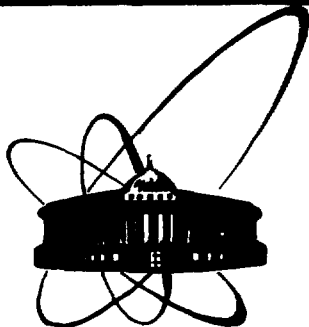


2117806728



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

JINR--9-87-438

9-87-438

В.А.Михайлов, С.И.Ценов

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛОСЫ
НЕЛИНЕЙНЫХ СУММОВЫХ РЕЗОНАНСОВ
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

1987

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема нелинейных резонансов бетатронного движения занимает одно из центральных мест в теории циклических ускорителей. Известно, что нелинейные суммовые резонансы могут привести к одновременному неограниченному нарастанию амплитуд бетатронных колебаний, а разностные приводят к тому, что одна из амплитуд (горизонтальная или вертикальная) может стать заведомо больше другой.

Нелинейная резонансная система с M степенями свободы описывается гамильтонианом

$$H(\vec{I}, \vec{a}, \theta) = H_0(\vec{I}) + H_1(\vec{I}, \vec{a}, \theta), \quad (1.1)$$

где $\vec{I} = (I_1, \dots, I_M)$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_M)$ — переменные действие и угол соответственно, а θ — азимут (независимая угловая переменная по кольцу ускорителя), играющая роль времени. В (1.1) второй член в правой части есть периодическая функция от \vec{a} и θ . Если ее представить в виде ряда Фурье по этим переменным, то получаются резонансные члены разных порядков. В этом ряду может присутствовать только один член; тогда говорят, что имеется изолированный резонанс. Во многих случаях на практике достаточно рассматривать изолированные нелинейные резонансы, так как предполагается, что в разложении H_1 в ряд Фурье все остальные члены много меньше резонансного, или описывают быстрые колебания и не вносят вклад в динамику резонанса.

Запишем резонансное условие в виде:

$$2p_1\nu_1 \pm 2p_2\nu_2 = m + \epsilon,$$

где ϵ — резонансная расстройка, $p_i = 1/2, 1, 3/2, \dots$ ($i = 1, 2$), m — гармоника возмущения магнитного поля, а ν_1 и ν_2 — частоты бетатронных колебаний в горизонтальной и вертикальной плоскости соответственно. Знак "+", как известно, соответствует суммовым резонансам, а знак "-" — разностным.

В работах [1-6] отправной точкой являются инварианты A_1^\pm и A_2^\pm (см. 2.8), из которых получается основная характеристика резонанса — ширина резонансной полосы. В своих работах [8-10] Онума указывает на некоторые недостатки в определенном в [6] понятии "ширина резонансной полосы" и предлагает способ устранения их на примере резонансов вида $p_1\nu_1 + p_2\nu_2 = m + \epsilon$ ($p_1 + p_2 \geq 3$ и p_1 (или p_2) = 1), не приводя конечного результата в виде, удобном для оценок.

В данной работе предпринята попытка определения ширины полосы изолированных, суммовых резонансов третьего и четвертого порядков методом эффективных потенциалов. В приложениях получены решения в эллиптических функциях для указанных резонансов и приведена схема расчета резонансов более высоких порядков.

2. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно (см., например, /5/), для изолированного нелинейного резонанса порядка $N^* = 2p_1 + 2p_2$ гамильтониан можно представить в виде:

$$H_0(I_1, I_2) = \nu_1 I_1 + \nu_2 I_2 + H_s(I_1, I_2), \quad (2.1a)$$

$$H_1(I_1, I_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta) = F(I_1, I_2) \cos \phi(\alpha_1, \alpha_2, \theta), \quad (2.1b)$$

где

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = 2p_1 \alpha_1 \pm 2p_2 \alpha_2 - m\theta + \delta_F, \quad (2.2)$$

$H_s(I_1, I_2)$ — стабилизирующая резонанс часть гамильтониана, $F(I_1, I_2)$ — амплитуда, δ_F — фаза ведущего члена, а знаки "+" или "-" в (2.2) соответствуют суммовым или разностным резонансам.

