

- Note CEA-N-1509 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache  
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Division d'Etude et de Développement des Réacteurs  
Département de Physique des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

**METHODE D'INTERPRETATION DES EXPERIENCES  
DE REMPLACEMENT PROGRESSIF DU RESEAU D'UN REACTEUR  
PAR UN AUTRE RESEAU MULTIPLICATEUR**

par

**Gérard LANGLET**

Service des Expériences Critiques et de Physique des Réacteurs

**Paul REUSS**

Service d'Etudes de Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

- Janvier 1972 -



CEA-N-1509 - LANGLET Gérard, REUSS Paul

METHODE D'INTERPRETATION DES EXPERIENCES DE REMPLACEMENT  
PROGRESSIF DU RESEAU D'UN REACTEUR PAR UN AUTRE RESEAU  
MULTIPLICATEUR

Sommaire. - Ce papier présente la méthode d'interprétation des expériences de remplacement progressif très souvent utilisées en France pour l'étude des réseaux des différentes filières de réacteurs. L'expérience consiste à remplacer progressivement au centre d'un réseau, préalablement mesuré, le réseau à étudier et à mesurer les variations de réactivité qui en résultent. On l'interprète en utilisant la formule des perturbations au premier ordre appliquée non entre ces deux réseaux (ce qui serait peu précis) mais entre l'expérience et le calcul. On montre qu'on obtient de la sorte, en utilisant la progressivité du remplacement, une valeur très précise de la différence des écarts laplacien matière vrai - laplacien matière calculé entre le réseau substitué et le réseau de référence.

1972

23 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

---

CEA-N-1509 - LANGLET Gérard, REUSS Paul

METHOD FOR THE ANALYSIS OF EXPERIMENTS OF PROGRESSIVE  
REPLACEMENT OF A REACTOR LATTICE BY ANOTHER MULTIPLYING  
LATTICE

Summary. - Experiments of progressive replacement are widely used in France for the study of lattices of various reactor types. In this kind of experiment, the lattice to be studied is made to replace the center of a reference lattice, previously known. Resulting reactivity variations are then measured. The analysis is made by using the perturbation formula to the first order applied between calculation and experiment, and not between the two lattices, as this would not be very accurate. It is shown that, using the progressivity of the replacement, a very precise value of the difference in the deviations between real and calculated material bucklings in the substituted and the reference lattices is obtained.

1972

23 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Note CEA-N-1509 -

Centre d'Études Nucléaires de Cadarache  
Centre d'Études Nucléaires de Saclay  
Division d'Étude et de Développement des Réacteurs  
Département de Physique des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

**METHODE D'INTERPRETATION DES EXPERIENCES  
DE REMPLACEMENT PROGRESSIF DU RESEAU D'UN REACTEUR  
PAR UN AUTRE RESEAU MULTIPLICATEUR**

par

**Gérard LANGLET**

**Service des Expériences Critiques et de Physique des Réacteurs**

**Faul REUSS**

**Service d'Études de Réacteurs et de Mathématiques Appliquées**

**Note SECPR/ECM n° 81**



PLAN

	Pages
- AVANT PROPOS	3
- INTRODUCTION	5
I. FORMALISME - FORMULE DE PERTURBATIONS	7
I. 1. Equations à deux groupes	7
I. 2. Facteur de multiplication effectif	7
I. 3. Forme symbolique des équations	8
I. 4. Equation des perturbations	9
I. 5. Flux dans une pile nue et homogène	9
I. 6. Perturbation d'une zone "asymptotique"	10
II. INTERPRETATION LORSQUE LE RESEAU SUBSTITUE EST PEU DIFFERENT DU RESEAU DE REFERENCE	13
III. INTERPRETATION DANS LE CAS GENERAL	15
III. 1. Principe de la nouvelle méthode d'interprétation	15
III. 2. Origine des erreurs que peut commettre le calcul	15
III. 3. Définition des états entre lesquels va être utilisée la formule des perturbations	16
III. 4. Explicitation de la formule des perturbations	17
III. 5. Elimination des derniers termes	18
III. 6. Transitoires à l'interface milieu substitué-milieu de référence	18
III. 7. Ajustement de la pile de référence	18
III. 8. Interprétation	19
- CONCLUSIONS.	21



METHODE D'INTERPRETATION DES EXPERIENCES DE REMPLACEMENT PROGRESSIF  
DU RESEAU D'UN REACTEUR PAR UN AUTRE RESEAU MULTIPLICATEUR

AVANT PROPOS.

Une méthode classique pour étudier les propriétés d'un réseau consiste à remplacer progressivement, au centre d'un empilement critique, le réseau de référence, préalablement mesuré, par le réseau à étudier.

Cette méthode a été largement utilisée lors de la mise au point du formulaire des réacteurs de la filière uranium naturel-graphite-gaz et elle est reprise pour l'étude neutronique des réacteurs à haute température.

A cette occasion, il nous a paru utile de repenser la méthode d'interprétation de ces expériences et de rédiger un exposé aussi didactique que possible, sans référence au cas particulier considéré. Nous n'aborderons donc pas les problèmes liés à la variation du chargement périphérique, soit radial dans les expériences critiques au graphite, soit axial dans les expériences critiques à eau lourde.





