KFTI--88-34.

V

ХФТИ 88-34

Харьковский
ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
физико-технический институт АН УССР

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ВИНТОВЫХ ОБМОТОК ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВОК

Препринт

Москва-ЦНИИатоминформ-1988

УДК 681.518

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ВИНТОВЫХ ОБМОТОК ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВОК: Препринт ХФТИ 88-34/В.П.Воробьева, А.В.Георгиевский, Г.Я.Любарский, С.А.Мартынов, М.А.Хажмурадов. - Харьков: ХФТИ АН УССР, 1988. - 8 с.

Предлагается алгоритм аналитического описания геометрии винтовых обмоток (ВО) предельно крутых торсатронов. Это позволило автоматизировать процесс построения ВО, сократить сроки их проектирования и повысить производительность труда конструкторов-разработчиков на этапе поиска оптимального варианта новой установки.

Рис. 6, список лит. - 5 назв.

ВВЕДЕНИЕ

С целью расширения диапазона исследования торсатронов и выбора параметров малогабаритного источника нейтронов средствами САПР изучена геометрия винтовых обмоток (ВО) предельно крутых торсатронов с аспектовым отношением A_B вблизи единицы ($A_B = \frac{R_o}{a_B}$; $1 < A_B \leqslant 1{,}5$, где R_o и a_B – большой и малый радиусы тора) [I–4].

Рассмотрены ВО с числом периодов по большому обходу тора, равным единице (m_B = I).

В этом случае ВО представлена в виде деформированных, механически сцепленных друг с другом токовых колец, расположенных на поверхности тора. Большой интерес представляет ВО, состоящая из плоских круговых колец.

Исследованы винтовые системы с A_B < I. Показано, что в этом случае ВО изготавливается в виде отдельных модулей и обладает хорошими параметрами магнитной конфигурации.

САПР является мощным инструментом конструкторской и технологической деятельности, позволяет за малый промежуток времени перебрать большое число вариантов, повысить точность и качество разработок [5].

ОПИСАНИЕ ТОРА

Обозначим через a радиус сечения тора, а через R_o - среднюю линию тора. Выберем прямоугольную систему координат x, y, z так, чтобы оси x и y лежали в экваториальной плоскости тора и начинались в центре тора (рис. I). На его поверхности введем тороидальные координаты φ и θ, полагая (рис. 2):

$$x = (R_o + a\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (R_o + a\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = a\sin\theta. \tag{I}$$

Заметим, что

$$\sin\theta = \frac{z}{a} \qquad (0 < \theta < m_B 2\pi),$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{R_o + a\cos\theta}; \qquad \cos\varphi = \frac{x}{R_o + a\cos\theta}. \tag{2}$$

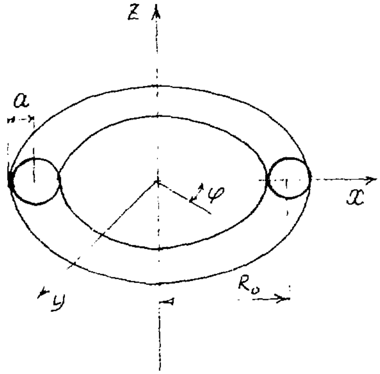

Рис.I.

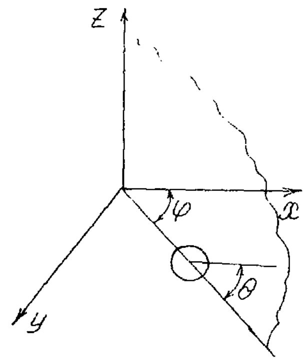

Рис.2.

ЛИНИЯ КАСАНИЯ С ТОРОМ И СРЕДНЕЙ ЛИНИЕЙ ПОЛЮСА

Любую линию на торе можно задать, указав зависимость φ от Θ. По условию задачи линия касания с полюсом задается уравнением

$$\varphi = -\frac{1}{m_в}\left(\Theta - \alpha \sin\Theta - \beta \sin 2\Theta\right) + \frac{2\pi}{\ell} K, \tag{3}$$

где $K = 0, I, \dots, m - I$ – номер полюса; ℓ – число полюсов.

НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ЛИНИИ КАСАНИЯ

Форма полюса задается в нормальной плоскости. Поэтому необходимо найти формулы, связывающие координаты ξ, η точки в нормальной плоскости с ее координатами x, y, z.

Пусть $\bar{\Theta}$, $\bar{\varphi}$ – координаты точки пересечения нормальной плоскости с линией касания (3); M – точка, которая движется по линии касания, причем $\Theta = t$ (t – время). Скорость M в момент, когда она в точках $\bar{\Theta}$, $\bar{\varphi}$ имеет следующие проекции на оси x, y, z:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a \sin\Theta \cos\varphi - (R_0 + a\cos\Theta)\sin\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}\Big|_{\substack{\Theta=\bar{\Theta}\\ \varphi=\bar{\varphi}}}, \tag{4}$$

где

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\Theta} = -\frac{1}{m}\left(1 - \alpha\cos\Theta + 2\beta \sin 2\Theta\right)\Big|_{\substack{\Theta=\bar{\Theta}\\ \varphi=\bar{\varphi}}}.$$

Таким образом,

$$v_x = -a \sin\bar{\Theta} \cos\bar{\varphi} + (R_0 + a\cos\Theta)\sin\bar{\varphi}\, \frac{d\varphi}{dt}\Big|_{\Theta=\bar{\Theta}}, \tag{5}$$

$$v_y = -a\sin\bar\theta\sin\bar\varphi + (R_0 + a\cos\bar\theta)\cos\varphi \left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{\theta=\bar\theta}; \tag{6}$$

$$v_z = a\cos\bar\theta.$$

Скорость $\vec{v}$ направлена по касательной к линии касания и потому перпендикулярна нормальной плоскости.

Обозначим через $\vec{n}$ – нормаль к тору в точке $\bar\theta$, $\bar\varphi$. Она нормальна любой кривой на торе, проходящей через эту точку, в частности, линии касания. Следовательно, вектор $\vec{n}$ лежит в нормальной плоскости.

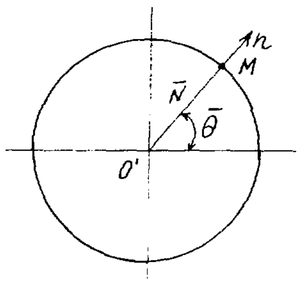

Рис.3. Сечение тора плоскостью $\varphi = \bar\varphi$

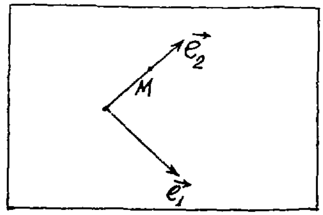

Рис.4. Нормальное сечение тора

Вектор $\vec{n}$ является продолжением вектора $\vec{N}$ (рис. 3). Координаты конца вектора $\vec{N}$, т.е. точки M определяются формулами (I), если в них φ и θ заменить на $\bar\varphi$ и $\bar\theta$. Координаты начала вектора $\vec{N}$, т.е. точки O' получаются из этих же формул, если в них положить $a = 0$. Теперь можно написать

$$N_x = M_x - O'_x = a\cos\theta\cos\varphi;$$

$$N_y = a\cos\theta\sin\varphi; \quad N_z = a\sin\theta.$$

В качестве $\vec{n}$ возьмем вектор в a раз более короткий, т.е. единичный вектор:

$$n_x = \cos\theta\cos\varphi; \quad n_y = \cos\theta\sin\varphi; \quad n_z = \sin\theta. \tag{7}$$

Векторное произведение

$$\vec{b} = \vec{v} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} \tag{8}$$

перпендикулярно вектору v и, следовательно, лежит в плоскости нормального сечения (обозначим ее через ν). Более того, векторы $\vec{n}$ и $\vec{b}$, лежащие, как уже говорилось, в нормальной плоскости, взаимно перпендикулярны. Поэтому векторы (рис. 4)

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}}{|b|}, \qquad \vec{e}_2 = \vec{n} \tag{9}$$

