

CEA
EURATOM

ASSOCIATION EURATOM-C.E.A.

DEPARTEMENT DE RECHERCHES
SUR LA FUSION CONTROLEE

FR 8400243

DRFC-SCP

EUR-CEA-FC-1201

PRINCIPE VARIATIONNEL POUR L'ETUDE
LINEAIRE DES MODES ELECTROMAGNETIQUES
DANS LES TOKAMAKS

M.A. DUBOIS, A. SAMAIN

Octobre 1980 et Octobre 1983

Résumé : Nous établissons une forme variationnelle valable dans tous les régimes de collisionnalité. Nous l'utilisons pour étudier la stabilité linéaire des modes électromagnétiques à petite échelle sans tenir compte des effets de particules piégées.

Remarque : Ce rapport est la réimpression d'une partie de la thèse (*), non publiée.

(*) Marc A. DUPOIS

"Turbulence et disruptions dans les tokamaks"
Thèse d'Etat, Paris VII, 7.X.1980.

Title : A variationnal principle for the linear study of electromagnetic instabilities in tokamaks.

Authors : M.A. DUBOIS and A. SAMAIN

Abstract : We establish a variationnal principle valid in all collisionality regimes. We use it to study the linear stability of small scale electromagnetic modes, excluding trapped-particles effects. (This report is a reprint of part of an unpublished thesis : Marc DUBOIS, "Turbulence et disruptions dans les tokamaks" Thèse d'Etat, Paris VII, 7.X.1980).

ETUDE LINEAIRE DES MODES ELECTROMAGNETIQUES DANS LES TOKAMAKS
 =====

1) Formalisme : principes variationnels pour l'étude linéaire des modes dans un plasma

Soit une perturbation électromagnétique dans un plasma :

$$\delta \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \vec{A}}{\partial t} - \nabla \delta \psi$$

$$\delta \vec{B} = \nabla \times \delta \vec{A}$$

$$\delta \vec{A} = \vec{A}_+(x) \exp i\omega t + cc$$

$$\delta \psi = \psi_+(x) \exp i\omega t + cc$$

En agissant sur les particules, cette perturbation entraîne l'apparition de perturbations δJ et $\delta \rho$ de la densité de courant et de la densité de charge

$$\delta J = J_+(x) \exp i\omega t + cc$$

$$\delta \rho = \rho_+(x) \exp i\omega t + cc$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} J_+ \\ \rho_+ \end{pmatrix} = T\omega_p \begin{pmatrix} A_+ \\ \psi_+ \end{pmatrix}$$

où $T\omega_p$ est un opérateur linéaire agissant sur le champ $\begin{pmatrix} A_+ \\ \psi_+ \end{pmatrix}$. Les équations de Maxwell doivent être vérifiées, ce qui entraîne

$$\begin{pmatrix} J_+ \\ \rho_+ \end{pmatrix} = T\omega_H \begin{pmatrix} A_+ \\ \psi_+ \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \nabla \times A_+ - \frac{\omega^2}{c^2} A_+ + \frac{i\omega}{c} \nabla \psi_+) \\ \frac{1}{4\pi} (-\Delta \psi_+ - \frac{i\omega}{c} \nabla A_+) \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad (\mathcal{T}\omega_p - \mathcal{T}\omega_H) \begin{pmatrix} A_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

On peut considérer la forme hermitique

$$\mathcal{L}(\omega; A_+, \Psi_+; A_+^*, \Psi_+^*) = (\mathcal{T}\omega_p - \mathcal{T}\omega_H) \begin{pmatrix} A_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix}$$

L'équation (1) équivaut à dire que la fonctionnelle \mathcal{L} de A_+^* , Ψ_+^* est extremum pour toutes les variations de (A_+^*, Ψ_+^*) . Nous choisissons

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J} \\ e \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A \\ \Psi \end{pmatrix} = \iiint \left(\frac{1}{c} \mathcal{J} A^* - e \Psi^* \right) d_3x$$

et \mathcal{L} devient alors

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_H \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_p(\omega, A_+, \Psi_+) = \mathcal{L}_p = \iiint \left(\frac{\mathcal{J}_+}{c} A_+^* - e_+ \Psi_+^* \right) d_3x \quad (2a)$$

où le champ $\begin{pmatrix} \mathcal{J}_+ \\ e_+ \end{pmatrix}$ est considéré comme une fonction linéaire de $\begin{pmatrix} A_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix}$ et

$$\mathcal{L}_H = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left[(\nabla \times \nabla \times A_+ - \frac{\omega^2}{c^2} A_+ + \frac{i\omega}{c} \nabla \Psi_+) A_+^* + (\Delta \Psi_+ + \frac{i\omega}{c} \nabla A_+) \Psi_+^* \right] d_3x \quad (2b)$$

Comme indiqué plus haut les fonctions indicées $+$ sont des fonctions d'espace. Les formes \mathcal{L}_p et \mathcal{L}_M représentent respectivement la réponse plasma et les équations de Maxwell. Supposant le champ $\begin{pmatrix} A_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix}$ défini dans un domaine fermé et soumis aux conditions aux limites $\Psi_+ = 0$ et A_+ tangentiel = 0, la forme \mathcal{L}_M devient :

$$\mathcal{L}_M(\omega, A_+, \Psi_+) = +\frac{1}{4\pi} \iiint (|\nabla \times A_+|^2 + |\nabla \Psi_+|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |A_+|^2 + \frac{i\omega}{c} (\Psi_+ \nabla A_+^* - \nabla A_+ \Psi_+^*)) d_3x \quad (2c)$$

La forme $\mathcal{L}(\omega; A_+, \Psi_+; A_+^*, \Psi_+^*)$ est définie par (2) pour ω réel, ou $\Im_m \omega \rightarrow 0^-$ en l'absence de collisions, et par prolongement analytique dans tout le plan complexe ω . On peut d'ailleurs substituer à $\begin{pmatrix} A_+(z) \\ \Psi_+(z) \end{pmatrix}$ le champ $\mathcal{D}_\omega \begin{pmatrix} A_+(z) \\ \Psi_+(z) \end{pmatrix}$ où \mathcal{D}_ω est un opérateur linéaire fonction analytique de ω et définir de nouveau pour ω réel et, par prolongement analytique, dans tout le plan complexe, une fonctionnelle

$$\Lambda(\omega; A_+'(z), \Psi_+'(z); A_+'(z), \Psi_+'(z)) = \mathcal{L}(\omega; A_+, \Psi_+; A_+^*, \Psi_+^*)$$

qui jouit des mêmes propriétés que la forme

$$\mathcal{L}(\omega; A_+, \Psi_+; A_+^*, \Psi_+^*)$$

Nous avons vu que l'autocoherence d'un mode est équivalente au fait que \mathcal{L} est extremum par rapport à (A_+^*, Ψ_+^*) . Ceci implique que si on connaît la structure géométrique (A_+, Ψ_+) du mode, on obtient sa fréquence ω en écrivant

$$\mathcal{L}(\omega, A_+, \Psi_+) = 0 \quad (3)$$

on vérifie aussi que pour ω réel ou presque réel, la puissance cédée par le mode au plasma et au champ électromagnétique quasistatique présent dans ce plasma est donnée par

$$W = -2 \operatorname{Re}(\omega) \operatorname{Im} L(\operatorname{Re}(\omega); A_+, \psi_+)$$

Cette relation est valable aussi si le champ $\begin{pmatrix} A_+(x) \\ \psi_+(x) \end{pmatrix}$ est excité à la fréquence ω par des charges et des courants extérieurs.

2) Exemple : modes résistifs dans un plasma très collisionnel [1]

Ce formalisme peut être utilisé par exemple dans un tokamak dans le cas très collisionnel où chaque assemblée peut être traitée comme un fluide. Soit un mode électromagnétique torsionnel

$$A_+ = a(r) \exp(i l \theta + i m \varphi) \quad (4)$$

$$\psi_+ = \psi(r) \exp(i l \theta + i m \varphi)$$

$$\text{avec } \vec{A} = a \frac{\vec{B}}{B} \text{ et } k_{\parallel}(r) = \frac{1}{R} \left(m + \frac{l}{q(r)} \right)$$

ici $k_{\parallel}(r)$ est le nombre d'onde du mode le long des lignes de flux non perturbées. Négligeons le diamagnétisme, et supposons le plasma assez collisionnel pour vérifier

$$v_e \omega > k_{\parallel}^2 v_{th_e}^2 \quad (5)$$

Cette condition exprime que pendant le temps caractéristique d'évolution du mode, les électrons n'ont pas le temps de diffuser appréciablement le long des lignes de flux. Nous supposons aussi que ω est supérieur à $k_{\parallel} v_{th_i}$ de manière à pouvoir négliger le mouvement des ions le long des lignes de flux. Notons de plus que dans toute la suite on travaille dans le repère où le champ électrostatique radial est nul.

La contribution ionique I_{+i} au courant est alors simplement due à la dérive électrique

$$I_{+i//} = 0$$

$$I_{+i\perp} = -nec \frac{\nabla_{\perp} \psi_{+} \times B}{B^2} + \frac{\epsilon}{4\pi} \left(-\frac{\partial \nabla_{\perp} \psi_{+}}{\partial t} \right)$$

où $\epsilon = \frac{c^2}{c_A^2}$ et $c_A = (B^2/4\pi e)^{1/2} =$ vitesse d'Alfvén

La contribution électronique I_{+e} a une composante transversale due à la dérive, et à l'inclinaison des lignes de flux

$$I_{+e\perp} = I \frac{\nabla \times A_{+}}{B} + nec \frac{\nabla_{\perp} \psi_{+} \times B}{B^2}$$

et une composante $I_{+e//}$ due à la variation de résistivité $\delta\eta$ et à l'apparition d'un champ électrique parallèle $-i\kappa_{//}\psi_{+} - \frac{i}{c}\omega A_{+}$

$$I_{+e//} = \frac{\delta\eta}{\eta} I_0 + (-i\kappa_{//}\psi_{+} - \frac{i}{c}\omega A_{+}) \frac{1}{\eta}$$

où, compte tenu de la condition (5)

$$\frac{\delta\eta}{\eta} = -\frac{e}{\omega r} \frac{c}{B} \frac{\partial I}{\partial r} \psi$$

En utilisant l'équation de continuité de charge

$$i\omega e_{+} + \nabla I_{+} = 0 \quad \text{on obtient } e_{+} \quad \text{d'où, en notant que}$$

$$|\nabla \times \vec{A}| \approx |\nabla_{\perp} \vec{A}|$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d_3x \left[-\frac{1}{4\pi} |\nabla_{\perp} A_{+}|^2 + \frac{\epsilon}{4\pi} |\nabla_{\perp} \psi_{+}|^2 \right. \\ & + \frac{1}{2i\omega} \left(\frac{i\omega}{c} A_{+} + i\kappa_{//}\psi_{+} \right) \left(-\frac{i\omega}{c} A_{+}^{*} - i\kappa_{//}\psi_{+}^{*} \right) \\ & \left. + \frac{1}{\omega} \frac{\partial I}{\partial r} \frac{e}{r} \frac{1}{B} (A_{+}\psi_{+}^{*} + A_{+}^{*}\psi_{+} + \frac{c}{\omega}\kappa_{//}\psi_{+}\psi_{+}^{*}) \right] \end{aligned}$$

On transforme \mathcal{L} en posant $\Psi_+ = \omega \Psi'_+$ pour ω réel

$$\mathcal{L}(\omega; A_+, \Psi_+; A_+^*, \Psi_+^*) = \Lambda(\omega; a, \Psi'; a^*, \Psi'^*)$$

forme bilinéaire en $a, \Psi'; a^*, \Psi'^*$ que l'on peut prolonger analytiquement dans le plan ω . Posant $i\omega = \gamma$ avec γ réel, le principe d'extremum en ω est alors équivalent à dire que la forme hermitique réelle en a, Ψ'

$$\Lambda = \iiint d_3 x \left[-\frac{1}{4\pi} |\nabla_{\perp} A_+|^2 - \frac{\epsilon \gamma^2}{4\pi} |\nabla_{\perp} \Psi'_+|^2 \right. \\ \left. - \frac{\gamma}{\rho c^2} |A_+ + \kappa_{\parallel} c \Psi'_+|^2 + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r} \frac{\rho}{r} \frac{1}{B} (A_+ \Psi'^* + A_+^* \Psi' + \kappa_{\parallel} c \Psi'_+ \Psi'_+) \right]$$

est extremum en A_+^*, Ψ'^* . On peut ainsi montrer qu'en régime suffisamment collisionnel un mode tearing assymétrique est toujours instable et que son taux de croissance est toujours supérieur à celui du tearing classique lorsque celui-ci vérifie le critère d'instabilité $\Delta' > 0$. Les fonctions d'essai $a(r)$ et $\Psi'(r)$ sont indiquées sur la figure (3). Elles satisfont, comme dans la théorie usuelle des modes tearing, la contrainte MHD $a + \kappa_{\parallel} c \Psi' = 0$ à l'extérieur d'une mince couche "résistive" de part et d'autre de la surface résonnante $r = r_0$ où $\kappa_{\parallel} = 0$. Cette couche est définie par $-\delta_1 < x < \delta_1(1+\nu)$ où ν représente l'assymétrie. A l'extérieur le champ $a(r)$ est supposé satisfaire l'équation d'Euler obtenue en minimisant

$$\Lambda_E = \iiint_{\text{extérieur}} d_3 x \left(-\frac{1}{4\pi} |\nabla_{\perp} A_+|^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial r} \frac{\rho}{r} \frac{1}{B} (A_+ \Psi'^* + A_+^* \Psi' + \kappa_{\parallel} c \Psi'_+ \Psi'_+) \right)$$

avec $A_+ + \kappa_{II} \psi'_+ = 0$, ce qui permet pour ν donné de calculer cette expression, connaissant la valeur classique Δ'_c du paramètre d'instabilité de la théorie des modes tearing, sous la forme $\Lambda_E = \lambda(\nu, \Delta'_c) |a_0|^2$

