ИТЭФ –34

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

В.А.БАТАЛИН

ТЕРМОДИНАМИКА ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. РОСТ ЭНТРОПИИ ПУЧКА ПРИ УСКОРЕНИИ И ТРАНСПОРТИРОВКЕ

МОСКВА 1986

УДК 621.384:533,9:536.7 М-16

Проводится рассмотрение процессов роста эмиттанса в пучке, которое основано на анализе решений системы уравнений движения ансамбля заряженных частиц. Система уравнений движения получена с помощью функции Лагранжа с обобщенным потенциалом, который включает в себя связанную энергию Гельмгольца.

Рассмотрение указывает на существование по крайней мере трех типов процессов, ведущих к увеличению эмиттанса пучка при его транспортировке и ускорении: эффектов, аналогичных аберрациям оптики, связанных с нелинейностью фокусирующих и ускоряющих полей и нелинейностью сил собственного объемного заряда; процессов изменения температуры и энтропии пучка без теплообмена с внешними источниками энергии (они аналогичны обратимым термодинамическим циклам); процессов с притоком или убылью тепла. В частности, необратимых явлений в пучках частиц, которые ведут к производству энтропии.

Анализ производства энтропии в пучке заряженных частиц, при котором пучок рассматривается как релаксирующая термодинамическая система, обнаруживает связь между ростом эмиттанса пучка и ведущими к производству энтропии необратимыми процессами в нем/I/.

Для того, чтобы количественно (желательно с помощью аналитического выражения) определить, как трансформируется приращение энтропии пучка в возрастание его эмиттанса, и попытаться найти более общие, чем дают широко используемые методы численного моделирования, закономерности роста эмиттанса, нужно установить явную связь между понятиями энтропии и эмиттанса.

По-видимому, одной из возможностей установления указанной связи является отыскание решений такого уравнения движения частиц пучка, в которое, наряду с обычными для одночастичных уравнений "одночастичными" силами (взаимодействиями), введены макроскопические характеристики пучка (всей системы частиц) в виде энтропии и температуры, подобно тому, как среднее, самосогласованное кулоновское поле системы заряженных частиц вводится в кинетическое уравнение Власова.

В данной работе предпринимается попытка установления связи между процессами изменения энтропии и эмиттанса пучка для решения определенной задачи, а именно для оценки роста эмиттанса пучка при его ускорении и транспортировке.

В качестве исходной модели будем рассматривать пучок как систему заряженных частиц во внешнем поле. При этом для учета тех взаимодействий частиц между собой, которые приводят к необратимым процессам в движении всей системы, сконструируем обобщенный потенциал /2/ путем введения в потенциальную энергию системы невзаимодействующих частиц дополнительного члена - связанной энергии Гельмгольца TS,

$$U = e\sum_{i=1}^{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\varphi_0({}^{\alpha}q_i) + TS = U_0 + TS, \qquad (I)$$

где e - заряд частицы, $\varphi_0({}^{\alpha}q_i)$ - потенциал внешнего поля; S - энтропия равновесного в термодинамическом смысле состояния системы частиц; N - число частиц, ${}^{\alpha}q_i$ - координата частицы. При этом температура

$$K_B T = \frac{m}{\theta}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}({}^{\alpha}\xi_i)^2 = \sum_{i=1}^{\theta}T_i,$$

где K_B - постоянная Больцмана, m - масса частицы, θ - число степеней свободы частицы в конфигурационном пространстве, T_i - температура по i-й- координате, а ${}^{\alpha}\xi_i = {}^{\alpha}\dot{q}_i - \langle\dot{q}_i\rangle$, где

$$\langle\dot{q}_i\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}{}^{\alpha}\dot{q}_i f_1({}^{\alpha}\dot{q}_i, {}^{\alpha}q_i, t)\, d{}^{\alpha}\dot{q}_i = \mathcal{V}(q_i, t),$$

средняя скорость частиц, $f_1({}^{\alpha}\dot{q}_i, {}^{\alpha}q_i, t)$ - одночастичная функция распределения.

Случай, когда все ${}^{\alpha}\xi_i = 0$ означает равенство нулю температуры пучка. При этом $U = U_0$ (I), а все ${}^{\alpha}\dot{q}_i = \langle\dot{q}_i\rangle$.

Составим уравнения движения частиц, пользуясь методом Лагранжа. Функцию Лагранжа в координатах $({}^{\alpha}\dot{q}_i, {}^{\alpha}q_i)$ определим следующим образом

$$L = \sum_{i=1}^{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{m\cdot({}^{\alpha}\dot{q}_i)^2}{2} - U_0 - TS.$$

Систему уравнений движения находим из уравнения Лагранжа (Приложение I)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial {}^{\alpha}\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial {}^{\alpha}q_i} = 0.$$

Учитывая, что, по определению, $m\frac{\partial\langle\dot{q}_i\rangle}{\partial t} + \frac{\partial U_0}{\partial^\alpha q_i} = 0$, получаем

$$^\alpha\xi_i + \frac{\frac{d}{dt}\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right) + \left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial\langle\dot{q}_i\rangle}{\partial^\alpha q_i}}{S + T\frac{\partial S}{\partial T} - \frac{k_B N\theta}{2}} \cdot {}^\alpha\xi_i = 0. \quad (2)$$

Так как энтропия и средняя скорость не зависят от $^\alpha\xi_i$, переменные в системе (2) разделяются

$$\frac{d^\alpha\xi_i}{^\alpha\xi_i} = \frac{\frac{d}{dt}\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)}{\frac{k_B N\theta}{2} - \left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)}dt - \frac{\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial\langle\dot{q}_i\rangle}{\partial^\alpha q_i}}{S + T\frac{\partial S}{\partial T} - \theta\frac{k_B N}{2}}dt,$$

$$i = 1,\ldots\theta\ ;\ \alpha = 1,\ldots N.$$

Решение каждого из уравнений системы будет

$$\ln\frac{^\alpha\xi_i}{(^\alpha\xi_i)_0} = -\ln\frac{s + T\frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\theta}{2}}{s_0 + \left(T\frac{\partial s}{\partial T}\right)_0 - \frac{\theta}{2}} - \int_{t_0}^{t}\frac{\left(s + T\frac{\partial s}{\partial T}\right)\frac{\partial\langle\dot{q}_i\rangle}{\partial^\alpha q_i}}{s + T\frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\theta}{2}}dt,$$

где $s = \frac{S}{k_B N}$, $(^\alpha\xi_i)_0 \neq 0$. Таким образом,

$$^\alpha\xi_i = (^\alpha\xi_i)_0\,\frac{\sigma_0 - \frac{\theta}{2}}{\sigma - \frac{\theta}{2}}\,e^{-\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma}{\sigma - \frac{\theta}{2}}v'_{q_i}dt}, \quad (3)$$

где $\sigma = s + T\frac{\partial s}{\partial T}$; $v'_{q_i} = \frac{\partial\langle\dot{q}_i\rangle}{\partial^\alpha q_i}$.

Выразим теперь одномерную температуру пучка через функции (3)

$$T_i = \frac{m}{\theta k_B N}\left(\frac{\sigma_0 - \frac{\theta}{2}}{\sigma - \frac{\theta}{2}}\right)^2 \sum_{\alpha=1}^{N}(^\alpha\xi_i)_0^2\, e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{\sigma}{\sigma - \theta/2}v'_{q_i}dt}. \quad (4)$$

Для решения поставленной задачи нужно найти зависимость

$$s = F\left(s_0, T_0, \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_0, v'_{q_i}, T, t\right).$$

Таким образом, нужно найти решение системы уравнений (4). Имеется ряд моделей пучка, для которых решение находится сравнительно легко. Их рассмотрение показывает, что описание, основанное на зависимости (4), дает характеристики указанных моделей пучка, которые не противоречат характеристикам, известным из решений одночастичных уравнений движения или из решений уравнения Капчинского – Владимирского для огибающих пучка заряженных частиц /3/.