образуют ортонормированный базис в нормальной плоскости. Проекции этих векторов на оси x, y, z подсчитываются путем последовательного применения формул (5) (находим v_x, v_y, v_z), (6), (7) (находим b_x, b_y, b_z) и (8). Итак, числа e_{1x}, e_{2x}, e_{1y}, e_{2y}, e_{1z}, e_{2z} известны, если задана точка M на поверхности тора, через которую проходит линия касания (3). Тем самым нам известны координаты x, y, z любой точки A нормальной плоскости, если известны ее координаты ξ_1 и ξ_2 в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

$$\vec{z}(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2 . \tag{10}$$

Координаты этой точки зависят от углов $\bar{\theta}$ и $\bar{\varphi}$, характеризующих ту точку линии (3), через которую проведена нормальная плоскость.

ЛИНИЯ, ОПИСЫВАЕМАЯ ОДНОЙ ИЗ ВЕРШИН НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПОЛЮСА

Пусть ξ_1^o, ξ_2^o – местные координаты (т.е. координаты в нормальном сечении γ) одной из вершин нормального сечения полюса. Так как по заданию форма нормального сечения полюса одинакова во всех сечениях, то и координаты ξ_o, ξ_o этой вершины во всех сечениях одинаковы.

Если точка M движется вдоль линии касания (3), то проходящее через эту точку нормальное сечение движется вместе с ней. Поэтому ее координаты x, y, z будут функциями углов $\bar{\theta}$ и $\bar{\varphi}$.

$$\begin{aligned} x(M) &= \xi_1^o e_{1x}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) + \xi_2^o e_{2x}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}); \\ y(M) &= \xi_1^o e_{1y}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) + \xi_2^o e_{2y}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}); \\ z(M) &= \xi_1^o e_{1z}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) + \xi_2^o e_{2z}(\bar{\theta}, \bar{\varphi}). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь угол $\bar{\varphi}$ определяется согласно (3) значением $\bar{\theta}$.

Придавая $\bar{\theta}$ последовательность значений $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \ldots, \bar{\theta}_N$, получаем по формулам (11) координаты соответствующих точек на линии, которая описывается одной из вершин нормального сечения. Образованный таким образом массив N-троек чисел хранит полученные сведения о линии, образуемой одним из ребер полюса. Подобным же образом получаем массивы, характеризующие остальные ребра полюса. Для удобства присоединим к тройке чисел x, y, z еще два числа φ и θ, связанные с x, y, z.

ВИД СВЕРХУ НА РЕБРО ПОЛЮСА

Из каждой тройки координат (x, y, z) массива, характеризующего данное ребро полюса, можно выбрать первые две координаты (x, y). Выводя на графопостроитель последовательность этих пар, получаем совокупность точек на изображении ребра полюса, если на него смотреть сверху. Соединяя эти точки отрезками, получаем достаточно точное изображение этой линии (вид сверху), если точки массива располагаются достаточно близко друг от друга.

МЕРИДИОНАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ ПОЛЮСА

Каждое меридиональное сечение характеризуется углом между плоскостью этого сечения и плоскостью xoz. В массиве пятерок чисел ($x_n\, y_n\, z_n\, \varphi_n\, \theta_n$) разыскиваем две соседние пятерки, для которых $\varphi_{n-1} \leq \varphi \leq \varphi_n$, и с помощью линейной интерполяции находим координаты xyz той точки ребра, которая лежит в заданной меридиональной плоскости. После этого переходим к координатам ρ и z в n меридиональной плоскости по формулам $z = z$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и получаем таким образом координаты (ρ, z) вершины сечения полюса меридиональной плоскости.

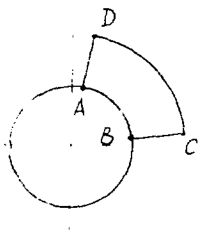

Рис.5.