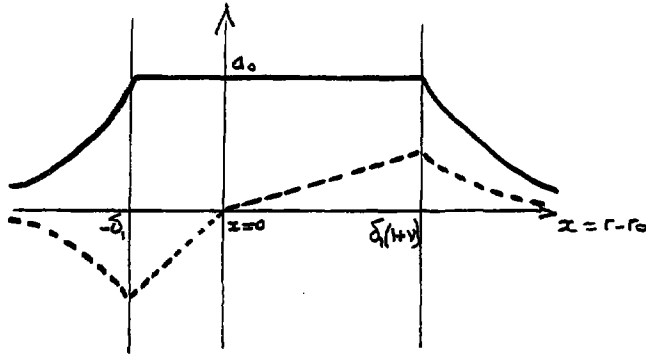


Fig.1

Calculant directement les termes complémentaires de la forme Λ à l'extérieur et sa valeur à l'intérieur, et minimisant par rapport à δ_1 , ν et a_0^* on obtient, pour ν petit devant 1 :

$$\chi = \chi_0 \frac{1}{2^{4/5}} [1 + \sqrt{1+w}]^{4/5}$$

$$\text{avec } \begin{cases} w = \frac{1}{(\Delta'_c r)^2} \left[r^2 \frac{4\pi}{c} \frac{\partial I_H}{\partial r B_0} \right]^2 \frac{16}{3 \left(\frac{\partial q}{\partial r} r \right)^2} \\ \chi_0 = \left[\frac{30}{512 \pi} \left(\frac{8\pi}{15} \right)^{1/4} \right]^{4/5} \frac{1}{r^{3/5}} \frac{1}{r_A^{1/5}} \left(\rho r \frac{\partial q}{\partial r} \right)^{2/5} (\Delta'_c r)^{4/5} \end{cases}$$

$$\text{ou } \tau_R = \frac{r^2}{\eta c^2} \quad \text{et } \tau_A = \frac{r}{c_{A0}}$$

et pour ν grand :

$$\gamma = \pi^{1/5} \left(\frac{15 r^2}{2 \tau_R} \right)^{3/5} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \frac{1}{B_0} \right)^{1/5} \left(\frac{\partial q}{\partial r} \tau_A \right)^{-2/5} \exp \left(\frac{3}{5} R - \frac{4}{5} \right)$$

$$\text{avec } R = - \left(\frac{\partial q}{\partial r} \cdot r \right) \left(\frac{\Delta'_c r}{\frac{4\pi}{c} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \frac{r^2}{B_0}} \right)$$

le mode est donc toujours instable même pour $\Delta'_c < 0$ (bien que le taux de croissance tende vers 0 quand Δ'_c devient très négatif). Bien entendu la condition (5) doit être satisfaite à l'intérieur de la couche, ce qui impose la contrainte (5) et

$$K_{\nu} = \frac{1}{R} \frac{\ell}{q^2} \frac{\partial q}{\partial r} (\delta r)$$

La dissymétrie du mode tearing dans le régime très collisionnel est en fait liée à l'existence de modes du genre des modes rippling localisés au voisinage de la surface résonnante, et donnant une structure symétrique aux champs A_+ et ψ_+ '. La minimisation de Λ oblige alors à localiser fortement ψ_+ ' dans la région où $K_{\nu} = 0$, pour diminuer le terme proportionnel à $(A_+ + K_{\nu} \psi_+)^2$. Si on prend les fonctions d'essai définies sur la figure (2), la valeur de Λ devient (posant $L_s = \frac{R}{r} \left(\frac{\partial \log q}{\partial r} \right)^{-1}$):

$$\Lambda = \iint dS \left[\frac{|A_+|^2}{4\pi\delta} - \frac{eY^2}{4\pi\delta'} |\Psi_+^{\prime}|^2 \right. \\ \left. - \frac{Y}{\rho c^2} |A_+|^2 \delta - \frac{Y}{\rho} \left(\frac{e^2}{r^2} \frac{\delta'^2}{L_s^2} \right) |\Psi_+^{\prime}|^2 \delta' \right. \\ \left. + \delta' \frac{\partial I_{II}}{\partial r} \frac{\rho}{r} \frac{1}{B} (A_+ \Psi_+^{\prime*} + A_+^* \Psi_+^{\prime}) \right]$$

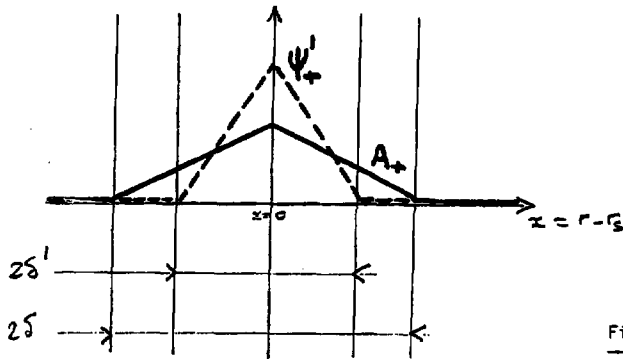


Fig.2

la minimisation par rapport à δ donne

$$\delta^2 = \frac{\rho e^2}{4\pi Y}$$

En minimisant par rapport à A_+ , avec Ψ_+^{\prime} fixé, on peut réécrire Λ en fonction de Ψ_+^{\prime} seulement. On minimise alors par rapport à δ' , d'où

$$\delta' = \left(\frac{3\pi Y \rho r^2 L_s^2}{4\pi e^2} \right)^{1/4}$$

En annulant alors l'intégrand, on obtient le taux de croissance

$$Y = \frac{1}{\tau_R} \left(\frac{\tau_R}{\tau_A} \right)^{2/7} \ell^{3/7} \left(\frac{r}{L_s} \right)^{3/7} \left(L_s r \frac{\partial I}{\partial r} \frac{1}{B} \frac{1}{c} \right)^{2/7}$$

toujours positif.

3) Forme \mathcal{L} non collisionnelle générale

Le calcul de la réponse du plasma à la perturbation, qui est très simple lorsque le plasma est fortement collisionnel, l'est naturellement moins lorsqu'on passe au régime non-collisionnel, ou faiblement collisionnel, et qu'il faut prendre en compte les effets de trajectoire. Il est néanmoins possible de calculer la forme \mathcal{L} en supposant que les trajectoires non perturbées sont intégrables, ce qui équivaut à supposer qu'il existe pour

l'hamiltonien $H_0(x, p)$ non perturbé, un système de variables angulaires et d'action Φ_κ, J_κ ($\kappa=1, 2, 3$) avec les propriétés suivantes [4] [5] :

- Les variables Φ_κ, J_κ sont canoniquement conjuguées
- Les variables de base x_α, p_α , exprimées à l'aide des variables Φ_κ, J_κ sont périodiques avec la période 2π par rapport aux variables Φ_κ
- L'hamiltonien $H_0(x, p)$ est une fonction des seules variables d'action J_κ :

$$H_0(x, p) = h(J)$$

On a alors à l'équilibre

$$\frac{dJ_\kappa}{dt} = - \frac{\partial h}{\partial \Phi_\kappa} = 0 \quad \text{ie} \quad J_\kappa = \text{cte} \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi_\kappa}{dt} = \frac{\partial h}{\partial J_\kappa} \quad \text{ie} \quad \Phi_\kappa = \frac{\partial h}{\partial J_\kappa} t + \text{cte} \quad (6a)$$

La fonction de distribution $\mathcal{F}_0(x, p)$ à l'équilibre doit être une constante du mouvement indépendante du temps et est donc aussi une fonction des variables J : $\mathcal{F}_0(x, p) = f(J)$. Le champ $\delta A, \delta \psi$ du

mode perturbe l'hamiltonien $H_0(x, p) = h(J)$ de

$$\delta H(x, p, t) = -\frac{e}{c} v \delta A + e \delta \psi = h_+(x, p) \exp i \omega t + cc$$

$$h_+(x, p) = \left(-\frac{e}{c} v A_+(x) + e \psi_+(x) \right) \quad (7)$$

où $v = \frac{1}{m} \left(p - \frac{e}{c} A_0 \right)$ est la vitesse non perturbée de la particule.

On peut encore écrire

$$h_+(x, p) = \sum_n h_n(J) \exp i n_\kappa \Phi_\kappa \quad (7a)$$

(n : triplet d'entiers (n_1, n_2, n_3))

La fonction de distribution $\mathcal{F}_+(x, p) = F(J)$ se trouve elle aussi perturbée de

$$\delta F(x, p, t) = F_+(x, p) \exp i \omega t + cc$$

$$F_+(x, p) = \sum_n F_{+n}(J) \exp i n_\kappa \Phi_\kappa \quad (7b)$$

On constate facilement que la contribution \mathcal{L}_p d'une espèce de particules à la forme \mathcal{L} est donnée par

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_p)_{\text{espèce}} &= \iiint d_3 x \left(\frac{v}{c} A_+^* - e \psi_+^* \right) \\ &= - \int \dots d_3 x d_3 p \left[F_+ \left(v \left(-\frac{e}{c} \right) A_+^*(x) + e \psi_+^*(x) \right) + e^2 F \frac{A_+ A_+^*}{m c^2} \right] \\ &= - \int \dots d_3 x d_3 p \left(F_+ h_+^* + e^2 F \frac{|A_+|^2}{m c^2} \right) \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\mathcal{L}_P = -\frac{e^2}{mc^2} \iiint d_3x \, n(x) |A_+|^2 - \iiint d_3J \sum_n [f_{+n}(J) h_{+n}^*(J)] (2\pi)^3 \quad (7d)$$

où $n(x)$ est la densité à l'équilibre.

Si on suppose le plasma sans collisions, l'équation de Vlasov

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F}) = 0 \text{ entraîne par ailleurs pour } \mathcal{J}_m(\omega) < 0$$

$$f_{+n}(J) = \frac{n_\kappa \frac{\partial f(J)}{\partial J_\kappa} h_{+n}(J)}{\omega + n_\kappa \frac{\partial h(J)}{\partial J_\kappa}} \quad (8)$$

(*)

On peut alors écrire \mathcal{L}_P pour une espèce

$$\left(\mathcal{L}_P\right)_{\text{espèce}} = -\iiint d_3x \, \frac{ne^2}{mc^2} |A_+|^2 - (2\pi)^3 \iiint d_3J \sum_n \frac{|h_{+n}(J)|^2 n_\kappa \frac{\partial f(J)}{\partial J_\kappa}}{\omega + n_\kappa \frac{\partial h}{\partial J_\kappa}} \quad (8a)$$

On peut alors mettre en évidence l'écart à l'équilibre thermodynamique de chaque assemblée à l'équilibre en posant :

$$f(J) = A \exp - \frac{h(J) - u(J)}{\bar{T}} \quad (9)$$

où A et \bar{T} sont des constantes. La variable $-u(J)$ est la perturbation qu'il faudrait apporter à l'hamiltonien $h(J)$ pour que l'assemblée soit à l'équilibre thermodynamique. En présence de l'hamiltonien $h(J) - u(J)$ les variables J_κ, ϕ_κ varieraient suivant la loi

$$\frac{dJ_\kappa}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi_\kappa}{dt} = \frac{\partial h(J)}{\partial J_\kappa} - \frac{\partial u(J)}{\partial J_\kappa} \quad (10)$$

au lieu de suivre la loi (6).

(*) N.B. : On appelle surface de résonance, une surface

$$\text{ou } \begin{cases} h_{+n}(J) \neq 0 \\ \omega + n_\kappa \frac{\partial h}{\partial J_\kappa} = 0 \end{cases}$$

Les quantités $\frac{\partial u}{\partial J_k}$ peuvent donc être interprétées comme le mouvement de l'assemblée dans l'espace Φ_k traduisant l'écart à l'équilibre thermodynamique. Choisisant \bar{T} pour que

$$\bar{T} = \frac{\int \dots d_3 x d_3 p F(x, p) m |v \cdot A_+|^2}{\int \dots d_3 x d_3 p |A_+|^2 F(x, p)}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_p \rangle = & \int \int \int d_3 x \left(\frac{n(x) e^2}{\bar{T}} \left(|\Psi_-|^2 - \frac{v(x)}{c} (A_+ \Psi_-^* + \Psi_+ A_+^*) \right) \right. \\ & \left. - (2\pi)^3 \int \int d_3 J \sum_n \frac{\omega + n_k \frac{\partial u}{\partial J_k}}{\omega + n_k \frac{\partial h}{\partial J_k}} \frac{F(J)}{\bar{T}} |h_n(J)|^2 \right) \end{aligned} \quad (11)$$

où $\bar{v}(x)$ est la vitesse moyenne de l'assemblée en chaque point.

4) Variables angulaires et d'action pour les particules circulantes dans un tokamak. Fonction de distribution à l'équilibre

Il y a dans un tokamak deux classes de trajectoires : circulantes ou piégées. Nous ne nous intéresserons pas ici aux particules piégées parce que nous avons en vue des modes où la composante magnétique joue un rôle essentiel et que le couplage de ces modes aux particules piégées est relativement faible. Il ne serait cependant pas difficile d'introduire les particules piégées dans le formalisme. La construction de variables angulaires

et d'action (VAA) pour les particules circulantes qui nous sont ici nécessaires repose sur le fait que, d'une façon générale, si les trajectoires sont de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= f_{x_1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3; \omega_1 t + \alpha_1, \omega_2 t + \alpha_2, \omega_3 t + \alpha_3) \\ &\vdots \\ p_3 &= f_{p_3}(\text{-----}) \end{aligned}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont constantes, alors les variables ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 définies par les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= f_{x_1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3; \phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ &\vdots \\ p_3 &= f_{p_3}(\text{-----}) \end{aligned}$$

sont des variables angulaires. Ces relations définissent aussi les variables $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Les variables d'action J_1, J_2, J_3 associées à ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont des fonctions de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, qu'on peut calculer par les relations

$$2\pi n_1 J_1 + 2\pi n_2 J_2 + 2\pi n_3 J_3 = \oint p dx$$

où l'intégrale est prise sur une ligne fermée de l'espace des phases sur la surface $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \text{cte}$ le long de laquelle les variables ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 varient respectivement de $2\pi n_1, 2\pi n_2, 2\pi n_3$

Dans un tokamak, on peut avec une bonne précision, utiliser l'approximation du centre guide, c'est-à-dire décrire l'espace des phases (x, p) par les variables lentes x_g (coordonnées du centre guide G),

$$v_g = \frac{dx_g}{dt}$$

$$\mu \approx \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 / B \approx \frac{1}{2} m \frac{\omega_c^2 r_L^2}{B}$$

(où $r_L(x, p)$ est le rayon de Larmor), et la phase cyclotronique rapide $\varphi_c(x, p)$ (d'où $x = x_g + x_c$, $x_{c1} = r_L \cos \varphi_c$, $x_{c2} = r_L \sin \varphi_c$).

Les coordonnées de g varient au cours du temps pour des particules circulantes comme

$$r_g = r_0 + f(\omega_2 t + \theta_0) ; f \sim q r_L$$

$$\theta_g = \omega_2 t + g(\omega_2 t + \theta_0) + \theta_0 ; g \sim \frac{r}{R} \quad (12)$$

$$\varphi_g = \omega_3 t + h(\omega_2 t + \theta_0) + \varphi_0 ; h \sim q \frac{r}{R}$$

les fonctions f, g, h sont périodiques avec la période 2π et $r_0, \theta_0, \varphi_0, \omega_2, \omega_3$ sont des constantes du mouvement. Les fonctions g, h tendent vers 0 avec le rapport d'aspect du tokamak soit $\frac{r}{R}$. On obtient alors

$$J_1 = -\frac{m c}{2} \mu$$

$$\phi_1 \approx \phi_c$$

(12 a)

et

$$J_2 = \frac{e}{2\pi c} \Psi_{\text{Tor}} \left(1 + O\left(q \frac{R_0}{R}\right)\right) \approx \frac{e}{2\pi c} \Psi_{\text{Tor}}$$

$$\Phi_2 = \Theta_g + O\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$J_3 = \frac{e}{2\pi c} \Psi_{\text{pol}} + R_0 m v_{\varphi} \quad (\text{exactement})$$

$$= \frac{e}{2\pi c} \Psi_{\text{pol}} \left(1 + O\left(\frac{R_0 c}{r}\right)\right) + R_0 m v_{\varphi}$$

$$\approx \frac{e}{2\pi c} \Psi_{\text{pol}} + R_0 m v_{\varphi}$$

$$\Phi_3 = \Phi_g + q \cdot O\left(\frac{r}{R}\right) \quad (12b)$$

où $\Psi_{\text{Tor}}(x)$ et $\Psi_{\text{pol}}(x)$ sont les flux magnétiques

toroïdal et poloïdal embrassés par la surface magnétique passant au point X.