I. Модели пучка с постоянным эмиттансом.

Динамическое рассмотрение

Будем считать, что $\sigma = const >> \frac{\theta}{2}$, отвлекаясь таким образом от роли $\mathfrak{I}$ и T. Физический смысл этого ограничения будет обсуждаться ниже. Так как $m\frac{\partial v(q_i)}{\partial^{\alpha} q_i} = -\frac{\partial U_0}{\partial^{\alpha} q_i}$, $v(q_i) = v_0 - \frac{1}{m}\int\frac{\partial U_0}{\partial^{\alpha} q_i}dt$, $v'_{q_i} = -\frac{1}{m}\int\frac{\partial^2 U_0}{\partial q_i^2}dt + (v'_{q_i})_0$.

Если U_0 – линейная функция q_i (пространственно-однородные силы), то $v'_{q_i} = (v'_{q_i})_0$.

а) Расплывание дрейфующего пучка.

На рис.I показана схема изменения эмиттанса расплывающегося пучка в пространстве, свободном от полей (собственное поле пучка тоже считается пренебрежимо малым).

Скорость каждой частицы не меняется, ${}^{\alpha}\dot{q}_i = const$. Уравнение движения для каждой частицы есть ${}^{\alpha}q_i = ({}^{\alpha}q_i)_0 + {}^{\alpha}\dot{q}_i t$, в том числе для частиц, находящихся на оси ζ (рис.I), ${}^{\zeta}q_i = ({}^{\zeta}q_i)_0 + {}^{\zeta}\dot{q}_i t$. Здесь ζ – номер частицы (любой), находящейся на оси ζ. Градиент средней скорости, т.е. в данном случае наклон оси ζ (угол φ на рис.I), есть $v'_{q_i} = tg\varphi = \frac{v({}^{\zeta}q_i)}{{}^{\zeta}q_i}$, $(v({}^{\zeta}q_i) = {}^{\zeta}\dot{q}_i)$,

$$\int_0^t v'_{q_i}dt = \int_0^t \frac{{}^{\zeta}\dot{q}_i dt}{({}^{\zeta}q_i)_0 + {}^{\zeta}\dot{q}_i t} = \ln\frac{({}^{\zeta}q_i)_0 + {}^{\zeta}\dot{q}_i t}{({}^{\zeta}q_i)_0}.$$

По формуле (4), так как $({}^{\zeta}q_i)_0$ и ${}^{\zeta}\dot{q}_i t$ (определенная частица с номером $\alpha = \zeta$) не зависят от α, а $\sum_{\alpha=1}^{N}({}^{\alpha}\xi_i)_0^2 = (T_i)_0$, температура $T_i = \frac{({}^{\zeta}q_i)_0^2}{({}^{\zeta}q_i)^2}(T_i)_0$. С другой стороны, температура может быть связана с нормализованным, среднеквадратичным эмиттансом $\mathfrak{Э}$ соотношением $T_i = \frac{mc^2(\mathfrak{Э})^2}{32 K_0\langle q_i^2\rangle}$, таким образом, $\mathfrak{Э} = \mathfrak{Э}_0\frac{\sqrt{\langle q_i^2\rangle}}{\sqrt{\langle q_i^2\rangle_0}}\cdot\frac{({}^{\zeta}q_i)_0}{({}^{\zeta}q_i)_0 + {}^{\zeta}\dot{q}_i t}$.

В качестве $({}^{\zeta}q_i)_0$ можно взять координату любой частицы, находящейся на оси ζ, в том числе и ${}^{\zeta}q_i = \sqrt{\langle q_i^2\rangle_0}$. В этом случае $\sqrt{\langle q_i^2\rangle} =$

$= ({}^{\varepsilon}q_i)_0 + {}^{\varepsilon}\dot{q}_i t$.

Таким образом, $Э = Э_0 = const$, т.е. эмиттанс свободно расплывающегося (без полей и взаимодействий) пучка не меняется, что соответствует физически очевидному результату /3/.

б) Пучок К-В в канале транспортировки

На рис.2 дается схема пучка Капчинского-Владимирского (К-В) в знакопеременном периодическом канале транспортировки /3/. Эллипс, контур поперечного эмиттанса, вращается с постоянной угловой скоростью ω. Как и в предыдущем случае будем считать, что

$$\sigma = const >> \frac{\theta}{2}.$$

Для малых ωt и малых ${}^{\varepsilon}q_i$, $\frac{\partial\, {}^{\varepsilon}\dot{q}_i}{\partial\, {}^{\varepsilon}q_i} = \frac{{}^{\varepsilon}\dot{q}_i}{{}^{\varepsilon}q_i} = tg\,\omega t$ (рис.2). При этом $\int \vartheta'_{q_i} dt = \ln \frac{\cos\omega t}{\cos\omega t_0}$ а $T_i = (T_i)_0 \left(\frac{\cos\omega t_0}{\cos\omega t}\right)^2$. Для нормализованного эмиттанса $Э_н$, $T_i = \frac{mc^2 (Э_н)^2}{8 k_0 R^2}$, где R – радиус огибающей пучка. Таким образом, $Э_н / a\cos\omega t = [(Э_н)_0 / a\cos\omega t_0] \frac{\cos\omega t_0}{\cos\omega t}$, т.е. $Э_н = (Э_н)_0$

Для больших ωt и ${}^{\varepsilon}q_i$ воспользуемся выражением для радиуса огибающей согласованного и несогласованного пучка /3/

$$R_{\text{с}} = R_0 [1 + Q(t)], \qquad R_{\text{нс}} = R(t)[1 + Q(t)],$$

где $Q(t)$ – периодическая функция с периодом $t_\varphi = \frac{2\pi}{\omega}$, и положим, что $\langle \dot{q}_i \rangle = \dot{R}_{\text{нс}} = \dot{R}(t)[1 + Q(t)] + R(t)\dot{Q}(t)$. Если $\vartheta'_{q_i} = \frac{\dot{R}_{\text{нс}}}{R_{\text{нс}}} =$

$= \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{Q}(t)}{1+Q(t)}$, то $\int \vartheta'_{q_i} dt = \ln \frac{R(t)}{R(t_0)} + \ln \frac{Q(t)+1}{Q(t_0)+1}$, а

$$T_i = (T_i)_0 \left[\frac{R(t)}{R(t_0)} \frac{Q(t)+1}{Q(t_0)+1}\right]^2. \tag{5}$$

Из (5) видно, что для согласованного пучка температура T_i внутри периода уменьшается или увеличивается во времени соответственно с изменением соотношения $\frac{R}{R_0} = \frac{Q(t)+1}{Q(t_0)+1}$. Только в точках, отстоящих друг от друга на период t_φ, $T_i = (T_i)_0$. Для несогласованного пучка через период фокусировки величина температуры не восстанавливается, а растет или убывает в зависимости от фазы поперечных колебаний радиуса огибающей пучка. В то же время нормализованный эмиттанс пучка, который связан с температурой соотношением $T_i = \frac{mc^2 \vartheta_n^2}{8R^2}$, остается неизменным все время, как для согласованного, так и несогласованного пучка. Надо отметить, что увеличение температуры пучка не может быть большим в пучке со значительным собственным пространственным зарядом. Это связано с увеличением влияния собственного заряда пучка при уменьшении R. Такая нелинейность эффекта может привести к нарушению постоянства эмиттанса пучка. С помощью формулы (4), зная зависимость $v'_{q_i} = f(t)$ или путем численного определения величины $\int v'_{q_i} dt$ можно описать кулоновское изменение эмиттанса пучка /6/.

Мы видим, что для случаев, когда эффектами, связанными с энтропией пучка, мы пренебрегаем, использование формулы (4) при условии $\sigma = const >> \theta/2$ не приводит к результатам, которые противоречат известным характеристикам рассмотренных двух моделей пучка.

Перейдем теперь к изучению эффектов, связанных с существованием энтропии пучка.

2. <u>Модели пучка с постоянным эмиттансом.</u>

<u>Термодинамическое рассмотрение.</u>

Для идеального классического газа $s = c_v \ln T + \ln V + const$, где $c_v = const$ - теплоемкость при постоянном объеме. Таким образом, $\sigma = s + T\frac{\partial s}{\partial T} = s + c_v$. Это выражение может оставаться неизменным во времени в том случае, если $s \neq f(t)$, а также для замкнутого обратимого цикла, где $s(t) = s(t + \tau_\varphi)$ (τ_φ - период цикла). Поскольку при постоянстве энтропии изменение количества тепла $\Delta Q = \Delta s T = 0$, процессы, в которых $\sigma = s + T\frac{\partial s}{\partial T} = const$, можно считать процессами без теплообмена с внешними источниками тепла.

