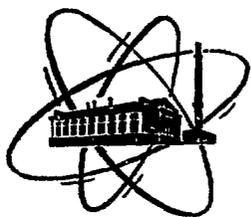


ФЭИ-248



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*И. А. КУЗНЕЦОВ*

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА  
НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ  
ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ЯДЕРНЫХ  
РЕАКТОРОВ**

Обнинск — 1971

ФЗИ-248

**ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**И.А. Кузнецов**

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО  
ПОЛЯ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ**

Дается обзор приближенных методов расчета нестационарного температурного поля тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. В первой части работы описаны различные методы осреднения уравнения теплопроводности и определения приближенных передаточных функций ТВЭЛ для фиксированного сечения по высоте. Предлагается метод получения ряда согласованных приближений, отличающихся простотой и высокой точностью. Сравнение точности различных приближенных методов иллюстрируется примерами расчета.

Во второй части предлагаются приближенные решения уравнения энергии для теплоносителя, основанные на применении вариационных методов, интегральных оценок. Решения даны в простом конечном выражении. Расчетное сравнение приближенных решений с точными показывает их малую погрешность.

## I. Осреднение уравнения теплопроводности и определение приближенных передаточных функций ТВЭЛ

Нестационарное температурное поле плоских и цилиндрических многослойных ТВЭЛ ядерных реакторов описывается системой уравнений, включающей в себе уравнения теплопроводности для отдельных слоев (топливо, контактный подслои, оболочка) с соответствующими граничными условиями на поверхностях раздела слоев и граничными условиями 3-его рода на внешней поверхности оболочки, а также уравнение энергии для теплоносителя с граничными условиями на входе в канал. Начальные условия в случае постоянного расхода теплоносителя могут быть положены нулевыми. В работе [1] предлагается следующий подход к решению этой системы. Вначале решается система уравнений и краевых условий, описывающая температурное поле элемента в фиксированном сечении по высоте (т.е. уравнения теплопроводности с соответствующими условиями). При этом допускается постоянство коэффициента теплоотдачи от оболочки ТВЭЛ к теплоносителю в нестационарном процессе, что не вносит большой погрешности, особенно в условиях жидкометаллического охлаждения реактора. В результате решения указанной группы уравнений определяются передаточные функции от температуры теплоносителя и от мощности тепловыделения к тепловому потоку с поверхности ТВЭЛ в произвольном сечении по высоте -  $P_1$  и  $P_2$  соответственно.

После этого уравнение энергии для теплоносителя в области изображений по Лапласу может быть записано в виде

$$P_1 \cdot U + \delta t \cdot P_2 \cdot \bar{q}_z \cdot N = S \cdot U + \frac{1}{\tau_*} \cdot \frac{dU}{dz} \quad (1)$$

Здесь  $U = \mathcal{L}[\theta(\tau, z)]$ ,

$$N = \mathcal{L}[\bar{n}(\tau)],$$

$\bar{q}_z$  - функция, описывающая распределение тепловыделения вдоль оси элемента.

$$q(z, \tau) = q_0 \cdot \bar{q}_z \cdot \bar{n}(\tau),$$

$$\delta t = \frac{q_0 \cdot R^2}{\lambda_0}, \quad \tau_* = \frac{H}{w} \cdot \frac{a_0}{R^2}$$

Решение этого уравнения при граничном условии на входе в канал  $U(0, s) = U_0$

$$U = \delta t \cdot P_2 \cdot \tau_* \cdot N \cdot \exp[(P_1 - s)\tau_* z] \cdot \int_0^z \exp[(s - P_1)\tau_* z] \times \\ \times \bar{q}_z dz + U_0 \cdot \exp[(P_1 - s)\tau_* z]. \quad (2)$$

Уточненные решения задачи нестационарной теплопроводности дают трансцендентные выражения для функций  $P_1$  и  $P_2$ , которые могут быть представлены в виде бесконечных рядов дробно-рациональных функций. Простые полюсы этих функций становятся, как видно из выражения (2), существенно особыми точками функции  $U \cdot e^{st}$ . Поэтому оригинал (2) также представляет собой сумму бесконечных рядов с очень сложной формой общего члена, что затрудняет практическое использование решения. Имеется две возможности для его

упрощения, которые могут быть использованы как независимо, так и в сочетании друг с другом: 1) упрощение выражений для передаточных функций  $P_1$  и  $P_2$  на основе приближенных решений и 2) упрощение решения уравнения энергии для теплоносителя.