Dans cette approximation, en posant

$$\Psi_{\text{pol}} = G(\Psi_{\text{Tor}}) ; \frac{dG}{d\Psi_{\text{pol}}} = -\frac{1}{q} \quad (13a)$$

et si

$$G^*(x) = \frac{e}{2\pi c} G\left(\frac{2\pi c}{e} x\right) \quad (13b)$$

on a, à l'ordre 0 en

$$v_{\varphi} \approx \frac{1}{R_0 m} (J_3 - G^*(J_2)) \quad (13c)$$

et :

$$h(J) = \mu B_0 + \frac{1}{2} (J_3 - G(J_2))^2 \frac{1}{R_0^2 m}$$

où B_0 et R_0 sont les valeurs de B et R sur l'axe magnétique. Ces formules simplifiées peuvent naturellement être précisées à la demande lors du calcul de la forme \mathcal{L} . Pour les particules circulantes d'un tokamak, les écarts à l'équilibre se réduisent pour chaque espèce aux trois gradients de densité, de température, et de vitesse d'ensemble parallèle aux lignes de champ, $\nabla n(\psi_r)$, $\nabla T(\psi_r)$, $\nabla v_{\parallel}(\psi_r)$. La fonction de distribution doit être une fonction $f(\mathcal{J})$ de J_1, J_2, J_3 , voisine de la Maxwellienne décalée

$$n(\psi_r) \frac{1}{(2\pi m T(\psi_r))^{3/2}} \exp - \frac{m (v - \bar{v}_{\parallel}(\psi_r) \frac{B}{B_0})^2}{2 T(\psi_r)}$$

Compte tenu de (12) et (13), nous pouvons prendre

$$f(\mathcal{J}) = v(J_2, J_3) \frac{1}{(2\pi \tau(J_2) m)^{3/2}} \exp - \frac{h}{\tau(J_2)} \quad (14)$$

où

$$v(J_2, J_3) = n\left(\frac{2\pi c}{e} J_2\right) \left[1 + (J_3 - G^*(J_2)) \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\bar{v}_{\parallel}\left(\frac{2\pi c}{e} J_2\right)}{\tau(J_2)} \right] \quad (14a)$$

$$\text{et } \tau(J_2) = T\left(\frac{2\pi c}{e} J_2\right) \quad (14b)$$

La variable $u(\mathcal{J})$ définie par (9) qui traduit l'écart à l'équilibre thermodynamique pour l'assemblée considérée s'écrit alors :

$$u(\mathcal{J}) = \bar{T} \left(\log v(J_2, J_3) - \frac{3}{2} \log \tau(J_2) + \frac{h}{T} - \frac{h}{\bar{T}} \right) \quad (15)$$

5) Valeur de la forme \mathcal{L} sans collisions pour les particules circulantes d'un Tokamak

Comme d'habitude nous considérons un mode torsionnel caractérisé par un potentiel vecteur $A_+(z)$ parallèle au champ statique et un potentiel scalaire $\psi_+(z)$. Négligeant la contribution électrostatique dans l'expression (2c), nous pouvons écrire

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4\pi} \iiint |\nabla A_+|^2 d_3x$$

Dans l'expression de \mathcal{L}_p pour chaque espèce donnée par (11), on notera que compte tenu de (10) d'une part, et de (7) et (7a) d'autre part, les

quantités $n_k \frac{\partial u}{\partial J_k}$ peuvent en gros être interprétées comme la variation $\frac{1}{c} \frac{\partial h_+}{\partial t}$ lorsqu'on suit le mouvement moyen de l'assemblée considérée, c'est-à-dire typiquement le mouvement diamagnétique à la vitesse transversale v_d .

Si K est le nombre d'onde local du mode, nous avons donc

$$n_k \frac{\partial u}{\partial J_k} \sim K_\theta v_d \sim K_\theta v_H \frac{eH}{r}$$

tandis que compte tenu de (12a) et (12b), $n_1 \frac{\partial h}{\partial J_1} \sim n_1 \omega_c$ et, pour des particules circulantes

$$n_2 \frac{\partial h}{\partial J_2} + n_3 \frac{\partial h}{\partial J_3} \sim K_H v_H \sim K_H v_H \ll \omega_c$$

Par ailleurs, pour que l'on puisse avoir $\int_{\text{vol}} \mathcal{L} = 0$ il faut que

$$\omega \sim n_k \frac{\partial u}{\partial J_k} \approx K_\theta v_H \frac{eH}{r}$$

Si on suppose $K_\theta eH \ll \frac{r}{eH}$, alors $\omega \ll \omega_c$ et on peut négliger les termes $n_1 \neq 0$ dans la somme \sum dans (11). D'autre part,

il est intéressant de faire apparaître le champ électrique parallèle au champ magnétique de la perturbation $\delta E_{||} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta A - \nabla_{||} \delta \psi$

en écrivant

$$A_+ = a_+ + \frac{ic}{\omega} \nabla_{||} \psi_+ ; \delta E_{||} = -\frac{i\omega}{c} a_+ \exp i\omega t + c.c.$$

On peut alors écrire

$$h_{+n} = e \psi_{+n} \frac{\omega + n\kappa\omega\kappa}{\omega} + \left(-\frac{e}{c} a_{+} v_{||}\right)_n + \left(-\frac{e v_{\perp}}{\omega} \kappa_{\perp} \psi_{+}\right)_n$$

Substituant cette expression dans (11), le premier terme n'apparaît plus sous forme résonnante : les effets de résonance sont dus uniquement aux deux derniers termes, tous deux proportionnels au travail que reçoit la particule du champ électrique du mode. Nous obtenons en fait, avec (15), pour $\Im m \omega \rightarrow 0^-$

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \int_{\text{espace}} \frac{ne^2}{T} |\psi_{+}|^2 d_3x - \int \frac{ne^2}{T} (\psi_{+}^* A_{+} + \psi_{+} A_{+}^*) \frac{\sqrt{v}}{c} d_3x$$

$$\begin{aligned} & - \int d_3x \mathcal{J} (2\pi)^3 \frac{f(\mathcal{J})}{\mathcal{J}} \sum_{n=q, n_1, n_2} \left[e^2 |\psi_{+n}|^2 \right. \\ & \quad + \frac{n\kappa\Omega\kappa}{\omega} e^2 |\psi_{+n}|^2 \\ & \quad - \frac{e^2}{c^2} \left((A_{+} v_{||})_n^* \psi_{+n} + cc \right) \\ & \quad - \frac{n\kappa\Omega\kappa}{\omega} e^2 \left((A_{+} \frac{v_{\perp}}{c})_n^* \psi_{+n} + cc + \frac{(v_{\perp} \kappa_{\perp} \psi_{+})_n}{\omega} \psi_{+n}^* \right) \\ & \quad + \left(e \psi_{+n}^* \left(-\frac{e v_{\perp} \kappa_{\perp}}{\omega} \psi_{+}\right)_n + cc \right) \\ & \quad + \frac{n\kappa\Omega\kappa}{\omega} e \psi_{+n}^* \left(-\frac{e v_{\perp} \kappa_{\perp}}{\omega} \psi_{+}\right)_n \\ & \quad \left. + \frac{\omega + n\kappa\Omega\kappa}{\omega + n\kappa\omega\kappa} \left| \left(-\frac{e v_{\perp} \kappa_{\perp}}{\omega} \psi_{+} - \frac{e}{c} a_{+} v_{||} \right)_n \right|^2 \right] \end{aligned}$$

(16)

qui est une expression encore tout à fait générale où $\omega_\kappa = \frac{\partial h(\mathcal{J})}{\partial \mathcal{J}_\kappa}$ et $\Omega_\kappa = \tau \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_\kappa} \log \nu + \left(\frac{h}{\tau} - \frac{3}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_\kappa} \log \tau \right)$ et où la notation ν_n représente bien entendu les composantes de Fourier dans la décomposition

$$\mathcal{V}(z, p) = \sum_n (\nu(z, p))_n \exp i n_\kappa \Phi_\kappa$$

On se sert dans la suite du calcul des propriétés suivantes.

D'abord les relations (déjà utilisées en fait) :

$$\left[\left(\frac{d\nu}{dt} \right)_{\text{trajectoires non perturbées}} \right]_n = i n_\kappa \omega_\kappa \nu_n(\mathcal{J})$$

$$\begin{aligned} & \int \nu(z, p) \nu^*(z, p) \mathcal{F}_0(z, p) d_3 z d_3 p \\ &= \int \nu \cdot \nu^* F(\mathcal{J}) d_3 \mathcal{J} d_3 \Phi \\ &= \sum_n \nu_n(\mathcal{J}) \nu_n^*(\mathcal{J}) F(\mathcal{J}) d_3 \mathcal{J} (2\pi)^3 \end{aligned}$$

D'autre part, si la variable $\mathcal{V}(z, v)$ peut être écrite avec une bonne approximation

$$\mathcal{V}(z, v) = \psi'(z, v) \exp i \int K(z) dz$$

où $\psi'(z, v)$ et $K(z) \leq \frac{1}{\rho_c}$ varient lentement en z à l'échelle du rayon de Larmor ρ_c , nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{0, n_2, n_3} \nu_{0, n_2, n_3}(\mathcal{J}) \exp i (n_2 \Phi_2 + n_3 \Phi_3) \\ &= J_0(\kappa_\perp(z) \rho_c(z, p)) \cdot \mathcal{V}(x_y(z, p), y_g(z, p)) \end{aligned}$$

Nous supposons que les nombres d'onde

$$K = i \frac{\nabla A_+}{A_+} \quad \text{ou} \quad i \frac{\nabla \psi_+}{\psi_+} \quad \text{et les champs } A_+, \psi_+$$

vérifient les conditions ci-dessus. On peut alors transformer le 3ème terme de (16), par exemple, en

$$- \iiint d_3 z d_3 p \frac{\mathcal{F}_0}{T} e^2 |J_0(\kappa_\perp \rho_c) \psi_+|^2$$

Nous utilisons encore le fait que le crochet de Poisson

$$\left\{ \Psi_{\pm}(z), v_{\parallel} \right\} = \frac{i}{\hbar} \kappa_{\parallel} \Psi_{\pm}$$

peut être écrit, compte tenu de (13), à l'ordre 0 en $\frac{r}{R}$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \kappa_{\parallel} \Psi_{\pm} &= \left\{ \Psi_{\pm}, \frac{1}{R_{0m}} (\mathcal{J}_3 - G^*(\mathcal{J}_z)) \right\} \\ &= \sum_{n=0, n_1, n_2} i \left(n_3 + \frac{n_2}{q} \right) \cdot \Psi_n(\mathcal{J}) \exp i n_{\alpha} \phi_{\alpha} \frac{1}{R_{0m}} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\sum_{n_1, n_2, n_3} \left(n_3 + \frac{n_2}{q} \right) \Psi_n(\mathcal{J}) \exp i n_{\alpha} \phi_{\alpha} = \kappa_{\parallel} \cdot \mathcal{J}_0(\kappa_{\perp} \rho_c) \Psi_{\pm}$$

utilisant (14), le 4ème terme de (16) par exemple peut alors être transformé en

$$- \int \dots \int d_3 z d_3 p \frac{\mathcal{J}_0}{T} \frac{\kappa_{\perp} v_d + \kappa_{\parallel} \bar{v}_{\parallel} (1 + o(\frac{r}{R}))}{\omega} e^2 |\mathcal{J}_0(\kappa_{\perp} \rho_c) \Psi_{\pm}|^2$$

$$\text{où } v_d = - \frac{c}{e B^2} T \left(\frac{\nabla n}{n} + \left(\frac{\hbar}{T} - \frac{3}{2} \right) \frac{\nabla T}{T} \right) \times B$$

Supposant encore $\kappa_{\perp} v_d \gg \kappa_{\parallel} \bar{v}_{\parallel} o(\frac{r}{R})$ il vient finalement pour $\Im_m \omega \rightarrow 0^-$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_p)_{\text{espèce}} &= \iiint \left[\frac{n e^2}{T} |\Psi_{\pm}|^2 \right. \\ &\quad - \frac{n e^2}{T} \left\langle \frac{\omega + \kappa_{\perp} v_d}{\omega} \left| \mathcal{J}_0 \Psi_{\pm} \right|^2 \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \frac{\kappa_{\perp} (\nabla (n_c \bar{v}_{\parallel})) \times B}{B^2} \\ &\quad \left. \cdot \left\langle \left(\mathcal{J}_0 A_c \right) \left(\mathcal{J}_0 \Psi_{\pm}^* \right) + \text{cc} \right\rangle + \text{Re} \left(\left(\frac{\kappa_{\perp} c}{\omega} \mathcal{J}_0 \Psi_{\pm} \right) \left(\mathcal{J}_0 \Psi_{\pm}^* \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ne^2}{T} \left\langle \frac{\omega + \kappa_{\perp} v_d}{\omega} R_c \left(\left(\frac{\kappa_{\perp} v_d}{\omega} J_0 \psi_+ \right) \left(J_0 \psi_+^* \right) \right) \right\rangle d_3 x \\
& - \iiint_{\omega_n, \kappa_3} \sum_{\omega + n \kappa} \frac{\omega + n \kappa \Omega_{\kappa}}{\omega + n \kappa \omega_{\kappa}} \left| \left(e \frac{\kappa_{\perp} v_d}{\omega} J_0 \psi_+ - \frac{e}{c} v_{\parallel} J_0 a_+ \right)_n \right|^2 \\
& \quad \cdot \frac{F(\mathcal{J})}{\tau(\mathcal{J}_2)} d_3 \mathcal{J} (2\pi)^3
\end{aligned}$$

où $J_0 = J_0(\kappa_{\perp} e_c)$ et où le signe $\langle \rangle$ signifie la moyenne sur les vitesses pondérée par la Maxwellienne de l'espèce considérée.