Для выяснения физического смысла соотношения $\sigma >> \frac{\theta}{2}$

воспользуемся формулой Сакура-Тетродэ, которая определяет энтропию одноатомного классического газа ($\theta = 3$)

$$S = k_Б N\left(\frac{5}{2} - \ln\frac{N}{V} V_q\right),$$

где N – число частиц, V_q – элементарный квантовый объем $V_q = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m k_Б T}\right)^{3/2}$ (для протонов $V_q = (10^{21} T_{эв})^{-\frac{3}{2}}$ $м^3$).

При достаточно низкой плотности газа заряженных частиц $\sigma >> \frac{5}{2}$. При этом условие $\sigma >> \frac{3}{2}$ выполняется. Таким образом $N/V < 1/V_q$ есть условие, при котором роль энтропии пучка для задач, где $\sigma = const$, не может считаться существенной.

е) Замкнутый обратимый цикл

В качестве примера термодинамического подхода к решению задач движения системы заряженных частиц рассмотрим аксиально-симметричный канал транспортировки частиц, со структурой, изображенной на рис.4а: участок I – ускоряющее поле типа оптики Пирса – пучок ускоряется так, что диаметр его, 2R, остается постоянным. Эмиттанс пучка (рис.4б) также не меняется при ускорении. Для пучка постоянного диаметра справедливы следующие соотношения /4/, которые получены на основании решения уравнения для огибающей пучка постоянного диаметра с $Э_н = const \neq 0$. Объем сгустка частиц $V = \pi R^2 \Delta Z$, давление $P = \frac{NeU_*''}{16\pi\Delta Z}$, где ΔZ – протяженность сгустка частиц по оси Z, $U_*'' = \frac{2mc^2}{e}\left(\frac{Э_н}{R^2}\right)^2$, $Э_н$ – нормализованный эмиттанс пучка, R – радиус огибающей пучка, С – скорость света. Если положить, что температура $k_Б T_* = \frac{mc^2 Э_н^2}{8R^2}$, то получим соотношение $pV = N k_Б T_*$, т.е. уравнение состояния для идеального газа. Участок II – фокусировка пучка от диаметра $2R_1$ к диаметру $2R_2$, так, что положение контура эмиттанса (эллипс рис.4б) меняется, но площадь, охватываемая контуром, т.е. величина эмиттанса, сохраняется (условие неизменности эмиттанса является требованием, накладываемым на систему фокусировки). Участок III – замедление пучка в оптике типа Пирса. Участок IУ – переход от радиуса R_2 к радиусу R_I, при постоянном эмиттансе, $Э_н = const$.

Указанная структура канала не имеет практического применения, однако если рассматривать пучок частиц в ней как систему с двумя степенями свободы (температуру вдоль оси z будем считать равной нулю, $T_z = 0$), то она дает возможность провести описание движения частиц на языке термодинамики, так как для двумерной модели пучка переход I→II→III→IУ→I представляет собой замкнутый обратимый термодинамический цикл. Покажем это.

В рассматриваемой модели прохождение пучком полного периода структуры соответствует термодинамическому циклу, диаграмма которого в координатах (T, S) показана на рис.5

Участок I–2 (рис.5)– изотермическое расширение. Поскольку $R = const$, $Э_н = const$, можно утверждать, что $T_R = const$, ΔZ = растет, V – растет, P – падает. Энтропия меняется от значения S_1 до значения S_2 .

Участок 2–3 (рис.5). Охлаждение при постоянной энтропии, $Э_н = const$, $\Delta Z = const$. Условием того, что обратимый процесс идет по адиабате ($S = const$), является соотношение $PV^{\gamma} = const$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ – отношение теплоемкости при $p = const$ к теплоемкости при $V = const$. В нашем случае, для перехода от пучка с $R_1 = const$ к пучку с $R_2 = const$, постоянным остается произведение $pV^2 = const$, что соответствует условию перехода с $S = const$. для двумерного пучка.

Участок 3–4. Изотермическое сжатие $R_2 = const$, $Э_н = const$ $T_R = const$ При этом ΔZ – уменьшается, V – уменьшается, P – растет, $\Delta S = S_2 - S_1$.

Участок 4–I. Переход от пучка с радиусом $R_2 = const$ к радиусу $R_1 = const$. $\Delta Z = const$. $PV^2 = T_R V = const$. $S = const$.

Таким образом замкнутый процесс I-2-3-4-I на диаграмме (T,S) рис.5 представляет собой цикл Карно. В результате завершенного, замкнутого цикла энтропия системы для идеального газа не изменится, а в соответствии с формулой (4), $T_i=(T_i)_0(\sigma_{i_0}/\sigma_{i_0+\tau_\varphi})$, где τ_φ – полное время цикла.

Рассмотрим более подробно составные части цикла, участки (I-2),(3-4) и (2-3),(4-I) диаграммы (T,S).

Величина энтропии для одноатомного газа выражается формулой

$$S=C_v \ln T + K_Б N \ln V + \text{const}.$$

где теплоемкость $C_v=K_Б\left(\frac{\partial U_T}{\partial T}\right)_v$.

Для двумерного идеального газа энергия $U_T=NT$, т.е.$C_v=K_Б N$, а $S=K_Б N(\ln T_R V)+\text{const}$. Таким образом, условие $T_R V=\text{const}$ выполняется, что достаточно для постоянства энтропии. Выполнение этого условия нужно потребовать для участков фокусировки (IУ, рис.4) и дефокусировки (П, рис.4), чтобы рассмотренная схема описывалась циклом Карно.

В том случае, если участок фокусировки и дефокусировки связывает два участка с оптикой Пирса ($R_1=\text{const}$ и $R_2=\text{const}$ на рис. 4а), то требование $S=\text{const}$ для них можно удовлетворить при надлежащем согласовании. Условия согласования определяются подходящим, (вполне определенным) градиентом поля на входе и выходе фокусирующего участка /4/.

В то же время для участка цикла I,(Ш) (рис.4), где $T_R V=\text{const}$. объем V растет (падает), а температура должна оставаться неизменной. Для идеального газа при изменении объема в цикле Карно (диаграмма (T,S) рис.5 энтропия меняется по следующему закону /5/:

$$S=S_0-\ln\frac{V_0}{V}.$$

Обратимся теперь к анализу рассматриваемой модели с помощью формулы (4), которая для данного случая приводит к следующему выражению для T_i:

$$T_i = (T_i)_0 \left(\frac{s_0}{s}\right)^2 e^{-2\int \frac{s}{s-1} v'_{s_i} dt},$$

так как $T\frac{\partial s}{\partial T} = C_v = \frac{\theta}{2} = 1$.

Требование постоянства температуры $T_R = T_x + T_y = const.$ приводит к соотношению

$$\left(\frac{s_0}{s}\right)^2 T_R^{-1} \left[(T_x)_0 e^{-2\int \frac{s}{s-1} v'_x dt} + (T_y)_0 e^{-2\int \frac{s}{s-1} v'_y dt} \right] = 1, \qquad (6а)$$

а условие $R = const.$, $v'_R = 0$ накладывает связь

$$v_x^2 + v_y^2 = const. \qquad (6б)$$

Таким образом, в пучке постоянного диаметра, в котором эмиттанс не равен нулю, в случае, если пучок можно уподобить идеальному газу, должны выполняться соотношения (6).

Для неидеального газа энтропия $s = s_{ид} - (\eta + 3\eta^2 \ln \eta)$,

где $$\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7)$$

Условия (6) нарушаются, что ведет к изменению температуры (эффект Джоуля-Томсона) /4/. Оценим величину этого эффекта.

$T\frac{\partial s}{\partial T} = \left(T\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{ид} + \frac{3}{2}\eta(1 + 6\eta \ln \eta + 3\eta)$, а

$$\sigma = \sigma_{ид} + \frac{\eta}{2}(1 + 12\eta \ln \eta + 9\eta) = \sigma_{ид} + \Delta\sigma,$$

где учтено, что $\frac{\partial \eta}{\partial T} = -\frac{3}{2}\eta T^{-1}$.