Ниже последовательно рассматриваются обе эти возможности. При этом новые методы, предлагаемые автором, сравниваются с уже опубликованными.

Уравнение теплопроводности, описывающее нестационарное температурное поле ТВЭЛ,

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla^2 t + \delta t \cdot \bar{n}(\tau) \quad (3)$$

при граничных условиях третьего рода на поверхности, омываемой теплоносителем,

$$-\frac{\partial t}{\partial \tau} \Big|_s = B_i (t/s - \theta) \quad (4)$$

и при нулевых начальных условиях может быть приведено к виду

$$A[\bar{t}(\tau)] = B[\theta(\tau)] + \delta t \cdot C[\bar{n}(\tau)] \quad (5)$$

$A, B, C$  - бесконечные дифференциальные операторы,

$\bar{t}(\tau)$  - средняя по сечению температура.

Здесь мы рассматриваем однослойный ТВЭЛ - пластину толщиной  $2R$  или цилиндр радиусом  $R$ ; при переходе к многослойному ТВЭЛ подобные уравнения записываются и для других его слоев. Операторы  $A, B$  и  $C$  зависят от геометрии элемента. Например, для пластины уравнение (5) имеет вид

$$\bar{t} + \frac{d\bar{t}}{d\tau} \cdot \left( \frac{1}{2!} + \frac{1}{B_i} \right) + \frac{d^2\bar{t}}{d\tau^2} \cdot \left( \frac{1}{4!} + \frac{1}{3! \cdot B_i} \right) + \dots + \frac{d^3\bar{t}}{d\tau^3} \cdot \left( \frac{1}{6!} + \frac{1}{5! \cdot B_i} \right) + \dots =$$

$$\begin{aligned}
 &= \theta + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{7!} \cdot \frac{d^3\theta}{d\tau^3} + \dots \\
 &+ \delta t \cdot \left[ \bar{n} \cdot \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \right) + \frac{d\bar{n}}{d\tau} \cdot \left( \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{3! \beta_i} \right) + \right. \\
 &\left. + \frac{d^2\bar{n}}{d\tau^2} \cdot \left( \frac{1}{6!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5! \beta_{i0}} \right) + \dots \right]
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Все приближенные способы решения уравнения (3) состоят в замене бесконечных операторов А, В и С, конечными. Естественно, что пути приближения к точным операторам и последовательности приближенных решений могут быть различными. Прежде чем приступить к рассмотрению различных конкретных способов, отметим, что представление уравнения (3) с граничными условиями (4) в виде (5) не является единственно возможным. Вместо средней температуры  $\bar{t}$  можно использовать любой другой параметр, однозначно определяющий температуру при введенных допущениях. Однако, использование  $\bar{t}$  очень удобно во многих задачах реакторной техники (при исследовании динамики реактора с учетом обратной связи по реактивности, при вычислении нестационарных термических напряжений и пр.).

Наиболее простым является так называемое квазистационарное или параболическое приближение [1], основанное на допущении неизменности функции формы температурного поля в элементе. Оно приводит к уравнению

$$\frac{d\bar{t}}{d\tau} + \psi(\bar{t} - \theta) = \delta t \cdot \bar{n}(\tau) \quad , \tag{7}$$

где для пластины

$$\varphi = \frac{3Bi}{3 + Bi} \quad (8)$$

для цилиндра

$$\varphi = \frac{8Bi}{4 + Bi} \quad (9)$$

В наихудших для этой приближенной методики условиях ( $Bi \rightarrow \infty$ , мгновенное возмущение) ее погрешность не превышает 20%, но при снижении критерия  $Bi$  она быстро уменьшается. При  $Bi = 3 + 4$ , что чаще всего близко к реальным условиям, погрешность становится незначительной [1]. Погрешность решения можно уменьшить, разбив ТВЭЛ на несколько слоев, в каждом из которых температурное поле описывается квазистационарной зависимостью. Отметим, что параболическое приближение согласовано с точным решением по граничному условию на поверхности и по коэффициентам усиления (см. ниже). Поэтому параболическое приближение можно назвать еще I-ым согласованным приближением. В некоторых случаях такая согласованность является необходимой. Параболическое приближение довольно успешно используется как для расчета нестационарного температурного поля ТВЭЛ и других элементов энергетических установок, так и для расчета нестационарных термоупругих напряжений [2].