Le calcul du dernier terme qui fait apparaître les résonances, nécessite une évaluation des composantes de Fourier

$$\left(\frac{e \kappa_{\perp} v_d}{\omega} J_0 \psi_+ - \frac{e}{c} v_{\parallel} J_0 a_+ \right)_m$$

qu'on peut obtenir à l'aide de (12) si on se limite à des modes de structure :

$$\delta \psi = \psi_+(r) \exp i(\ell \theta + m \varphi) \exp i \omega t + c.c.$$

$$\delta A = A_+(r) \exp i(\ell \theta + m \varphi) \exp i \omega t + c.c.$$

Nous obtenons finalement, supposant $\kappa_{\perp} \rho_{De} \ll 1$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_P$$

$$\mathcal{L}_M = - \frac{1}{4\pi} \iiint |\nabla A_+|^2 d_3 x$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_p = & \\
 \text{(I)} & \left\{ \left[\int \int \int \frac{ne^2}{T} \left\langle \frac{\omega + \omega^* \left(1 + \eta \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2} \right) \right)}{\omega} \left((1 - J_0^2) \Psi_+ \right) \right\rangle \Psi_+^* d_3x \right]_{\text{ions}} \right. \\
 \text{(II)} & + \left[\int \int \int \frac{ne^2}{T} \left\langle \frac{\omega + \omega^* \left(1 + \eta \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2} \right) \right)}{\omega} \operatorname{Re} \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}^2}{\omega} J_0^2 \Psi_+ \right) \right\rangle \Psi_+^* d_3x \right]_{\text{ions}} \\
 & \quad \text{et électrons} \\
 \text{(I.R.)} & + \left[\int \int \int \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial n e \sqrt{v}}{\partial r} \right) \frac{c}{5} \left[\left(\Psi_+ \frac{A_+^*}{c} + \Psi_+^* \frac{A_+}{c} + \frac{k_{\parallel} |\Psi_+|^2}{\omega} \right) \frac{1}{\omega} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left\langle \frac{v_{\parallel}^3 / c^2}{\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}} \right\rangle \frac{m}{T} |a_+|^2 \right] d_3x \right]_{\text{electrons}} \\
 \text{(III)} & - \left[\int \int \int \left\langle \frac{ne^2}{T} \frac{\omega + \omega^* \left(1 + \eta \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2} \right) \right) + k_{\parallel} \sqrt{v}}{\omega + k_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} J_0^2 a_+ \right\rangle a_+^* d_3x \right]_{\text{ions}} \\
 & \quad \text{et élect.} \\
 \text{(IV)} & - \left[\int \int \int \frac{ne^2}{T} \left\langle \left(\omega + \omega^* \left(1 + \eta \left(\frac{h}{T} - \frac{3}{2} \right) \right) \right) \frac{1}{4} \right. \right. \\
 & \quad \cdot \left[\frac{1}{\omega + \left(k_{\parallel} + \frac{1}{qR} \right) v_{\parallel}} \operatorname{Re} \left(\frac{(k_{\theta} - i k_r)^2 v_{\perp}^2}{\omega^2} J_0^2 \Psi_+ \right) \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{\omega + \left(k_{\parallel} - \frac{1}{qR} \right) v_{\parallel}} \operatorname{Re} \left(\frac{(k_{\theta} + i k_r)^2 v_{\perp}^2}{\omega^2} J_0^2 \Psi_+ \right) \right] \right\rangle \Psi_+^* d_3x \right]_{\text{ions}} \\
 & \quad \quad \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\omega^* = \frac{\rho}{r} T \frac{\partial n}{n \partial r} \frac{c}{eB}$$

$$\eta = \left(\frac{\partial \log T}{\partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial \log n}{\partial r} \right)^{-1}$$

- . Le terme (I) de \mathcal{L}_p représente l'effet de l'inertie des ions.
- . Le terme (II) est responsable des effets d'interchange, dus à la courbure moyenne pour les modes considérés. Il n'est valable que si $k_{\perp} \rho_{Hi} \eta < 1$
- . Le terme (TR) introduit les effets "tearing" et "rippling". Il a la forme "rippling" proportionnelle à $(\Psi_+ A_+^* + \Psi_+^* A_+ + \frac{k_{\perp} c}{\omega} |\Psi_+|^2) \frac{1}{\omega}$ pour $\omega \ll k_{\perp} v_{He}$, et prend la forme "tearing" $\sim |a_+|^2 \frac{1}{k_{\perp} c}$ pour $\omega \gg k_{\perp} v_{He}$, ou si le mode subit la contrainte MHD $\delta E_p \sim a_+ = 0$
- . Le terme (III) représente l'effet de la conductivité parallèle et tend en principe à imposer la contrainte MHD.
- . Le terme (IV) donne l'effet du mouvement de dérive des centres guide, dû à la courbure $1/R$ pour les modes considérés. Il n'est valable que si $k_{\perp} \rho_{Hi} \eta < 1$.

Les collisions électroniques peuvent avoir un effet important sur le terme (TR) et la contribution (III)_e des électrons au terme (III) dans l'expression (17) de \mathcal{L}_p , si le libre parcours moyen v_{He}/v_{ce} est plus faible que la longueur d'onde $\sim \frac{1}{k_{\perp}}$, c'est-à-dire si $v_{ce} > k_{\perp} v_{He}$. Dans ce cas on doit remplacer les termes (TR) et (III)_e par :

$$(TR)' = + \left[\iiint \frac{\rho}{r} \left(\frac{\partial n_e \bar{v}_r}{\partial r} \right) \frac{c}{B} \left[(\Psi_+ \frac{A_+^*}{c} + \Psi_+^* \frac{A_+}{c} + \frac{k_{\perp} v_{He}}{\omega} |\Psi_+|^2) \frac{1}{\omega} + \left\langle \frac{k_{\perp} v^4 / c}{\omega (\omega - \frac{k_{\perp}^2 v^2}{3\omega} - i\nu_c(v))} \right\rangle \frac{m}{3T} |a_+|^2 \right] d_3x \right]_{\text{electrons}}$$

$$(III)'_e = - \left[\iiint \frac{n_e^2}{T} \left\langle \frac{\omega + \omega^* (1 + \eta (\frac{h}{T} - \frac{3}{2}) + k_{\perp} \bar{v})}{3(\omega - \frac{k_{\perp}^2 v^2}{3\omega} - i\nu_c(v))} \frac{v^2}{c^2} \right\rangle |a_+|^2 d_3x \right]$$

ou

$$\nu_c(v) = 2\pi n_e \tau_{eff} e^2 \log \Lambda \frac{1}{m_e^2} \frac{1}{v^3}$$

(17b)

(*) Ce travail a été fait en collaboration avec M. Granga

Bien entendu, dans la moyenne $\langle \rangle$, seule la partie de la Maxwellienne des électrons pour laquelle $K_{\parallel} v_{\parallel} \approx v_c$, est intéressée par la transformation.

L'effet des collisions est essentiellement de changer le dénominateur résonant $\omega + K_{\parallel} v_{\parallel}$ dans (17) en $\omega - \frac{K_{\parallel}^2 v_c^2}{3\omega} - 3i\nu_c(v)$ dans (17b)

Cet effet est considérable si $\omega < v_c$, et si Q_{\perp} a une valeur finie au voisinage de la surface résonante où $K_{\parallel} = m + \frac{e}{q(r)} \approx 0$

Le terme (TR) garde alors la forme rippling dans l'intervalle radial défini par $K_{\parallel} v_{the} < (\omega v_c)^{1/2}$ comme nous l'avons vu dans le § (II.2), plutôt que dans l'intervalle où $K_{\parallel} v_{the} < \omega$ en l'absence de collisions.

Ces intervalles sont aussi responsables du terme $(III)_e$ en présence et en l'absence de collisions mais comme les dénominateurs résonants sont de l'ordre de v_c et ω , respectivement, le rapport des termes $(III)_e$ avec et sans collisions est de l'ordre de $(\frac{\omega}{v_c})^{1/2}$. Compte tenu de (4) cette situation montre que les collisions tendent à diminuer l'effet irréversible sur l'assemblée des électrons d'une perturbation électrique parallèle donnée (proportionnelle à Q_{\perp}). Un point très important est que la partie réelle du terme $(III)_e$ (pour $\left\{ \begin{array}{l} \omega \rightarrow 0 \\ Q_{\perp} = \text{conste} \end{array} \right.$) est toujours nulle en l'absence de collisions, mais peut prendre une valeur finie en présence de collisions. Nous verrons plus loin que cette circonstance joue un rôle essentiel dans la stabilité des modes microtearing.

Il est très important de noter que $R_+(\mathcal{L}) \neq 0$ en présence de collisions si $\omega < \nu_e$, et effectivement des modes microtearing pourraient être instables de ce fait. Cependant pour les modes turbulents observés dans les Tokamaks que nous avons spécialement en vue, nous avons plutôt $\omega > \nu_e$ et ces effets ne semblent pas pertinents. Nous nous bornerons donc dans ce qui suit à la forme non collisionnelle de \mathcal{L}_p .

6) Modes électromagnétiques de petite échelle en régime linéaire

a) Rappel des liens entre \mathcal{L} et les modes du plasma

Nous allons maintenant exploiter cette forme $\mathcal{L} = \mathcal{L}_n + \mathcal{L}_p$ pour étudier les principaux types d'instabilités électromagnétiques en phase linéaire. Comme nous l'avons vu, dire que le mode existe équivaut à dire que

$\mathcal{L}(\omega; A_+, \psi_+; A_+^*, \psi_+^*)$ est extremum pour toutes les variations de A_+^*, ψ_+^* . Ceci implique $\mathcal{L}(\omega; A_+, \psi_+; A_+^*, \psi_+^*) = 0$ d'où la valeur complexe de ω si on connaît la structure géométrique $A_+(z)$, $\psi_+(z)$ d'un mode. On connaît alors aussi la puissance cédée irréversiblement par le mode au plasma (et au champ électromagnétique quasi statique présent dans le plasma supposé clos par une enceinte supraconductrice) :

$$W = -2 \bar{\omega} \mathcal{I}_m(\mathcal{L}(\bar{\omega}; A_+, \psi_+; A_+^*, \psi_+^*)) = -2 \bar{\omega} \mathcal{I}_m \mathcal{L}_p \quad (18)$$

où $\bar{\omega} = \text{Re}(\omega) \neq \omega$. Cette formule s'applique aussi à chaque espèce de particules dont on peut alors calculer le flux radial moyen si on admet que la puissance W est cédée aux particules d'une espèce donnée, celles-ci prenant une quantité de mouvement autour du grand axe (m : nbre d'onde en φ)

$$\Phi_p = -2\bar{\omega} \left(\frac{-m}{R} / \bar{\omega} \right) \int_m (L_p)_{\text{espèce}}$$

En écrivant l'équilibre de la quantité de mouvement, qui ne peut être réalisée que par une force de Laplace due à un mouvement radial de l'assemblée considérée à travers le champ poloidal B_θ , on a :

$$\int dr (\Gamma_p \cdot e) \frac{B_\theta}{c} + \Phi_p = 0$$

où Γ_p est le flux radial de particules de l'espèce considérée à travers une surface magnétique de rayon r , flux qui vaut donc

$$\Gamma_p = -\frac{c}{eB_\theta} \frac{2m}{R} \int \int_m L(r, h, \bar{\omega}) dh \quad (18a)$$

où on a posé $(L_p)_{\text{espèce}} = \int L(r, h, \bar{\omega}) dh dr$. De même le flux d'énergie Γ_E à travers une surface magnétique de rayon r , est donné pour une espèce par

$$\Gamma_E = -\frac{c}{eB_\theta} \frac{2m}{R} \int \int_m L(r, h, \bar{\omega}) h dh \quad (18b)$$

b) Classification des modes électromagnétiques envisagés

Nous étudions des modes non compressionnels, où le vecteur A_+ est parallèle au champ non perturbé B , et de plus nous cherchons des modes de petite échelle.

Or il est connu que les modes tearing ne sont instables que pour des valeurs de l et m faibles : on peut donc utiliser une forme simplifiée de \mathcal{L} donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4\pi} \iiint |\nabla A_{\perp}|^2 d_3 x \\ (I) & + \left[\iiint \frac{ne^2}{T} |\psi_+|^2 \left\langle (1-J_0^2) \frac{\omega + \omega^* (1 + \gamma (\frac{h}{T} - \frac{3}{2}))}{\omega} \right\rangle d_3 x \right]_{ions} \\ (II) & + \sum_{ic} \iiint \frac{ne^2}{T} |\psi_+|^2 \left\langle \frac{\omega^* (1 + \gamma (\frac{h}{T} - \frac{3}{2}))}{\omega} \frac{\vec{k}_{\perp} \cdot \vec{v}_3}{\omega} J_0^2 \right\rangle d_3 x \\ (III) & - \sum_{ic} \iiint \frac{ne^2}{T} |a_+|^2 \left\langle \frac{\omega + \omega^* (1 + \gamma (\frac{h}{T} - \frac{3}{2}))}{\omega + \kappa_{\parallel} v_{\parallel}} \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} J_0^2 \right\rangle d_3 x \\ (IV) & - \left[\iiint \frac{ne^2}{T} |\psi_+|^2 \left(\sum_{\varepsilon=\pm 1} \left\langle \frac{\omega + \omega^* (1 + \gamma (\frac{h}{T} - \frac{3}{2}))}{\omega + \kappa_{\parallel} v_{\parallel} + \varepsilon v_{\parallel} / q R} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \cdot \frac{1}{4} \frac{|k_{\theta} - \varepsilon_i k_r|^2 (v_{g\perp})^2 J_0^2}{\omega^2} \right\rangle \right) d_3 x \right]_{ions} \end{aligned} \quad (19)$$

Rappels : $|v_g| = \frac{c}{eB} \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{R}$

$$J_0 = J_0(k_{\perp} \rho_c)$$

$$\delta A, \delta \psi = (A_+(r), \psi_+(r)) \exp(i(\theta + im\varphi)) + cc.$$

$$k_{\theta} = \frac{l}{R} ; k_{\parallel} = \frac{1}{R} \left(m + \frac{l}{q(r)} \right) ; k_{\parallel} = \frac{\partial k_{\parallel}}{\partial r} = k_{\theta} / L_s$$

$$(L_s)^{-1} = -\frac{1}{qR} \left(r \frac{\partial \log q}{\partial r} \right) ; k_{\parallel} = k_{\theta} \frac{x}{L_s} \quad \text{si } \begin{cases} x = r - r_0 \\ m + \frac{l}{q(r)} = 0 \end{cases}$$

$$a_+ = A_+ + \frac{c k_{\parallel}}{\omega} \psi_+$$

$$\omega^* = \frac{e}{T} T \frac{\partial n}{\partial r} \frac{c}{eB}$$

$$\gamma = \left(\partial \log T / \partial r \right) \cdot \left(\partial \log n / \partial r \right)^{-1}$$

$\langle \rangle$ = moyenne sur la Maxwellienne

On a négligé :

- l'effet des particules piégées
- l'effet des collisions, qui change essentiellement le terme III pour les électrons. Prendre $\bar{\omega} + i\gamma$ avec $\gamma \rightarrow 0^-$.
- les effets dus au gradient $\frac{\partial I}{\partial r}$ de la densité de courant (modes tearing etc ...)

Enfin on a vu que pour pouvoir annuler la partie imaginaire de \mathcal{L} , il fallait avoir $\omega \sim \omega^*$ ce qui imposait $\omega \sim k_{\perp} e_{thi} \frac{v_{thi}}{r}$

Il faut noter que :

- . le terme (I) (pour les ions) représente l'effet de l'inertie.
- . les termes (II) sont responsables des effets d'interchange (et de couplage des modes).
- . les termes (III) représentent l'effet de conductivité parallèle et tendent à imposer la contrainte MHD : $\delta E_{\parallel} \sim a_{+} = 0$
- . le terme (IV) (pour les ions) correspond au fait que les surfaces de dérive ne coïncident pas avec les surfaces magnétiques ; valable seulement si $k_{\perp} e_{thi} q < 1$.