При $\eta \to 0$ поправка $\Delta\sigma \to 0$,

При $\eta > 0$, $\Delta\sigma > 0$.

При $\eta \lessapprox 1$, $\Delta\sigma \lessgtr 0$ меняет знак в точке $\eta \simeq 0,6$.

В этой точке эффект Джоуля-Томсона тоже меняет знак. Величина эффекта невелика (максимальное значение величина эффекта достигает в точке $\eta \simeq 0,2$). Однако, если не пользоваться формулой (7), которая верна только при $\eta \ll 1$, и оценить эффект Джоуля-Томсона для $\eta = 0,5$ численным методом, то его величина оказывается заметно больше /4/. Отметим, что, так как $\sigma(T_1) \neq \sigma(T_2)$ (рис.5), величины T, S и $Э_м$ не останутся неизменными при завершении цикла.

Таким образом, термодинамический анализ указывает на возможность существования эффекта, который не может быть предсказан ни одночастичным, ни К-В рассмотрениями.

б) Периодический канал фокусировки

Будем считать пучок идеальным газом. Положим $\upsilon'_{q_i} = const = A$ (A^{-1} имеет размерность времени) и разобьем период фокусировки на четыре участка: $A > 0$; $A = 0$; $A < 0$; $A = 0$. Задача, таким образом, может быть сведена к предыдущей, т.е. к замкнутому обратимому циклу. В точках, где $A = 0$ (кроссовер) радиальная температура T_R не меняется. При этом должны выполняться соотношения (6) и пучок должен быть согласованным. Если в пучке существуют поперечные колебания частиц с периодом большим, чем период фокусировки t_ϕ, то для несогласованного пучка внутри ряда периодов фокусировки не существует точек, где $A = 0$. Поэтому радиальная температура будет меняться вдоль канала даже для точек, где был кроссовер согласованного пучка рис.3б. В пределах каждого участка, где $A = const \neq 0$, $\vartheta = const$ для идеального газа величина $pV^{\gamma} = TV^{\gamma-1} = const$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{\vartheta} T_i = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} \sum\limits_{i=1}^{\vartheta} (T_i)_0$ или $\sum\limits_{1}^{\vartheta}\left(\frac{\Theta_i}{R_i}\right)^2 = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}\sum\limits_{1}^{\vartheta}\left(\frac{\Theta_i}{R_i}\right)^2_0$. Для $\vartheta = 1$, $TV^2 = const$, $V \sim R$, $T = \frac{V_0^2}{V}T_0$, $\Theta_H = (\Theta_H)_0$. Для $\Theta = 2$, $TV = const$, $V \sim R^2$, $\Theta_H = (\Theta_H)_0$, что соответствует результатам динамического рассмотрения. В трехмерном пучке

$$\left(\frac{\Theta_x}{R_x}\right)^2 + \left(\frac{\Theta_y}{R_y}\right)^2 + \left(\frac{\Theta_z}{R_z}\right)^2 = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{\Theta_x}{R_x}\right)^2_0 + \left(\frac{\Theta_y}{R_y}\right)^2_0 + \left(\frac{\Theta_z}{R_z}\right)^2_0\right],$$

поскольку $TV^{\frac{2}{3}} = const$. Пусть внутри каждого периода есть точка, в которой $R_x = R_y = R_z$ и $\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = \Theta_H$. Тогда в этих точках $\Theta_H = (\Theta_H)_0$ вдоль всего канала, так как $V \sim R^3$ (формулы для зависимости $T_R = f\left(T_i, (T_i)_0, (\upsilon'_{q_i})_0\right)$ в приложении II).

Иначе обстоит дело в случае, если объем, занимаемый частицами пучка, не меняется вдоль канала. Тогда эмиттанс пучка может меняться при его фокусировке и дефокусировке (рис.3). В частности, если при сжатии пучка (R_x и R_y - уменьшаются) происходит ускорение так, что произведение $R_x\ R_y\ R_z = const$, поперечный эмиттанс растет, $Э_x \sim \frac{R_0}{R}$ (имеются в виду точки канала, где $R_x = R_y$, $Э_x = Э_y$). Отметим, что выбор одно-, двух- или трехмерного приближения (ϑ = I, 2 или 3) зависит от связи движения частиц по разным степеням свободы. Значение параметра связи в реальном пучке, в свою очередь, зависит от конфигурации внешних полей и от величины плотности тока пучка /3/.

Для неидеального газа при А=0, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{C_1(\eta)}{C_2(\eta)} = 1 - \frac{C_2 - C_1}{C_2}$.

<u>Процессы с теплообменом</u>

Рассмотрим случай $\frac{\partial}{\partial T}(TS) = C_1(V,T)$; $TS = \int_{T_0}^{T} C_1(V,T)dT + C_2(V)$.
Пусть $T=T_0$, при этом $C_2(V) = T_0 S(V,T_0)$, тогда $TS(V,T) - T_0 S(V,T_0) =$
$= \Delta(U_T - F)\frac{1}{k_B N}$, где U_T - полная, а F - свободная энергия системы частиц, $\Delta(TS)$ - приток (убыль) тепла. В данном случае формула (4) принимает вид

$$T_i = (T_i)_0 \left(\frac{C_1(t_0) - \frac{\vartheta}{2}}{C_1(t) - \frac{\vartheta}{2}}\right)^2 e^{-2A\int_{t_0}^{t} \frac{C_1(t)}{C_1(t) - \frac{\vartheta}{2}}dt}.$$

В линейном приближении, когда $C_1(t) = \varkappa t + C_1(t_0)$,

$$T_i = (T_i)_0 \left(\frac{C_1(t_0) - \frac{\vartheta}{2}}{C_1(t) - \frac{\vartheta}{2}}\right)^2 e^{-2A\left\{t + \frac{\vartheta}{2\varkappa}\ln\left[\frac{C_1(t) - \frac{\vartheta}{2}}{C_1(t_0) - \frac{\vartheta}{2}}\right]\right\}},$$

т.е.

$$T_i = (T_i)_0 \left(\frac{C_1(t_0) - \frac{\vartheta}{2}}{C_1(t) - \frac{\vartheta}{2}}\right)^{2 + \frac{A\vartheta}{\varkappa}} e^{-2At}.$$

Если $\varkappa \to \left[C_1(t_0) - \frac{\vartheta}{2} \Big/ C_1(t) - \frac{\vartheta}{2}\right] \to 0$, то задача сводится к уже рассмотренному случаю. Пусть при t = 0, $C_I(0)$ = 0, тогда

$$T_i = (T_i)_0 \left(\frac{\vartheta}{\vartheta - 2\varkappa t}\right)^{2 + \frac{A\vartheta}{\varkappa}} e^{-2At}. \qquad (8)$$

Рассмотрим некоторые схемы, для которых применима модель с теплообменом. С учетом принятого ограничения для приближенного анализа процессов в периодических системах необходимо делить период на четыре части ($A>0$, $A = 0$, $A<0$, $A = 0$).

1. Электронное охлаждение (уменьшение T_s) пучка тяжелых частиц $\varkappa = -\frac{2c_v}{t_p}$, где t_p – время релаксации /1/, а) $A>0$, охлаждение, (теплообмен + расширение); б) $A = 0$, охлаждение (только теплообмен); в) $A<0$, охлаждение идет пока $\left(\frac{\vartheta}{\vartheta-\varkappa t}\right)^{-(2-\frac{A\vartheta}{\varkappa})} > e^{-2At}$.

2. Необратимые процессы в пучке,

$$\Delta s = \frac{V}{N}\int_{t_0}^{t} \sigma(q_i)\,dt - \int_{t_0}^{t} \operatorname{div}\vec{J}_s\,dt,$$

где $\vec{J}_s$ – поток энтропии, а $\sigma(q_i)$ – удельное производство энтропии. Для $\vec{J}_s = 0$, если $\sigma(q_i) = const = \varkappa$, применимо выражение (8).

Генерация (производство) энтропии в пучке имеет место, когда в нем существуют градиенты температуры(теплопроводность), скоростей (внутреннее трение), а в двух- или более компонентном пучке-плотности частиц (диффузия).