В работе [3] температурное поле ТВЭЛ также описывается квазистационарной зависимостью, однако параметры соответствующей параболы и, следовательно, дифференциальный оператор I-го порядка в уравнении вида (5) подбирается из сравнения приближенного решения с точным. Начальные условия в таком решении в общем случае не выполняются.

Хорошие результаты в решении рассматриваемой задачи получены Н.В.Цоем с помощью вариационного метода Бубнова - Галеркина [4, 5]. В качестве координатной функции первого приближения, которое найдено в работе, как и в параболическом приближении, используется квадратная парабола. Однако, полученные здесь выражения для темпа охлаждения, естественно, не совпадают с (8) и (9). Темп охлаждения (или нагревания) для пластины

$$D(Bi) = \frac{5 \cdot Bi \cdot (Bi + 3)}{2 \cdot Bi^2 + 10 \cdot Bi + 15} \quad (10)$$

для цилиндра

$$D(Bi) = \frac{6 \cdot Bi \cdot (Bi + 4)}{Bi^2 + 6Bi + 12} \quad (11)$$

Все расчетные формулы для температуры ТВЭЛ сохраняют такую же форму, как и в решении на основе параболического приближения с заменой выражений для темпа охлаждения (7), (8) на (10), (11). Это решение не согласовано с точным по усредненному уравнению теплопроводности. Но оно дает гораздо меньшую погрешность, чем параболическое приближение, в расчете средней температуры в случае возмущения по мощности тепловыделения. В случае возмущения по температуре теплоносителя погрешность этого решения несколько выше погрешности параболического приближения.

Указанный метод использован П.В.Цоем и для расчета нестационарных термоупругих напряжений. Метод дает более точные результаты, чем параболическое приближение в области низких значений критерия  $Pd$ . При высоких значениях  $Pd$ , т.е. при больших скоростях изменения температуры жидкости, омывающей конструктивный элемент, точность этого решения хуже, чем точность параболического приближения. При этом, если параболическое прибли-

жение дает результат вычисления напряжений с некоторым завышением, то решение, полученное вариационным методом, занижает их, что в некоторых случаях вызывает недоверие к результату.

В.Л.Похорилер использовал в работе [6] для приближенного решения задачи о температурном поле и термических напряжениях в плоской стенке при мгновенном скачке температуры омывающей ее жидкости вариационный метод Л.В.Канторовича. При этом процесс изменения температуры разбивается на две фазы: фаза проникновения тепла в толщу стенки и фаза одновременного изменения температуры по всему ее объему. Решение, полученное для указанного частного закона изменения температуры жидкости, имеет несколько меньшую погрешность, чем решение работы [5], что однако не компенсирует неудобств, которые возникают при более широком использовании подобного метода, из-за разбиения процесса на две фазы.

Е.А. Рогожин в работе [7] получил приближенное решение рассматриваемой задачи с помощью теории сопряженных функций. Введя функцию  $t^*$ , удовлетворяющую условию

$$\int (t v^2 t^* - t^* v^2 t) dv = 0, \quad (12)$$

он свел уравнение теплопроводности к виду

$$c\gamma \frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau} = \tilde{q} - q^* \quad (13)$$

где значком  $\tilde{\phantom{x}}$  обозначено осреднение по сопряженной температуре  $t^*$ .

Для определения фиктивного источника  $q^*(\tau)$  было введено дополнительное условие

$$\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \tau} = \frac{\int v^2 \frac{\partial t^*}{\partial \tau} dv}{\int t^* dv} = 0, \quad (14)$$

где  $T = t - t^*$

Поскольку сопряженная функция  $t^*$  включает в себя квадратную параболу в качестве координатной функции, а  $\frac{\partial T}{\partial \tau}$  представляет собой невязку решаемого уравнения, то условие (14) совпадает с основным условием метода Бубнова-Галеркина, которое требует ортогональности невязки и всех координатных функций. В работе [4] в качестве координатной функции первого приближения, полученного этим методом, также использована квадратная парабола, поэтому "среднесопряженное приближение" работы [7] совпадает с решением работы [4].