При помощи производящей функции

$$F_2(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \alpha_1, \alpha_2, \theta) = (\alpha_1 + \epsilon_1 \theta - \nu_1 \theta) \tilde{I}_1 + (\alpha_2 \pm \epsilon_2 \theta - \nu_2 \theta) \tilde{I}_2$$

представим (2.1) в виде:

$$\tilde{H}_0(I_1, I_2) = \epsilon_1 I_1 \pm \epsilon_2 I_2 + H_s(I_1, I_2), \quad (2.3a)$$

$$\tilde{H}_1(I_1, I_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = F(I_1, I_2) \cos \tilde{\phi}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2), \quad (2.3b)$$

где $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{4p_i}$ ($i = 1, 2$) и $\tilde{\phi}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = 2p_1 \tilde{\alpha}_1 \pm 2p_2 \tilde{\alpha}_2 + \delta_F$. В целях упрощения в дальнейшем знак "тильда" над новыми переменными будем опускать. Запишем уравнения Гамильтона для системы (2.3):

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{d\alpha_1}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \epsilon_1 + \frac{\partial H_s}{\partial I_1} + \frac{\partial F}{\partial I_1} \cos \phi, \quad (2.4a)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{d\alpha_2}{d\theta} = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \pm \epsilon_2 + \frac{\partial H_s}{\partial I_2} + \frac{\partial F}{\partial I_2} \cos \phi. \quad (2.4b)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{dI_1}{d\theta} = - \frac{\partial H}{\partial a_1} = 2p_1 F(I_1, I_2) \sin \phi, \quad (2.4\text{в})$$

$$\dot{I}_2 = \frac{dI_2}{d\theta} = - \frac{\partial H}{\partial a_2} = \pm 2p_2 F(I_1, I_2) \sin \phi. \quad (2.4\text{г})$$

Из (2.4в,г) сразу получается хорошо известный инвариант ^{1/5/}:

$$\frac{I_1}{p_1} \mp \frac{I_2}{p_2} = C_{\pm} = \text{const}. \quad (2.5)$$

Выражая $\cos \phi$ из (1.1) с учетом (2.3) и подставляя полученное выражение в (2.4а,б), найдем:

$$\dot{a}_1 = \epsilon_1 + \frac{\partial H_s}{\partial I_1} + G_1(A_1^{\pm} - 2\epsilon_1 I_1 - H_s), \quad (2.6\text{а})$$

$$\dot{a}_2 = \pm \epsilon_2 + \frac{\partial H_s}{\partial I_2} + G_2(A_2^{\pm} \mp 2\epsilon_2 I_2 - H_s), \quad (2.6\text{б})$$

где

$$G_i(I_1, I_2) = \frac{1}{F(I_1, I_2)} \frac{\partial F}{\partial I_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

$$A_1^{\pm} = H + \frac{\epsilon C_{\pm}}{4}, \quad A_2^{\pm} = H - \frac{\epsilon C_{\pm}}{4}. \quad (2.8)$$

Дифференцируя уравнения (2.4в) и (2.4г) и используя все уравнения (2.4) и (2.3) для выражения $\cos \phi$, получим уравнения второго порядка для действий I_1 и I_2 :

$$\ddot{I}_1 + 2p_1(H_s + 2\epsilon_1 I_1 - A_1^{\pm}) \left(\epsilon + 2p_1 \frac{\partial H_s}{\partial I_1} \pm 2p_2 \frac{\partial H_s}{\partial I_2} \right) = 2p_1 F \left(2p_1 \frac{\partial F}{\partial I_1} \pm 2p_2 \frac{\partial F}{\partial I_2} \right), \quad (2.9)$$

$$\ddot{I}_2 \pm 2p_2(H_s \pm 2\epsilon_2 I_2 - A_2^{\pm}) \left(\epsilon + 2p_1 \frac{\partial H_s}{\partial I_1} \pm 2p_2 \frac{\partial H_s}{\partial I_2} \right) = \pm 2p_2 F \left(2p_1 \frac{\partial F}{\partial I_1} \pm 2p_2 \frac{\partial F}{\partial I_2} \right). \quad (2.10)$$