Для периодического канала и двумерного (поперечное движение) согласованного пучка рост эмиттанса на периоде фокусировки определяется выражением $\Im = \Im_0\left(\frac{1}{1-\varkappa t_p}\right)$.

3. Учет температуры источника питания. Если определить температуру источника питания как $KT_{и.п.} = e\Delta U = e[\langle U\rangle - U]$, где U – напряжение источника питания, то (TS) пучка растет или убывает в зависимости от направления теплообмена. Для ($T_{ип} > (T)_{пучка}$) $A<0$, температура пучка будет расти.

Заключение

Проведенное в работе рассмотрение основано на анализе решений системы уравнений движения ансамбля заряженных частиц, которые получены методом Лагранжа (использована функция Лагранжа с обобщенным потенциалом, включающим связанную энергию Гельмгольца). Оно указывает на существование по крайней мере трех типов процессов, ведущих к увеличению эмиттанса пучка заряженных частиц при его транспортировке и ускорении.

I) Эффекты, аналогичные оптическим аберрациям, связанные с нелинейностью фокусирующих и ускоряющих полей и нелинейностью сил собственного объемного заряда пучка. Расчетная величина подобного эффекта в нашем рассмотрении определяется временной зависимостью средней скорости частиц по данной координате. Эти обнаруженные на опыте явления хорошо изучены методом численного моделирования движения частиц в соответствующих устройствах /6/.

2) Процессы изменения температуры и энтропии пучка без теплообмена с внешними источниками. Они аналогичны термодинамическим обратимым циклам. Для замкнутых обратимых циклов температура и энтропия пучка, а следовательно, и его эмиттанс, возвращаются к исходным значениям в том случае, когда пучок частиц можно уподобить идеальному газу. Для неидеального газа имеет место рост эмиттанса. Указанный эффект заметен при низкой температуре пучка (0,I эВ и ниже) в сочетании с высокой плотностью частиц (порядка 10^{24} $м^{-3}$). В частности, практическое значение учет этого эффекта может иметь при конструировании электронных пушек с предельно низкой температурой пучка, предназначенных для электронного охлаждения тяжелых частиц /4/.

3) Процессы с притоком или убылью тепла. В частности, электронное охлаждение и необратимые явления в пучках частиц, связанные с наличием градиентов температуры и скоростей частиц, а также с градиентом плотности частиц в двух- и более компонентных пучках, которые ведут к генерации (производству) энтропии пучка. Величина этого эффекта определяется коэффициентами теплопроводности, трения и диффузии – соответственно. Необратимые явления могут сказаться на росте эмиттанса пучка в следующих устройствах: на выходе интенсивных источников ионов /7/, в длинных каналах

фокусировки частиц /I/, в накопителях ионов и электронов /8/.

Для наиболее простых моделей пучка оказывается возможным вывести аналитические соотношения для оценки роста эмиттанса пучка.

Литература

I. Баталин В.А. Рост эмиттанса пучка в ускорителе ионов, связанный с внутренним трением в пучке. М., Препринт ИТЭФ, I982, № I28.

2. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, I975, с.3I.

3. Капчинский И.М. Динамика частиц в линейных ускорителях, М.: Атомиздат, I966

4. Баталин В.А. Эффект Джоуля-Томсона в электронной пушке Пирса, -ЖТФ, I982, т.52, вып.9, с.I8I0

5. Шамбадаль М. Развитие и приложения понятия энтропии. М.:Наука, I967, с.68-7I

6. Кузнецов В.С. и др. Влияние нелинейных кулоновских сил на фазовый объем. Труды межд.конф. по ускорителям на высокие энергии. ЦЕРН, I97I.

7. Баталин В.А. Роль необратимых процессов при формировании эмиттанса пучка на выходе источника ионов. М., Препринт ИТЭФ, I984, № I05.

8. Диканский Н.С.,Пестриков Д.В. О столкновительном нагреве пучка в накопителе, Препринт ИЯФ СО АН СССР 83-II2,Новосибирск, I983.

9. Балеску Р. Статистическая механика заряженных частиц. М.: Мир, с. 202, I967.

I0. Баталин В.А., Коломиец А.А., Куйбида Р.П. Параметрический резонанс в линейном ускорителе протонов.М., Препринт ИТЭФ, I975, № 84.

Приложение I

Обобщенные силы

Использование функции Лагранжа с обобщенным потенциалом $U = U_0 + TS$ равносильно введению в рассмотрение обобщенных сил /2/. Иначе говоря, мы предполагаем, что на частицу действует обобщенная сила вида

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial^\alpha q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial^\alpha \dot{q}_i}\right).$$

Рассмотрим эту силу:

$$\frac{\partial U}{\partial^\alpha \dot{q}_i} = \frac{\partial (TS)}{\partial^\alpha \dot{q}_i} = \left(S - T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial T}{\partial^\alpha \dot{q}_i} = \frac{2m}{k_B N \theta}(^\alpha\dot{\xi}_i)\left(S + T\frac{\partial U}{\partial T}\right)$$

так как ($S = S(T, V)$, где $V \neq f(\dot{q}_i, q_i)$ - обьем),

$$\frac{\partial T}{\partial^\alpha \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial^\alpha \dot{q}_i}\left[\frac{m}{k_B N \theta}\sum_{i=1}^{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}(^\alpha\dot{\xi}_i)^2\right] = \frac{2m}{k_B N \theta}(^\alpha\dot{\xi}_i)\frac{\partial^\alpha \dot{\xi}_i}{\partial^\alpha \dot{q}_i} = \frac{2m}{k_B N \theta}(^\alpha\dot{\xi}_i).$$

$$\frac{\partial U}{\partial^\alpha q_i} = \frac{\partial U_0}{\partial^\alpha q_i} + \left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial T}{\partial^\alpha q_i} = -(^\alpha Q_i)_0 - \frac{2m}{k_B N \theta}\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial \langle \dot{q}_i \rangle}{\partial^\alpha q_i}(^\alpha\dot{\xi}_i)$$

так как $\frac{\partial T}{\partial^\alpha q_i} = -\frac{2m}{k_B N \theta}(^\alpha\dot{\xi}_i)\frac{\partial \langle \dot{q}_i \rangle}{\partial^\alpha q_i}$, $(N \gg 1)$.

Таким образом, $^\alpha Q_i = (^\alpha Q_i)_0 + \frac{2m}{k_B N \theta}\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)(^\alpha\ddot{\xi}_i) +$

$$+ \frac{2m}{k_B N \theta}\left[\frac{d}{dt}\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right) + \left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial \langle \dot{q}_i \rangle}{\partial^\alpha q_i}\right](^\alpha\dot{\xi}_i) \quad \text{, или}$$

$$^\alpha Q_i = (^\alpha Q_i)_0 + (^\alpha Q_i)_{уск} + (^\alpha Q_i)_{тр} \quad \text{, где}$$

$(Q_i)_0$ – внешняя сила, $(^\alpha Q_i)_{уск}$ – сила, связанная с наличием ускорения $^\alpha\ddot{\xi}_i$, а $(^\alpha Q_i)_{тр}$ - сила, пропорциональная скорости, которую можно уподобить силе трения.

Для системы заряженных частиц силу $(^\alpha Q_i)_{тр}$ можно определить как силу динамического трения /9/. При этом

$$^\alpha\dot{\xi}_i \frac{2m}{k_B N \theta}\left[\frac{d}{dt}\left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right) + \left(S + T\frac{\partial S}{\partial T}\right)\frac{\partial \langle \dot{q}_i \rangle}{\partial^\alpha q_i}\right] = -\frac{\eta_{\Delta тр}}{t_p},$$

где $\eta_{д.тр}$ - безразмерный коэффициент динамического трения, а $t_р$ - время релаксации системы к равновесному состоянию. Сила трения $({}^{\alpha}Q_i)_{тр}$ не равна нулю, если не равны нулю величины $\frac{\partial\langle \dot{q}_\alpha\rangle}{\partial {}^{\alpha}q_i}$ и $\frac{d}{dt}(S+T\frac{\partial S}{\partial T})$. Таким образом, в рассматриваемой модели наличие не равных нулю коэффициентов $\frac{\partial\langle \dot{q}_\alpha\rangle}{\partial {}^{\alpha}q_i}$ и $\frac{d}{dt}(S+T\frac{\partial S}{\partial T})$ означает то, что система частиц не находится в равновесном состоянии (выведена из равновесного состояния). В этой связи следует отметить, что данное выше определение величины S как энтропии равновесного состояния необходимо уточнить. Основываясь на понятиях, используемых в неравновесной термодинамике, мы определим состояние с $({}^{\alpha}Q_i)_{тр} \neq 0$ как состояние, близкое к локально-равновесному /9/. Соответственно величину S будем считать энтропией системы частиц, находящейся в состоянии, близком к локально равновесному, а функцию распределения $f_1({}^{\alpha}q_i, {}^{\alpha}q_k, t)$ локально-равновесной функцией распределения.