А.В.Судаков и А.С.Трофимов [8], представили уравнение (3) для пластины с граничными условиями (4) в виде

$$\frac{d\bar{t}}{d\tau} + B_i (t/s - \theta) = \delta t \cdot \bar{n}(\tau) \quad (15)$$

и нашли связь между  $\bar{t}$  и  $t/s$  (температура на поверхности) из решения уравнения (3) с граничными условиями I-го рода.

Аппроксимировав далее полученные трансцендентные передаточные функции от температуры на поверхности и тепловыделения к средней температуре пластины дробно-рациональными функциями, они с учетом (15) получили конечные дифференциальные операторы в уравнении вида (5):

$$\frac{d^2\bar{t}}{d\tau^2} \left( 0,01 + \frac{1}{10B_i} \right) + \frac{d\bar{t}}{d\tau} \left( 0,43 + \frac{1}{B_i} \right) + \bar{t} = \theta + 0,1 \frac{d\theta}{d\tau} + \delta t \cdot \left[ \bar{n} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{B_i} \right) + \frac{d\bar{n}}{d\tau} \left( 0,0111 + \frac{1}{10B_i} \right) \right] \quad (16)$$

Авторы привели решение для пластины и использовали его для определения нестационарных термических напряжений в ней. Предложенный метод можно использовать также для определения нестационарного температурного поля пластины и других тел - цилиндра,

сферы. При этом в общем случае приближенное решение согласовано с точным по меньшему числу параметров, чем позволяет порядок уравнения, неудобства возникают при определении тех координатных функций, которые соответствуют найденным конечным операторам.

Физически более наглядным методом аппроксимации передаточных функций является метод интегральных оценок [9]. Параметры приближенной передаточной функции  $K_n(s)$ , аппроксимирующей точную функцию  $K_T(s)$ , согласно этому методу определяются из условий

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n K_n(s)}{ds^n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n K_T}{ds^n} \quad (17)$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$

Число этих условий соответствует числу неизвестных параметров в приближенной передаточной функции. Выполнение условия (17) обеспечивает равенство

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} [t_{уст} - t_n(\tau)] d\tau^n}_{n} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} [t_{уст} - t_T(\tau)] d\tau^n \quad (18)$$

где  $t_{уст}$  - установившееся значение температуры при единичном возмущении по входному параметру, а  $t_T(\tau)$  и  $t_n(\tau)$  - точное и приближенное ее значение в переходном процессе.

Если аппроксимировать передаточные функции от температуры теплоносителя и относительной мощности тепловыделения к средней температуре элемента одноемкостной функцией, то в случае возмущения по температуре теплоносителя темп охлаждения приближенной передаточной функции совпадает с темпом охлаждения, полученным на основе параболического приближения (см. выражения 8 и 9),

т.е. параболическое приближение обеспечивает здесь выполнение условия (17) по первой производной. В случае возмущения по относительной мощности тепловыделения теми охлаждения в одноемкостной функции получается иным, чем на основе параболического приближения. В частности, для пластины

$$\varphi = \sqrt{\frac{15 Bi^2}{15 + 10 Bi + 2 Bi^2}} \quad (19)$$

Здесь приближенное решение не согласовано с точным по граничным условиям, что затрудняет использование приближенной функции в многослойных задачах.

Этого недостатка лишен предлагаемый ниже метод, позволяющий получить ряд все более точных приближений, которые по аналогии с  $i$ -ым согласованным (квазистационарным) приближением можно называть  $n$ -ными согласованными приближениями.

Распределение температуры в теле (пластина, цилиндр, сфера) представляем в виде

$$t = f_0 + f_1 r^2 + f_2 r^4 + \dots + f_n r^{2n} \quad (20)$$

где  $f_0, f_1, f_2, \dots$  - пока неизвестные функции времени.

В точном решении ряд (20) бесконечный, в приближенных решениях ограничиваемся конечным числом членов ряда. Например, параболическое приближение построено с использованием двух членов этого ряда. Поэтому для исключения функций  $f_0, f_2$  при построении конечных дифференциальных операторов в уравнении вида (5) достаточно преобразованного уравнения теплопроводности

$$\frac{dt}{dr} = k \cdot \text{grad } t/s + \delta t \cdot \bar{n}(r) \quad (21)$$

и граничного условия

$$\text{grad } t|_s = Bi(\theta - t|_s) \quad (22)$$

$k = 1$  для пластины,  $2$  - для цилиндра и  $3$  - для сферы.