Le terme (III) est en $|a_{+}|^2$ et tend à être du signe de \mathcal{L}_{III} . L'annulation de \mathcal{L} ne peut donc être obtenue que par un des termes en $|\psi_{\pm}|^2$, c'est-à-dire les termes I, II ou IV. Examinons les règles de dominance entre ces trois termes :

- On a d'abord

$$\frac{(II)}{(I)} \sim \frac{\langle \vec{k}_{\perp} \vec{v}_g \rangle}{k_{\perp}^2 e_{thi}^2} \frac{1}{\omega} \sim \frac{r}{R_0} \cdot \frac{1}{k_{\perp}^2 e_{thi}^2}$$

où R_0^{-1} est la courbure moyenne $\sim \frac{r}{R^2}$

- Le terme IV, qui comme le terme II, est un effet torique, calculé pour

$$\frac{v_{thi}}{qR} \gg |K_{\parallel} v_{thi}| \quad \text{donne}$$

$$\bullet \quad \frac{(IV)}{(I)} \approx \frac{1}{K_{\theta}^2 e_{thi}^2} \frac{r^2}{R^2} \quad \text{si} \quad \omega \geq \frac{v_{thi}}{qR} \rightarrow |K_{\theta} e_{thi}| \gg \frac{r}{qR}$$

$$\bullet \quad \frac{Re(IV)}{I} \sim q^2 \quad \text{si} \quad \frac{v_{thi}}{qR} \gg |\omega| \rightarrow K_{\theta} e_{thi} < \frac{r}{qR}$$

dans le cas où $K_{\perp} e_{thi} q < 1$, sinon le terme IV est négligeable.

On peut donc tracer le diagramme donnant les règles de dominance entre les différents termes en $|\psi_+|^2$ de \mathcal{L}_p :

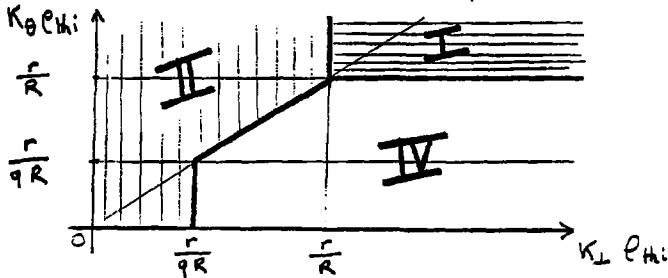


Fig. 3

En minimisant \mathcal{L} par rapport à ψ_+^* , on voit encore que dans les cas où (II) ou (IV) sont dominants, on doit avoir :

$$\left| \frac{c}{\omega} K_{\parallel} \psi_+ \right| \gg a_+$$

c'est-à-dire que le mode doit être MHD.

Étudions le cas où (IV) est dominant, ce qui correspond, comme nous allons le voir, à un mode d'Alfvén presque MHD couplé aux ions par les effets toriques contenus dans ce terme (IV).

(Le terme (II) quant à lui correspond aux modes d'interchange que l'on sait être stables jusqu'à des valeurs de β très supérieures aux valeurs actuelles [23]).

c) Mode d'Alfvén avec effets toroïdaux

Le mécanisme du mode est correctement analysé avec des fonctions d'essai

$$\begin{aligned}\psi_+ &= \psi \exp(-|\alpha x|) \exp(i l \theta + i m \varphi) \\ A_+ &= a \alpha x \exp(-|\alpha x|) \exp(i l \theta + i m \varphi)\end{aligned}$$

avec $k_\theta \ll \alpha \rightarrow k_{||} \ll \frac{1}{qR}$

en remplaçant dans \mathcal{L} et en intégrant, on a, à un facteur multiplicatif S près (où S est l'aire de la surface magnétique), pour $\omega \gtrsim \frac{v_{thi}}{qR}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{8\pi} |\alpha|^2 |\alpha| \\ \left. \begin{aligned} \text{(I)} & \left. \begin{aligned} & + \frac{ne^2}{2T} |\psi|^2 |\alpha| e_{thi}^2 \frac{\omega + \omega_i^* (1+q)}{\omega} \\ R_e \text{(IV)} & \left. \begin{aligned} & - x \frac{ne^2}{T} |\psi|^2 |\alpha| e_{thi}^2 \frac{v_{thi}^2}{R^2} \frac{\omega + \omega_i^* (1+2q)}{\omega^3} \\ i \mathcal{J}_m \text{(IV)} & \left. \begin{aligned} & - i y \frac{ne^2}{T} |\psi|^2 |\alpha| e_{thi}^2 \frac{v_{thi}^2}{R^2} \frac{\omega + \omega_i^* (1+bq)}{|v_{thi}/qR| \omega^2} \\ \text{(III)}_e & \left. \begin{aligned} & + \frac{ne^2}{T} \left| \frac{a\alpha}{k_{||}^2} + \frac{c\psi}{\omega} \right|^2 \frac{1}{|\alpha|} \frac{(\omega + \omega_e^*) \omega}{c^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \end{aligned}$$

avec :
$$X = \begin{cases} \frac{7}{8} & \text{si } q \alpha e_{thi} \lesssim 1 \\ \rightarrow 0 & \text{si } q \alpha e_{thi} \gg 1 \end{cases}$$

$$Y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \exp(-\beta) \left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{2} \right) \text{ avec } \begin{cases} b = \beta - \frac{3}{2} + \frac{\beta^2 + 2\beta + \frac{3}{2}}{\beta^2 + \beta + \frac{1}{2}} \\ \beta = \frac{q^2 R^2 \omega^2}{v_{thi}^2} \geq 1 \end{cases}$$

Nous avons en vue un mode de nature presque MHD. Nous imposons donc que

$A_+ \gg a_+$ ce qui donne, minimisant \mathcal{L} par rapport à A_+^*

$$\frac{ne^2}{T} \left| \frac{\omega |\omega + \omega_i^*|}{c^2} \right| \frac{1}{k_{\parallel}^2} > \frac{1}{4\pi} \quad (20)$$

Nous pouvons ensuite imposer la contrainte MHD : $a \alpha / k_{\parallel} + \frac{c\psi}{\omega} = 0$.

La résonance correspondant aux effets toriques produit $\mathcal{I}_m(\text{IV})$ qu'il faut

annuler pour le mode marginal. Ceci donne $\omega + \omega_i^* (1 + b\gamma) = 0$ (20a)

Compte tenu de (20) nous ne pouvons pas utiliser les faibles valeurs de $\beta \sim \omega^2$.

Pour $\beta \gg 1$, le mode n'extrait plus de puissance ($W = 0$ avec

$W \sim \mathcal{I}_m(\text{IV})$ compte tenu de (18)) de l'assemblée des ions et son

taux de croissance ne peut alors être qu'extrêmement faible. Nous choisissons

donc $\beta \approx 1$. Nous avons alors $b \approx 1,3$ et compte tenu de (20a)

$$\omega = -\omega_i^* (1 + 1,3\gamma)$$

$$k_{\theta} e_{thi} = \frac{r_p}{qR} \frac{2}{1 + 1,3\gamma}$$

notant que pour $q \alpha e_{thi} < 1$, $\text{Re}(\text{IV}) / (\text{I}) \sim q^2 \gg 1$ et

écrivant que $\text{Re}(\mathcal{L}) = 0$, il vient :

$$\beta_i = \frac{nT}{B^2/8\pi} = \frac{8}{7} \left(\frac{r_p}{L_s} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2 q^2 e_{thi}^+} \frac{1}{0,7\gamma(1 + 1,3\gamma)}$$

$$r_p^{-1} = \frac{\beta_i}{n^2 r}$$

La valeur minima de β_i est obtenue pour la valeur limite $\alpha q e_{thi} = 1$, qui correspond d'ailleurs aussi approximativement à un extremum de \mathcal{L} par rapport à α . L'instabilité apparaît donc pour

$$\beta_i > (\beta_i)_{cr} \approx 2 \left(\frac{r_p}{L_s} \right)^2 \frac{1}{\eta(1+3\eta)}$$

La condition (20) est alors vérifiée [24].

d) Modes de dérive corrigés des effets électromagnétiques

On ne s'intéresse plus aux modes d'interchange ni au mode d'Alfvén toroïdal et dans

(19) on élimine donc les termes II et IV. Posons dans une 1^o approche de type WKB :

$$A = A_+$$

$$\psi = \psi_+ \cdot \frac{c \kappa_{\perp}}{\omega}$$

on a alors approximativement

$$4\pi \mathcal{L} = -\kappa_{\perp}^2 A^2 + \varepsilon \frac{\kappa_{\perp}^2}{\omega} |\psi|^2 + \alpha |A + \psi|^2$$

$$\text{ou } \frac{\kappa_{\perp}}{\omega} = \kappa_{\perp} \quad \text{si } \kappa_{\perp} < \frac{1}{e_{thi}}$$

$$\frac{\kappa_{\perp}}{\omega} \approx \frac{1}{e_{thi}} \quad \text{si } \kappa_{\perp} > \frac{1}{e_{thi}}$$

$$\varepsilon = (\omega + \omega_e^* (1 + \eta)) \omega \frac{1}{\kappa_{\parallel}^2 c_A^2} \quad \text{avec } c_A^2 = \frac{B^2}{4\pi n m_i}$$

Excluant provisoirement la petite région au voisinage de la surface de résonance

où $\omega \gg \kappa_{\parallel} v_{the}$, nous avons

$$\chi \approx \frac{4\pi n e^2}{T} \frac{\omega + \omega_e^*}{\kappa_{\parallel}^2 c^2} \omega$$

En dérivant par rapport à A^* et ψ^* , on a alors

$$-\kappa_{\perp}^2 A + \alpha (A + \psi) = 0$$

$$\varepsilon \frac{\kappa_{\perp}^2}{\omega} \psi + \alpha (A + \psi) = 0$$

d'où l'on tire :

$$\frac{A}{\Psi} = \frac{\alpha}{k_{\perp}^2 - \alpha} = - \frac{\varepsilon k_{\perp}^2 + \alpha}{\alpha}$$

D'où

$$-k_{\perp}^2 \varepsilon \frac{k_{\perp}^2}{\alpha} + \alpha (-k_{\perp}^2 + \frac{\varepsilon k_{\perp}^2}{\alpha}) = 0 \quad (21)$$

On doit alors distinguer deux possibilités :

$$1) \underline{k_{\perp}^2 < \frac{1}{\varepsilon \mu_0^2}} \quad \text{ie} \quad \underline{k_{\perp}^2} = k_{\perp}^2$$

la relation (21) devient

$$k_{\perp}^2 \left(k_{\perp}^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} - \alpha \right) = 0$$

et on doit donc alors avoir :

$$\text{soit } k_{\perp}^2 = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{A}{\Psi} = -1 \quad (\text{cas 1})$$

$$\text{soit } k_{\perp}^2 + \frac{\alpha}{\varepsilon} - \alpha = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{A}{\Psi} = -\varepsilon \quad (\text{cas 2})$$

$$2) \underline{k_{\perp}^2 > \frac{1}{\varepsilon \mu_0^2}} \quad \text{ie} \quad \underline{k_{\perp}^2} = \frac{O(1)}{\varepsilon \mu_0^2}$$

la relation (21) devient

$$-k_{\perp}^2 \varepsilon \frac{O(1)}{\varepsilon \mu_0^2} + \alpha \left(-k_{\perp}^2 + \frac{\varepsilon \cdot O(1)}{\varepsilon \mu_0^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \frac{A}{\Psi} &= - \frac{\varepsilon \cdot O(1) \cdot \frac{1}{\varepsilon \mu_0^2} + \alpha}{\alpha} \\ &= - \frac{\varepsilon \cdot O(1)}{k_{\perp} \varepsilon \mu_0^2} \quad (\text{cas 3}) \end{aligned}$$

Alors, suivant la valeur de κ_{\parallel} , donc de ε , on peut distinguer les solutions possibles :

$\varepsilon < 1$: extérieur de la couche d'Alfvén définie par $|\omega| < \kappa_{\perp} c_A$

- le mode est MHD ($A = -\psi$) si la valeur de κ_{\perp} correspondante est inférieure à $\frac{1}{e_{hi}}$ (cas 1)
- le mode est électrostatique ($|A| < |\psi|$) : (cas 2 ou cas 3)

$\varepsilon > 1$: intérieur de la couche

- le mode est MHD si $\kappa_{\perp} < \frac{1}{e_{hi}}$ (cas 1)

• sinon :

- ou bien $|\omega + \omega_e^*| \sim \omega$ et donc $\alpha = \frac{\varepsilon}{e_{hi}^2} o'(1)$

alors le cas 2 entraîne $\kappa_{\perp}^2 = \alpha \sim \frac{\varepsilon}{e_{hi}^2} > \frac{1}{e_{hi}^2}$ impossible

tandis que le cas 3 entraîne

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_{\perp}^2 = \frac{\varepsilon^2 o(1) o'(1)}{e_{hi}^2 (o(1) + o'(1))} \\ \text{et } \frac{A}{\psi} = - \frac{o(1) + o'(1)}{o'(1)} \end{array} \right.$$

d'où une solution possible $|A| \sim |\psi|$, $\kappa_{\perp} e_{hi} \geq 1$

- ou bien $|\omega + \omega_e^*| \ll \omega$ et donc $\alpha \rightarrow 0$

et il subsiste alors une solution dans le cas 2 avec

$\kappa_{\perp} e_{hi} < 1$ et $A \gg \psi$: solution purement magnétique

Choix des fonctions d'essai définitives

. Cette discussion nous conduit à choisir, comme fonctions d'essai pour une étude plus fine, une famille de fonctions dont la structure est définie par le schéma suivant :

$$(L_s \sim qR, r_p \sim r, \eta \sim 1 \text{ et } \begin{cases} x_e \sim \sqrt{\frac{r_0}{m_i}} \frac{qR}{r} e^{H_i} \\ x_A \sim \sqrt{\beta} \frac{qR}{r} e^{H_i} \\ x_L \sim \frac{qR}{r} e^{H_i} \end{cases})$$

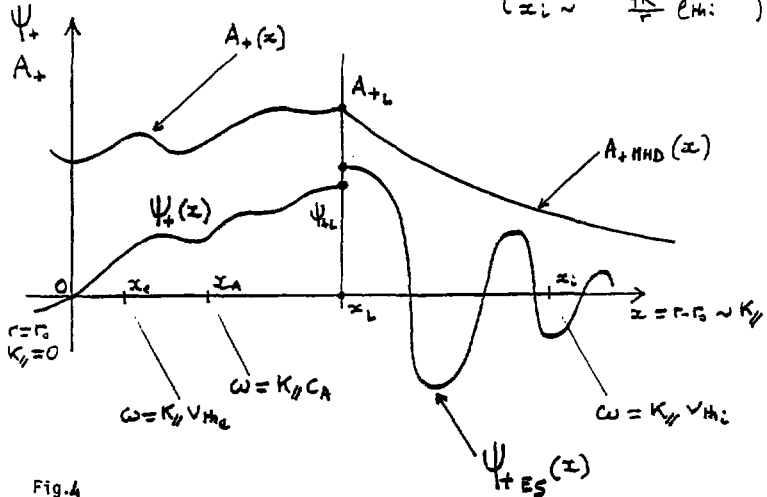


Fig.4

$(A_+(z), \Psi_+(z))$ de parités définies et opposées)

On choisit la longueur x_L telle que $x_L > x_A$ et $x_L > e^{H_i}$.
Notons que $x_L \gg x_e$, épaisseur de la zone où $|\omega| \geq |K_D \sqrt{H_e}|$.

D'autre part, pour $\beta \ll 1$, $x_L \ll x_i$.

