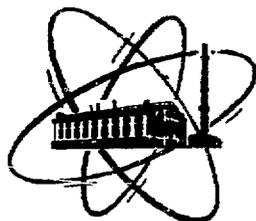


ФЭИ-238



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*Б. Д. АБРАМОВ*

**РЕШЕНИЕ МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ  
В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ИЗОТРОПНЫМ РАССЕЯНИЕМ**

Обнинск — 1971

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б.Д. Абрамов

РЕШЕНИЕ МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ  
ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ НЕЙТРОНОВ В ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ИЗОТРОПНЫМ  
РАССЕЯНИЕМ

Обнинск - 1971

М - 17

УДК - 621.038.512

#### А Н Н О Т А Ц И Я

В работе приводится аналитическое решение моноэнергетического уравнения переноса с учетом рассеивающих нейтронов для голой сферы и пластины. Результаты сравниваются с расчетами в  $P_1$  - приближении. Устанавливается взаимосвязь решений нестационарного и квазикритического уравнений, справедливая для произвольной геометрии.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Раздел теории реакторов, посвященный вопросам кинетики реактора, базируется на анализе решений кинетического уравнения переноса с учетом запаздывающих нейтронов. Обычным методом решения этого уравнения является решение в диффузионном приближении.

В настоящей работе приводится точное решение такой задачи в плоско-параллельной и сферически-симметричной средах и результаты сравниваются с расчетами в диффузионном и P<sub>I</sub>-приближениях. Находится взаимосвязь решений нестационарного и квазикритического уравнений, справедливая для произвольной геометрии.

§ 2. ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Кинетическое уравнение диффузии нейтронов в гомогенной среде с изотропным рассеянием имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = -v(\vec{\Omega}\vec{\nabla} + \Sigma)\varphi_0 + \frac{v}{4\pi}(\Sigma_s + \beta_0 v \Sigma_f) \int d\vec{\Omega}' \varphi_0 + \sum_{i=1}^M \lambda_i \varphi_i ;$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = -\lambda_i \varphi_i + \frac{v}{4\pi} \beta_i v \Sigma_f \int d\vec{\Omega}' \varphi_0 , \quad i = 1, 2, \dots, M ;$$
(2.1)

- где  $\varphi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  - плотность нейтронов;  
 $\varphi_i(\vec{r}, t)$  - концентрация носителей запаздывающих нейтронов  $i$ - группы;  
 $\beta_i$  - относительный выход нейтронов группы не одно деление (при этом  $\sum_{i=1}^M \beta_i = 1$ );  
 $\lambda_i$  - постоянная распада  $i$ -й группы носителей (эммиторов).

Уравнение (2.1) будем решать с граничным условием

$$\varphi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = 0 , \quad (\vec{\Omega}\vec{n}) < 0 ,$$
(2.2)

где  $\vec{R}$  - радиус-вектор поверхности среды,  
 $\vec{n}$  - нормаль к этой поверхности в начальных условиях

$$\frac{\psi_i}{t=0} = \psi_i^0, \quad i=0, \dots, m. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) запишем в следующих безразмерных переменных:

$$t' = \sigma \Sigma t; \quad \vec{r}' = \Sigma \vec{r}; \quad \lambda_i' = \lambda_i / \sigma \Sigma. \quad (2.4)$$

Опуская штрихи, мы получим

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -(\vec{\sigma} \vec{v} + 1) \psi_0 + \frac{\Sigma_s + \sigma_0 \Sigma}{4\pi \Sigma} \int d\vec{\Omega}' \psi_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \psi_i; \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -\lambda_i \psi_i + \frac{\sigma_i \Sigma}{4\pi \Sigma} \int d\vec{\Omega}' \psi_0, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Удобно перейти к векторно-матричной записи. Введем

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix}; \quad \langle \psi| = \langle \bar{\psi}_0; \bar{\psi}_1; \dots; \bar{\psi}_m |; \quad (2.6)$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \sum_{i=0}^m \int d\vec{\Omega} \int d\vec{r} \bar{\psi}_i \psi_i,$$

где надчеркивание означает комплексное сопряжение.

Тогда получим из (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{L} |\psi\rangle, \quad (2.7)$$

где

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} (\hat{H} + \hat{M}_0) & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \hat{M}_1 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{M}_m & 0 & 0 & \dots & -\lambda_m \end{pmatrix}; \quad \hat{H} = -\vec{\sigma} \vec{v} - 1; \quad (2.8)$$

$$\hat{M}_0 = \frac{\Sigma_s + \sigma_0 \Sigma}{4\pi \Sigma} \int d\vec{\Omega}'; \quad \hat{M}_i = \frac{\sigma_i \Sigma}{4\pi \Sigma} \int d\vec{\Omega}', \quad i \neq 0.$$

Уравнение (2.7) умножим на  $\exp(-\alpha t)$  и проинтегрируем по всем  $t$ .  
Получим.

$$\alpha |\varphi\rangle = \hat{L}|\varphi\rangle + |\varphi^0\rangle, \quad (2.9)$$

где

$$|\varphi\rangle = \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} |\varphi_t\rangle, \quad (2.10)$$

а  $|\varphi^0\rangle$  - вектор - столбец начальных условий.

Уравнение, сопряженное к (2.9), можно записать в виде

$$\alpha \langle \varphi^* | = \langle \varphi^* | \hat{L}^*, \quad (2.11)$$

где  $\langle \varphi^* | = \langle \varphi_0^* |, \langle \varphi_1^* |, \dots, \langle \varphi_m^* |$  - решение уравнения (2.11) с граничным условием

$$\varphi_0^*(\vec{R}, \vec{P}, \vec{\alpha}) = 0, \quad (\vec{P}\vec{n}) > 0, \quad (2.12)$$

$$\hat{L}^* = \left\| \begin{array}{cccc} (\hat{H}^* + \hat{M}_0) & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m \\ \hat{M}_1 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{M}_m & 0 & 0 & \dots & -\lambda_m \end{array} \right\|; \quad \hat{H}^* = \hat{Q}\hat{V} - 1. \quad (2.13)$$

Оператор  $\hat{L}^*$  действует на функцию, стоящую слева от него. Имеет место соотношение

$$\langle \varphi^* | \hat{L} |\varphi\rangle = \langle \varphi^* | \hat{L}^* |\varphi\rangle. \quad (2.14)$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$\alpha |\varphi\rangle = \hat{L}|\varphi\rangle. \quad (2.15)$$

Значения параметра  $\alpha = \alpha_c$ , при которых уравнение (2.15) с граничным условием (2.2) имеет отличные от тождественного нуля решения  $|\varphi\rangle = |\varphi_c\rangle$ , называются собственными числами (с.ч.), а соответствующие этим с.ч. ненулевые решения  $|\varphi_c\rangle$  - собственными функциями (с.ф.) задачи.