При дополнении еще одного члена в ряд (20) с целью уточнения приближения понадобится еще одно уравнение для исключения функции  $f_2$ . В качестве такого можно использовать уравнение теплопроводности, записанное для поверхности тела

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}|_s = \nabla^2 t|_s + \delta t \cdot \bar{n}(\tau) \quad (23)$$

После исключения функций получаем дифференциальные уравнения второго порядка:

для пластины

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{t}}{d\tau^2} + (6Bi + 15) \frac{d\bar{t}}{d\tau} + 15Bi(\bar{t} - \theta) = \\ = (5Bi + 15) \delta t \cdot \bar{n} + \delta t \frac{d\bar{n}}{d\tau} + Bi \frac{d\theta}{d\tau} \end{aligned} \quad (24)$$

для цилиндра

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{t}}{d\tau^2} + (8Bi + 24) \frac{d\bar{t}}{d\tau} + 48Bi(\bar{t} - \theta) = \\ = (6Bi + 24) \delta t \cdot \bar{n} + \delta t \frac{d\bar{n}}{d\tau} + 2Bi \frac{d\theta}{d\tau} \end{aligned} \quad (25)$$

Эти уравнения нетрудно решить с помощью преобразования Лапласа при любых возмущениях по температуре теплоносителя и мощности тепловыделения. Выражения для функций  $f_i$ , позволяющие найти распределение температуры по сечению, сведены в следующую таблицу:

Функция	Для пластины	Для цилиндра
$f_0$	$\frac{15}{8} \bar{t} - \frac{7}{8} \theta + \frac{7 + Bi}{8Bi} x$ $\times \left( \frac{d\bar{t}}{dx} - \delta t \cdot \bar{n} \right)$	$3\bar{t} - \theta + \frac{8 + Bi}{8Bi} x$ $\times \left( \frac{d\bar{t}}{dx} - \delta t \cdot \bar{n} \right)$
$f_1$	$\frac{15}{4} (\theta - \bar{t}) + \frac{15 + 3Bi}{4Bi} x$ $\times \left( \delta t \cdot \bar{n} - \frac{d\bar{t}}{dx} \right)$	$6(\theta - \bar{t}) + \frac{6 + Bi}{2Bi} x$ $\times \left( \delta t \cdot \bar{n} - \frac{d\bar{t}}{dx} \right)$
$f_2$	$\frac{15}{8} (\bar{t} - \theta) + \frac{15 + 5Bi}{8Bi} x$ $\times \left( \frac{d\bar{t}}{dx} - \delta t \cdot \bar{n} \right)$	$3(\bar{t} - \theta) + \frac{12 + 3Bi}{8Bi} x$ $\times \left( \frac{d\bar{t}}{dx} - \delta t \cdot \bar{n} \right)$

Передаточная функция от температуры теплоносителя в фиксированном сечении по высоте к тепловому потоку с поверхности цилиндра (см. (I)), полученная на основании этого приближения,

$$P_1 = -\epsilon \cdot \frac{2Bi \cdot (S^2 + 24s)}{S^2 + 5(8Bi + 24) + 48Bi} \quad (26)$$

Передаточная функция от относительной мощности тепловыделения к тепловому потоку в любом приближении

$$P_2 = -\frac{P_1}{S} \quad (27)$$

Отметим еще, что передаточная функция от температуры теплоносителя в фиксированном сечении по высоте к средней температуре топливного элемента в этом сечении

$$P_4 = \frac{P_2}{\varepsilon} \quad (28)$$

Здесь  $\varepsilon$  - отношение теплоемкости топливного сердечника ТВЭЛ к теплоемкости теплоносителя в принадлежащей к этому ТВЭЛ элементарной ячейки реактора.

Передаточная функция от относительной мощности тепловыделения в некотором сечении цилиндрического элемента к его средней температуре в этом сечении на основании уравнения (25) получается в виде

$$P_3 = \delta t \cdot \frac{s + Bi + 24}{s^2 + s \cdot (8Bi + 24) + 48Bi} \quad (29)$$

Для сравнения приведем передаточные функции, полученные для цилиндра на основании параболического приближения

$$P_1 = - \frac{\varepsilon \cdot s \cdot \varphi}{s + \varphi} = \frac{8\varepsilon \cdot s \cdot Bi}{8Bi + s(4 + Bi)} \quad (30)$$

$$P_2 = \frac{\delta t}{s + \varphi} = \frac{\delta t(4 + Bi)}{s(4 + Bi) + 8Bi} \quad (31)$$