A l'extérieur, c'est-à-dire pour $x > x_L$, on pose

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ \Psi_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{+MHD} \\ \Psi_{+MHD} = -\frac{\omega}{K_D C} A_{+MHD} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{+ES} = 0 \\ \Psi_{+ES} \end{pmatrix}$$

Le champ (A_+, Ψ_+) à l'intérieur est tel que

$$A_+(z_L) = A_{+L} = A_{+MHD}(z)$$

$$\Psi_+(z_L) = \Psi_{+L} = -\frac{\omega}{K_{\parallel} z_L c} A_{+MHD}(z_L) + \Psi_{+ES}(z)$$

ce qui assure la continuité en z_L .

Les champs $(A_+, \Psi_+)_{MHD}$ et $(A_+, \Psi_+)_{ES}$

rendent indépendamment extremum la forme \mathcal{L} et on peut donc les étudier séparément.

- Terme \mathcal{L}_{ES} de \mathcal{L} correspondant à la partie E.S. du mode (à l'extérieur de la couche $[-z_L, +z_L]$)

$$\mathcal{L}_{ES} = \int_{|z| > z_L} \frac{ne^2}{T} \left(\delta |\Psi_{+ES}|^2 + \gamma \left| \frac{\partial \Psi_{+ES}}{\partial r} \right|^2 e^{2\eta_i} \right) d_3 x$$

où l'on a négligé le gradient de température des ions et où

$$\gamma = -\frac{\omega + \omega_i^*}{\omega} \frac{d \left(J_0^2 \left(\frac{s^2}{2} \right) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right)}{ds^2} \quad (\gamma > 0)$$

$$\delta = 2 - \frac{\omega + \omega_i^*}{\omega} I_0 \left(\frac{s^2}{2} \right) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \left[1 + \frac{v_{thi}^2}{2\omega^2} K_{\parallel}^2 \right]$$

avec

$$s = K_{\parallel} e \eta_i$$

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 (r - r_0)^2$$

$$\delta_0 = 2 - \frac{\omega + \omega_i^*}{\omega} I_0 \left(\frac{s^2}{2} \right) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)$$

$$\delta_1 = -\frac{\omega + \omega_i^*}{\omega} I_0^2 \left(\frac{s^2}{2} \right) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \frac{v_{thi}^2}{2\omega^2} \left(\frac{dK_{\parallel}}{dr} \right)^2$$

N.B. : On a négligé aussi dans \mathcal{L}_{ES} la partie imaginaire correspondant à l'interaction avec les électrons, qui est faible dans la zone extérieure.

La dérivation par rapport à Ψ_{+ES}^* donne l'équation habituelle des modes E.S.

$$-\gamma \frac{\partial^2 \Psi_{+ES}}{\partial x^2} e_{thi}^2 + \delta \Psi_{+ES} = 0$$

et la condition aux limites entraîne (au facteur $S = 2\pi R \cdot 2\pi r$ près)

$$L_{ES} = -2 \frac{ne^2}{T} \gamma e_{thi}^2 \chi \left| \Psi_{+L} + \frac{\omega}{ck_r x_L} A_{+L} \right|^2$$

où

$$\chi = \left(\frac{\partial \Psi_{+ES}}{\Psi_{+ES} \partial r} \right)_{x=x_L}$$

Si on pose

$$b = (-\delta_1 / \gamma e_{thi}^2)^{1/2}$$

$$d = -\delta_0 / b \gamma e_{thi}^2$$

$$u = (r-r_0) b^{1/2}$$

la solution est du type

$$\Psi_{+ES}(r-r_0) = a_p f_p(u) + a_i f_i(u)$$

où f_p et f_i sont les fonctions standard hypergéométriques respectivement paire et impaire.

Pour avoir l'onde progressive divergente pour $r-r_0 \rightarrow \infty$, il faut, pour $\omega > 0$, $\omega + \omega_i^* > 0$:

$$\left(\frac{\partial \Psi_{+ES}}{\Psi_{+ES} \partial r} \right)_{|x|=x_L} = \chi = -b^{1/2} \cdot 2 \cdot \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} id\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} id\right)} \right]^*$$

c'est-à-dire

$$|\delta_0| < \frac{r}{L_S} \rightarrow \chi = -(1-i) \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \frac{dK_V}{dr} \frac{1}{e_{Hi}} \frac{v_{Hi}}{\omega} \right|^{1/2} \quad (22a)$$

$$|\delta_0| > \frac{r}{L_S} \rightarrow \chi = \sqrt{\left| \frac{\delta}{\gamma} \right|} \frac{1}{e_{Hi}} \cdot \Sigma \quad (22b)$$

avec

$$\begin{cases} \Sigma = -1 & \text{si } \gamma\delta > 0 \\ \Sigma = i & \text{si } \gamma\delta < 0 \end{cases}$$

et

$$b = \left| \frac{v_{Hi}}{\omega} \frac{K_\Theta}{L_S e_{Hi}} \right|$$

- Terme \mathcal{L}_{MHD} de \mathcal{L} correspondant à la composante MHD pour $|x| > x_L$

$$\mathcal{L}_{MHD} = \int_{|x| > x_L} \left[-\frac{1}{4\pi} |\nabla A_{+MHD}|^2 + \frac{\omega + \omega_i^*(1+p)}{\omega} \frac{c^2}{c_A^2} \left| \nabla \left(\frac{\omega}{cK_V} A_{+MHD} \right) \right|^2 \right] d_3x$$

d'où, compte tenu que $x_L > e_{Hi}, x_A$

$$\mathcal{L}_{MHD} = -\frac{2}{4\pi} |A_{+L}|^2 |K_\Theta|$$

Finalement nous avons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{int.} + \mathcal{L}_{ext.}$

où $\mathcal{L}_{int.}$ correspond à la région intérieure $|x| < x_L$

on a :

$$\mathcal{L}_{ext.} = -\frac{2}{4\pi} |A_{+L}|^2 |K_\Theta| - 2 \frac{ne^2}{T} \gamma e_{Hi}^2 \chi \left| \Psi_{+L} + \frac{\omega}{cK_V x_L} A_{+L} \right|^2$$

et χ est donné par (22a) et (22b)

Cette forme \mathcal{L} décrit un mode essentiellement E.S. mais qui peut tirer son énergie grâce à la composante magnétique au voisinage de la surface résonante.

Modes à structure radiale simple

On peut alors dans la région intérieure séparer deux possibilités :

- ψ_+ est pair, A_+ impair : c'est le mode habituel qui est stabilisé par les effets de β fini.

- ψ_+ est impair, A_+ pair : c'est le microtearing que nous allons examiner maintenant en prenant des fonctions d'essai linéaires dans la zone intérieure :

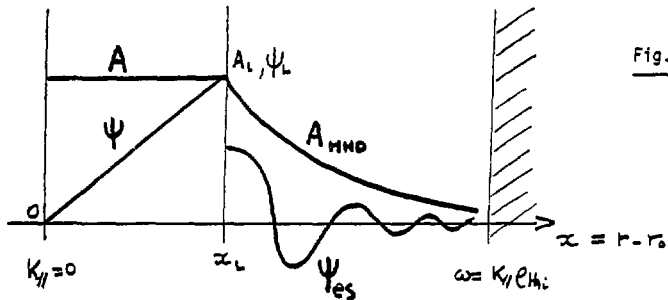


Fig.5

On peut alors calculer \mathcal{L} entièrement (toujours à S près) :

$$\mathcal{L} = \frac{2ne^2}{T} |\psi_{+L}|^2 \left[\delta_0 \frac{x_L}{3} + \gamma e_{hi}^2 \frac{1}{x_L} \right] \quad (\alpha)$$

$$- i \sqrt{\pi} \frac{2ne^2}{m_e c^2} \frac{\omega + \omega_e^* \left(1 + \frac{\rho}{z}\right)}{|k_\perp| v_{the}} |A_{+L}|^2 \quad (\beta)$$

$$+ \frac{2ne^2}{T} \frac{\omega + \omega_e^*}{k_\parallel c} (A_{+L} \psi_{+L}^* + c.c.) \quad (\gamma)$$

$$- 2 \frac{ne^2}{T} \frac{\omega(\omega + \omega_c^*)}{k_y^2 c^2 x_L} |A_{+L}|^2 \quad \textcircled{\delta}$$

$$- \frac{2}{4\pi} |A_{+L}|^2 |K_\theta| \quad \textcircled{\epsilon}$$

$$- \frac{2ne^2}{T} \chi \gamma e_{thi}^2 \left(| \Psi_{+L} |^2 + \left(\Psi_{+L} \cdot \frac{\omega}{k_y c x_L} A_{+L} + cc \right) + |A_{+L}|^2 \right) \quad \textcircled{\zeta} \quad \textcircled{\eta} \quad \textcircled{\theta}$$

(23)

avec :

$$\omega > 0 \quad ; \quad \gamma = - \frac{\omega + \omega_c^*}{\omega} \frac{dI_0 \left(\frac{\Delta^2}{L} \right) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2}\right)}{d\Delta^2} > 0$$

$$\Delta = K_\theta e_{thi} \quad ; \quad x_L \geq e_{thi} \quad , \quad \frac{\omega}{k_y c_A}$$

Les termes $\textcircled{\alpha}$ à $\textcircled{\delta}$ représentent \mathcal{L}_{int} , les suivants $\textcircled{\epsilon}$ à $\textcircled{\theta}$, \mathcal{L}_{ext} .

Sauf si $\omega + \omega_c^* = 0$ nous avons $\textcircled{\eta} < \textcircled{\gamma}$ et $\textcircled{\theta} < \textcircled{\delta}$

$$\bullet \text{ Si } \delta_0 = 2 - \frac{\omega + \omega_c^*}{\omega} I_0 \left(\frac{\Delta^2}{2} \right) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2}\right) > \frac{r}{L_S} :$$

$$\chi \gamma e_{thi}^2 = e_{thi} \sqrt{|\delta_0|} \xi \quad \text{avec : } \begin{cases} \xi = -1 & \text{si } \delta_0 \gamma > 0 \\ \xi = i & \text{si } \delta_0 \gamma < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } \delta_0 < \frac{r}{L_S} : \chi \gamma e_{thi}^2 = -(1-i) \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \frac{dK_{//}}{dr} \frac{v_{thi}}{\omega} \right|^{1/2} \gamma e_{thi}^{3/2}$$

1° cas : $\delta_0 \gamma > 0$ c'est-à-dire $\delta_0 > 0$ (car $\gamma > 0$)

$$\text{Si } \delta_0 > \frac{r}{L_S}, \quad \chi \gamma e_{thi}^2 = - e_{thi} \sqrt{|\delta_0 \gamma|}$$

le seul terme imaginaire est le terme (B) :

pour l'annuler il faut avoir

$$\omega + \omega_e^* \left(1 + \frac{r}{2}\right) = 0$$

or $\omega_i^* = -\omega_e^*$, d'où :

$$\frac{\omega + \omega_i^*}{\omega} = \frac{2 + \frac{r}{2}}{1 + \frac{r}{2}} \quad (24)$$

d'où $\delta_0 > \frac{r}{L_S}$, compatible avec l'hypothèse

En mettant alors \mathcal{L} sous la forme

$$\mathcal{L} = -P |A_{+L}|^2 + P' |\Psi_{+L}|^2 + C (A_{+L} \Psi_{+L}^* + c.c.) \quad (25)$$

on a P et P' positifs. La minimisation en $A_{+L}^* \Psi_{+L}^*$ impose que le déterminant $-PP' - C^2 = 0$: impossible

On peut le regretter, car un mode de ce type, s'il existait, serait un excellent candidat pour justifier le transport électronique en régime quasi-linéaire, ainsi que nous le verrons dans le § (7). Il faut noter que le fait que le mode soit stable en l'absence de collisions est dû à ce que le terme (III) pour les électrons de l'expression (17) de la forme \mathcal{L} produit essentiellement dans le domaine $\omega \geq K_y v_{the}$ au voisinage de la surface de résonance un terme proportionnel à $|A_{+L}|^2$, à savoir le terme (B) dans l'expression (23) de \mathcal{L} , qui est purement imaginaire pour $\text{Im } \omega \rightarrow 0^-$. Cependant, nous avons vu que le terme (III) dans (17) était affecté par les collisions (cf. Eq. (17b)). Pour $\omega < v_c$, il produit un terme réel dans le domaine $\omega v_c \geq (K_y v_{the})^2$, qui remplace maintenant le domaine $\omega \geq K_y v_{the}$, et que nous supposons encore de faible extension radiale par rapport au domaine intérieur $|x| < x_L$.

Précisément nous devons remplacer dans (23) le terme \textcircled{B} par

$$\textcircled{\beta'} = (-i + 1) \sqrt{\pi} \frac{2ne^2}{m_e c^2} \frac{\omega + \omega_e^* (1 + b\eta)}{|k_{\parallel}| v_{thc}} Y \sqrt{\frac{\omega}{v_{th}}} |A_{+L}|^2$$

$$\text{ou } v_{ch} = 2\pi n_e z_{eff} e^2 \log A \frac{1}{m_e^2 v_{th}^3} > \omega > 0$$

$$Y = 1,3 \left(1 - 2,5 i \frac{\omega}{v_{ch}} \right)$$

$$b = \frac{5}{4} - 4 i \frac{\omega}{v_{ch}}$$

Le coefficient P dans (25) peut alors être < 0 et on peut avoir $-PP' = C^2$.

Exprimant que $\text{Im} \delta = 0$, il vient

$$\omega + \omega_e^* \left(1 + \frac{5}{4} \eta \right) = 0$$

et $P < 0$ si $\beta_e = \frac{nT}{B^2/8\pi} > r_{ps} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} (k_{\theta} e_{hi}) \left(\frac{v_{ch}}{\omega} \right)^{3/2} \frac{1}{10}$

La condition $PP' = -C^2$ peut alors être vérifiée pour des valeurs $v_{ch} > \omega$.

$$\delta < \frac{v}{L_s}$$

est exclus par (24)

2° cas : $\delta_0 \gamma \leq 0$ c'est-à-dire $\delta_0 < 0$

si $\delta_0 > \frac{v}{L_s}$: $X \gamma e_{hi}^2 = i e_{hi} \sqrt{15} \gamma \frac{\omega}{10}$

on montre de façon analogue qu'il n'y a pas de solution rendant

δ extremum

$$\text{si } \underline{\delta_0} < \frac{r}{L_S} \quad \chi \gamma e_{Hi}^2 = -(1-i) \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \frac{dK_{ij}}{dr} \frac{\sqrt{m_i}}{\omega} \right|^{1/2} e_{Hi}^{3/2}$$

$$\sim -(1-i) \sqrt{\frac{r}{L_S}} e_{Hi}$$

en dérivant par rapport à Ψ_{+L}^* , on obtient

$$\delta_0 \frac{x_L}{3} + \gamma e_{Hi}^2 \frac{1}{x_L} + 0 \left(\sqrt{\frac{r}{L_S}} e_{Hi} \right) = 0$$

$$\text{or } x_L \sim e_{Hi} \sqrt{\beta} \frac{L_S}{r} \quad \text{d'où } \beta > \frac{r}{L_S}$$

En annulant alors le déterminant, on obtient $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} > \left(\frac{r}{L_S} \right)^{3/2}$

Le mode est donc inopérant pour les valeurs actuelles de β

. Modes à nombre d'onde radial $> (e_{Hi})^{-1}$

Dans ce qui précède nous avons supposé que le champ $A_+(x)$ dans le domaine intérieur $|x| < x_L$ avait une structure très simple, avec un nombre d'onde radial $k_r < \frac{1}{x_L}$.

