N)\mathcal{M}(\rho_f^N) + F_2(g_N)\mathcal{N}(\rho_f^N)\right\} - \varepsilon_Z \frac{\rho_f^Z}{2\pi}\left\{F_1(g_Z)\mathcal{M}(\rho_f^Z) + F_2(g_Z)\mathcal{N}(\rho_f^Z)\right\}. \tag{54}
$$

Выяснение характера особенности энергии $E(N,Z)$ в точке нахождения дважды магического ядра представляет существенный теоретический интерес. Пропорциональные $\mathcal{M}$ члены в (54

[7)] Согласно формуле (44), в каспе функция $\mathcal{N}(t)$ стремится к нулю по закону $t \ln|t|$ $(t = 4\rho_f - 2\pi\rho)$. В настоящее время еще не вполне ясно, не является ли здесь учет пропорционального $\mathcal{N}$ малого члена превышением той макроскопической точности, которой мы придерживаемся. На результатах, относящихся к магическим скачкам энергии связи нуклона, это не отражается.

Таблица I

Теоретические и экспериментальные значения магических чисел нуклонов

p	N	$N_{теор}$ 1)	2)	3)
2	2	II	I5	I2
3	8	I8	22	I9
4	28	30	33	30
5	50	50	52	50
6	82	82	82	8I
7	I26	I29	I26	I27
8	I84(?)	I95	I87	I9I
9		28I	270	276
I0		392	376	386

Таблица 2

Характеристики остаточного взаимодействия между нуклонами (квазичастицами), определенные по магическим каспам ($\overline{\delta\varepsilon}$ выражено в MeV)

p	N,Z	Нейтронные маги				Протонные маги			
		$\sqrt{\omega}$	g'	g	$\overline{\delta\varepsilon}$	$\sqrt{\omega}$	g'	g	$\overline{\delta\varepsilon}$
4	28	2,4	2,7	3,3	5,2	I,8	2,2	2,6	3,8
5	50	I,6	2,0	2,3	3,3	I,5	I,9	2,2	2,6
6	82	I,4	I,8	2,0	2,6	I,0	I,5	I,6	I,6
7	I26	I,I	I,6	I,7	I,9				

Таблица 3

Значения $\delta\varepsilon$ (выражено в MeV) для конкретных ℓ

ℓ \ p	4		5		6		7	
	$\delta\varepsilon_{нейтр}$	$\delta\varepsilon_{прот}$	$\delta\varepsilon_{нейтр}$	$\delta\varepsilon_{прот}$	$\delta\varepsilon_{нейтр}$	$\delta\varepsilon_{прот}$	$\delta\varepsilon_{нейтр}$	
0	0,4	0,3			0,I4	0,08		
I			I,9	I,5			0,8	
2	I0,2	7,5			3,5	2,I		
3			I0,2	8,I			4,3	

дают здесь для поверхности $E_1(N,Z)$ форму пирамиды ромбического сечения с направленной вертикально вниз осью. Учет членов, пропорциональных n, несколько усложнил бы эту предельную форму (см., впрочем, подстрочное примечание[7]).

Перейдем к количественному сравнению с наблюдаемыми скачками $\Delta\mathcal{E}$ энергии связи нуклона соответствующего сорта. По данным [22], касающимся 52 магических ядер, находились значения константы остаточного взаимодействия. Для функции $N(\rho_f)$ использовался набор 2) параметров s и q (см.(53)). В соответствии с интерполяцией (46), (47) $\sqrt{\omega}$ представляет собой наиболее грубую характеристику остаточного взаимодействия. Константа связи g' вычислялась по формулам (43) и (45), а соответствующая ей в аналитическом случае (48) величина g определялась из соотношений (49) и (52). Относящиеся к магическим числам 28, 50, 82, 126 средние результаты приведены в табл.2.