Используя свойство (2.14), нетрудно показать, что с.ф. уравнений (2.15) и (2.11) биортогональны, т.е.

$$(d_e - d_n) \langle \varphi_n^* / \varphi_e \rangle = 0. \quad (2.16)$$

Напишем теперь общее решение уравнения (2.7). Для этого введем оператор резольвенты, определив его следующим образом

$$\hat{R}(\alpha, \hat{L}) = (\alpha \hat{I} - \hat{L})^{-1}, \quad (2.17)$$

где  $\hat{I}$  - единичная матрица.  
Из уравнения (2.9) получим

$$|\varphi\rangle = \hat{R}(\alpha, \hat{L}) |\varphi^0\rangle, \quad (2.18)$$

отсюда

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} d\alpha e^{\alpha t} \hat{R}(\alpha, \hat{L}) |\varphi^0\rangle, \quad (2.19)$$

где контур интегрирования располагается правее всех особых точек (2.18).

Исследование выражения (2.18), выполненное в работе [1] показывает, что в области  $\text{Re } \alpha > -1$  резольвента (2.18) является аналитической функцией  $\alpha$  всюду, за исключением счетного множества изолированных точек точечного спектра, каждая из которых является простым полюсом оператора резольвенты  $\hat{R}(\alpha, \hat{L})$ , расположена на вещественной оси, причем точки  $\alpha = -\lambda_i$  являются точками накопления этих полюсов (заметим, что работа [1] посвящена анализу уравнения (2.1) в плоской геометрии. Мы здесь предположим, что эти же свойства характерны для уравнения (2.1) в произвольной геометрии).

В силу вышесказанного можно сдвинуть контур интегрирования в формуле (2.19) в новое положение  $\gamma'$ , сколь угодно близкое к линии  $\text{Re } \alpha = -1$ . Так как в окрестности простого полюса резольвенту можно представить в виде

$$|\varphi\rangle = \frac{\langle \varphi_e^* / \varphi^0 \rangle}{\langle \varphi_e^* / \varphi_e \rangle} \frac{|\varphi_e\rangle}{\alpha - d_e} + \hat{R}'(\alpha, \hat{L}) |\varphi^0\rangle, \quad (2.20)$$

где  $\hat{R}'(\alpha, \hat{L}) |\varphi^0\rangle$  - аналитическая в окрестности  $d_e$  функция, то, суммируя вычеты в полюсах резольвенты, лежащих правее точки  $\text{Re } \alpha = -1$ , получим из (2.19):

$$|\psi\rangle = \sum_{\epsilon=0}^{\infty} \frac{R_{\epsilon} \times R_{\epsilon}^* |\psi^0\rangle}{\langle R_{\epsilon}^* | R_{\epsilon} \rangle} e^{\epsilon \alpha t} + |\psi^1\rangle, \quad (2.21)$$

где

$$|\psi^1\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dt e^{\alpha t} R(\hat{K}, \hat{L}) |\psi^0\rangle. \quad (2.22)$$

Заметив, что  $|\psi^1\rangle$  затухает во времени не медленнее, чем  $e^{-t}$ , мы видим, что для описания асимптотического во времени поведения потока нейтронов достаточно знания с.ч. и с.ф. уравнений (2.11) и (2.15) из области  $\alpha > -1$ .

Для вычисления последних запишем уравнение (2.15) в виде

$$(\alpha+1)\varphi_0 = -\hat{P}\hat{T}\varphi_0 + \frac{c}{4\pi} \frac{(\alpha+1)}{\xi(\alpha)} \int d\hat{Q}' \varphi_0; \quad (2.23)$$

$$\varphi_i = \frac{c\beta_i}{4\pi} \frac{1}{\alpha+\lambda_i} \int d\hat{Q}' \varphi_0, \quad i \neq 0, \quad (2.24)$$

где

$$\xi(\alpha) = \frac{\alpha+1}{1 - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_i} \beta_i}; \quad \beta_i = \frac{h_i \sqrt{Z}}{Z_s + \sqrt{Z}}; \quad C = \frac{Z_s + \sqrt{Z}}{Z}. \quad (2.25)$$

Решая уравнение (2.23) с граничным условием (2.2)

$$\varphi_0(\hat{R}, \hat{Q}) = 0, \quad (\hat{Q}\hat{n}) < 0, \quad (2.26)$$

определим с.ф.  $\varphi_{0c}$  и с.ч.  $\alpha_c$  этой задачи, а затем с помощью соотношений (2.24) и (2.6) построим с.ф.  $|\varphi_0\rangle$ .

Уравнение (2.11) запишем в виде

$$(\bar{\alpha}+1)\varphi_0^* = \hat{P}\hat{T}\varphi_0^* + \frac{c}{4\pi} \frac{(\bar{\alpha}+1)}{\xi(\bar{\alpha})} \int d\hat{Q}' \varphi_0^*; \quad (2.27)$$

$$\varphi_i^* = \frac{\lambda_i}{\bar{\alpha}+\lambda_i} \varphi_0^*, \quad i \neq 0. \quad (2.28)$$

Решая уравнение (2.27) с граничным условием (2.12), мы можем, используя соотношение (2.28), сконструировать  $\langle \varphi_0^* \rangle$ . Однако в этом нет необходимости, ибо легко видеть, что

$$\varphi_0(\vec{r}, \vec{p}, \alpha) = \overline{\varphi_0^*(\vec{r}, -\vec{p}, \bar{\alpha})}. \quad (2.29)$$

Таким образом, встает задача о расчете с.ф. и с.ч. уравнения (2.23) с граничным условием (2.26) из области  $Re \alpha > -1$ . Этому вопросу посвящен следующий параграф.