Степень справедливости предположения о характере обобщенной силы, действующей на частицу, по-видимому, могла бы быть установлена путем анализа коэффициентов при ${}^{\alpha}\xi_{\varepsilon i}$ в выражении для $({}^{\alpha}Q_i)_{тр}$ с помощью методов теории кинетических уравнений /9/ (это не сделано). Той же цели можно попытаться достигнуть путем сравнения результатов численного анализа для простых моделей и опытных данных, полученных при работе с реальными пучками, с предсказаниями данного рассмотрения (Приложение II).

Приложение II

Рост эмиттанса в линейном ускорителе ионов

Рассмотрим применение результатов раздела 2(б) к задаче роста эмиттанса пучка в линейном ускорителе ионов. Исходным соотношением будем считать зависимость температуры от объема для адиабатического процесса (без теплообмена с внешней средой)

$$TV^{\gamma-1}=\Big(\sum_{i=1}^{\theta}T_i\Big)V^{\gamma-1}=const\text{, или }\sum_{i=1}^{\theta}T_i=\Big(\frac{V_0}{V}\Big)^{\gamma-1}\sum_{i=1}^{\theta}(T_i)_0. \quad (I)$$

Для трехмерного движения $\theta = 3$, $\gamma - I = 2/3$

$$(T_x)_0e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{3}{3-\frac{3}{2}}\upsilon'_x dt}+(T_y)_0e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{3}{3-\frac{3}{2}}\upsilon'_y dt}+(T_z)_0e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{3}{3-\frac{3}{2}}\upsilon'_z dt}=\Big(\frac{V_0}{V}\Big)^{\frac{2}{3}}(T_x+T_y+T_z)_0,$$

Для случая, когда начальные условия можно выбрать так, чтобы

$$(T_x)_0=(T_y)_0=\frac{1}{2}(T_R)_0\text{, где }T_R=T_x+T_y,$$

$$\frac{1}{2}\Big(e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{3}{3-\frac{3}{2}}\upsilon'_x dt}+e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{3}{3-\frac{3}{2}}\upsilon'_y dt}\Big)=\Big(\frac{V_0}{V}\Big)^{\frac{2}{3}}+\Big(\frac{T_z}{T_R}\Big)_0\Big[\Big(\frac{V_0}{V}\Big)^{\frac{2}{3}}-e^{-2\int_{t_0}^{t}\frac{3}{3-\frac{3}{2}}\upsilon'_z dt}\Big]. \quad (2)$$

Уравнение (2) связывает параметры фокусировки пучка с размерами его огибающей (R_x, R_y, R_z).

При наличии дополнительных соотношений, связывающих эти параметры, можно получить зависимость размеров пучка от времени, $R_i(t)$. В частности, для случая $\Big(\frac{T_z}{T_R}\Big)_0 \ll 1$; $R_x=R_y=R$, если учесть, что $\frac{V_0}{V}=\frac{R_0^2\Delta z_0}{R^2\Delta z}$, где Δz - протяженность сгустка по оси z,

$$2(R_0/R)^{4/3}=(\Delta z/\Delta z_0)^{2/3}\big(e^{-2[A_x+(\upsilon'_x)_0]t}+e^{-2[A_y+(\upsilon'_y)_0]t}\big),$$

так как соотношение (I) справедливо при $(3/3-\frac{3}{2})\upsilon'_i=A_i=const$. Таким образом

$$\frac{R}{R_0}=2^{\frac{3}{4}}\Big(\frac{\Delta z}{\Delta z_0}\Big)^{\frac{1}{2}}\big(e^{-2[A_x+(\upsilon'_x)_0]t}+e^{-2[A_y+(\upsilon'_y)_0]t}\big). \quad (3)$$

Для того, чтобы пучок был согласованным, (т.е. $R=R_0$) достаточно, чтобы $A_i+(\upsilon'_i)_0=0$, ($i=x,y$). Отсюда видно, что условия согласования определяются начальным значением градиента средней скорости (υ'_i)$_0$ (начальным наклоном эллипса для пучка К-В), и $A_i=const$. Поскольку $T_R=T_x+T_y=$

$$=\frac{1}{2}(T_R)_0\left[e^{-2[A_x+(\vartheta_x')_0]t}+e^{-2[A_y+(\vartheta_y')_0]t}\right],$$

получаем из (2) $\frac{T_R}{(T_R)_0}=\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{1+\left(\frac{T_z}{T_R}\right)_0\left[1-\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{2}{3}}e^{-2[A_z+(\vartheta_z')_0]t}\right]\right\}.$

Соотношение для эмиттанса $Э_R$ имеет вид,

$$\frac{Э_R}{(Э_R)_0}=\left(\frac{R\,\Delta Z_0}{R_0\,\Delta Z}\right)^{1/3}\sqrt{1-\left(\frac{T_z}{T_R}\right)_0\left[\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3}e^{-2[A_z+(\vartheta_z')_0]t}-1\right]} \quad (4)$$

$$\frac{Э_R}{(Э_R)_0}=\frac{R}{R_0}\left(\frac{n}{n_0}\right)^{1/3}\sqrt{1-\left(\frac{T_z}{T_R}\right)_0\left[\left(\frac{n_0}{n}\right)^{2/3}e^{-2[A_z+(\vartheta_z')_0]t}-1\right]},$$

где n – плотность частиц. Мы видим, что даже в согласованном пучке ($R = R_0$) эмиттанс меняется при изменении величины ΔZ, в частности, растет в результате формирования сгустков из непрерывного пучка (банчировка).

Рассмотрим более подробно соотношение (3) для линейного ускорителя ионов с квадрупольной магнитной фокусировкой. Для вычисления ϑ_x' и ϑ_y' воспользуемся выражением для потенциала внешнего поля U_0 из книги /3/

$$U_0=-e\,\vartheta_s G(z)\frac{x^2-y^2}{2}+\frac{e}{2\gamma_\lambda^2}\frac{\partial E_z}{\partial z}\frac{x^2+y^2}{2}+\frac{e}{\gamma_\lambda^2}U_{\text{кул}}(x,y,z),$$

где $G(z)$ – градиент магнитного поля в квадруполях, $E_z(z)$ – ускоряющее поле, ϑ_s – скорость равновесной частицы, γ_λ – приведенная энергия частицы. $U_{\text{кул}}$ – потенциал поля равномерно заряженного трехосного эллипсоида. При этом:

$$\vartheta_x'=-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{e\vartheta_s G(z)}{\gamma_\lambda m}+\frac{e}{2m\gamma^3}\frac{\partial E_z}{\partial z}+\frac{e}{m\gamma^3}\frac{\partial^2 U_{\text{кул}}}{\partial x^2}\right)dt=(A_x)^{\text{кв}}+(A_x)^{\text{вч}}+(A_x)^{\text{кул}},$$

$$\vartheta_y'=\int_{t_0}^{t}\left(\frac{e\vartheta_s G(z)}{m\gamma_\lambda}-\frac{e}{2m\gamma_\lambda^3}\frac{\partial E_z}{\partial z}+\frac{e}{m\gamma_\lambda^3}\frac{\partial^2 U_{\text{кул}}}{\partial y^2}\right)dt=(A_y)^{\text{кв}}+(A_y)^{\text{вч}}+(A_y)^{\text{кул}}.$$

Будем считать, что на полупериоде фокусировки $G(z)=\text{const}$, а также, что в пределах периода $\frac{\partial E_z}{\partial z}=\text{const}$, $U_{\text{кул}}=\langle U_{\text{кул}}\rangle$. Для линейного ускорителя И-2 в первой линзе $G(z)=25$ Тл/м, при этом $A = 1{,}05\cdot10\,\frac{1}{c}$, что дает такое же абсолютное значение $(\vartheta_x')_0$

для согласованного пучка. Эта величина близко соответствует расчетному наклону эллипса на плоскости (X', X) для аксептанса этого ускорителя. По формуле (3) в гипотетическом чисто фокусирующем канале ($A^{фок} = const$; $A^{вч} = A^{кул} = 0$) условия согласования сохранялись бы вдоль всего канала и радиус огибающей пучка не менялся бы при транспортировке пучка. Включение величин $A^{кф}$, $A^{вч}$ и $A^{кул}$ меняет дело. В знакопеременном канале радиус пучка не остается постоянным внутри канала. Дефокусирующие ВЧ-силы действуют локально, только в области ускоряющего зазора, что приводит к изменению радиуса пучка внутри канала. Это, в свою очередь, определяет влияние на радиус и эмиттанс пучка кулоновских сил, ввиду зависимости $A^{кул}$ от плотности тока пучка. Таким образом, радиус огибающей пучка может сохраняться только в точках канала, отстоящих друг от друга по времени точно на период фокусировки, что соответствует результатам К-В рассмотрения данной задачи.