## INTRODUCTION

### Principe général des expériences de remplacement progressif.

L'idée la plus simple pour étudier le réseau multiplicateur d'un réacteur consiste à réaliser une maquette critique avec ce réseau. Cela nécessite cependant une quantité très importante de matériau et le prix de l'expérience peut être prohibitif, d'autant plus qu'on désire généralement étudier non pas un réseau mais toute une série.

Dans les expériences de remplacement progressif on ne réalise la maquette précédente que pour l'un des réseaux (réseau de référence). La mesure en étant faite on remplace ensuite de façon progressive la partie centrale de ce réseau de référence par l'un des autres réseaux étudiés (réseau substitué) et on suit, au fur et à mesure, l'évolution de réactivité qui en résulte.

C'est de ce renseignement qu'on cherche à déduire les propriétés du réseau substitué. Nous allons exposer ici comment faire ce passage d'un résultat de mesure au résultat intéressant le neutronicien, c'est-à-dire l'interprétation de l'expérience.



## I. FORMALISME - FORMULE DES PERTURBATIONS.

Pour fixer les idées la migration des neutrons sera traitée en théorie à deux groupes. Mais il est évident que le lecteur pourra développer la méthode d'interprétation dans le cadre de toute autre théorie en suivant les raisonnements que nous allons faire.

### I. 1. Equations à deux groupes.

Les équations à deux groupes s'écrivent, en régime permanent :

$$(1) \quad \left[ \begin{array}{l} D_1 \Delta \phi_1 - \sum_1 \phi_1 + \nu \sum_{f1} \phi_1 + \nu \sum_{f2} \phi_2 = 0 \\ D_2 \Delta \phi_2 - \sum_2 \phi_2 + \sum_r \phi_1 = 0 \\ \text{Conditions aux limites}^{1)} \end{array} \right.$$

Simultanément il est intéressant pour la formule des perturbations, de considérer le problème adjoint (on permute spectre de fission et section de production ; on permute les indices des sections de transfert) :

$$(2) \quad \left[ \begin{array}{l} D_1 \Delta \phi_1^+ - \sum_1 \phi_1^+ + \sum_r \phi_2^+ + \nu \sum_{f1} \phi_1^+ = 0 \\ D_2 \Delta \phi_2^+ - \sum_2 \phi_2^+ + \nu \sum_{f2} \phi_1^+ = 0 \\ \text{Conditions aux limites analogues.} \end{array} \right.$$

### I. 2. Facteur de multiplication effectif.

Les équations (1) ou (2) qui sont homogènes n'ont généralement pas de solution. On définit un paramètre critique comme un nombre qui, modifiant suivant un certain critère les

---

1) Continuité des flux et courants aux interfaces entre deux zones ; annulation des flux sur la surface extrapolée au-delà de l'interface avec le vide.

caractéristiques neutroniques des milieux, permet d'avoir une solution (condition critique). Dans les problèmes faisant intervenir la réactivité, le paramètre critique le plus intéressant à considérer est le facteur de multiplication effectif  $k_{eff}$ , qui est le nombre tel qu'en divisant toutes les sections de production (ou facteurs  $\nu$ ) par lui, les équations précédentes aient une solution<sup>2)</sup>. La réactivité est définie par :

$$\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}} \quad (3)$$

### 1.3. Forme symbolique des équations.

Les équations (1) peuvent s'écrire symboliquement sous la forme :

$$H \Phi = 0 \quad (4)$$

où  $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur à deux composantes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  fonctions du point de l'espace et

H une matrice 2 x 2 dont les éléments sont des opérateurs (H contient aussi les conditions aux limites) :

$$H = \begin{pmatrix} D_1 \Delta - \sum_1 + \nu \sum_{f1} & \nu \sum_{f2} \\ \sum_r & D_2 \Delta - \sum_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dans cet opérateur on peut distinguer l'opérateur de production P, c'est-à-dire la partie qu'on va diviser par  $k_{eff}$  pour que (4) ait une solution :

$$P = \begin{pmatrix} \nu \sum_{f1} & \nu \sum_{f2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

et le reste, noté - K. Quand on calcule le flux dans un réacteur, on recherche donc en fait des fonctions du point de l'espace,  $\Phi$ , et un nombre  $k_{eff}$ , tels que :

$$\left( \frac{P}{k_{eff}} - K \right) \Phi = 0 \quad (7)$$

aient une solution (noter que  $k_{eff}$  a une signification voisine de celle d'une valeur propre d'un opérateur<sup>3)</sup>).

2) On montre, en toute généralité, que c'est le même nombre qui permet de satisfaire les équations (1) et (2).

3) En théorie il y a plusieurs valeurs possibles pour  $k_{eff}$ . On choisit celle (unique) pour laquelle les flux sont partout positifs comme l'exige l'origine physique du problème.

Les équations (2) peuvent être écrites sous une forme symbolique analogue.