Вершины A, B сечения, лежащие на торе, соединяем с окружностью, вершины A и D – прямой, вершины B и C – также прямой (рис. 5), вершины D и C – окружностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СРЕДНЕЙ ЛИНИИ НОРМАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПО ЕЕ УГЛОВОЙ ШИРИНЕ

Рассмотрим тор (рис. 6) с параметрами R_o и $a_o + \frac{h}{2}$, где h – высота полюса. Назовем этот тор раздутым. Средней линией нормального сечения назовем линию его пересечения с раздутым тором. Обозначим через φ_-, θ_- и φ_+, θ_+ тороидальные координаты концов средней линии. Размеры полюса зададим следующими параметрами: его высотой h, разностью координат $\theta_+ - \bar{\theta}$ и $\bar{\theta} - \theta_-$. В настоящем пункте показывается, как по этим данным найти угловую ширину нормального сечения полюса, т.е. разность $\theta_+ - \theta_-$.

Предполагается, что $\bar{\theta} - \theta_- = \theta_+ - \bar{\theta}$.

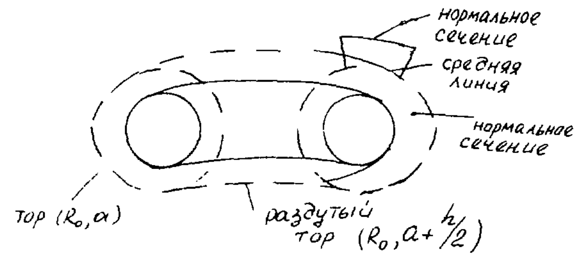

Рис.6.

Координаты x, y, z любой точки раздутого тора выражаются через ее углы θ и φ с помощью формул (I), если в последних радиус a заменить радиусом $(a+\frac{h}{2})$. Поэтому можно написать

$$x=[R_o+(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta]\cos\varphi,\quad y=[R_o+(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta]\sin\varphi,$$

$$z=(a+\tfrac{h}{2})\sin\theta. \tag{I2}$$

Если точки x, y, z находятся в заданной нормальной плоскости $\nu(\bar\theta,\bar\varphi)$, проходящей через точку M с координатами $\bar\theta$, $\bar\varphi$, то радиус-вектор этой точки $\vec R$, отложенный от точки $\vec M$, лежит в плоскости $\nu(\bar\theta,\bar\varphi)$, и, следовательно, ортогонален введенному ранее вектору $\vec v$. Их скалярное произведение

$$(\vec R,\vec v)=R_x v_x+R_y v_y+R_z=0 \tag{I3}$$

равно нулю. Здесь

$$R_x=x-x_M;\quad R_y=y-y_M;\quad R_z=z-z_M. \tag{I4}$$

Точки, находящиеся на средней линии нормального сечения, по определению лежат на раздутом торе и в нормальной плоскости. Поэтому их координаты, во-первых, представимы в виде (I2), а во-вторых, удовлетворяют условию (I3).

Это значит,

$$[R_o+(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta]\cos\varphi\cdot v_x+[R_o+(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta]\sin\varphi\, v_y+$$
$$+(a+\tfrac{h}{2})\sin\theta\cdot v_z=x_M v_x+y_M v_y+z_M v_z. \tag{I5}$$

Это уравнение связывает углы θ и φ точек средней линии, лежащей в нормальном сечении, определяемом углами $\bar\theta$ и $\bar\varphi$. Найдем производную $\frac{d\varphi}{d\theta}$. Для этого продифференцируем уравнение (I5) по θ, рассматривая φ как функцию от θ.

$$-v_x(a+\tfrac{h}{2})\sin\theta\cos\varphi-v_y(a+\tfrac{h}{2})\sin\theta\sin\varphi+$$
$$+v_z(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta+\frac{d\varphi}{d\theta}\{-v_x R_o+(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta\sin\varphi+$$
$$+v_y[R_o+(a+\tfrac{h}{2})\cos\theta]\cos\varphi\}=0.$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\sin\theta[v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi] + v_z\cos\theta}{[R_o + (a+\frac{h}{2})\cos\theta][v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi]}\left(a + \frac{h}{2}\right). \tag{16}$$

Вычислим длину дуги средней линии. Имеем согласно (12)

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [-(a+\frac{h}{2})\sin\theta\cos\theta -$$

$$-[R_o + (a+\frac{h}{2})\cos\theta]\sin\varphi\, d\varphi]^2 + [-(a+\frac{h}{2})\sin\theta\sin\varphi\, d\theta +$$

$$+[R_o + (a+\frac{h}{2})\cos\theta]\cos\varphi\, d\varphi]^2 + (a+\frac{h}{2})^2\cos^2\theta\, d\theta^2 =$$

$$= (a+\frac{h}{2})^2 d\theta^2 + [R_o + (a+\frac{h}{2})\cos\theta]^2 d\varphi^2,$$