По оболочечным осцилляциям зависимость ширины зоны размытия ферми-распределения от $\tilde{\beta}$ контролируется лишь до углов

$$2\rho_f\tilde{\beta}^2 \sim 1, \tag{55}$$

после чего описывающие их интегралы (18), (37) во всяком случае быстро сходятся. Согласно (48), в ρ - шкале соответствующая характерная ширина составит

$$\overline{\delta\rho} = \tau\tilde{\beta}^2 \equiv \frac{1}{4} g\rho_f\tilde{\beta}^2 = \frac{1}{8} g. \tag{56}$$

Перейдем к энергетической шкале

$$\overline{\delta\mathcal{E}} = \left.\frac{d\mathcal{E}}{d\rho}\right|_f \cdot \overline{\delta\rho} = \frac{\hbar^2}{R^2}\frac{\rho_f}{m^*}\frac{g}{8}. \tag{57}$$

Примем теперь

$$R = 1{,}2\cdot 10^{-13}\cdot A^{1/3}\ \text{см} \tag{58}$$

и положим для оценки, что эффективная масса m^* квазичастицы равна массе свободного нуклона. Выраженные в мегавольтах значения ширины $\overline{\delta\mathcal{E}}$ представлены в заключительных столбцах табл.2.

Для конкретных значений орбитального момента ширина $\delta\mathcal{E}$ зоны размытия получается различная, поскольку она зависит от ℓ квадратично. Принимая во внимание оценку (55 ограничимся лишь не слишком большими значениями ℓ, характерными для рассматриваемы оболочек. Результаты представлены в табл.3.

Все приведенные в таблицах характеристики остаточного взаимодействия независимо от степени их совершенства и выбора шкалы согласованно указывают на быстрое убывание его интенсивности с ростом размеров ядра.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассчитанные в настоящей работе оболочечные осцилляции оказались весьма тонким инструментом для анализа распределения квазичастиц вблизи границы Ферми. В том, что касается остаточного взаимодействия, наиболее интересным результатом, на наш взгляд, явилась его зависимость от орбитального момента квазичастицы:

$$\delta\varepsilon \sim \hat{\vec{\ell}}^{\,2} \cong \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2. \tag{59}$$

С экспериментом оказалась совместимой только $\vec{\ell}^{\,2}$-ная зависимость ширины зоны размытия ферми-распределения, и это в известном смысле довольно естественно. Поскольку речь идет о скалярном эффекте, он должен был выразиться через скалярный квадрат вектора момента.

Согласно оценке (55), играющие существенную роль значения момента количества движения сравнительно невелики. С этой точки зрения (59) можно было бы рассматривать, как первый член разложения в ряд по степеням отношения ℓ/p_F. Почему же в таком случае отсутствует нулевой, не зависящий от $\vec{\ell}$ член разложения? Не означает ли это, что в конечных размерах ядра остаточное взаимодействие обусловлено дополнительными, помимо энергии, интегралами движения квазичастицы? К сожалению, в настоящее время не видно возможности дать достаточно четкий и определенный ответ на подобные вопросы. Тем не менее хотелось бы отметить те трудности, с которыми, вероятно, столкнулась бы попытка согласовать полученную картину с предположением о феномене Купера [23, 14] в ядерном веществе. Именно для такого явления характерна постоянная, одинаковая для всех расположенных вблизи ферми-границы квазичастиц ширина переходной области статистического распределения. Однако легко показать, что наличие постоянной составляющей у ширины этой зоны привело бы к отсутствию наблюдаемых на опыте магических каспов. Поэтому имеющиеся экспериментальные данные скорее располагают к более простым и естественным гипотезам о характере энергетического спектра безграничной ядерной материи. Вероятно, она представляет собой обычную, "нормальную" ферми-жидкость с абсолютно резкой ферми-границей для квазичастиц [13, 14].