Рассмотрим теперь частный случай резонанса без стабилизации:

$$H_{\theta}(I_1, I_2) = 0; \quad F(I_1, I_2) = D(2I_1)^{p_1} (2I_2)^{p_2}. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.9) и (2.10) приобретают вид:

$$\ddot{I}_1 + \epsilon^2 I_1 = 2p_1 \epsilon A_1^{\pm} + 2p_1 D^2 (2I_1)^{2p_1-1} (2I_2)^{2p_2-1} [(2p_1)^2 (2I_2) \pm (2p_2)^2 (2I_1)], \quad (2.12)$$

$$\ddot{I}_2 + \epsilon^2 I_2 = 2p_2 \epsilon A_2^{\pm} + 2p_2 D^2 (2I_1)^{2p_1-1} (2I_2)^{2p_2-1} [(2p_1)^2 (2I_2) \pm (2p_2)^2 (2I_1)]. \quad (2.13)$$

Вводя новую независимую переменную $w = \epsilon \theta / \delta_2$, где

$$\delta_i = \epsilon (2D)^{-1} (2I_{10})^{1-p_1-p_2} \quad (i = 1, 2) \quad (2.14)$$

безразмерные параметры, $I_{10} = I_1(\theta = 0)$, $(i = 1, 2)$, и безразмерные амплитуды $\dot{I}_i = I_i I_{10}^{-1}$ $(i = 1, 2)$, выражение (2.6) можно записать в виде:

$$\dot{\alpha}_1 = \nu_{1R} = \epsilon_1 - \epsilon/2 + \Delta\nu_1^{\pm} / \dot{I}_1, \quad (2.15a)$$

$$\dot{\alpha}_2 = \nu_{2R} = \epsilon_2 \mp \epsilon/2 + \Delta\nu_2^{\pm} / \dot{I}_2. \quad (2.15b)$$

Величины $\Delta\nu_i^{\pm}$, имеющие смысл нелинейного сдвига частот в резонансе, даются выражениями:

$$\Delta\nu_1^{\pm} = p_1 A_1^{\pm} / I_{10} = \epsilon \bar{\Delta\nu}_1^{\pm} = \epsilon(1/2 + p_1 \delta^{p_2} \delta_1^{-1} \cos \phi_0), \quad (2.16a)$$

$$\Delta\nu_2^{\pm} = p_2 A_2^{\pm} / I_{20} = \epsilon \bar{\Delta\nu}_2^{\pm} = \epsilon(\pm 1/2 + p_2 \delta_2^{-1} \delta^{-p_1} \cos \phi_0), \quad (2.16b)$$

где δ — отношение между начальными амплитудами

$$\delta = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{1}{p_1+p_2-1}} = \frac{I_{20}}{I_{10}}, \quad (2.17)$$

а $\phi_0 = 2p_1 \alpha_{10} \pm 2p_2 \alpha_{20} + \delta \Gamma$ — начальная фаза ($\alpha_{i0} = \alpha_i(\theta = 0)$, $i = 1, 2$). Тогда уравнения (2.12) и (2.13) можно представить как

$$\dot{I}_1'' + \delta_2^2 \dot{I}_1 = 2\delta_2^2 \bar{\Delta\nu}_1^{\pm} + p_1 \left(\frac{\dot{I}_1}{\delta} \right)^{2p_1-1} \dot{I}_2^{2p_2-1} [(2p_1)^2 \dot{I}_2 \delta \pm (2p_2)^2 \dot{I}_1], \quad (2.18)$$

$$\dot{I}_2'' + \delta_2^2 \dot{I}_2 = \pm 2\delta_2^2 \bar{\Delta\nu}_2^{\pm} \pm p_2 \left(\frac{\dot{I}_1}{\delta} \right)^{2p_1-1} \dot{I}_2^{2p_2-1} [(2p_1)^2 \dot{I}_2 \pm (2p_2)^2 \frac{\dot{I}_1}{\delta}], \quad (2.19)$$

где штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной w . Инварианты (2.5) приобретают вид:

$$\frac{q_1}{p_1} \mp \frac{\delta}{p_2} q_2 = \frac{\delta}{p_1} \delta_{p_1 p_2}^{\pm}, \quad (2.20)$$

$$\delta_{p_1 p_2}^{\pm} = \frac{1}{\delta} \mp \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.21)$$

При помощи (2.20) переменные в уравнениях (2.18) и (2.19) разделяются, и в принципе могут быть решены. Это осуществляется сравнительно простым способом для случаев резонансов третьего и четвертого порядка; результаты представлены в приложении 1. Для случаев резонансов высшего порядка процедура решения уравнений (2.18) и (2.19) дана в приложении 2.