Nous supposons maintenant à l'inverse que le nombre d'onde est élevé. Il faut alors écrire les équations d'Euler pour les champs $A_+(x), \Psi_+(x)$ correspondant au principe $\delta \mathcal{L} = 0$, utilisant l'expression (19) de \mathcal{L} , sans les termes (II), (III). Dans la mesure où $k_r e_{Hi} < 1$ nous devons remplacer $\langle (1-J_0^2) \dots \rangle$ dans le terme (I) de (19) par $k_\perp^2 e_c^2 / 2$, et les équations d'Euler sont constituées par 2 équations différentielles couplées en $A_+(x), \Psi_+(x)$, qui ne peuvent être étudiées que numériquement. Il apparaît dans la littérature que les équations ne conduisent pas à des modes instables pour $\omega > \omega_c$. Pour $k_\perp e_{Hi} > 1$, nous pouvons considérer en première approximation que le coefficient $(1-J_0^2)$ n'est plus différentiel, et est égal en fait à l'unité.

On peut alors éliminer algébriquement le champ $\Psi_+(z)$ dans l'expression de \mathcal{L} . On trouve, pour le domaine $x_c < |z| < x_L$:

$$\Psi_+(z) = - \frac{\omega + \omega_e^*}{k_y c z} \frac{1}{\Delta} A_+(z)$$

$$\mathcal{L} = - \frac{2}{4\pi} \int_{x_c}^{x_L} \left| \frac{\partial A_+}{\partial r} \right|^2 dz + 2 \frac{n_e^2}{T} \int_{x_c}^{x_L} |A_+|^2 \frac{\omega^2 - \omega_e^{*2}}{c^2 k_y^2 z^2} \frac{1}{\Delta} dz$$

$$\Delta = 2$$

L'équation d'Euler impose, dans ce domaine

$$A_+(z) = z^{1/2} e^{\pm i p \log z}$$

$$p = \sqrt{4X^2 - 1} / 2 \quad ; \quad X^2 = 4\pi \frac{n_e^2}{T} (\omega^2 - \omega_e^{*2}) \frac{1}{k_y^2 c^2} \frac{1}{\Delta}$$

choisissant $\omega \simeq -\omega_e^* (1 + \frac{\beta}{2})$, la contribution à \mathcal{L} du domaine $|z| < x_c$ est purement réelle, et il en est alors de même de la contribution du domaine extérieur $|z| > x_L$. Les conditions imposées au champ $A_+(z)$ pour $z = x_c$ et $z = x_L$ sont alors du type $\frac{dA_+}{A_+ dz} = \text{nombre réel}$. Elles peuvent toujours être satisfaites si la quantité \bar{p} est réelle et si la quantité $p \log z$ varie au moins de π dans l'intervalle (x_c, x_L) . Il en est ainsi si

$$\beta_c > \pi^2 \left(\frac{r_p}{L_s} \right)^4 \frac{1}{(1 + \eta_c)(1 + \eta_d)} \quad ; \quad r_p = \frac{\partial n}{n \partial r}$$

Cette approche est évidemment seulement approximative du fait que nous avons admis que $(1 - J_0^2) \simeq 1$. Une autre difficulté est que le champ électrique du mode $\sim A_+ + \frac{c}{\omega} k_y \Psi_+$ tend à s'annuler dans le domaine $|z| < x_c$ et que le mode extrait dans ces conditions très peu d'énergie des électrons dans ce domaine : pour pouvoir annuler $\Im m(\mathcal{L})$ avec $\omega \simeq -\omega_e^* (1 + \beta/2)$ il faut alors nécessairement faire intervenir des électrons piégés. Un examen plus attentif du mode est donc nécessaire. Néanmoins, comme les valeurs de β_c nécessaires à l'instabilité ne sont pas réalisées dans les Tokamaks actuels, nous ne le retiendrons pas dans ce qui suit [23].

e) Comparaison avec d'autres travaux:

Bien que les fonctions d'essai utilisées soient extrêmement simples, nous pensons que les conclusions sont qualitativement correctes. Résumons les :

- les effets toriques sont insuffisants pour rendre vraiment instables les modes d'interchange ou Alfvén toroidal pour les valeurs actuelles de β .
- l'onde électrostatique avec une composante MHD peut être examinée soit en prenant A_{\perp} impair, Ψ_{\perp} pair, qui est le mode ES habituel et est stabilisé par β fini, soit en prenant A_{\perp} pair, Ψ_{\perp} impair, qui est le microtearing, et dont on a vu qu'il était peu plausible pour décrire la turbulence expérimentalement observée.

On pourrait objecter que dans toute cette discussion, un raffinement des fonctions d'essai pourrait faire apparaître un mode soit MHD, soit électrostatique avec une composante magnétique, qui serait instable avec les valeurs actuelles de β . Néanmoins notre étude n'a pas permis d'en faire apparaître, et d'autre part la littérature n'en donne à notre connaissance aucun :

- Une réétude récente [6] des modes d'interchange confirme les conclusions de [7] sur leur stabilité en dessous d'un β critique plus élevé que les β actuels.
- Le mode Alfvén déstabilisé par effet torique avait été prévu dans [8] et [9] avec une limite en β nettement plus élevée que pour nous : cependant, du point de vue de sa structure réactive, le mode était une onde Alfvén conventionnelle, alors que le nôtre est dû entièrement aux effets toriques.
- Les modes de dérive corrigés des effets MHD et envisagés au § 6d (baptisés selon les auteurs microtearing, microtwisting, drift Alfvén, shear Alfvén etc ..) ont été abondamment étudiés : [10] et [11] utilisent une méthode de perturbation que l'on a montré depuis être inapplicable [12], [13]. Une autre étude [14] aboutit aux mêmes conclusions que nous. Par contre de tels modes sont présentés dans [15] comme instables en présence de shear sans condition sur la valeur

de β : malheureusement les auteurs ignorent l'amortissement de l'onde ES par effet du shear, ce qui conduit à des conclusions erronées. Une étude plus fine [16] aboutit aux conditions de stabilité:

$$\beta L_s (v_{the}/v_c) / r_p^2 < 0.3 \quad \text{ou} \quad v_c / \eta \omega_e^* \leq 1$$
 compatibles avec les nôtres. Tout récemment, une étude numérique [17] montre aussi l'importance de la collisionnalité et conclut à l'instabilité pour $v_c / \eta \omega_e^* > 5$.

7) - Flux quasi-linéaires d'énergie électronique induits par ces modes

La contribution des électrons circulants à la quantité $\int_{\text{un } L}$ telle qu'elle est donnée par le terme (III) dans (19) s'exprime (à S près)

$$-\iint \frac{ne^2}{T} (\omega + \omega_e^* (1 + \eta (\frac{v_{\perp}^2}{v_{the}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{v_{the}^2} - \frac{3}{2}))) |\Psi_+ + \frac{\omega}{c k_{\parallel}} A_+|^2 \cdot \exp - \frac{v_{\perp}^2}{v_{the}^2} \sqrt{\pi} \frac{1}{|k_{\parallel}| v_{the}} dr \exp - \frac{v_{\parallel}^2}{v_{the}^2} \frac{dv_{\parallel}^2}{v_{the}^2}$$

et il résulte alors de (18) que le flux radial d'énergie ($/\text{cm}^2$) dû à l'interaction d'un mode avec les électrons circulants vaut

$$\Phi_E = -\chi n \frac{\partial T}{\partial r}$$

où :

• Si A_+ impair, Ψ_+ pair :

$$\chi_e = N k_{\perp}^2 e_{the}^2 \frac{1}{|k_{\parallel}| v_{the}} v_{the}^2 \cdot 0.9 \frac{e^2}{T^2} |\Psi_+ + \frac{\omega A_+}{c k_{\parallel}}|^2 \log \left(\frac{x_{\perp}}{x_E} \right)$$

où $2x_{\perp}$ est l'extension radiale de la fonction $\Psi_+ + \frac{\omega A_+}{c k_{\parallel}}$,

$$x_E = \omega / k_{\parallel} v_{the} \ll x_{\perp}$$

et $N dr$ est le nombre de modes entre les surfaces r , $r+dr$

En présence de collisions, avec $v_c > \omega$, il faut remplacer x_E par

$$x_E' = \frac{\sqrt{\omega} v_c}{k_{\parallel} v_{the}} = x_E \cdot \sqrt{\frac{v_c}{\omega}}$$

• Si A_+ pair, Ψ impair :

$$\chi_e = N K_0^2 \rho_{the}^2 \frac{1}{|k_{\parallel} v_{th}|} v_{th}^2 \cdot 2,6 \frac{e^2}{T} |A_+|^2 \frac{v_{th}^2}{c^2} \quad (26a)$$

En présence de collisions, avec $v_e > \omega$, multiplier χ_e par $\sqrt{\frac{v_e}{\omega}}$.

On peut noter que χ_e s'annule si $\omega \rightarrow 0$. D'autres techniques sont alors nécessaires pour calculer le résidu du χ_e [18].

L'interaction avec les électrons piégés ne peut pas être calculée sans faire intervenir les collisions. Elle n'est significative pour $K_0 > \frac{1}{x_{\perp}}$ que pour des modes $\Psi_+(x)$ pair. On a [19]

$$\left(\chi_e \right)_{\text{piégés}} = N K_0^2 \rho_{the}^2 \frac{1}{v_{th} |k_{\parallel} v_{th}|} 0,4 \frac{e^2}{T^2} |\Psi_+|^2 \frac{v_{th}}{q R \gamma_{EH}} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \mathcal{D}$$

$$\text{où } \gamma_{EH} = \frac{2\pi n e^4 (1 + Z_{eff}) \log \Lambda}{m^2 v_{th}^3} \frac{R}{r}$$

$$\omega_{bh} = \frac{v_{th}}{q R \sqrt{2}} \left(\frac{r}{R} \right)^{1/2} \quad (26b)$$

$$\mathcal{D} = \int_{\frac{\gamma_{EH}}{\omega_{bh}}} \left(\frac{\gamma_{EH}}{\omega} \right)^{2/3} dx \left(x - \frac{3}{2} \right) \exp -x \cdot x^3$$

et où on a supposé que

$$K_0 |v_{g\perp}| < \omega < \gamma_{EH}$$

Les fluctuations de densité δn induites par les modes, et éventuellement détectables par la technique de diffusion microondes, sont données par :

$$\frac{\delta n^2}{n^2} = 4 N \delta_{\perp} \frac{e^2 |\psi_{\perp}|^2}{T_s}$$

Si on se donne δ_{\perp} , cette formule permet d'estimer $N|\psi_{\perp}|^2$ et, utilisant (26a) ou (26b) avec $A_{\perp} = 0$ d'estimer les flux d'énergie induits par la turbulence observée, supposée alors électrostatique. Normalement, le coefficient de transport χ_e dû aux particules piégées est dominant. Il apparaît cependant qu'avec les valeurs de δ_{\perp} prédites par la théorie élémentaire des ondes de dérive, les flux calculés sont nettement inférieurs à ceux déduits des bilans d'énergie électronique à l'intérieur des diverses surfaces magnétiques.

Dans la partie centrale du plasma, l'écart pourrait être rendu compatible avec les barres d'erreur en utilisant des valeurs de δ_{\perp} plus faibles, typiquement $\delta_{\perp} \approx \rho_{H_i}$, ce que pourrait justifier une très forte interaction entre les modes les empêchant de se propager hors des surfaces résonantes $k_{\parallel} = 0$.

Une telle interaction est d'ailleurs suggérée par le fait que les composantes de la turbulence prennent place dans un domaine étendu du plan k_{\perp}, ω sans se concentrer sur une relation de dispersion. Dans la zone extérieure du plasma, il ne semble pas possible de rendre compatibles les valeurs de χ_e calculées pour des modes électrostatiques et celles déduites des bilans d'énergie. On peut alors envisager que la composante magnétique des modes joue le rôle prépondérant dans le transport, ce qui a motivé notre étude. Il faut noter d'abord que des modes ($\psi_{\perp}(z)$ pair, $A_{\perp}(z)$ impair) tendent à devenir MHD pour des valeurs finies de β , c'est-à-dire que $\psi_{\perp} + \frac{\omega}{c k_{\parallel}} A_{\perp}$ tend à s'annuler. Il résulte alors de (26) que pour une valeur donnée de ψ_{\perp} c'est-à-dire du niveau des fluctuations de densité, le coefficient χ_e correspondant aux électrons circulants tend à diminuer, ce qui va dans le sens opposé à celui exigé par l'expérience. L'apparition d'une composante magnétique pour ce type de mode ne change d'ailleurs pas la valeur de $(\chi_e)_{\text{piégés}}$.

généralement dominante. Les microtearing (Ψ_L impair, A_{+L} pair) ouvrent cependant une autre possibilité. Supposant que de tels modes existent, on peut évaluer le rapport $A_{+L}/\Psi_{+L} \sim A_{+L}/\Psi_{+L}$ en rendant l'expression (25) de \mathcal{L} extremum par rapport à Ψ_{+L}^* :

$$A_{+L} = \frac{P'}{C} \Psi_{+L}$$

où les coefficients P' et C peuvent être tirés de l'expression (23).

Supposant $\beta < \frac{r_p^2}{L_s^2}$, $r_p^{-1} \approx \frac{\partial n}{n \partial r}$, $\frac{\partial T}{T \partial r}$, nous pouvons prendre $\chi_e \sim \rho_{thi}$ et nous trouvons alors pour $\eta \approx 1$

$$\left| \frac{A_{+L}}{\Psi_{+L}} \right| \sim \left| \frac{r_p}{L_s} \frac{e}{v_{thi}} \right| F, \quad F = O(1)$$

Il vient alors de (26a)

$$\chi_e = N K_0^2 e_{thi}^2 \frac{1}{k_y v_{thi}} v_{thi}^2 \left(F \cdot \frac{r_p}{L_s} \frac{v_{thi}}{v_{thi}} \right)^2 |\Psi_{+L}|^2$$

qui permet de justifier facilement les flux de chaleur déduits des bilans.

Néanmoins la turbulence ne pourrait pas consister seulement en des modes de ce type, car ils ont une interaction irréversible avec les ions trop faible pour justifier un flux radial de particules à travers les surfaces magnétiques.

8 - Validité de la théorie quasi-linéaire

Toute l'étude précédente a été menée en admettant que l'on pouvait utiliser les hypothèses suivantes :

1° La turbulence est constituée de modes statistiquement indépendants,

2° Chaque mode peut être analysé en admettant que la perturbation de la

fonction de distribution des particules dépend linéairement du champ $\delta E, \delta B$
 (où $\delta A = A_+(z) \exp i\omega t + cc$, $\delta \psi = \psi_+(z) \exp i\omega t + cc$) du mode.