### § 3. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ (С.Ч.) И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ (С.Ф.) ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕЙТРОНОВ В ПЛАСТИНЕ И СФЕРЕ

Известно [2], что задача об отыскании решений из области  $\alpha > -1$  в плоско-параллельной и сферически-симметричной средах сводится к нахождению симметричных и, соответственно, антисимметричных решений уравнения

$$(\alpha+1)\varphi_0 = -\mu \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{c}{2} \frac{(\alpha+1)}{\xi(\mu)-1} \int_{-1}^1 d\mu' \varphi_0 \quad (3.1)$$

с граничным условием

$$\varphi_0(\pm R, \mu, \alpha) = 0; \quad \mu \leq 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) является частным случаем уравнения (2.23). Здесь  $\mu$  - косинус угла между осью X и направлением скорости нейтрона,  $R$  - радиус сфер или полутолщина пластины.

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде

$$\varphi_0(x, \mu, \alpha) \sim e^{-\frac{\alpha+1}{v}x} n(\mu, \mu, \alpha). \quad (3.3)$$

Тогда, выбирая следующее условие нормировки

$$\int_{-1}^1 d\mu n(\mu, \mu, \alpha) = \xi(\alpha), \quad (3.4)$$

мы приходим к уравнению

$$(v-\mu)n(v,\mu,\alpha) = \frac{c\nu}{2}. \quad (3.5)$$

Если  $v \notin [-1, 1]$ , то решение (3.5) имеет вид

$$n = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{v-\mu}; \quad (3.6)$$

если  $v \in [-1, 1]$ , то

$$n(v,\mu,\alpha) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{v-\mu} + \lambda(\alpha, v) \delta(v-\mu), \quad (3.7)$$

где дробь  $1/v-\mu$  понимается как интегрируемая в смысле главного значения,  $\delta(v-\mu)$  - дельта-функция Дирака,

$$\lambda(\alpha, v) = \xi(\alpha) - c\nu \operatorname{arctanh} v. \quad (3.8)$$

Можно показать, что решение в случае  $v \notin [-1, 1]$  существует лишь при выполнении условия [3]:

$$0 < \xi(\alpha) < c \quad (3.9)$$

и имеет вид

$$n_{\pm} = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 \mp \mu}, \quad (3.10)$$

где  $\nu_0$  - корень уравнения

$$c\nu_0 \operatorname{arctanh} \frac{1}{\nu_0} = \xi(\alpha). \quad (3.11)$$

Собственные функции уравнения (3.5) ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $\mu$ , причем

$$\int_{-1}^1 d\mu \mu n_{\pm}^2 = \pm \frac{c\nu_0}{2} \left( \frac{c\nu_0^2}{\nu_0^2 - 1} - \xi(\alpha) \right); \quad (3.12)$$

$$\int_{-1}^1 d\mu \mu n(v,\mu,\alpha) \int_{-1}^1 Q(v') n(v',\mu,\alpha) dv' = \nu Q(v) N(\nu), \quad (3.13)$$

$$\text{где } N(\nu) = \lambda^2(\alpha, \nu) + \left( \frac{c\nu}{2} \right)^2. \quad (3.14)$$

Соотношение (3.14) справедливо, если функция удовлетворяет на  $[-1, 1]$  условию Гельдера [4].

К.М.Кейс [5] показал, что система с.ф. уравнения (3.5) полна в указанном классе функций, т.е. общее решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде

$$\varphi(\mu, \alpha) = a_+(\alpha) \eta_+ e^{-\frac{\alpha \mu}{v_0} \chi} + a_-(\alpha) \eta_- e^{-\frac{\alpha \mu}{v_0} \chi} + \int_{-1}^1 d\nu A(\alpha, \nu) n(\mu, \nu) e^{-\frac{\alpha \mu}{\nu} \chi} \quad (3.15)$$

Подставляя выражение (3.15) в граничное условие (3.2) и вводя функцию

$$h(\alpha, \nu) = A(\alpha, \nu) e^{\frac{\alpha \mu}{\nu} R} \quad (3.16)$$

мы приходим к следующему уравнению

$$\int_{-1}^1 d\nu' h(\alpha, \nu') n(\nu', \mu, \alpha) = \lambda(\alpha, \mu), \quad (3.17)$$

где

$$\lambda(\alpha, \mu) = -a_+ \eta_+ e^{\pm \frac{\alpha \mu}{v_0} R} - a_- \eta_- e^{\pm \frac{\alpha \mu}{v_0} R} \mp \int_0^{\pm \frac{2\alpha \mu}{\nu} R} \frac{c\nu}{2} \frac{h(\alpha, \nu')}{\nu - \mu} (1 - e^{-\dots}) d\nu, \quad (3.18)$$

(верхний знак в соотношении (3.18) соответствует  $\mu > 0$ ).

Используя соотношения (3.12) и (3.13), получим из (3.17)

$$h(\alpha, \nu) = \frac{1}{N(\alpha, \nu)} \left[ \lambda(\alpha, \nu) \lambda(\alpha, \nu) + \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \frac{\lambda(\alpha, \mu)}{\nu - \mu} d\mu \right], \quad (3.19)$$

$$\int_{-1}^1 d\mu \mu n_{\pm} \lambda(\alpha, \mu) = 0. \quad (3.20)$$

Уравнение (3.19) для  $\alpha$ , удовлетворяющих условию (3.9), является неоднородным интегральным уравнением типа Фредгольма для функции  $h(\alpha, \nu)$ , решение которого можно отыскивать, например, методом последовательных приближений, причем из всех решений следует отобрать лишь те, для которых выполняются условия (3.20). Если  $\alpha$  не удовлетворяет условию (3.9), то соответствующее уравнение Фредгольма является однородным и будет иметь лишь тривиальное нулевое решение. В работе [6] показано, что хорошим приближением к решению уравнения (3.19) является уже первое приближение. В этом приближении получим для симметричных решений, когда  $a_+ = a_-$ ;  $h(\nu) = h(-\nu)$ :

$$h(\alpha, \nu) = \frac{a_+}{N(\nu)} \frac{c^2 v_0^2}{v_0^2 - \nu^2} \left( \sqrt{2\mu} \frac{N(\mu)}{N(\nu)} - \frac{v_0^2}{2} \frac{c^2}{v_0^2} \left( \frac{v_0^2 - 1}{v_0^2} - \mu \right) \frac{\xi(\mu)}{c} \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha \mu}{v_0} R; \quad (3.21)$$