При возбуждении в линейном ускорителе ионов параметрического резонанса /3/ R будет монотонно возрастать, а в соответствии с формулой (4), будет возрастать также и эмиттанс пучка. Эффект роста эмиттанса в указанном случае был обнаружен на опыте при изучении параметрического резонанса в линейном ускорителе И-2 /10/.

Отметим, что процесс образования сгустков (банчировка) не вытекает из общего термодинамического рассмотрения. Для получения величины изменения эмиттанса пучка из-за банчировки необходимо пользоваться данными расчета динамики частиц в конкретном ускорителе.

Так, если воспользоваться данными численного расчета динамики изменения поперечных размеров огибающей пучка и протяженности сгустков в согласующей секции для ускорителя с ПОКФ, ИТЭФ, то можно сравнить результаты применения формулы (5) с данными численного моделирования по росту эмиттанса пучка.

Численный расчет (Коломиец А.А., Воробьев И.А.):

$$\frac{R}{R_0} = 2{,}4; \quad \frac{\Delta Z_0}{\Delta Z} = 3; \quad \frac{Э}{Э_0} = 2{,}2 \,.$$

По формуле (5) для $(T_z)_0 \ll (T_R)_0$, $\quad \frac{Э}{Э_0} = 1{,}93$.

Более детальное сравнение результатов применения формулы (5) с данными численного моделирования для пучка, близкого к согласованному, дается на рис.6.

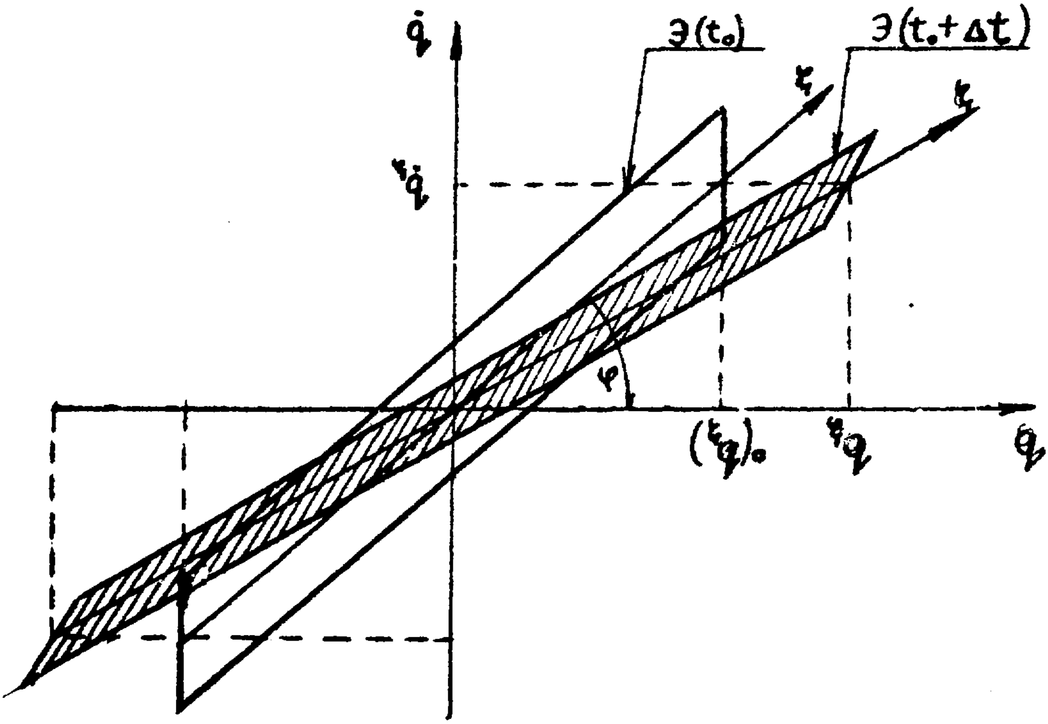

Рис.I Эмиттанс свободно расплывающегося пучка.

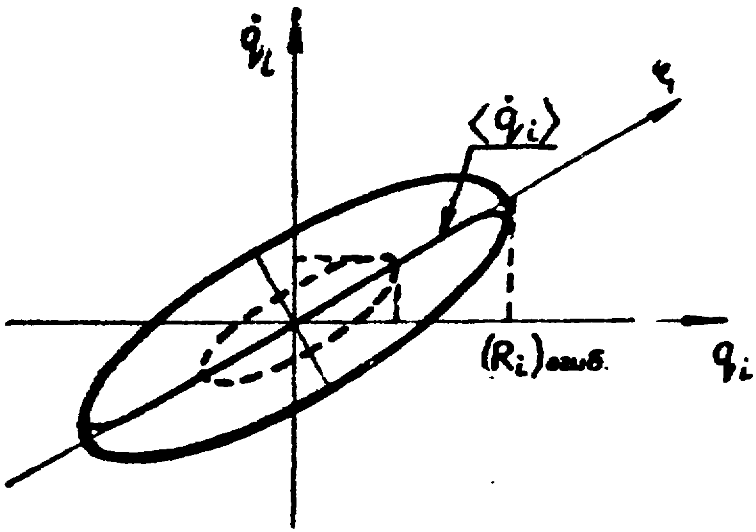

Рис.2 Эмиттанс пучка К-В внутри периода фокусировки.

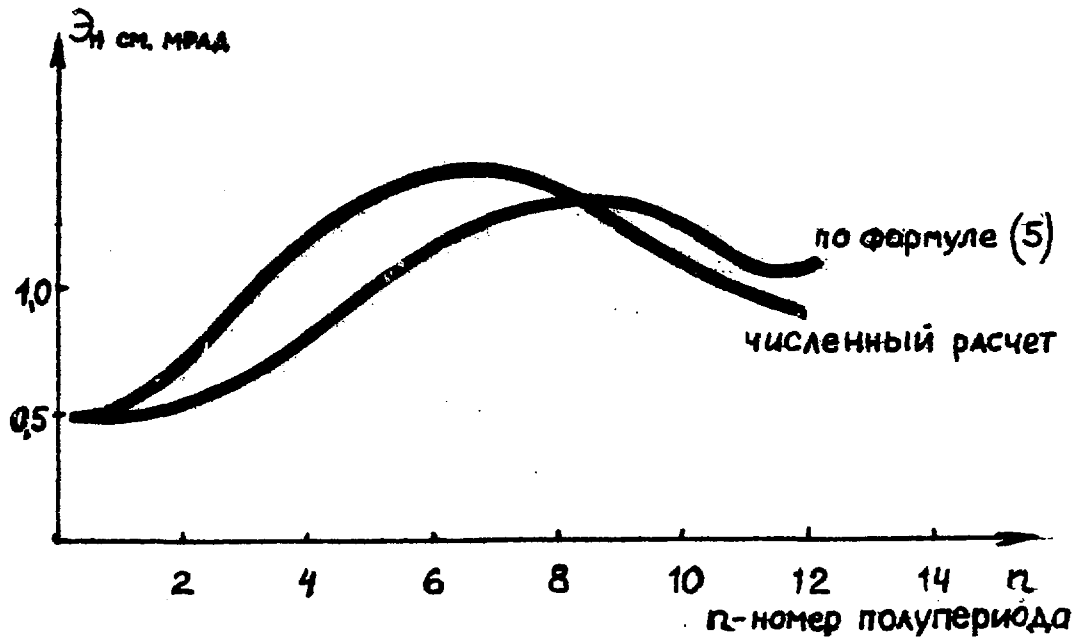

Рис.6. Сравнение расчетов по формуле (5) (Приложение II) с результатами численного моделирования.