т.е.

$$\frac{dS}{d\theta} = \sqrt{(a+\frac{h}{2})^2 + [R_o + (a+\frac{h}{2})\cos\theta]^2\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2}. \tag{17}$$

Подставляя сюда найденное ранее значение (16) производной $\frac{d\varphi}{d\theta}$, получаем дифференциальную зависимость между углом θ и дугой средней линии S.

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{a+\frac{h}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{\sin\theta[v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi] + v_z\cos\theta}{v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi}\right]^2}}.$$

Присоединим к этому уравнению соотношение:

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\varphi}{d\theta}\ \frac{d\theta}{dS} = \frac{\sin\theta[v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi] + v_z\cos\theta}{[R_o + (a+\frac{h}{2})\cos\theta][v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi]}\ \times$$

$$\times\ \frac{1}{1 + \left[\frac{\sin\theta(v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi) + v_z\cos\theta}{v_y\cos\varphi - v_z\sin\varphi}\right]^2}.$$

Последние два соотношения удобней переписать так

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{1}{a+\frac{h}{2}}\ \frac{v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi}{\sqrt{(v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi)^2 + \{\sin\theta[v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi] + v_z\cos\theta\}^2}}, \tag{18}$$

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{R_o+(a+\frac{h}{2})\cos\theta}\;\frac{\sin\theta[v_x\cos\varphi+v_y\sin\varphi]+v_z\cos\theta}{\sqrt{(v_y\cos\varphi-v_x\sin\varphi)^2+\{\sin\theta[v_x\cos\varphi+v_y\sin\varphi]+v_z\cos\theta\}^2}}.$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Решая эту систему при начальных условиях

$$\theta=\bar{\theta}, \qquad \varphi=\bar{\varphi} \tag{19}$$

при $s=0$, находим зависимости $\theta=\theta(s)$ и $\varphi=\varphi(s)$ и с их помощью стандартным путем найдем искомое значение s^* из условия

$$\theta_+=\theta(s^*). \tag{20}$$

Полученные в статье соотношения и накопленные в результате их машинной обработки массивы данных могут быть использованы для решения ряда других задач, связанных с изображениями полюсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков В.Е., Волков Е.Д., Георгиевский Г.В. и др. Магнитная конфигурация компактного торсатрона//Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Термоядерный синтез. 1987. Вып. 2. С. 19-22.
2. Данилкин И.С., Шпичель И.С. Новая схема двухзарядного стелларатора: Препринт ФИАН № 31. М., 1970.
3. Gourdon C., Marty D., Vuillemin M. Configurations toroidales aV negatif avrc cisaillement des lignes magnetiques-DPh-PFC/SRACP//STGI, EURCEA-FC-411, Fontenay-aux-Roses-France/ 1967.
4. Романов С.С. Некоторые характерные линии на торе: Препринт ХФТИ АН УССР, ХФТИ 74-32. Харьков, 1974.
5. Прохоров А.Ф. Конструктор и ЭВМ. М.: Машиностроение, 1987.

Вера Павловна Воробьева, Александр Васильевич Георгиевский,
Григорий Яковлевич Любарский, Сергей Алексеевич Мартынов,
Манап Ахмадович Хажмурадов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ГЕОМЕТРИИ ВИНТОВЫХ ОБМОТОК ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВОК

Редактор, корректор Т.В.Ситнянская

Подписано в печать 30.05.88. Т - II650. Формат 60x84/I6. Бум.писч.№I.
Офсетн.печ. Усл.п.л. 0,9. Уч.-изд.л. 0,6. Тираж 280. Заказ № 675.
Цена I2 коп. Индекс 3624.

Отпечатано в Харьковском ордена Ленина
и ордена Октябрьской Революции физико-техническом институте АН УССР.
3I0I08, Харьков, ул. Академическая, I

12 коп.

Индекс 3624

Препринт, 1988, 1–8.