для антисимметричных решений ( $a_+ = -a_-$ ;  $h(v) = -h(-v)$ )

$$h(\alpha, v) = \frac{\pm a_+}{N(v)} \frac{c^2 v^2}{v^2 - v^2} \left( \frac{1}{v} \ln \frac{1+v}{1-v} - \frac{1}{2} \ln \frac{v^2-1}{v^2} - \frac{\xi}{c} \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha v}{v} R. \quad (3.22)$$

Вспомнив определение  $h(\alpha, v)$ , мы можем теперь записать решение нашей задачи согласно формуле (3.15).

Далее, легко найти, что

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, d) &= \int_{-1}^1 d\mu \Psi_0(x, \mu, \alpha) = \\ &= 2a_+ \xi \int_0^1 \left\{ \cos \frac{\alpha v}{\alpha_0} x + \alpha_0 \sin \frac{\alpha v}{\alpha_0} R \right\} \frac{\left[ \frac{\xi}{c} - \frac{v^2}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha_0^2} \right) - v \ln \frac{1+v}{v} \right] \operatorname{ch} \frac{\alpha v}{v} x}{(x_0^2 + v^2) \left[ \left( \frac{\xi}{c} - v \operatorname{arctg} v \right)^2 + \left( \frac{\pi v}{2} \right)^2 \right]} dv \end{aligned} \quad (3.23)$$

для симметричной функции и

$$= 2i a_+ \xi \int_0^1 \left\{ \sin \frac{\alpha v}{\alpha_0} x - \alpha_0 \sin \frac{\alpha v}{\alpha_0} R \right\} \frac{\left[ \frac{\xi}{c} + \frac{v^2}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\alpha_0^2} \right) - v \ln \frac{1+v}{v} \right] \operatorname{sh} \frac{\alpha v}{v} x}{(x_0^2 + v^2) \left[ \left( \frac{\xi}{c} - v \operatorname{arctg} v \right)^2 + \left( \frac{\pi v}{2} \right)^2 \right]} dv \quad (3.24)$$

для антисимметричной функции. Здесь

$$x_0 = i d. \quad (3.25)$$

Используя соотношения (2.24), 2.28), 2.29) и (2.6), можно записать явный вид с.ф. уравнений (2.11) и (2.15). Произвольный коэффициент  $a_+$  можно определить, например, из условия ортонормировки с.ф. уравнения (2.15).

Как уже упоминалось выше, из всех решений уравнения (3.19) следует отобрать только те, которые удовлетворяют условиям (3.20). Последние удобно представить в виде

$$\int_{-1}^1 d\mu \frac{\mu \lambda(\alpha, \mu)}{v^2 - \mu^2} = 0, \quad (3.26)$$

$$\int_{-1}^1 d\mu \frac{\mu^2 \lambda(\alpha, \mu)}{v^2 - \mu^2} = 0. \quad (3.27)$$

Используя формулы (3.21), (3.22) и (3.18), получим отсюда следующие трансцендентные уравнения, связывающие между собой возможные значения параметров  $\alpha$  и  $R$ :

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dH}{d\alpha} R = \frac{\frac{\xi(\alpha)}{C\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + 1}}{C_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha_0^2}\right) - \frac{1}{\alpha_0^2 H} - \int_0^1 \frac{1 - e^{-2(\cosh u)R} \left[ \sqrt{C_0} \frac{dH}{d\alpha} - \frac{d\xi}{d\alpha} + \frac{\alpha_0^2}{2} C_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha_0^2}\right) \right]^2}{(\alpha_0^2 + \nu^2)^2 \left[ \left(\frac{\nu}{C_0} - \nu \cosh u\right)^2 + \left(\frac{dH}{d\alpha}\right)^2 \right]} d\nu} \quad (3.28)$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dH}{d\alpha} R = - \frac{\frac{\xi(\alpha)}{C\alpha_0} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 + 1}}{\frac{1}{\alpha_0^2 H} - \alpha_0^2 \int_0^1 \frac{1 - \exp[-2(\cosh u)R] \left[ \sqrt{C_0} \frac{dH}{d\alpha} - \frac{1}{2} C_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha_0^2}\right) - \frac{\xi}{C} \right]^2}{(\alpha_0^2 + \nu^2)^2 \left[ \left(\frac{\nu}{C_0} - \nu \cosh u\right)^2 + \left(\frac{dH}{d\alpha}\right)^2 \right]} d\nu} \quad (3.29)$$

где уравнение (3.28) соответствует симметричным, а (3.29) - антисимметричным решениям,  $\alpha_0$  - корень уравнения

$$C\alpha_0 \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha_0} = \frac{\xi}{C}(\alpha_0). \quad (3.30)$$

Уравнения (3.28) и (3.29) определяют возможные при данных параметрах среды значения величины  $\alpha$ , т.е. собственные числа (с.ч.) задачи.

Простой анализ последних уравнений показывает, что в отличие от уравнения без учета запаздывающих нейтронов, уравнение (2.1) в произвольном ограниченном объеме среды имеет в области  $\alpha > -1$  счетное множество с.ч., вне зависимости от размеров последнего. Другой интересной особенностью уравнения (2.1) является наличие в области  $\alpha > -1$  таких подобластей, где оно не может иметь, вне зависимости от размеров и формы среды, собственных чисел. Это следует из соотношения (3.9).

В заключение этого параграфа заметим, что расчет критических размеров, проведенный в стационарном случае по формуле, аналогичной (3.29), отличается, как указывается в работе [6], от расчета в  $S_{1k}$ -приближении примерно на 0,02%. Можно показать, что точность (3.28) и (3.29) возрастает при  $\alpha \rightarrow -1$ .