Для оценки точности второго согласованного приближения и сравнения ее с точностью других приближений проведены расчеты, которые показывают, что погрешность предлагаемого метода очень невелика. На рис. 1 и 2 построены результаты расчета амплитудно-и фазочастотных характеристик цилиндрического элемента по каналам "температура теплоносителя - средняя температура элемента"

(функция  $P_4$ ) и "относительная мощность тепловыделения - средняя температура элемента" (функция  $P_3$ ). Характеристики рассчитаны на основании точного решения [10], параболического приближения и 2-го согласованного приближения для  $Bi = 10$ . Как видно из графиков, кривые, полученные на основании 2-го согласованного приближения, практически не отличаются от точных как по амплитуде, так и по фазе.

На рис. 3-5 построены результаты расчета средней температуры цилиндра и температуры на его оси при единичном скачкообразном возмущении по температуре теплоносителя для  $Bi = 3, 10$  и  $100$  соответственно. Расчеты проведены по формулам точного решения [10], параболического приближения, решения работ [4] и [7], произведенного независимо двумя разными методами, и по формулам 2-го согласованного приближения. Погрешность 2-го согласованного приближения гораздо меньше погрешности других приближений. Кривые, полученные последним методом, очень мало отличаются от точных даже при  $Bi = 100$ , при  $Bi = 3$  и  $10$  они практически сливаются с ними. При этом очень высокая точность имеет место не только при расчете средних температур, но и температур на оси цилиндра и, следовательно, распределения температуры по сечению. Аналогичные результаты получаются и при расчете нестационарного температурного поля в случае возмущения по мощности тепловыделения для тех же значений критерия  $Bi$  (рис. 6, 7).

II. Приближенное решение уравнения энергии  
для теплоносителя

Задача состоит теперь в том, чтобы построить приближенное решение уравнения энергии для теплоносителя (I) в виде дробно-рациональной функции, что позволит чрезвычайно упростить конечные выражения по сравнению с оригиналом трансцендентной передаточной функции (2).

Наиболее простое решение можно получить, проинтегрировав уравнение (I) по  $z$  от 0 до  $Z$  и найдя связь между  $\bar{\theta} = \frac{1}{Z} \int_0^Z \theta(z) dz$  и  $\theta(z)$  из тейлоровского разложения функции  $\theta(z)$  в окрестности точки  $z=0$  с использованием 2-х его членов, т.е. на основе линейного приближения [I]. Оно дает для температуры на выходе из канала в области изображения по Лапласу следующее выражение

$$U(1, s) = \frac{\Phi \cdot N}{1 + \frac{1}{2} X} \quad (32)$$

$$\text{где } \Phi = \delta t \cdot P_2(s) \cdot \int_0^1 \bar{q}_z dz \quad (33)$$

$$X = [s - P_1(s)] \cdot Z_* \quad (34)$$

В работе [II] связь между  $\bar{\theta}$  и  $\theta(z)$  находится не на основе линейного приближения, а на основе стационарной функции распределения температуры вдоль оси, которая при неравномерном распределении тепловыделения вдоль оси элемента не является линейной, что позволяет уточнить расчет при больших коэффициентах неравномерности. Очевидно, что при симметричном распределении тепловыделения относительно центральной плоскости реактора выражение для выходной температуры теплоносителя получается здесь

таким же, как и на основе линейного приближения.

В работе [1] показано, что линейное и в общем случае квазистационарное приближение без большой погрешности могут использоваться при выполнении условия

$$z_* \ll \frac{2}{\epsilon \gamma} \quad (35)$$

Поэтому для тех случаев, где это условие не выполняется, там же предлагается разбить ТВЭЛ на несколько участков по высоте, для каждого из которых оно оказывается справедливым. При этом изображение температуры теплоносителя на выходе из канала так же получается очень простым [1]. В частности, при разбиении канала на 2 равных участка по высоте и в случае возмущения по мощности

$$u(z, s) = \frac{4\varphi \cdot N}{(2 + X)^2} \quad (36)$$

Оригиналы подобных изображений очень просты при использовании любых выражений для функций  $P_1$  и  $P_2$ . погрешность расчетных формул может быть доведена до необходимого уровня разбиением ТВЭЛ на достаточное число участков по высоте.