3. ШИРИНА РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛОС РЕЗОНАНСОВ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Запишем уравнения (2.4) и (2.13) в виде:

$$q_1' = 2p_1 \delta \mathcal{F}(q_1, q_2) \sin \phi, \quad (3.1a)$$

$$q_2' = \pm 2p_2 \mathcal{F}(q_1, q_2) \sin \phi, \quad (3.1б)$$

$$q_2'' = -\delta_2^2 q_2 \pm 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^{\pm} \pm 2p_2 \mathcal{F}(2p_1 \delta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_1} \pm 2p_2 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_2}), \quad (3.1в)$$

где введено обозначение

$$\mathcal{F}(q_1, q_2) = \left(\frac{q_1}{\delta} \right)^{p_1} q_2^{p_2}. \quad (3.2)$$

Систему уравнений (3.1) можно получить из эффективного гамильтониана

$$H_e = \frac{p_0^2}{2} - \frac{(2p_2)^2}{2} \mathcal{F}^2(q_2) + \frac{\delta_2^2 q_2^2}{2} \mp 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^{\pm} q_2; \quad p_0 = q_2' = \frac{\partial H_e}{\partial p_0}. \quad (3.3)$$

В (3.3) q_1 выражено через q_2 с учетом (2.20). Из начальных условий легко получить следующее выражение:

$$H_e = -2\delta_2^2 (\Delta \tilde{\nu}_2^{\pm})^2 \leq 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим сначала резонанс $\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$. При помощи преобразования

$$j_2 = \frac{x}{3} + \frac{\delta_2^2 - 4\delta_{12}^+}{6} \quad (3.5)$$

гамильтониан (3.3) приобретает вид:

$$H_0 = \theta H_0 = \frac{p^2}{2} + V(x, a); \quad p = x' = \frac{\partial H_0}{\partial p}, \quad (3.6)$$

где потенциальная функция $V(x, a)$ есть:

$$V(x, a) = -\frac{x^3}{3} - ax; \quad a = 6\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ - \frac{(\delta_2^2 - 4\delta_{12}^+)^2}{4}. \quad (3.7)$$

Известно, что потенциальная функция (3.7) представляет собой катастрофу складки^{/14/}. Уравнение сепаратрисы в пространстве параметров есть $a = 0$. Система (3.6) структурно устойчива при $a < 0$ и неустойчива при $a > 0$. Условие $a < 0$, очевидно, является необходимым (физически это означает образование потенциальной ямы, в которой происходит финитное движение), но недостаточным условием устойчивости системы в целом. Так как в соответствии с (3.4) полная энергия $H_0 \leq 0$, достаточным условием является:

$$V(\sqrt{a}, a) > 0, \quad (3.8)$$

что с учетом (3.7) дает:

$$a > \frac{(\delta_2^2 - 4\delta_{12}^+)^2}{16}. \quad (3.9)$$

Органичиваясь только четвертой и второй степенями δ_2 в (3.9) и (2.14) $\delta_2 > 1$, получим:

$$|\epsilon| > 4\sqrt{2} D(2I_{10} + 7I_{20})^{1/2}. \quad (3.10)$$

Период колебаний финитного движения, определяемого (3.8), дается выражением:

$$T = \frac{\delta_2}{\epsilon} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\xi}{\sqrt{2[H_0 - V(\xi, a)]^{1/2}}} = \frac{\delta_2}{\epsilon} \left(\frac{6}{x_2 - x_0} \right)^{1/2} K(k), \quad (3.11)$$

где

$$x_0 = 3 + \frac{4\delta_{12}^+ - \delta_2^2}{2}, \quad (3.12a)$$

$$x_{1,2} = -\frac{x_0}{2} \mp \frac{1}{2}(-12a - 3x_0^2)^{1/2}, \quad (3.12b)$$

$$k = \left(\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \right)^{1/2}. \quad (3.12b)$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода ^{/13/}. Амплитуда биений равна:

$$\text{Amr}(\vartheta_2) = \frac{x_1 - x_0}{6} = -\frac{x_0}{4} - \frac{1}{12}(-12a - 3x_0^2)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим резонанс четвертого порядка $\nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon$. Преобразование

$$\vartheta_2 = \frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{3\delta_{13}^+}{4} \quad (3.14)$$