#### § 4. СВЯЗЬ С КВАЗИКРИТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕЙ

Рассмотрим уравнение (2.5). Стационарные решения его существуют лишь при определенных значениях параметров среды. Однако, при произвольных размерах уравнение (2.5) с граничным условием (2.2) формально можно сделать

стационарным, если изменить либо число вторичных нейтронов деления, либо число всех вторичных нейтронов, возникающих в результате одного столкновения; а также путем ввода в среду дополнительного поглотителя. Проводя подобные изменения, мы получим соответственно

$$\psi_0 = -\hat{\rho}\hat{v}\psi_0 + \frac{c-\varepsilon\rho}{4\pi} \int d\hat{\xi}' \psi_0 ; \quad (4.1)$$

$$\psi_0 = -\hat{\rho}\hat{v}\psi_0 + \frac{c}{4\pi k_{eff}} \int d\hat{\xi}' \psi_0 ; \quad (4.2)$$

$$k_{eff}\psi_0 = -\hat{\rho}\hat{v}\psi_0 + \frac{c}{4\pi} \int d\hat{\xi}' \psi_0 ; \quad (4.3)$$

где  $\varepsilon = \frac{\delta\Sigma_a}{\Sigma}$  ;  $\rho = \frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$  ;  $k_{eff} = \frac{\Sigma + \delta\Sigma_a}{\Sigma}$  ;  $(4.4)$

$\delta\Sigma_a$  характеризует то дополнительное поглощение, которое необходимо ввести в реактор, чтобы он стал критическим,  $\rho$  - реактивность,  $k_{eff}$  характеризует изменение числа всех вторичных нейтронов.

Заметив, что уравнение (4.3) эквивалентно уравнению (3.23), если в последнем положить  $\xi(\alpha) = \alpha + 1$ , т.е. пренебречь запаздывающими нейтронами, мы не будем далее рассматривать (4.3) отдельно.

Уравнения (4.1) и (4.2) можно записать в единой форме

$$\psi_0 = -\hat{\rho}\hat{v}\psi_0 + \frac{c}{4\pi\rho} \int d\hat{\xi}' \psi_0 , \quad (4.5)$$

где  $\rho = \begin{cases} c/c-\varepsilon\rho & \text{для ур. (4.1)} \\ k_{eff} & \text{для ур. (4.2)} \end{cases} ; \quad (4.6)$

Уравнение (4.5) будем решать с граничным условием

$$\psi_0(\hat{r}, \hat{\xi}) = 0, \quad (\hat{\xi}\hat{n}) < 0. \quad (4.7)$$

Заменой переменной  $\hat{r}' = \hat{r}(1+\alpha)$  и обозначением

$$\psi_0(\hat{r}) = \psi_0\left(\frac{\hat{r}'}{1+\alpha}\right) = \bar{\psi}_0(\hat{r}') \quad (4.8)$$

уравнение (2.23) с граничным условием (2.26) преобразуется в уравнение

$$\bar{\psi} = -\hat{\sigma}\bar{\psi} + \frac{c}{4\pi\xi(\alpha)} \int d\hat{\Omega}' \bar{\psi}' \quad (4.9)$$

с граничным условием

$$\bar{\psi}_0[\hat{r}(1+\alpha), \hat{\Omega}] = 0, \quad (\hat{\Omega}\hat{n}) < 0. \quad (4.10)$$

Теперь очевидно, что решение последней задачи совпадет с решением уравнения (4.5), если мы поставим к нему следующее граничное условие

$$\psi_0[\hat{r}(1+\alpha), \hat{\Omega}] = 0, \quad (\hat{\Omega}\hat{n}) < 0, \quad (4.11)$$

и если будет иметь место условие  $\lambda = \xi(\alpha)$ , т.е. будет иметь равенство

$$\psi_0(\hat{r}', \hat{\Omega}', \eta) = \bar{\psi}_0(\hat{r}', \hat{\Omega}', \alpha). \quad (4.12)$$

Отсюда, вспоминая определение (4.8), получаем

$$\psi_0[\hat{r}(1+\alpha), \hat{\Omega}, \eta] = \bar{\psi}_0(\hat{r}, \hat{\Omega}, \alpha). \quad (4.13)$$

Таким образом, обозначая с.ф. уравнения (2.23) с граничным условием (2.26), соответствующую с.ч.  $d_i$  как  $\psi_0^i(\hat{r}, \hat{\Omega}; \hat{R})$ , а с.ф. уравнения (4.5) с граничным условием (4.7), соответствующую с.ч.  $\lambda_k$  как  $\psi_0^k(\hat{r}, \hat{\Omega}; \hat{R})$ , видим, что при выполнении условия

$$\xi(d_i) = \lambda_k \quad (4.14)$$

имеет место соотношение

$$\psi_0^i(\hat{r}, \hat{\Omega}; \hat{R}) = \psi_0^k[\hat{r}(1+\alpha_i), \hat{\Omega}; \hat{R}(1+\alpha_i)]. \quad (4.15)$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\psi_0^k(\hat{r}, \hat{\Omega}; \hat{R}) = \psi_0^i\left[\frac{\hat{r}}{1+\alpha_i}, \hat{\Omega}; \frac{\hat{R}}{1+\alpha_i}\right]. \quad (4.16)$$

Так как уравнение (4.14) при данном  $\lambda_k$  имеет  $(m+1)$  корней  $d_i$ , то из (4.16) следует, что пространственно-угловое распределение нейтронов в реакторе, описываемое решением уравнения (4.5), геометрически подобно распределению нейтронов в  $(m+1)$  нестационарных реакторах того же состава и формы, но различных размеров, если с.ч. этих реакторов связаны соотношением (4.14). С другой стороны, каждому нестационарному реактору

можно сопоставить в этом смысле лишь один квазикритический реактор.

Имеется простое соответствие и между спектрами с.ч. этих задач. Например, если в результате решения уравнения (4.5) с граничным условием (4.7) будет получена связь между собственными числами  $\rho_k$  и  $\tilde{R}$  виде

$$F(\rho_k; \tilde{R}) = 0, \quad (4.17)$$

где  $F$  - символ некоторой функциональной зависимости, то с.ч.  $\alpha_i$  задачи о решении уравнения (2.23) с граничным условием (2.26) будут корнями уравнения

$$F[\xi(\alpha_i); \tilde{R}(1+\alpha_i)] = 0 \quad (4.18)$$

и при этом будет иметь место соотношение (4.14).