Comme nous l'avons vu plus haut, écrivant les perturbations dues au mode de la fonction de distribution $f(\mathcal{J}, t)$ et de l'Hamiltonien $h(\mathcal{J}, t)$

quasi-statiques sous la forme (7), l'autocohérence du mode est équivalente au fait que la fonctionnelle $\mathcal{L}(A_+, \psi_+; A_+^*, \psi_+^*; \omega) = \mathcal{L}_M + \sum_{\text{espèces}} \mathcal{L}_P$ est donnée par (2b) et \mathcal{L}_P est donnée par (7d) est extremum par rapport à $A_+^* \psi_+^*$

Par ailleurs, l'équation de Vlasov exacte

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \delta f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathcal{J}_k} \left(- \frac{\partial \delta H}{\partial \phi_k} \right) + \frac{\partial \delta f}{\partial \mathcal{J}_k} \left(- \frac{\partial \delta H}{\partial \phi_k} \right) \\ + \frac{\partial \delta f}{\partial \phi_k} \frac{\partial h}{\partial \mathcal{J}_k} + \frac{\partial \delta f}{\partial \phi_k} \frac{\partial \delta H}{\partial \mathcal{J}_k} = 0 \end{aligned}$$

intégrée en $\phi_1 \phi_2 \phi_3$ est pratiquement équivalente à l'équation de Fokker-Planck
 La variation $\frac{\partial f(\mathcal{J}, t)}{\partial t}$ due au mode est donc donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_k} \left(\iiint \frac{\partial \delta f}{\partial \phi_k} \delta H d_3 \phi \right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2 \int_m \frac{\partial}{\partial J_k} \left(\sum_n n_k f_n h_n^* \right)$$

Utilisant la réponse linéaire sans collision (8) de δF par rapport à δH (ou de f_n par rapport à h_{jn}), (\mathcal{L}_p) prend la forme (δa) et d'autre part

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial J_k} \left(D_{kl} \frac{\partial F}{\partial J_l} \right)$$

$$D = \sum_n n_k n_l |h_{jn}(J)|^2 2\pi \delta(\omega + n_l \frac{\partial h}{\partial J_l}) \quad (27)$$

La variation dans le temps d'une quantité de la forme

$$\bar{V} = \int f(J, t) v(J) d_3 J (2\pi)^3$$

représentant une caractéristique macroscopique de l'assemblée considérée, (par exemple son énergie) est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}}{dt} &= \iiint D_{kl} \frac{\partial F}{\partial J_l} \frac{\partial v}{\partial J_k} d_3 J (2\pi)^3 \\ &= \iiint \sum_n n_k n_l |h_{jn}(J)|^2 2\pi \frac{\partial F}{\partial J_l} \frac{\partial v}{\partial J_k} \\ &\quad \delta(\omega + n_l \frac{\partial h}{\partial J_l}) d_3 J (2\pi)^3 \quad (27a) \end{aligned}$$

et apparaît comme une somme d'intégrales définies, sur chaque surface de résonance $\omega + n_k \frac{\partial h}{\partial J_k} = 0$, $h_{\pm n}(J) = 0$

Appliquées au cas d'un Tokamak, les formules (27) redonnent bien les flux de particules et d'énergie (18).

Nous allons réexaminer la validité de la formule sans collisions (8) [20] qui entraîne celle de (8a) et de (27). Nous nous limitons au problème que pose l'effet de résonance près de la surface $\omega + n_k \frac{\partial h}{\partial J_k} = 0$ dans l'espace J dans l'expression (8). La singularité de F_n près de cette surface est bien entendu résolue physiquement par un élargissement de la résonance qui provient soit des collisions coulombiennes, soit d'une diffusion des particules due à la présence de l'ensemble des modes turbulents. Cet élargissement (compté en fréquence) $\delta \Omega_D$ définit le domaine résonant dans l'espace (cf. figure 6).

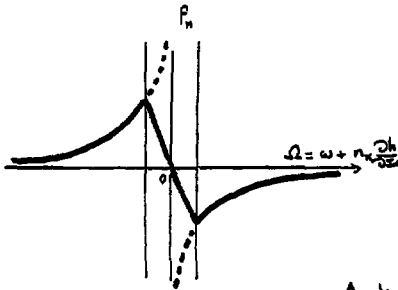
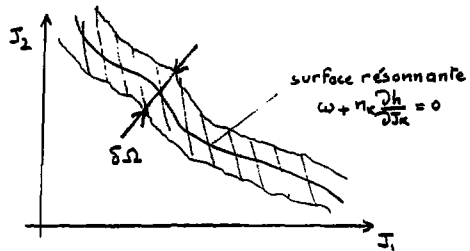


Fig. 6a

Fig. 6b



L'élargissement $(\delta\Omega)$ est lié au temps pendant lequel une particule reste en phase avec le mode :

$$\text{phase} = \int (n_{\kappa} \frac{\partial h}{\partial J_{\kappa}} + \omega) dt = \int \Omega dt$$

$$\text{où } \Omega(J) = n_{\kappa} \frac{\partial h(J)}{\partial J_{\kappa}} + \omega$$

Au bout d'un temps t , il y a une erreur de phase égale à $(\langle (\delta\Omega)^2 \rangle t)^{\frac{1}{2}} t$
où $\langle (\delta\Omega)^2 \rangle$ est le coefficient de diffusion de la variable $\Omega = \omega + n_{\kappa} \frac{\partial h}{\partial J_{\kappa}}$

$$\langle (\delta\Omega)^2 \rangle = \frac{(\Omega(t+\tau) - \Omega(t))^2}{\tau}$$

La particule perd donc sa relation de phase avec le mode au bout d'un temps

$$t = (\delta\Omega_D)^{-1} = (\langle (\delta\Omega)^2 \rangle)^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

Nous admettons que l'expression (8) de $F_n(J)$ peut être utilisée pour obtenir les formules (8a) et (27) si les conditions suivantes sont vérifiées :

(I) La zone de résonance $|\Omega| < \delta\Omega_D$ doit être supérieure à la zone des domaines piégés induits par le mode autour de chaque surface de résonance

$\omega + n_{\kappa} \frac{\partial h}{\partial J_{\kappa}} = 0$. Sinon un effet de plateau dans ces domaines rendrait inapplicable la réponse (8).

(II) La zone de résonance doit être de faible étendue par rapport au domaine D de l'espace J couvert par l'assemblée (c'est-à-dire la fonction $F(J)$), et où les variables $h_{+n}(J)$ ont une variation caractéristique. Si la variable Ω a une variation $\Delta\Omega$ dans ce domaine, cette condition peut s'écrire

$$\delta\Omega_D \approx (\langle (\delta\Omega)^2 \rangle)^{\frac{1}{2}} \ll \Delta\Omega \quad (29)$$

D'autre part, le comportement des particules au voisinage de la surface de résonance doit être dominé par le processus de diffusion de la variable Ω produisant la perte de phase avec le mode. Ceci implique que pendant le temps $\frac{1}{(\delta\Omega_0)}$, les particules n'ont pas le temps de diffuser hors du domaine D.

Si τ_c est le temps nécessaire à ce dernier processus, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\tau_c} \approx \frac{\langle \delta J_x \delta J_L \rangle}{\Delta J_x \Delta J_L}$$

où les quantités $\langle \delta J_x \delta J_L \rangle$ sont les coefficients de diffusion dans l'espace J

$$\langle \delta J_x \delta J_L \rangle = \frac{(J_x(t+\tau) - J_x(t))(J_L(t+\tau) - J_L(t))}{\tau}$$

et ΔJ_x l'extension du domaine D dans la direction J_x , nous devons donc avoir

$$\delta\Omega_0 \approx (\langle (\delta\Omega)^2 \rangle)^{1/2} \gg \frac{1}{\tau_c} \quad (29a)$$

Nous avons évidemment $\frac{1}{\tau_c} > \frac{\delta\Omega^2}{\langle (\delta\Omega)^2 \rangle}$ de sorte que la condition (29), est une conséquence de (29a) que nous retenons donc finalement.

Pour les modes que nous avons envisagés et pour les électrons, nous avons $\Omega = K_y V_{||} + \omega$ et dans ces conditions

$$\langle \delta\Omega^2 \rangle \sim K_y^2 \langle (\delta V_{||})^2 \rangle + V_{||}^2 \langle (\delta K_y)^2 \rangle$$

c'est-à-dire

$$\delta \Omega_D \sim \left(K_{\parallel}^2 v_{He}^2 v_c + (v_{\parallel R})^2 \frac{K_{\perp}^2}{L_s^2} D \right)^{1/3}$$

où $D = \langle (\delta r)^2 \rangle$ est le coefficient de diffusion radial des particules et $v_{\parallel R} = \omega / K_{\parallel}$ est la vitesse de résonance supposée bien entendu $\leq v_{He}$.

La première condition (I) peut être réalisée avec un niveau de collisions suffisant ou bien si les flots se chevauchent (ce qui empêche le piégeage). On peut noter que cette condition peut s'écrire $S = 1$ si $S \equiv \lambda / \delta$ où λ est la distance entre les surfaces résonantes et δ la largeur des flots, et on sait en fait que la stochasticité apparaît pour une valeur plus faible de S : $S \approx 0,7$ [21]. Comme nous nous intéressons à des modes à m et l élevés, donc sur des surfaces de résonance très serrées, ceci sera vrai pour une largeur d'îlot très faible.

En ce qui concerne la condition (II) équivalente à (23a), nous notons d'abord que

$$\frac{1}{\tau_c} = \text{Sup} \left[v_c, \frac{D}{\delta_I^2} \right]$$

où δ_I est l'extension radiale du mode.

L'inégalité (23a) impose alors

$$\left| K_{\parallel}^2 v_{He}^2 v_{ce} + |v_{\parallel R}|^2 \frac{K_{\perp}^2}{L_s^2} D \right|^{1/3} \gg \left(v_c, \frac{D}{\delta_I^2} \right)$$

En l'absence de diffusion radiale des particules, $D=0$, cette condition est équivalente à $k_0 v_{He} > v_{ce}$ et définit le domaine hors duquel les collisions doivent être prises en considération (cf. fin du §5).

En présence de diffusion radiale elle impose en pratique

$$\left| v_{He}^2 \frac{k_0^2}{L_s^2} D \right|^{1/3} \ll v_{He} \frac{k_0}{L_s} \sigma_I$$

qui est vérifiée pour les modes que nous considérons, avec les valeurs du coefficient de diffusion D tels qu'il résultent des bilans dans les diverses surfaces magnétiques.

* Molvig et Al. [22] contestent quant à eux l'applicabilité de la théorie Q.L. à leur problème essentiellement identique au nôtre. Ils remarquent en effet qu'ils obtiennent des termes en $\int \frac{h_n^1(\mathcal{J})}{\omega + \nu_n \frac{\partial h_n^1}{\partial \mathcal{J}}} d\mathcal{J}$ avec des

numérateurs $h_n^2(\mathcal{J})$ qui s'annulent (presque) sur la surface de résonance, et affirment qu'il faut alors remplacer $h_n^2(\mathcal{J})$ par sa valeur moyenne dans la bande de résonance. Ils obtiennent naturellement ainsi des flux très élevés. En fait ils ne justifient pas ce traitement infligé aux h_n^2 traitement qui nous paraît arbitraire dans la mesure où l'on peut vérifier que la théorie Q.L. est effectivement applicable telle quelle.

9 - Conclusion

Le désaccord entre le coefficient de conductivité thermique des électrons χ_e observé et celui déduit des mesures de fluctuation de densité électronique, en utilisant la théorie des ondes de dérive (dans l'approximation quasi-linéaire) nous a incité à examiner les instabilités électromagnétiques dans une géométrie toroïdale, dans l'idée que la composante magnétique pourrait jouer un rôle important. Nous avons vu que, toujours dans le cadre quasi-linéaire, il n'était pas possible ainsi de rendre mieux compte de l'anomalie de χ_e .

Il est néanmoins difficile d'imaginer qu'un autre mécanisme que la turbulence puisse être à l'origine de cette anomalie. La conclusion qui semble donc s'imposer est que cette turbulence ne peut être étudiée par les méthodes habituelles, à savoir étude linéaire de la stabilité des modes, considérés indépendamment les uns des autres, puis estimation quasi-linéaire des coefficients de transport.

Nous avons montré ailleurs [25] qu'une voie à explorer est l'étude de la stabilité linéaire de modes en présence de turbulence : en effet, un mode électromagnétique stable isolément peut être rendu linéairement instable si on l'examine en présence d'un niveau fini de turbulence, ouvrant ainsi la possibilité d'une étude self consistante de la turbulence. Cet effet non linéaire est à distinguer des effets classiques de couplage de modes, la destabilisation étant liée ici à l'introduction d'un certain niveau de stochasticité dans la structure magnétique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Dubois M.A., Samain, A. - Plasma Physics, 1979, 21, 101
- [2] Rebut, P.H. - J. Nuclear Energy, 1962, C4, 159
- [3] Furth, H.P. et al. - Physics Fluids, 1963, 6, 459
- [4] Brillouin, L. - "L'atome de Bohr" Chap.6 P.U.F. (Paris, 1931)
- [5] Arnold, V.I. - "Méthodes mathématiques de la Mécanique Classique" Chap. 10, MIR (Moscou, 1974)
- [6] Yoshikawa, S. et al. - Phys. Fluids, 1980, 23 (4), 791
- [7] Suydam, B.R. - Proc. of 2nd U.N. International Conf. on the Peaceful use of Atomic Energy (Geneva 1958) Vol. 31, p. 157
- [8] Samain, A. - Proceedings of the Garching Conference (Garching 1973) F 5
- [9] Mikhailovshy, A.B. - Nucl. Fusion 1973, 13, 259
- [10] Hsu, J. et al. - Princeton report PPPL - 1358 (1977)
- [11] Catto, P.J. et al. - Phys. Fluids, 1979, 22 (7), 1284
- [12] Tsang, K.T. et al. - P.R.L., 1978, 40, 327
- [13] Ross, D.W. et al. - P.R.L., 1978, 40, 324
- [14] Tsang, K.T. et al. - Phys. Fluids, 1979, 22 (9), 1689
- [15] Hazeltine, R.O. et al. - Phys. Fluids, 1979, 22 (10), 1932
- [16] D'Ippolito, D.A. et al. - Phys. Fluids, 1980, 23 (4), 771
- [17] Gladd, N.T. et al. - Phys. Fluids, 1980, 23 (6), 1182
- [18] Rechester, A. et al. - P.R.L., 1978, 40, 38
- [19] Koehlin, F., Samain, A. - Nucl. Fusion, 1978, 18, 1509
- [20] Requin, G., Samain, A., - Rapport EUR-CEA-FC-1031
- [21] Chirikov, B.V. - Phys. Reports, 1979, 52, 263
- [22] Molvig, K. et al. - P.R.L., 1979, 43, 582
- [23] Cette remarque n'est peut être plus valable dans certaines expériences récentes (Doublet III, Asdex, ISX, PDX : voir conférence IAEA de Baltimore en 1982)
- [24] Cette condition est remplie au centre du plasma dans les décharges de PDX avec très forte puissance additionnelle. Le mode d'Alfven toroidal est peut être lié aux phénomènes de "fishbones"
- [25] Dubois, M.A., Samain, A. - Proc. 7th I.C.P.P.C.N.F. (Innsbruck 1978) IAEA, Vienna 1979. vol. I, p. 615