Однако, при одинаковой степени сложности еще меньшую погрешность можно получить в решении задачи вариационными методами. Ниже предлагаются некоторые решения, полученные с помощью метода Бубнова-Галеркина.

С помощью этого метода решим уравнение энергии для теплоносителя в области изображений по Лапласу:

$$\mathcal{F}u = \varphi \cdot N \quad (37)$$

где оператор

$$\mathcal{F}u = \frac{du}{dz} + X \cdot u$$

1. В качестве первого приближения выберем координатную функцию

$$\psi_1(z) = z,$$

удовлетворяющую граничному условию  $u(z=0) = 0$

(рассматриваем возмущение по мощности тепловыделения).

Тогда коэффициент  $\mathcal{D}_1$  при координатной функции определится из уравнения [12]

$$\mathcal{D}_1 \cdot (\mathcal{F}\psi_1, \psi_1) = \mathcal{N} \cdot (\varphi, \psi_1), \quad (38)$$

где скалярные произведения

$$(\mathcal{F}\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \mathcal{F}\psi_1 \cdot \psi_1 dz \quad (39)$$

$$(\varphi, \psi_1) = \int_0^1 \varphi \cdot \psi_1 dz$$

В результате получаем

$$u(1, s) = \frac{\varphi \cdot \mathcal{N}}{1 + \frac{2}{3} X} \quad (40)$$

Сравнивая это выражение с формулой (33), полученной на основе линейного приближения, видим, что они отличаются только коэффициентом при  $X$ , а так как при  $s \rightarrow 0$   $X \rightarrow 0$ , то это означает, что коэффициенты усиления этих двух функций равны.

2. Выберем теперь следующую систему координатных функций

$$\psi_1 = z, \quad \psi_2 = \sin(2\pi z), \quad \psi_3 = 1 - \cos(2\pi z), \dots$$

$$\dots \psi_{2k} = \sin(2k\pi z), \quad \psi_{2k+1} = 1 - \cos(2k\pi z) \quad (41)$$

и найдем второе приближение

$$u = \mathcal{D}_1 \cdot z + \mathcal{D}_2 \cdot \sin(2\pi z) \quad (42)$$

Из условия ортогональности невязки и координатных функций получаем систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \cdot \int_0^1 \mathcal{F} \Psi_1 \cdot \Psi_1 dz + \mathcal{D}_2 \cdot \int_0^1 \mathcal{F} \Psi_2 \cdot \Psi_1 dz &= \mathcal{N} \cdot \Phi \cdot \int_0^1 \Psi_1 dz \\ \mathcal{D}_1 \cdot \int_0^1 \mathcal{F} \Psi_1 \cdot \Psi_2 dz + \mathcal{D}_2 \cdot \int_0^1 \mathcal{F} \Psi_2 \cdot \Psi_2 dz &= \mathcal{N} \cdot \Phi \cdot \int_0^1 \Psi_2 dz \end{aligned} \quad (43)$$

В результате решения этой системы уравнений и подстановки результата в (42) получаем для выходного сечения канала

$$u(1,5) = \frac{\Phi \cdot \mathcal{N}}{1 + \chi \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{\mathcal{F}^2} \right)} \quad (44)$$

Это выражение имеет такую же форму, как и предыдущие - (33), (40), отличаясь от них лишь коэффициентом при  $\chi$ . Поэтому оригинал этого изображения настолько же прост.

3. Следующие приближения, построенные по системе координатных функций (42), теряют простоту из-за повышения степени характеристического уравнения. Поэтому еще более точное приближение попытаемся найти с помощью координатных функций

$$\Psi_1 = z, \quad \Psi_2 = z^n \quad (45)$$

После подстановки этих координатных функций в систему уравнений (43) и ее решения получаем:

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \mathcal{N}, \quad \mathcal{D}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \cdot \mathcal{N}, \quad (46)$$