1.4. Equation des perturbations.

Supposons qu'on modifie les caractéristiques du réacteur, donc l'opérateur H, d'une quantité  $\delta H$ . Le paramètre critique s'en trouve lui-même modifié. On montre qu'on a, au premier ordre et pour une pile initialement critique (formule des perturbations) :

$$\delta\rho = \rho = \frac{\langle \Phi^+, \delta H \Phi \rangle}{\langle \Phi^+, P \Phi \rangle} \tag{8}$$

où  $\langle . \rangle$  désigne un produit scalaire (somme sur les indices de groupe et intégration sur l'espace). Cette relation montre qu'il n'est pas nécessaire de connaître le flux dans la pile perturbée pour calculer la réactivité (au premier ordre) ; mais elle nécessite par contre, la connaissance du flux adjoint de la pile initiale.

En théorie à deux groupes le numérateur s'écrit :

$$N = \int_{\text{Réacteur}} dV \left\{ \delta D_1 \Phi_1^+ \Delta \Phi_1 - \delta \Sigma_1 \Phi_1^+ \Phi_1 + \delta (v \Sigma_{f1}) \Phi_1^+ \Phi_1 + \delta (v \Sigma_{f2}) \Phi_1^+ \Phi_2 \right. \\ \left. + \delta D_2 \Phi_2^+ \Delta \Phi_2 - \delta \Sigma_2 \Phi_2^+ \Phi_2 + \delta \Sigma_r \Phi_2^+ \Phi_1 \right\}$$

et le dénominateur :

$$D = \int_{\text{Réacteur}} dV \left\{ v \Sigma_{f1} \Phi_1^+ \Phi_1 + v \Sigma_{f2} \Phi_1^+ \Phi_1 \right\}$$

1.5. Flux dans une pile nue et homogène.

D'une façon générale le flux dans une pile nue et homogène est factorisé en un produit d'une fonction de la vitesse par une fonction de l'espace  $f(\vec{r})$ , fonction propre du laplacien<sup>4)</sup> partout positive, s'annulant à la surface, associée à la valeur propre  $B^2$  (laplacien géométrique). Pour le flux adjoint on a la même propriété (avec la même fonction  $f(\vec{r})$ ).

En théorie à deux groupes cela devient évident sur la forme (1) ou (2) des équations :

$$\begin{cases} \Phi_1(\vec{r}) = \varphi_1 f(\vec{r}) \\ \Phi_2(\vec{r}) = \varphi_2 f(\vec{r}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Phi_1^+(\vec{r}) = \varphi_1^+ f(\vec{r}) \\ \Phi_2^+(\vec{r}) = \varphi_2^+ f(\vec{r}) \end{cases} \tag{9}$$

avec

---

4) ou de n'importe quel autre opérateur invariant par déplacement.

$$\begin{cases} - (D_1 B^2 + \sum_1) \varphi_1 + v \sum_{f1} \varphi_1 + v \sum_{f2} \varphi_2 = 0 \\ - (D_2 B^2 + \sum_2) \varphi_2 + \sum_r \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

et

$$\begin{cases} - (D_1 B^2 + \sum_1) \varphi_1^+ + \sum_r \varphi_2^+ + v \sum_{f1} \varphi_1^+ = 0 \\ - (D_2 B^2 + \sum_2) \varphi_2^+ + v \sum_{f2} \varphi_1^+ = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Ces dernières relations sont généralement incompatibles. On les rend compatibles en introduisant un facteur de multiplication effectif comme indiqué plus haut, et on obtient :

$$k_{\text{eff}} = \frac{v \sum_{f1}}{D_1 B^2 + \sum_1} + \frac{v \sum_{f2} \sum_r}{(D_1 B^2 + \sum_1) (D_2 B^2 + \sum_2)} \quad (12)$$

Mais on peut rechercher aussi la taille de la pile qui, constituée du matériau considéré, serait critique ( $k_{\text{eff}} = 1$ ). Cette pile doit avoir un laplacien  $\mu^2$  (laplacien matière) vérifiant l'équation :

$$1 = \frac{v \sum_{f1}}{D_1 \mu^2 + \sum_1} + \frac{v \sum_{f2} \sum_r}{D_1 \mu^2 + \sum_1) (D_2 \mu^2 + \sum_2)} \quad (13)$$

Noter que (10) et (11) conduisent aux mêmes relations (12) et (13).

#### 1.6. Perturbation d'une pile nue et homogène.

Considérons une pile nue et homogène critique. Sans changer sa géométrie on peut modifier légèrement les caractéristiques du matériau qui la constitue. Dans ce cas l'application de la formule (8) est simple puisque les intégrales de  $f^2(\vec{r})$  s'éliminent entre le numérateur et le dénominateur. Mais on peut aussi calculer la réactivité en différentiant la relation (12). Le lecteur constatera qu'on obtient bien le même résultat dans les deux cas<sup>5)</sup> soit :

$$\rho = \frac{1}{u_1 u_2} [u_2 \delta(v \sum_{f1}) + \sum_r \delta(v \sum_{f2}) + \sum_{f2} \delta \sum_r - u_2 \delta u_1 - (u_1 - v \sum_{f1}) \delta u_2] \quad (14)$$

avec

$$u_i = D_i B^2 + \sum_i$$

$$\delta u_i = \delta D_i B^2 + \delta \sum_i$$

---

5) Il faut utiliser le fait que le deuxième membre de (12) est égal à 1 dans l'état initial.