приводит (2.19) к виду:

$$x'' = x^3 + a_1 x + b_1, \quad (3.15)$$

где

$$a_1 = -\left(\delta_2^2 + \frac{81\delta_{13}^+}{8}\right); \quad b_1 = \sqrt{6} \left(\frac{81(\delta_{13}^+)^3}{16} + \frac{3\delta_2^2\delta_{13}^+}{4} + 2\delta_2^2\tilde{\Delta\nu}_2^+ \right). \quad (3.16)$$

Уравнение (3.15) может быть получено из потенциальной функции:

$$V(x, a_1, b_1) = -\frac{x^4}{4} - \frac{a_1}{2}x^2 - b_1x. \quad (3.17)$$

Известно, что (3.17) представляет собой катастрофу сборки ^{/14/}. Уравнение сепаратрисы в пространстве управляющих параметров a_1, b_1 записывается в виде:

$$\Delta(a_1, b_1) = \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = 0. \quad (3.18)$$

Условие структурной устойчивости (3.17) есть $\Delta < 0$. Тогда существуют две возможности:

а) $\delta_{13}^+ > 0$. Ограничиваясь четвертой и шестой степенями δ_2 , из условия:

$$V(x_{01}, a_1, b_1) > 0, \quad (3.19)$$

получим:

$$|\epsilon| > \frac{\sqrt{3} D}{2} (839 I_{10}^2 + 5622 I_{20} I_{10} + 4967 I_{20}^2)^{1/2}, \quad (3.10)$$

где x_{10} максимальный корень уравнения $x^3 + a_1 x + b_1 = 0$.

б) $\delta_{13}^+ = 0$. В этом случае имеем:

$$\delta_2^2 > [18 \Delta \nu_2^+]^2 \quad (3.21)$$

или приближенно

$$|\epsilon| > 36 D I_{20}. \quad (3.20)$$

Так как рассмотрение резонанса $2\nu_1 + 2\nu_2 = \pi + \epsilon$ полностью аналогично только что проведенному, выпишем только конечный результат.

При $\delta_{22}^+ > 0$ имеем

$$|\epsilon| = 2D(119 I_{10}^2 + 770 I_{10} I_{20} + 839 I_{20}^2)^{1/2}, \quad (3.22)$$

а в случае $\delta_{22}^+ = 0$.

$$\delta_2^2 > 3 [12 \Delta \nu_2^+]^2 \quad (3.23)$$

или

$$|\epsilon| > 24 \sqrt{3} D I_{20}. \quad (3.22)$$

В случае разностных резонансов легко показать, что всегда существует потенциальная яма, определяющая финитное движение. Это обусловлено специфической формой потенциала $V(x)$ для разностного резонанса.

Приведенный в данной работе метод исследования нелинейных резонансов связи, на наш взгляд, имеет следующие преимущества. Во-первых, непосредственно получаются явные выражения для I_1 и I_2 , описывающие движение при произвольном ϵ . Во-вторых, при помощи элементарной теории катастроф непосредственно получаются области

в пространстве параметров резонанса (управляющих параметров), в которых движение устойчиво. Эти области и определяют ширину резонансной полосы.

Авторы выражают благодарность Н.Ю.Казаринову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Здесь мы приведем точные решения уравнений (2.18) и (2.19) для случаев суммовых резонансов третьего и четвертого порядка.

1. Резонанс $\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$. Уравнения (2.18) и (2.19) запишем в виде:

$$\ddot{f}_1'' + \omega_1 f_1 - \frac{6}{8} f_1^2 - 2\delta_{12} \delta_{12}^+ - 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_1^+ = 0, \quad (\text{П1.1a})$$

$$\ddot{f}_2'' + \omega_2 f_2 - 3f_2^2 - 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ = 0, \quad (\text{П1.1б})$$

$$\omega_1 = \delta_2^2 + 8\delta_{12}^+, \quad \omega_2 = \delta_2^2 - 4\delta_{12}^+. \quad (\text{П1.1в})$$

Решение уравнения (П1.1б) в силу (2.24) есть

$$f_2(w) = 2 \left[\wp(w - w_0) + \frac{\omega_2}{12} \right], \quad (\text{П1.2})$$