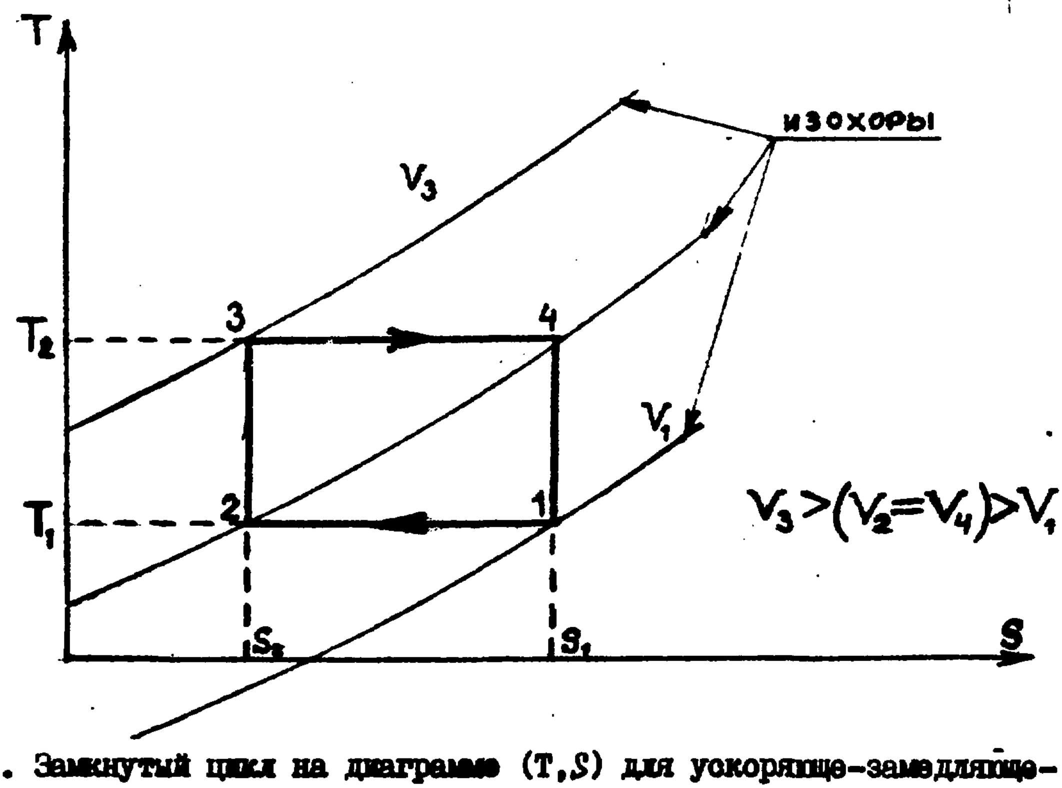

Рис.5. Замкнутый цикл на диаграмме (T,S) для ускоряюще-замедляющего канала.

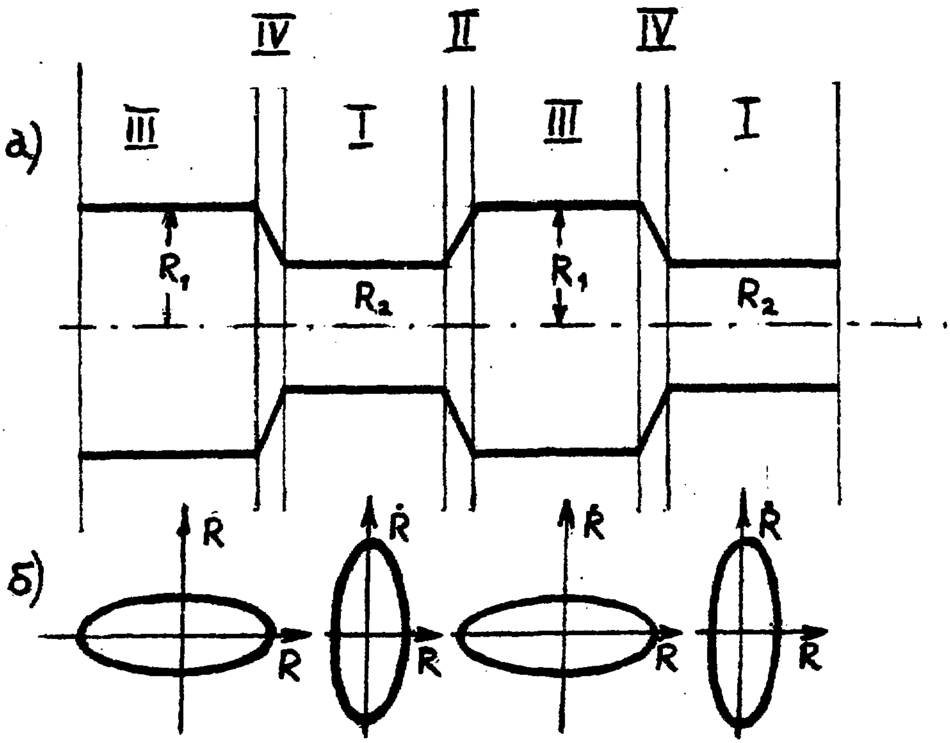

Рис.4. а) Ускоряюще-замедляющий канал с участками пирсовой оптики;
б) Последовательность положений эмиттанса пучка.

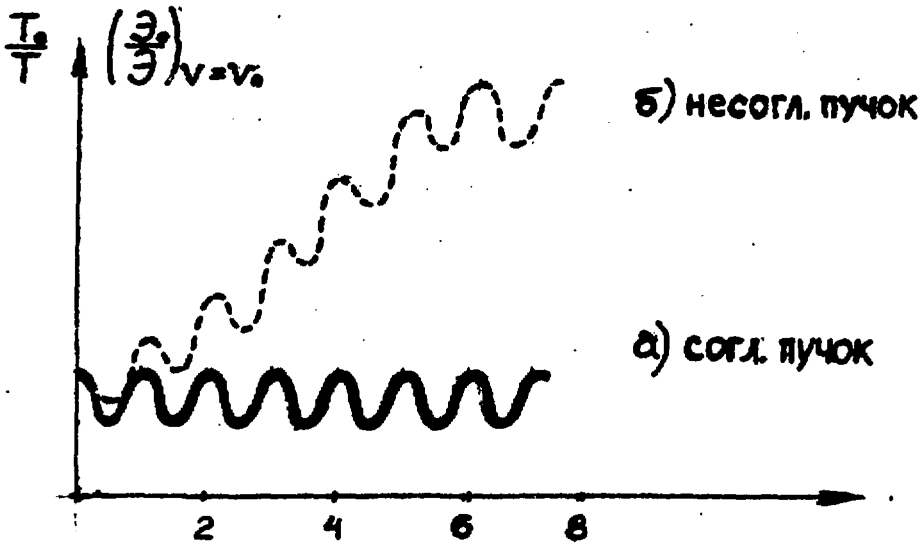

Рис.3. Изменение температуры пучка в канале транспортировки.

В.А.Баталин

Термодинамика пучка заряженных частиц. Рост энтропии пучка при ускорении и транспортировке.

Редактор И.Н.Ломакина   Корректор О.Ю.Ольховникова

Работа поступила в ОНТИ 14.10.85

Подписано к печати 1.02.86   Т03242   Формат 60x90 1/16
Офсетн.печ. Усл.-печ.л.1,5. Уч.-изд.л.1,1. Тираж 200 экз.
Заказ 34   Индекс 3624   Цена 16 коп.

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская, 25

10 коп ИНДЕКС 3624

М., ПРЕПРИНТ ИТЭФ, 1986, № 34, с.1–24