Cette quantité représente la réactivité introduite par le changement du matériau seulement mais non de la géométrie. C'est pourquoi elle sera notée plus loin  $(\rho)_{\text{local}}$ .

Parallèlement il est intéressant de calculer, en différentiant (13), la variation du laplacien matière résultant de cette modification du milieu<sup>6)</sup>. On obtient :

$$\delta \mu^2 = \frac{x}{\bar{M}^2} \quad (15)$$

où  $x$  est le deuxième membre de (14), et  $\bar{M}^2$  une quantité ayant la dimension d'une surface dont l'expression est :

$$\bar{M}^2 = \frac{D_1}{u_1} + \frac{D_2}{u_2} \left( 1 - \frac{v \sum f_i}{u_1} \right) \quad (16)$$

On en conclut que, pour une pile nue homogène, la variation de réactivité résultant d'une petite modification du matériau est reliée de façon très simple à la variation du laplacien matière :

$$\rho = \bar{M}^2 \delta \mu^2 \quad (17)$$

Le laplacien matière apparaît ainsi comme un paramètre caractérisant de façon globale un matériau multiplicateur.

### 1.7. Perturbation d'une zone "asymptotique".

On sait que, dans un réacteur, le flux en régime stationnaire s'établit suffisamment loin des interfaces suivant un mode fondamental : spatialement suivant une fonction propre du laplacien,  $f(\vec{r})$ , associée à la valeur propre  $\mu^2$  (ici apparaît à nouveau le rôle fondamental de ce paramètre), spectralement suivant une fonction indépendante du point, solution des équations obtenues à partir de celles de la migration (exemple : équations (1)) quand on y reporte une solution factorisée. Une pile nue et homogène est un cas particulier pour lequel la zone asymptotique s'étend à toute la pile<sup>7)</sup>.

Si on perturbe une pile à l'intérieur d'une zone asymptotique seulement la formule des perturbations est simple à utiliser ( $\Delta \Phi$  peut être remplacé par  $-\mu^2 \Phi$ ). On obtiendra sans difficulté :

$$\rho = (\rho)_{\text{local}} \frac{\int_{\text{zone perturbée}} g(\vec{r}) dV}{\int_{\text{Réacteur}} g(\vec{r}) dV} \quad (18)$$

où  $g$  est la fonction :

6) Le calcul se déduit de celui fait pour calculer  $\rho$  en différentiant (12). Il suffit de remplacer  $\delta u_i$  par  $\delta u_i + D_i \delta \mu^2$ .

7) à condition de faire l'hypothèse que la condition aux limites peut s'exprimer par l'annulation du flux à la surface, ce qui est une approximation.



$$g = v \sum_{f1} \bar{\phi}_1^+ \bar{\phi}_1 + v \sum_{f2} \bar{\phi}_1^+ \bar{\phi}_2 \quad (19)$$

et  $(\rho)_{\text{local}}$  l'expression l'expression (14) dans la zone perturbée.

En vertu de (17) on peut encore écrire :

$$\rho = (\bar{M}^2 \delta\mu^2)_{\text{local}} \frac{\int_{\text{Z.P.}} g(\vec{r}) dV}{\int_{\text{R}} g(\vec{r}) dV} \quad (20)$$

## II. INTERPRETATION LORSQUE LE RESEAU SUBSTITUE EST PEU DIFFERENT DU RESEAU DE REFERENCE.

Si les propriétés du réseau substitué sont peu différentes de celles du réseau de référence, on pourra appliquer la formule de perturbation au premier ordre (20) entre les états :

- pile de référence (supposée critique)
- pile substituée (réactivité mesurée).

En notant  $\Delta$  l'écart entre les caractéristiques du réseau substitué et celles du réseau de référence, on pourra écrire :

$$\rho_i = \overline{M}^2 \Delta \mu^2 \frac{G_i}{G} \quad (21)$$

où

$\rho_i$  est la réactivité mesurée au  $i^{\text{ième}}$  "point" de substitution<sup>8)</sup>

$\overline{M}^2$  est l'aire de "migration" (relation (16) ) du réseau de référence

$G_i$  et  $G$  les intégrales de la fonction  $g$  (relation (19) ) calculée dans la pile initiale (de référence) respectivement dans la zone substituée et dans toute la pile.

En effet on peut valablement admettre que la zone substituée, qui est toujours de petites dimensions, se trouve dans la zone "asymptotique" de la pile initiale.

Le laplacien matière du réseau de référence aura été préalablement mesuré par carte de flux. La relation (21) permet donc de déduire d'une mesure de réactivité  $\rho_i$  l'écart  $\Delta \mu^2$  d'où le laplacien matière du réseau substitué.

Théoriquement un seul "point" de substitution est suffisant. Le fait d'en faire plusieurs permet d'améliorer la précision statistique.