а инварианты функции Вейерштрасса g_2 и g_3 имеют вид:

$$g_2 = \frac{\omega_2^2}{12} - 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+, \quad g_3 = \frac{\omega_2^3}{216} - \frac{\omega_2 \delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+}{6} - \frac{\eta_1}{4}, \quad (\text{П1.3a})$$

$$\eta_1 = \omega_2 - 2 - 4\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+. \quad (\text{П1.3б})$$

И, кроме того, w_0 — такая величина w , при которой $f_2(0) = 1$. Из (П1.2) и (2.20) получаем

$$f_1(w) = \delta \left[\wp(w - w_0) + \frac{\omega_2}{12} + \delta_{12}^+ \right]. \quad (\text{П1.4})$$

2. Резонанс $\nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon$. Уравнение (2.19) имеет вид

$$\ddot{f}_2'' + \delta_2^2 f_2 - 6f_2^3 - \frac{27\delta_{13}^+}{2} f_2^2 - 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ = 0. \quad (\text{П1.5})$$

Введем

$$f_1(f_2) = 3f_2^4 + 9\delta_{13}^+ f_2^3 - \delta_2^2 f_2^2 + 4\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ f_2 + \eta_2, \quad (\text{П1.6})$$

где

$$\eta_2 = \delta_2^2 - 9\delta_{13}^+ - 3 - 4\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ . \quad (\text{П1.7})$$

Пусть λ — простой корень уравнения $f_1(z) = 0$ (т.е. $f_1'(\lambda) \neq 0$). Тогда решение уравнения (П1.5) получаем в виде

$$\mathcal{J}_2(w) = \lambda + 6f_1'(\lambda) [24\wp(w - w_0) - f_1''(\lambda)]^{-1} . \quad (\text{П1.8})$$

Инварианты функции Вейерштрасса суть

$$g_2 = 3\eta_2 - \frac{18\delta_2^2 \delta_{13}^+ \Delta \tilde{\nu}_2^+}{2} + \frac{\delta_2^4}{12}, \quad g_3 = \begin{vmatrix} 3 & \frac{9\delta_{13}^+}{4} & -\frac{\delta_2^2}{6} \\ \frac{9\delta_{13}^+}{4} & -\frac{\delta_2^2}{6} & \delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ \\ -\frac{\delta_2^2}{6} & \delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ & \eta_2 \end{vmatrix} \quad (\text{П1.9})$$

Для амплитуды $\mathcal{J}_1(w)$ получаем:

$$\mathcal{J}_1(w) = \delta \{ \delta_{13}^+ + \frac{1}{3} [\lambda + 6f_1'(\lambda) [24\wp(w - w_0) - f_1''(\lambda)]^{-1}] \} . \quad (\text{П1.10})$$

3. Резонанс $2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$. Уравнение (2.19) будет иметь вид:

$$\mathcal{J}_2'' + \omega \mathcal{J}_2 - 8\mathcal{J}_2^3 - 12\delta_{22}^+ \mathcal{J}_2^2 - 2\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ = 0 , \quad (\text{П1.11})$$

где

$$\omega = \delta_2^2 - 4\delta_{22}^+ . \quad (\text{П1.12})$$

По аналогии с (П1.6) введем функцию

$$f_2(\mathcal{J}_2) = 4\mathcal{J}_2^4 + 8\delta_{22}^+ \mathcal{J}_2^3 - \omega \mathcal{J}_2^2 + 4\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ + \eta_3 , \quad (\text{П1.13})$$

где

$$\eta_3 = \omega - 8\delta_{22}^+ - 4 - 4\delta_2^2 \Delta \tilde{\nu}_2^+ . \quad (\text{П1.14})$$

Пусть χ — снова простой корень уравнения $f_2(\mathcal{J}_2) = 0$. Тогда решение (П1.11) есть

$$\mathcal{J}_2(w) = \chi + 6f_2'(\chi) [24\wp(w - w_0) - f_2''(\chi)]^{-1} . \quad (\text{П1.15})$$

где инварианты функции Вейерштрасса

$$\varepsilon_2 = 4\eta_3 - 8\delta_2^2 \delta_{22}^+ \Delta v_2^+ + \frac{\omega^2}{12}, \quad \varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2\delta_{22}^+ & -\frac{\omega}{6} \\ 2\delta_{22}^+ & -\frac{\omega}{6} & \delta_2^2 \Delta v_2^+ \\ -\frac{\omega}{6} & \delta_2^2 \Delta v_2^+ & \eta_3 \end{vmatrix} \quad (\text{П1.16})$$