Интересно записать (4.18) для случая отсутствия запаздывающих нейтронов. При этом  $\xi(\alpha) = \alpha + 1$  и соответствие между задачами становится взаимно-однозначным, т.е. каждый с.ф.  $\rho_k$  соответствует лишь одна с.ф.  $\rho_k'$  и наоборот, а в отношении спектров можно утверждать, что если

$$(\alpha_i + 1) = F(\tilde{R}) \quad (4.19)$$

то

$$\rho_k = F[\tilde{R}(1+\alpha_i)]. \quad (4.20)$$

Легко записать соотношения, обратные (4.17), (4.18) или (4.19), (4.20).

Приведенные выше соотношения позволяют определить все с.ч. и с.ф. из области  $\alpha > -1$  нестационарного уравнения (2.1) лишь на основании знания полного решения квазикритической задачи и наоборот, определить все с.ф. и с.ч. квазикритического уравнения, не решая его; но используя решение нестационарной задачи. Например, если для данной сборки экспериментально измерили с.ч.  $\alpha_{\text{ЖСП}}$  и следует его сравнить с расчетным собственным числом  $\alpha_{\text{расч}}$ , то вместо расчета данного нестационарного реактора, можно рассчитать некоторый "квазикритический" (т.е. описываемый с помощью решения уравнения (4.5) реактор той же формы и состава, но с размерами, измененными в  $(1 + \alpha_{\text{ЖСП}})$  раз. Полученное в результате расчета значение  $\eta_{\text{расч}}$  следует сравнить тогда с  $\xi_{\text{ЖСП}} = \frac{1}{2}(\alpha_{\text{ЖСП}})$ . При решении в рамках эффективной одногрупповой теории реальных задач может возникнуть неэквивалентность в описанных выше сравнениях, вызванная тем обстоятельством, что эффективные одно-

групповые константы являются усредненными по спектру нейтронов в реакторе многогрупповыми константами, а распределение нейтронов по энергиям, существующее в реальном подкритическом реакторе, может, при больших подкритичностях, сильно отличаться от спектра, являющегося решением квазикритического уравнения. А так как эффективные одногрупповые константы для нестационарного и квазикритического уравнений должны быть приготовлены на основании решений многогрупповых аналогов этих же уравнений, то они могут, вообще говоря, сильно отличаться друг от друга, что и приведет к указанной выше неэквивалентности. С другой стороны, возникающее в этой связи отличие  $\rho_{расч}$  от  $\rho_{теор}$  является, в известной степени, мерой отличия нестационарного спектра от спектра, являющегося решением квазикритического уравнения.

Используя полученные соотношения, мы легко можем записать решение уравнения (4.5) в плоской и сферической геометриях. Ясно, что для этого следует во всех формулах § 3 положить  $\alpha = 0$  и  $\xi(\alpha) = \rho$ . При этом оказывается, что с.ч. уравнения (4.5)  $\rho_k$  накапливаются в точке  $\rho = 0$ .

Наконец, отметим, что если  $|\alpha| \ll 1$ , то можно пренебречь изменением размеров в  $(1 + \alpha)$  раз и тогда из (4.14) следует, что

$$\rho \approx \xi(\alpha).$$

Последнее уравнение в указанной области значений совпадает с уравнением "обратных часов".

### § 5. $P_I$ - ПРИБЛИЖЕНИЕ

Решение уравнения (3.1) в  $P_I$  - приближении метода сферических гармоник ищется в виде

$$\varphi_0(x, \mu, \alpha) = \frac{1}{2} [f_0(x, \alpha) + 3\mu f_1(x, \alpha)]. \quad (5.1)$$

Подставляя (5.1) в уравнение (3.1), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)f_0 &= -\frac{\partial f_1}{\partial x} + \alpha \frac{df_0}{dx} f_0; \\ (\alpha + 1)f_1 &= -\frac{1}{3} \frac{\partial f_0}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Система уравнений (5.2) соответствует так называемому "телеграфному" приближению, которое является строгим  $P_I$  - приближением в нестационарной теории. Диффузионное приближение описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} (d+1)f_0 &= -\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x} + c \frac{d+1}{\xi(\alpha)} f_0 ; \\ f_1 &= -\frac{1}{3} \frac{\partial f_0}{\partial x} . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Перепишем (5.2) и (5.3) в виде

$$\alpha^2 f_0 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = 0 , \quad (5.4)$$

где

$$\alpha^2 = \begin{cases} 3(\alpha+1)[1-c/\xi(\alpha)] & \text{для ур. (5.3)} ; \\ 3(\alpha+1)^2[1-c/\xi(\alpha)] & \text{для ур. (5.2)} . \end{cases} \quad (5.5)$$

Симметричным решением уравнения (5.4) является  $\cos \alpha x$ , антисимметричным -  $\sin \alpha x$ . Выбирая в качестве граничного условия к уравнению (5.4) условие обращения потока  $f_0$  в нуль на экстраполированных границах  $\pm R'$ , мы видим, что этому условию удовлетворяют только те решения, для которых  $\alpha$  - чисто мнимая величина:

$$\alpha = i \frac{n\pi}{2R'} , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

В этом смысле условие (5.6) аналогично условию (3.9).