У сферических же ядер конечного радиуса имеется остаточное взаимодействие типа, характеризуемого соотношением (59). Экспериментальные данные производят такое впечатление, как будто по мере удаления от мага остаточное взаимодействие рассматриваемого типа постепенно ослабевает и в конечном счете как-то перестраивается. Термодинамика перехода рассматривалась в [7]. Тот факт, что в результате обусловленного перестройкой остаточного взаимодействия фазового перехода [8] форма ядра также перестает быть сферической, едва ли следует считать удивительным. Ранее уже было показано (см. [19]), что в простейшей схеме без взаимодействия сфера абсолютно неустойчива вообще при любом числе частиц.

Выражаем благодарность В.Д.Кирилюку, В.П.Кубаровскому и В.И.Лисину за помощь при расчетах функции $F_1(q)$ на электронно-вычислительной машине. Авторы благодарны также И.И.Гуревичу, Л.П.Кудрину, Г.А.Пик-Пичаку, В.П.Смилге и К.А.Тер-Мартиросяну за обсуждение результатов работы.

---

[8] Весьма правдоподобно, что это критическое ослабление остаточного взаимодействия со структурой (59) наступает тогда, когда оказывается слишком малым число квазичастичных состояний, фактически попадающих в зону размытия ферми-распределения (например, в случае модели Рака и Моттельсона (28), (36) это будет зона взаимодействия II; см.рис.5).

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Выше при конкретных вычислениях использовалась модель с непроницаемой для квазичастиц стенкой, расположенной на расстоянии R от центра ядра (см.также работу [19]). Изображенные на рис.3 корни волнового уравнения свободного движения частицы в сферической области соответствуют такому же граничному условию. Покажем, что это не связано с какими-либо ограничениями общности результатов, относящихся к оболочечным осцилляциям энергии сферического ядра.

В служащем для определения собственных значений правиле квантования Бора-Зоммерфельда (I2) подинтегральная функция имеет вид

$$k_\ell(r) = \sqrt{k^2 - \frac{\tilde{\ell}^2}{r^2}}. \tag{П.1}$$

В силу однородности ядерной материи волновое число k постоянно во внутренней области. Дополнительная фаза γ зависит от свойств истинной структуры переходного слоя на поверхности ядра. Перейдем к безразмерной переменной $kr = \rho'$:

$$\int_{\tilde{\ell}}^{\rho} \sqrt{1 - \frac{\tilde{\ell}^2}{\rho'^2}}\, d\rho' = \pi(n + \gamma). \tag{П.2}$$

Ответственные за осцилляции редженские траектории характеризуются соотношением

$$2n + \ell = p, \qquad p = 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots, \tag{П.3}$$

между квантовыми числами (см.введение и рис.3). Поэтому

$$\frac{dn}{d\tilde{\ell}} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{d^2 n}{d\tilde{\ell}^2} = 0. \tag{П.4}$$

Продифференцируем теперь вдоль траектории все соотношение (П.2):

$$\sqrt{1 - \frac{\tilde{\ell}^2}{\rho^2}}\, \frac{d\rho}{d\tilde{\ell}} - \arccos\frac{\tilde{\ell}}{\rho} = -\frac{\pi}{2} + \pi \frac{d\gamma}{d\tilde{\ell}}. \tag{П.5}$$

Отсюда вытекает, что производная $d\rho/d\tilde{\ell}$ обращается в нуль при $\tilde{\ell} = 0$ (обусловленный дифференцированием фазовой добавки последний член в правой части не влияет на результат; см.ниже, соотношение (П.7)). При повторном дифференцировании формулы Бора-Зоммерфельда опускаем заведомо исчезающие в экстремуме члены:

$$\sqrt{1 - \frac{\tilde{\ell}^2}{\rho^2}}\, \frac{d^2\rho}{d\tilde{\ell}^2} + \frac{\frac{1}{\rho}}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{\ell}^2}{\rho^2}}} = \pi \frac{d^2\gamma}{d\tilde{\ell}^2}. \tag{П.6}$$