Для амплитуды $\mathcal{J}_1(w)$ имеем

$$\mathcal{J}_1(w) = \delta \left[\delta_{22}^+ + \chi + 6f_2'(\chi) [24\varphi(w - w_0) - f_2''(\chi)]^{-1} \right]. \quad (\text{П1.17})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим произвольный нелинейный резонанс вида $2p_1\nu_1 + 2p_2\nu_2 = m + \epsilon$ порядка $N^* = 2p_1 + 2p_2$. Очевидно, что каждое из уравнений (2.18) и (2.19) при помощи (2.20) можно записать в виде:

$$\mathcal{J}_i'' + \mathcal{P}_{N^*-1}^{(i)}(\mathcal{J}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{П2.1})$$

где $\mathcal{P}_m^{(i)}(z_i)$ — полином степени m переменной z_i . Интегрируя (П2.1), имеем:

$$(\mathcal{J}_i')^2 + \mathcal{P}_{N^*}^{(i)}(\mathcal{J}_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (\text{П2.2a})$$

В теории эллиптических функций существует следующая

Теорема ^{11/}. Всякая эллиптическая функция $f(z)$ удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению

$$\mathcal{P}[f(z), f'(z)] = 0, \quad (\text{П2.26})$$

где $\mathcal{P}(u, v)$ — многочлен относительно своих аргументов.

Из простых физических соображений можно предположить, что $\mathcal{J}_i(w)$ — эллиптические функции w . Это отражает тот факт, что движение квазипериодическое. В силу этого предположения и сравнения уравнений (П2.2a) и (П2.26) мы видим, что $\mathcal{J}_i(w)$ действительно следует искать среди эллиптических функций. Отметим, что эллиптические функции — не единственное представление $\mathcal{J}_i(w)$, так как не каждое решение уравнения (П2.26) является эллиптической функцией.

Всякая эллиптическая функция $\mathcal{J}_i(w)$ выражается в виде ^{12/}:

$$\mathcal{J}_i(w) = R_{11}[\varphi(w)] + \varphi'(w) R_{21}[\varphi(w)], \quad (\text{П2.3})$$

где $R_{11}(u)$ и $R_{21}(u)$ — рациональные функции своих аргументов, а $\wp(w)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса [13].

Коэффициенты, входящие в R_{11} и R_{21} , могут быть найдены следующим способом. Сначала находим $\wp_1'(w)$ из (П2.3), используя следующее соотношение [13]:

$$[\wp'(w)]^2 = 4\wp^3(w) - g_2\wp(w) - g_3, \quad (\text{П2.4a})$$

$$\wp''(w) = 6\wp^2(w) - \frac{g_2}{2}, \quad (\text{П2.4б})$$

где g_2 и g_3 — инварианты функции Вейерштрасса, потом полученные выражения для $\wp_1(w)$ и $\wp_1'(w)$ подставляются в (П2.2a) и сравниваются коэффициенты перед соответствующими степенями $\wp(w)$ и $\wp'(w)$. Уже для резонансов пятого порядка вычисления становятся довольно громоздкими. Их можно проводить на персональных компьютерах и получать всю необходимую информацию о решении (П2.3).

Отметим, что все сказанное выше касается в силе и для случая резонанса со стабилизирующими членами, как как $H_8(I_1, I_2)$ является суммой однородных многочленов по I_1 и I_2 степени не выше $N^{*}/2$ [5].

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

В этом приложении исследуем одну важную характеристику нелинейного резонанса. В принятых здесь обозначениях роль времени исполняет азимут θ , так что "время" развития резонанса есть азимут, при котором амплитуда возрастает неограниченно для случая вырождения потенциала $V(x)$.