Используя соотношения (5.5) и (5.6), получаем в диффузионном приближении

$$d+1-c' = -\frac{1}{3} \left( \frac{n\pi}{2R'} \right)^2 , \quad (5.7)$$

где

$$c' = c \left( 1 - \sum_{i=1}^m \frac{d b_i}{d + b_i} \right) . \quad (5.8)$$

В  $P_I$  - приближении имеем

$$d+1 = \frac{c'}{2} \pm \sqrt{\frac{c'^2}{4} - \frac{1}{3} \left( \frac{n\pi}{2R'} \right)^2} . \quad (5.9)$$

Если все собственные числа (с.ч.)  $\alpha$ , рассчитанные по формуле (5.7), вещественны, то уравнение (5.9) при выполнении условия, обратного условию

$$\left(\frac{c'}{2}\right)^2 \gg \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \Gamma}{2R'}\right)^2 \quad (5.10)$$

имеет комплексные с.ч.  $\alpha$ , мнимая часть которых, как показано в работе [7], описывает явления, аналогичные явлению распространения фронта импульса нейтронов в пространстве. Там же указывается, что действительно ценную информацию несут лишь несколько первых, чисто вещественных корней уравнения (5.9), которые описывают асимптотику затухания импульса нейтронов во времени. Для этих корней  $\alpha$  условие (5.10) можно считать выполненным, поэтому возможны некоторые приближенные соотношения, связанные с разложением в ряд корня в (5.9), как, например:

$$\alpha + 1 - c^{\alpha} = -\frac{10}{3c'} \left(\frac{\pi \Gamma}{2R'}\right)^2 \quad (5.11)$$

Численные оценки, приведенные в табл. I, показывают, что формула (5.11) для реальных систем, у которых  $c \sim 1$ , даст точность, сравнимую с диффузионной формулой (5.7), причем в области  $\alpha \sim 0$  точность (5.11) чуть выше, а в области  $\alpha \sim -1$  ниже, нежели точность формулы (5.7).

Рассмотрим решение квазикритического уравнения (4.5) в  $P_I$ -приближении. Проводя аналогичные выкладки, мы приходим опять к задаче о решении уравнения (5.4) с нулевым граничным условием. Различие будет только в величине  $\alpha$ , которая в этой задаче есть

$$\alpha = 3(1 - c/\eta), \quad (5.12)$$

причем справедлива формула (5.6). Приравнявая в силу этого (5.12) и (5.5) друг к другу, получим уравнение, связывающее между собой с.ч. нестационарного и квазикритического уравнений в диффузионном и  $P_I$ -приближениях. Можно видеть тогда, что в отличие от  $P_I$ -приближения, свойства диффузионного приближения таковы, что результаты § 4 для него несправедливы.

В диффузионном приближении имеет место следующая связь между  $\alpha$  и  $\rho$ :

$$\rho = \frac{c}{\varepsilon} \left( \frac{c'}{c} - \frac{c-c}{c} \right). \quad (5.13)$$

Легко показать, что уравнение (5.13) полностью совпадает с уравнением "обратных часов" [8], если в последнем пренебречь эффектами, связанными с процессом замедления нейтронов.

В  $P_I$  - приближении получим

$$\rho = \frac{c}{\epsilon} \left( \alpha \frac{2-c+d}{c} - \frac{cLc}{c} \right). \quad (5.14)$$

Соотношение (5.14), совпадая с (5.13) вблизи точки  $\alpha = 0$ , приводит при других значениях  $\alpha$  к неверным результатам. Так, если  $\alpha \rightarrow (c-2)$  и  $c \rightarrow 1$ , то из (5.14) следует, что  $\rho \rightarrow 0$ , что неправильно. Исправить этот недостаток можно, если при выводе использовать приближенное выражение типа (5.11). Мы не приводим здесь получаемых таким путем соотношений, ибо точность их сравнима с точностью диффузионной формулы (5.13).

## § 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получено общее решение нестационарного кинетического уравнения переноса с учетом запаздывающих нейтронов и найдена связь этого решения с решением квазикритического уравнения. На рис. 1 показана зависимость с.ч. уравнения (3.1) без учета запаздывающих нейтронов. Эта зависимость впервые была получена в работе [9]. Наш рисунок уточняет последнюю в области  $\alpha \sim -1$ .

Рис. 2 иллюстрирует зависимость с.ч. уравнения (4.5).

Характер деформации спектра с.ч., возникающей при учете запаздывающих нейтронов, показан на рис. 3, где приведены результаты численного расчета по формулам (3.28) и (3.29) с.ч. уравнения (3.1) с учетом 2-х групп запаздывающих нейтронов. Штриховыми линиями на нем изображен ход с.ч. уравнения (3.1), когда  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

Рис. 5 иллюстрирует спектр с.ч. из области  $\alpha + 1 > 0.9$  уравнения (3.1) с одной группой запаздывающих нейтронов для задачи с параметрами, близкими к реальным. Штрихами показан случай  $\beta = 0$ . Пунктиром изображен ход с.ч. уравнения (3.1) для плотности мгновенных нейтронов (т.е. случай, когда  $\xi(\alpha) = (\alpha+1)/(1-\beta)$ ). Видим, что имеется хорошее соответствие.

Важный с точки зрения практических расчетов вопрос о точности диффузионного и  $P_I$ -приближений иллюстрируется в таблице 1, из которой видно, что вплоть до очень глубоких подкритичностей ( $\alpha+1 \sim 0.1$ ), эти приближения дают удовлетворительную точность, если рассматривается система, близкая к реальным (т.е. если  $c \sim 1$ ;  $\max_i (k_i; \beta_i) \ll 1$ ).

Автор благодарен Г.Я.Румянцеву за постоянное внимание к работе и ценные консультации.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. Mika. The Effect of Delayed Neutrons on the Spectrum of the Transport Operator, Nukleonik, bd. 9, heft I, S. 46-51, 1967.

2. Г.И. Марчук. Методы расчета ядерных реакторов, Госатомиздат, 1967.

3. J. Lehner and G. Wings, On the Spectrum of an Unsymmetric Operator Arising in the Transport Theory of Neutrons. Comm. Pure and Appl. Math., 3, 217-234, 1955.

4. Н.Н. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, ГИФМЛ, Москва, 1962.

5. Case K.M. Elementary Solutions of the Transport Equation and their Applications, Ann. Phys., 9, I, 1960.

6. А.А. Шкурпелов, С.Б. Шихов. Расчет спектра оператора переноса в сферической геометрии для моноэнергетических нейтронов с учетом анизотропии рассеяния и для термализационной модели Нелкина. Препринт НИИАР П-8. Мелекес, 1968.

7. Г.А. Румянцев, Б.Д. Абрамов. Свойства  $P_I$  - приближения в нестационарной односкоростной теории переноса. Препринт ФЭИ-237, 1971.

8. С. Глестон, М. Эдлунд. Основы теории ядерных реакторов, И.Л., 1954.