Учтем теперь, что фаза γ определяется фактическими деталями ядерных взаимодействий в ближайшей окрестности верхнего предела интегрирования. Здесь любые влияющие на результат характеристики могут зависеть от момента $\tilde{\ell}$ лишь в комбинации $\tilde{\ell}^2$. Поэтому

$$\frac{d\gamma}{d\tilde{\ell}} = \frac{d\gamma}{d\tilde{\ell}^2}\cdot 2\tilde{\ell}, \qquad \frac{d^2\gamma}{d\tilde{\ell}^2} = 2\frac{d\gamma}{d\tilde{\ell}^2} \sim \frac{1}{\rho^2}. \tag{П.7}$$

Следовательно, в точке $\tilde{\ell} = 0$ максимума имеем

$$\frac{d^2\rho}{d\tilde{\ell}^2} \cong -\frac{1}{\rho}, \tag{П.8}$$

пренебрегая членами $\sim \frac{1}{\rho^2}$. Таким образом, вид уравнения (3)

$$\Delta\rho \cong -\frac{\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2}{2\rho} \tag{П.9}$$

не зависит от деталей структуры поверхностного слоя ядра.

Определим, наконец, ординаты экстремумов последовательных траекторий. При $\tilde{\ell} = \ell + \frac{1}{2} = 0$, согласно (П.3), $n = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{4}$. Подставляя в (П.2), получаем

$$\rho_{max} = \pi\left(\frac{\rho}{2} + \gamma'\right), \tag{П.10}$$

где $\gamma' = \gamma + \frac{1}{4}$. Заменяя ρ_{max} на $k_f R = \rho_f$, видим, что (П.10) совпадает, по сути дела, с "правилом квантования" (22) (см. подстрочное примечание 5)) магических значений этого параметра (см. также [11]).

ЛИТЕРАТУРА

I. C.F.Weizsäcker. Zs. Phys., 96, 431 (1935).

2. Г.Бете, Р.Бечер. Физика ядра, ДНТВУ, I938.

3. Э.Ферми. Ядерная физика, ИЛ , I95I.

4. М.Г.Гепперт-Майер, И.Г.Д.Иенсен. Элементарная теория ядерных оболочек, ИЛ, 1958.

5. О.Бор, Б.Моттельсон. Структура атомного ядра, т.I, "Мир", М., I97I.

6. W.Myers, W.Swiatecki. Nucl. Phys., 81, 1 (1966); Preprint, Lawrence Radiation Laboratory, 1966.

7. В.Г.Носов. ЖЭТФ, 53, 579 (I967).

8. П.Е.Ходгсон. Оптическая модель упругого рассеяния, Атомиздат, I966.

9. A.N.James et al. Nucl. Phys., A138, 145 (1969).

IO. T.Regge. Nuovo Cimento, 8, 671 (1958); 14, 951 (1959).

II. В.Г.Носов, А.М.Камчатнов. ЖЭТФ, 6I, I303 (I97I).

I2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, Физматгиз, I963.

I3. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 30, I058 (I956).

I4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, Физматгиз, I964.

I5. Р.Курант. Д.Гильберт. Методы математической физики, т.I, Гостехиздат, М.-Л., I95I.

I6. W.J.De Haas, P.M. van Alphen. Communs. Phys. Lab. Univ. Leiden, 212a, 1930.

I7. И.М.Лифшиц, А.М.Косевич. ДАН СССР, 96, 963 (I954); ЖЭТФ, 29, 730 (I955).

I8. J.Rainwater. Phys. Rev., 79, 432 (1951).

I9. В.Г.Носов. ЖЭТФ, 57, I765 (I969).

20. Дж.Браун. Единая теория ядерных моделей и сил, Атомиздат, I970.

2I. Н.К.Бари. Тригонометрические ряды, Физматгиз, I96I.

22. В.А.Кравцов. Массы атомов и энергии связи ядер, Атомиздат, I965.

23. L.N.Cooper. Phys. Rev., 104, 1189 (1956).

Техн. редактор Н.И.Мазаева
Корректор В.П.Горячева

Т-05086.5.04.73г.Формат 60х90 I/8
Уч.-изд.л.3,47.Тир.200 экз.Зак.I2024
ОНТИ.ИАЭ