Рассмотрим (3.6) при $a = 0$. Решение уравнения Гамильтона имеет вид

$$\theta = -\frac{\delta_2}{\epsilon\sqrt[4]{3}} \left(\frac{3}{2|x_0|}\right)^{1/2} [F(\phi, k) + F(1, k)], \quad (\text{П3.1})$$

где

$$\phi = \frac{x/|x_0| + 1 - \sqrt{3}}{x/|x_0| + 1 + \sqrt{3}}, \quad k = \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \quad (\text{П3.2})$$

а x_0 по-прежнему дается выражением (3.12a). Время развития резонанса есть

$$\theta_{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = \frac{\delta_2}{|\epsilon| \sqrt{3}} \left(\frac{6}{|x_0|} \right)^{1/2} F(1, k). \quad (\text{П3.3})$$

Здесь $F(\phi, k)$ означает неполный эллиптический интеграл первого рода. Решение соответствующих уравнений (3.15) при $\Delta(a_1, b_1) = 0$ для резонанса $\nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon$ и для резонанса $2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon$ записывается в виде

$$\theta = \frac{\delta_2}{\epsilon |x_0|} F(\phi, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad \phi = \arccos \frac{|x_0|}{x}, \quad (\text{П3.4})$$

где

$$x_0 = \sqrt{6} \left(1 + \frac{3\delta_{13}^+}{4} \right), \quad \text{для } \nu_1 + 3\nu_2 = m + \epsilon, \quad (\text{П3.5a})$$

$$x_0 = \sqrt{2} (2 + \delta_{22}^+), \quad \text{для } 2\nu_1 + 2\nu_2 = m + \epsilon. \quad (\text{П3.5б})$$

Аналогично (П3.3) найдем

$$\theta_{\infty} = \frac{\delta_2}{\epsilon |x_0|} K \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \quad (\text{П3.6})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sturrock P.A. - *Annals of Physics*, 1958, 3, p.113.
2. Schoch A. *CERN* 57-21, 1958.
3. Hagedorn R. *CERN* 57-1, 1957.
4. Hagedorn R., Schoch A. *CERN* 57-14, 1957.
5. Guignard G. *CERN* 78-11, 1978.
6. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. *Теория циклических ускорителей*. М.: ГИФМЛ, 1962.
7. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика*. М.: Мир, 1984.
8. Ohnita S. *Fermilab TM-507*, 1974.
9. Ohnita S. *Fermilab TM-910*, 1974.
10. Ohnita S. *Fermilab FN-329*, 1980.
11. Уиттекер Э.Т., Ватсон Г.Н. *Курс современного анализа*. Ч. I-II. М.: Наука, 1963.
12. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике*. М.: Наука, 1977.
13. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979.
14. Thom R. *Structural Stability and Morphogenesis*, "Reading" Massachusetts, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1987 года.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтрон-ной физике. Дубна, 1982.	5 р.00 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р.55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р.00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р.50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р.30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р.50 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983.	3 р.50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р.75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1985.	4 р.80 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1985.	3 р.75 к.
Д3,4,17-86-747	Труды V Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1986.	4 р.50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984, /2 тома/	13 р.50 к.
Д1,2-86-668	Труды VIII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главлпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Михайлов В.А., Ценов С.И.

9-87-438

**К определению полосы нелинейных
суммовых резонансов бетатронных колебаний**

Предпринята попытка определения полосы изолированных суммовых резонансов третьего и четвертого порядков. С помощью уравнений Гамильтона и инвариантов движения получены выражения для эффективных потенциалов, которые исследовались с применением метода элементарной теории катастроф. В качестве конечного результата приведены формулы, позволяющие оценить ширину полосы любого суммового резонанса третьего и четвертого порядков. С помощью эллиптических функций получены решения уравнений Гамильтона для указанных резонансов и дана оценка времени их развития, приведена схема расчета резонансов более высоких порядков.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Mikhailov V.A., Tsenov S.I.

9-87-438

**On Calculation of the Nonlinear Sum Resonance
Bandwidth of Betatron Oscillations**

An attempt has been made to calculate the bandwidths of isolated sum resonances of the third and fourth order. From Hamilton's equations and invariants of motion expressions for the effective potential are derived which are examined by the methods of elementary catastrophe theory. The final result is expressed by the formulae giving the opportunity to evaluate the bandwidth of all sum resonances of the third and fourth order. Solutions of Hamilton's equations are obtained in the form of elliptic functions for the resonances mentioned, an estimate for the development time for the resonance is given, and a scheme for calculation of the resonances of higher order is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987

18 коп.

Редактор Б.Б. Колесова. Макет Т.Е. Попеко.
Набор И.П. Трусовой, Е.М. Граменицкой.

Подписано в печать 06.07.87.

Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,2.

Тираж 205. Заказ 39310.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.