9. R. Bowden and C. Williams. Solutions of the Initial-Value Transport Problem for Monoenergetic Neutrons in Slab Geometry, J. Math., Phys., II, 1527-1540, 1964.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

В таблице I приведен расчет зависимости  $dn/c$  от  $c-R$  для  $\mu=1,2$  уравнения (3.1) с одной группой запаздывающих нейтронов. Здесь  $c=101$ ;  $\lambda=0.001$ ;  $\beta=0.01$ ; столбец I соответствует расчету по формуле (5.7); 2 - по (5.11); 3 - по формулам (3.28), (3.29); 4 - также по (3.28), (3.29), но в дополнительном предположении  $\lambda=0$ . При расчетах по (5.7), (5.11) величина экстраполированной добавки  $d=0.7104$ .



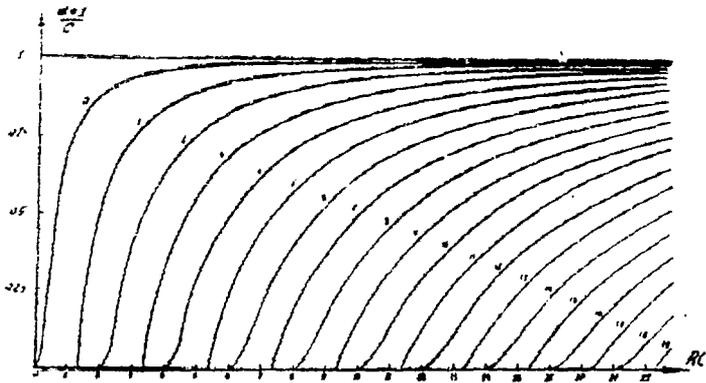


Рис. 1.

Зависимость  $\alpha_1/c$  от  $RC$  для уравнения (3.1) без учета запаздывающих нейтронов

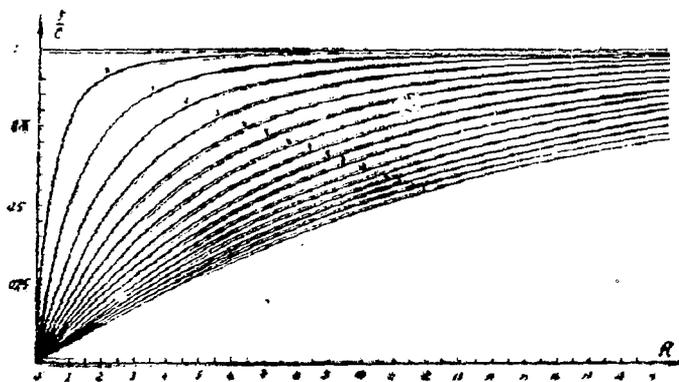


Рис. 2.

Зависимость  $\beta/c$  от  $R$  для квазикритического уравнения (4.5)

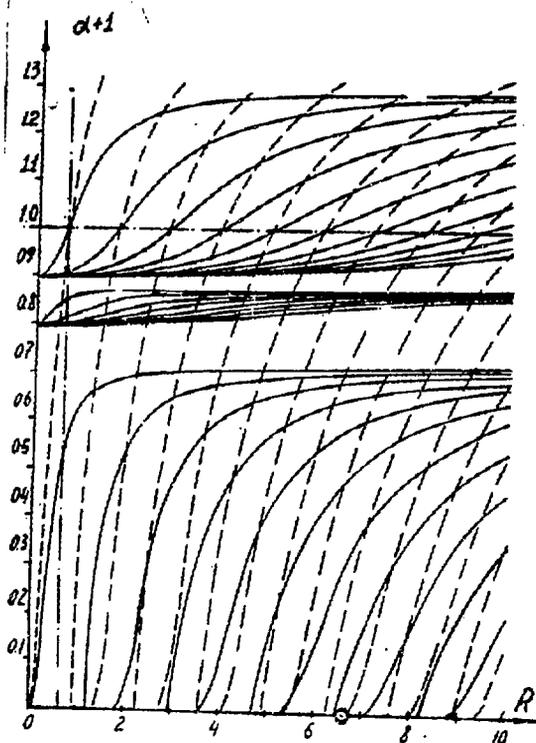


Рис. 3.  
Зависимость с.ч. уравнения (3.1) с двумя группами запаздывающих нейтронов от  $R$  (сплошная линия) Здесь  $C = 1,5$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$ ;  $\lambda_1 = 0,105$ ;  $\lambda_2 = 0,205$  (пунктир - случай  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ )

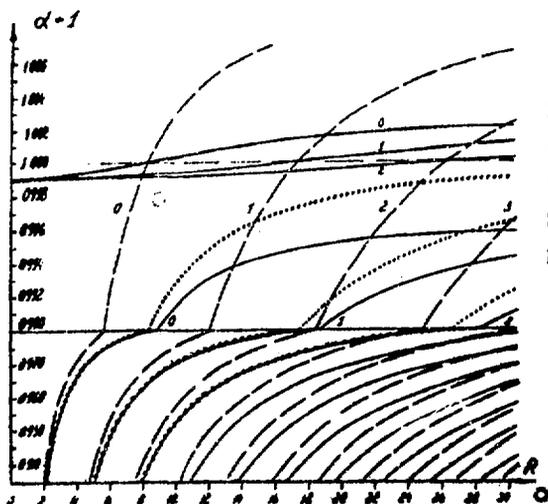


Рис. 4.  
Зависимость с.ч. уравнения (3.1) с одной группой запаздывающих нейтронов (сплошная линия). Параметры здесь те же, что и в таблице I (пунктир - случай  $\lambda = 0$ , штрихи - случай  $\beta = 0$ )

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

§ 1. Введение . . . . .	
§ 2. Формальное решение. . . . .	
§ 3. Расчет собственных чисел (с.ч.) и собственных функций (с.ф.) задачи о распределении нейтронов в пластине и сфере.. . . .	
§ 4. Связь с квазикритической задачей . . . . .	
§ 5. $P_1$ -приближение. . . . .	
§ 6. Заключение . . . . .	
Литература. . . . .	
Приложение. . . . .	

Препринт ФЭИ-238. Т-03931 от 26.П.71 г. Заказ № 141. Тираж 120.  
Объем 1 усл.п.л. Отпечатано на ротопринте ФЭИ, май 1971 г. Цена 10 коп.