Il est important de mettre en garde le lecteur : une telle interprétation de l'expérience n'est généralement pas suffisante. Comme on a pu le constater sur des exemples réels la formule des perturbations au premier ordre, appliquée entre le réseau substitué et le réseau de référence, n'est pas assez précise car les écarts sont trop importants. Il faut donc envisager une méthode d'interprétation plus soignée que nous allons voir maintenant.

---

8) On substitue progressivement : chaque étape est appelée "point" de substitution.



### III. INTERPRETATION DANS LE CAS GENERAL.

En pratique la méthode exposée au chapitre II peut éventuellement permettre de dégrossir l'interprétation mais n'est pas suffisante pour avoir un résultat précis. On peut faire tout de suite deux remarques à cette méthode :

- 1 - Elle évite d'avoir à faire le calcul du flux dans la pile substituée, mais en fait ce calcul est facile à effectuer et il serait intéressant de l'utiliser.
- 2 - Elle n'utilise pas le fait (sauf pour améliorer la précision statistique) qu'on fait un remplacement progressif.

#### III.1. Principe de la nouvelle méthode d'interprétation.

Les différences entre le réseau substitué et le réseau de référence n'ont pas de raison d'être toujours très petites ; par contre on peut espérer que les erreurs que commet le neutronicien quand il calcule ces réseaux sont faibles. D'où l'idée d'appliquer la formule des perturbations au premier ordre non entre ces deux réseaux mais entre les caractéristiques calculées (dont on dispose) des réseaux et les caractéristiques réelles (inconnues) de ces réseaux.

On voit tout de suite les conséquences :

- 1 - Alors que précédemment la "zone perturbée" était limitée à la zone substituée, elle va s'étendre maintenant à toute la pile puisque des erreurs peuvent être commises sur tous les réseaux la constituant.
- 2 - La "zone perturbée" ne sera pas limitée à une zone asymptotique. C'est là qu'on va utiliser le fait qu'on a un remplacement progressif.

#### III.2. Origine des erreurs que peut commettre le calcul.

Il est très possible que le calcul des paramètres caractérisant un réseau ( $D_1, \sum_1, \nu \sum_{f1}, \dots$ ) soit entaché d'erreurs. C'est une première cause, mais ce n'est pas la seule. Pour calculer un réacteur on utilise en outre un modèle simplifié (par exemple une théorie

à deux groupes) alors qu'en réalité la population neutronique est régie par l'équation de Boltzmann polycinétique. Cela peut sembler grave a priori. En fait l'utilisation d'un modèle simplifié n'induit une erreur sur le flux qu'au voisinage des interfaces dans la mesure où ce modèle est ajusté sur le mode fondamental. En effet on montre d'une part qu'en milieu infini et homogène (cas dans lequel on définit le mode fondamental) tous les opérateurs (en particulier le vrai opérateur régissant la population neutronique et celui du modèle) ont les mêmes fonctions propres (le mode fondamental, précisément) et d'autre part que loin des interfaces c'est le mode fondamental qui s'établit.

Ce mode - c'est un point très important - est caractérisé par un seul paramètre, sa "courbure" communément appelée laplacien matière. Ce paramètre est donc essentiel à connaître (s'il est juste on est assuré que le calcul qu'on fait représente la réalité au moins loin des interfaces), et c'est lui que nous allons chercher à obtenir, pour le réseau substitué, à partir de l'expérience de remplacement progressif.

### III. 3. Définition des états entre lesquels va être utilisée la formule des perturbations.

Pour chaque point de substitution on va considérer :

- 1 - La pile calculée. Celle-ci n'est généralement pas critique. Le calcul va la rendre artificiellement critique en multipliant les productions par un facteur  $\lambda$  (inverse d'un  $k_{eff}$ ) et obtenir alors les flux et flux adjoints.
- 2 - La pile réelle. Elle n'est pas non plus critique en général. Sa réactivité  $\rho$  est mesurée.

Appliquons la formule de perturbation entre la pile calculée rendue critique et la pile réelle. La variation de H apparaissant au numérateur de la formule des perturbations (8) est<sup>9)</sup>  $\delta H + (1 - \lambda) P$  ( $\delta H$  : erreur commise sur H) ; l'opérateur de production apparaissant au dénominateur est  $\lambda P$  (P : opérateur de production introduit dans le calcul) ; les flux sont ceux qui sont calculés dans la pile rendue critique :

$$\rho = \frac{\langle \Phi^+, (\delta H + (1 - \lambda) P) \Phi \rangle}{\langle \Phi^+, \lambda P \Phi \rangle}$$

En posant  $\eta = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$  cette relation devient :

$$\rho + \eta = \frac{\langle \Phi^+, \delta H \Phi \rangle}{\langle \Phi^+, P \Phi \rangle} \quad (22)$$

Rappel : les deux intégrales représentées par le produit scalaire s'étendent sur toute la pile.

9) La variation de H entre les deux états considérés est :

$$(P_{exp} - K_{exp}) - (\lambda P_{cal} - K_{cal}) = (P_{exp} - K_{exp}) - (P_{cal} - K_{cal}) + (1 - \lambda) P_{cal} = \delta H + (1 - \lambda) P_{cal}$$

III. 4. Explicitation de la formule des perturbations.

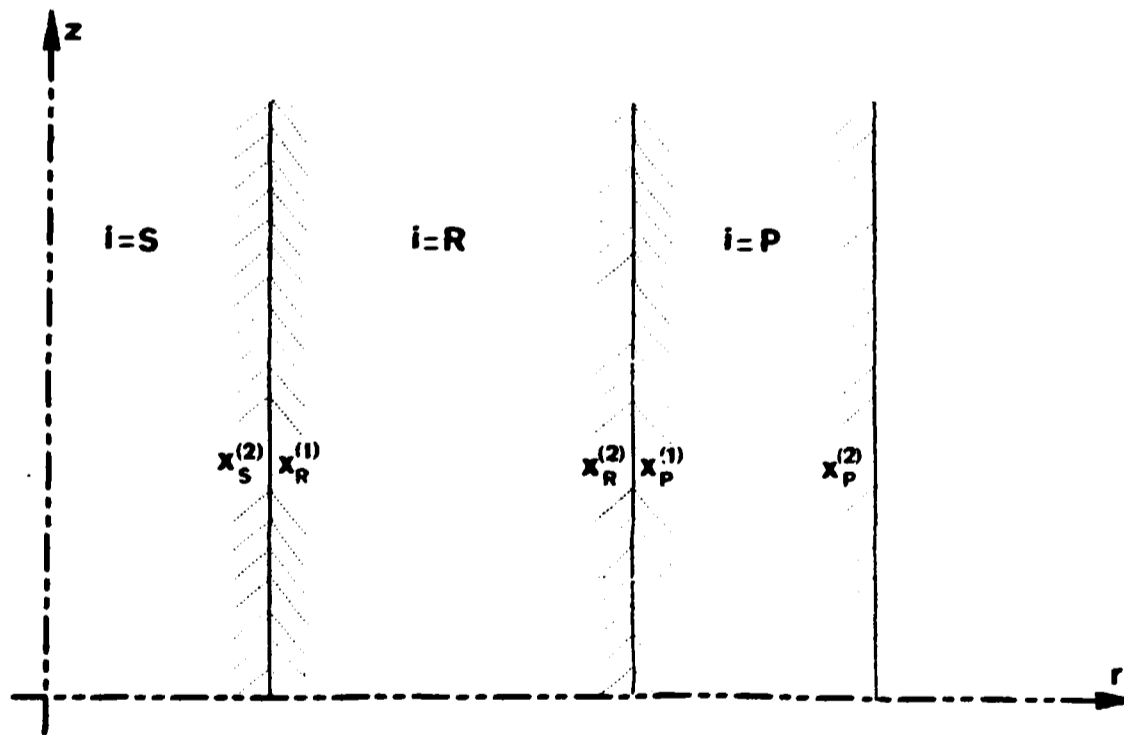
Pour fixer les idées supposons que la pile soit constituée de trois zones : zone substituée, zone de référence, zone périphérique.

Si dans chaque zone le comportement asymptotique du flux était atteint la relation (22) s'écrirait :

$$\rho + \eta = \frac{1}{G} \sum_{i=S,R,P} [M^2 \delta \mu^2 G]_i$$

en désignant par  $G_i$  et  $G$  les intégrales de la fonction  $g(\vec{r})$  respectivement dans la zone  $i$  et dans toute la pile ( $G = G_S + G_R + G_P$ ). En réalité, le dénominateur est correct, mais il faut ajouter au numérateur des termes provenant des transitoires d'interface (d'une part  $\Delta \Phi$  ne peut pas être confondu avec  $-\mu^2 \Phi$ ; d'autre part le fait que  $H$  soit un modèle entraîne que  $\delta H \Phi$  n'est pas nul si  $\Phi$  n'est pas fonction propre du laplacien<sup>10)</sup>). En désignant par  $x_i^{(1)}$  et  $x_i^{(2)}$  ces termes (interfaces interne et externe ; voir figure) on doit écrire :

$$\rho + \eta = \frac{1}{G} \left\{ [M^2 \delta \mu^2 G]_S + x_S^{(1)} + [M^2 \delta \mu^2 G]_R + x_R^{(1)} + x_R^{(2)} + [M^2 \mu^2 G]_P + x_P^{(1)} + x_P^{(2)} \right\} \quad (23)$$



(en hachuré : zones où apparaissent les transitoires).

10) Premier effet : les intégrales du type  $\int \Phi^+ \Delta \Phi dV$  ne se ramènent pas à  $\int \Phi^+ \Phi dV$ .  
Deuxième effet : même si le calcul respecte la "courbure", donc le flux dans les zones asymptotiques, il ne donne les transitoires que de façon approximative.

### III. 5. Elimination des derniers termes.

On peut admettre que tous les termes à partir de  $x_R^{(2)}$  restent constants au cours du remplacement progressif qui n'affecte pas la partie externe de la pile. En retranchant alors de (23) l'équation correspondant au "point" de substitution origine (pas de réseau substitué) on obtient :

$$(\rho + \eta) - (\rho + \eta)_0 = \frac{1}{G} [M^2 \delta \mu^2 G]_S - [M^2 \delta \mu^2 G']_R + x_S^{(2)} + x_R^{(1)} \quad (24)$$

où on a posé  $G'_R = G_{R_0} - G_R$ .

Remarque : Cette relation reste valable même si on a plusieurs zones périphériques.

### III. 6. Transitoires à l'interface milieu substitué - milieu de référence.

On peut supposer qu'en gros  $x_S^{(2)}$  et  $x_R^{(1)}$  sont proportionnels :

- au flux "moyen" (en espace et énergie)  $\bar{\Phi}$  au niveau de cette interface,
- à l'aire  $s$  de cette interface,

soit  $x_S^{(2)} + x_R^{(1)} \simeq \alpha \bar{\Phi} s$  ( $\alpha$  est une constante inconnue).

D'autre part, comme la zone substituée est toujours petite, on peut aussi admettre que  $G_S$  est proportionnel :

- au flux "moyen" dans cette zone, peu différent de  $\bar{\Phi}$ ,
- à son volume  $v$ ,

soit  $G_S \simeq \beta \bar{\Phi} v$  ( $\beta$  est aussi une constante inconnue).

Après multiplication par  $\frac{G}{G_S}$ , (24) peut donc s'écrire :

$$[(\rho + \eta) - (\rho + \eta)_0] \frac{G}{G_S} = [M^2 \delta \mu^2]_S - [M^2 \delta \mu^2]_R \frac{G'_R}{G_S} + \gamma \frac{s}{v} \quad (25)$$

$\gamma$  : constante inconnue.

### III. 7. Ajustement de la pile de référence.

Un dernier renseignement expérimental n'a pas encore été pris en compte ; avant d'entreprendre les substitutions on mesure, par carte de flux, le laplacien matière du réseau de référence. Si on l'introduit dans le calcul (éventuellement en modifiant un ou plusieurs

paramètres de façon que  $\mu_{R, \text{calcul}}^2 = \mu_{R, \text{mesure}}^2$ ) l'écart  $\delta\mu_R^2$  sera nul, ce qui élimine le deuxième terme.

On obtient donc en définitive :

$$\boxed{[(\rho + \eta) - (\rho + \eta)_0] \frac{G}{G_S} = \overline{M}_S^2 \delta\mu_S^2 + \gamma \frac{s}{v}} \quad (26)$$

### III. 8. Interprétation.

La méthode d'interprétation se déduit de cette relation.

Pour chaque point de substitution :

- on mesure  $\rho$ ,
- on calcule  $\eta$ ,  $G$  et  $G_S$  en ayant pris soin d'ajuster, si besoin est, le laplacien du réseau de référence sur la valeur mesurée,
- on en déduit la quantité :

$$\Gamma = [(\rho + \eta) - (\rho + \eta)_0] \frac{G}{G_S} \quad (27)$$

- on porte, sur un graphique,  $\Gamma$  en fonction de  $s/v$  (surface latérale<sup>11)</sup> sur volume de la zone substituée).

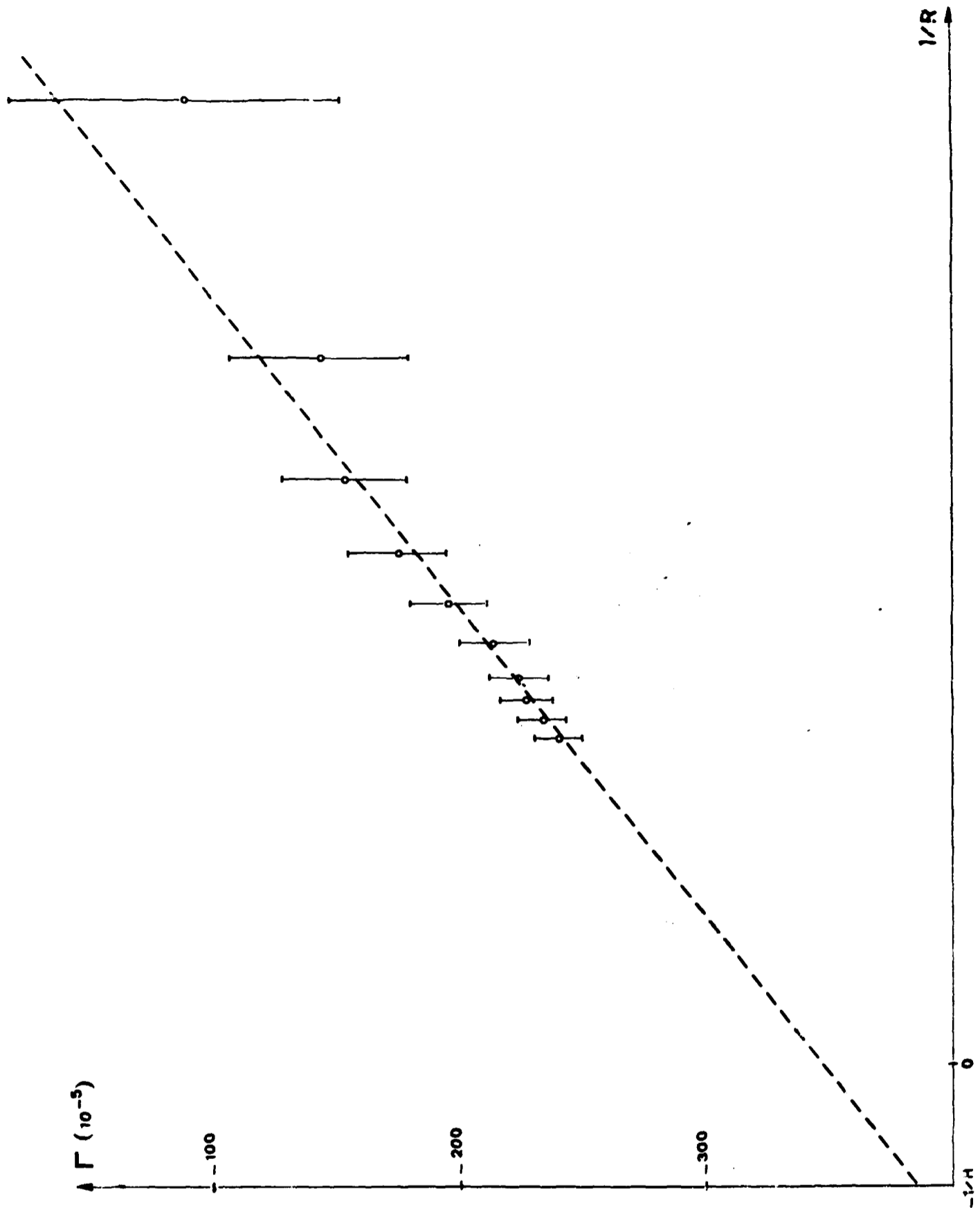
Les points obtenus sont alignés aux erreurs (provenant de la mesure de  $\rho$  et des simplifications (24) et (25) ) près. L'ordonnée à l'origine de la droite obtenue est  $\overline{M}_S^2 \delta\mu_S^2$ . On en déduit la valeur réelle du laplacien matière du réseau substitué, à partir de  $\overline{M}_S^2$  dont on dispose (calcul) : Voir exemple page suivante.

Remarques : l'extrapolation en  $\frac{s}{v}$  permet en fait d'éliminer aussi les derniers termes de (23) qui ne sont pas rigoureusement constants comme on l'a dit mais qui varient, à partir de leur valeur initiale, à peu près comme  $\frac{s}{v}$ . On dit quelquefois que l'extrapolation à  $\frac{s}{v} = 0$  est une extrapolation à une zone substituée infinie ; ce n'est pas tout à fait exact en ce sens que la relation (26) n'est valable que tant que la zone substituée est petite.

#### 11) En géométrie cylindrique :

- si la zone substituée s'étend sur toute la hauteur de la pile  $\frac{s}{v}$  est proportionnel à  $\frac{1}{R}$  (R : rayon de la zone substituée).
- si elle n'a qu'une demi-hauteur  $H$  au-delà de laquelle on retrouve un autre réseau,  $\frac{s}{v}$  est proportionnel à  $\frac{2}{R} + \frac{1}{H}$ .





EXEMPLE DE GRAPHIQUE - Les barres d'erreur ne tiennent compte que des incertitudes sur les mesures de  $\rho$ ).

### CONCLUSIONS.

L'expérience de remplacement progressif donne un résultat très précis parce qu'on a mis à profit justement la progressivité du remplacement.

Elle ne fournit (comme toute expérience basée sur des mesures de réactivité) qu'un renseignement global sur le réseau étudié : pratiquement, son laplacien matière. Si un écart avec le calcul apparaît, ce type d'expérience ne permet pas de décider quelle ou quelles caractéristiques sont à incriminer. Ce doute ne peut être levé que par d'autres considérations ou mesures.

On notera que ce n'est pas  $\delta\mu_S^2$  (comme le laisse supposer la formule (26) ; mais  $\delta\mu_S^2 - \delta\mu_R^2$  que fournit, avec une bonne précision, cette interprétation. En effet  $\mu_R^2$  est mesuré avec une certaine marge d'erreur<sup>12)</sup> qui se reporte sur  $\mu_S^2$  comme le montre la relation

(25) 
$$\left( \frac{\overline{M}_R^2 G'_R}{\overline{M}_S^2 G_S} \right) \text{ est peu différent de un.}$$

On remarquera enfin qu'une interprétation faite "en laplacien matière" est définitive : elle n'est pas à reprendre même si on améliore le formulaire de calcul de réseaux, tout au moins si cette amélioration n'entraîne que de petites variations des différents paramètres.

*Manuscrit reçu le 15 novembre 1971*

---

12) en général supérieure à celle qui résulte de l'extrapolation de  $\Gamma$ .



*Edité par*

*le Service de Documentation*

*Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay*

*Boîte Postale n° 2*

*91 - GIF-sur-YVETTE (France)*