где

$$\Delta = \frac{(n-1)^2}{3(2n+1)(n+2)} \cdot \left[ \chi^2 + \chi(n+2) + \frac{3(2n+1)(n+2)^2}{4(n+1)^2} \right] \quad (47)$$

$$\Delta_1 = \Phi \cdot \left[ \frac{(n-1)^2}{4(n+1)^2} + \chi \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2(n+1)(n+2)(2n+1)} \right] \quad (48)$$

$$\Delta_2 = \Phi \cdot X \cdot \frac{1-n}{6 \cdot (n+1)(n+2)} \quad (49)$$

Параметр "n" необходимо выбирать таким, чтобы корни уравнения

$$\Delta(X) = 0$$

были действительными. Это имеет место в том случае, если

$$\frac{3(2n+1)}{(n+1)^2} \leq 1 \quad (50)$$

Из этого следует, что в целых числах

$$n \geq 5$$

Мы же выберем n из условия

$$3(2n+1) = (n+1)^2$$

откуда

$$n = 2 + \sqrt{6} \approx 4,449$$

При этом

$$\Delta = \frac{(n-1)^2}{3(2n+1)(n+2)} \cdot \left(X + \frac{n}{2} + 1\right)^2 \quad (51)$$

Очевидно что такой выбор n очень упрощает конечные выражения. Выражение для температуры теплоносителя на выходе из канала при этом приобретает вид

$$\mu(1,5) = \frac{\frac{(n+2)^2}{4} + X \frac{n+2}{2(n+1)}}{\left(X + \frac{n}{2} + 1\right)^2} \quad (52)$$

Как видим, это решение имеет такую же форму, как и решение, полученное на основе линейного приближения с разбиением элемента на 2 участка (36), и отличается от него коэффициентами. Как будет показано ниже, решение на основе вариационных методов обладает гораздо меньшей погрешностью, чем линейное приближение при

одинаковой трудоемкости вычислений. Оригинал изображения (52) находится просто при использовании дробных выражений для функций  $P_1$  и  $P_2$ . Приведем здесь расчетные формулы, которые получаются на основе функций параболического приближения (31) и (28) (такой же вид имеют и функции, полученные в первом приближении вариационным методом [4] - они отличаются от функций параболического приближения только коэффициентами).

При единичном возмущении по мощности тепловыделения  $\bar{M} = 1$

$$\frac{\theta}{\Delta \theta} = 1 + \sum_{i=1}^2 (K_i + M_i \cdot \tau) \exp(s_i \cdot \tau) \quad (53)$$

$$\Delta \theta = \delta \tau \cdot \varepsilon \cdot \tau_* \quad (54)$$

$s_1, s_2$  - корни характеристического уравнения

$$s^2 + s \cdot \left[ (1 + \varepsilon) \cdot \varphi + \frac{n+2}{2\tau_*} \right] + \frac{(n+2) \cdot \varphi}{2\tau_*} \quad (55)$$

$$K_i = \left\{ \frac{(n+2)^2}{4\tau_*^2} \cdot \varphi \cdot [s_i \cdot \Delta s_i - (s_i + \varphi) \cdot (2s_i + \Delta s_i)] + \right.$$

$$+ \frac{(n+2) \cdot \varphi \cdot s_i}{2\tau_* \cdot (n+1)} \cdot [(2s_i + \varphi + \varepsilon \cdot \varphi) \cdot \Delta s_i - (s_i + \varphi + \varepsilon \cdot \varphi) \times$$

$$\left. \times (2s_i + \Delta s_i)] \right\} \frac{1}{\Delta s_i^3 - s_i^2} \quad (56)$$

$$M_i = \left[ \frac{(n+2)^2 \cdot \varphi}{4\tau_*} \cdot (s_i + \varphi) + \frac{(n+2) \cdot \varphi}{2(n+1) \cdot \tau_*} \times \right.$$

$$\left. \times (s_i^2 + s_i \cdot \varphi + s_i \cdot \varepsilon \cdot \varphi) \right] \cdot \frac{1}{s_i \cdot \Delta s_i^2} \quad (57)$$

$$\Delta S_{\Sigma} = (S_2 - S_1) \cdot (-1)^{\Sigma} \quad (58)$$

Выше во всех выражениях употреблялись безразмерные величины - безразмерный темп охлаждения  $\Psi$ , безразмерное время прохода активной зоны теплоносителем  $\tau_*$ , безразмерное время  $\tau$ . При расчете процессор в размерных величинах формулы практически не изменяются. Достаточно заменить величину  $1/\Psi$  постоянной времени тепловых элементов выраженной в секундах [I], безразмерное время прохода канала теплоносителем  $\tau_*$  на размерное  $\tau'_*$  и величину  $\delta t$  на  $\delta t \cdot \frac{a_0}{R^2}$

Для сравнительной оценки точности описанных методов произведены расчеты, результаты которых представлены на рис. 8 и 9.

На рис. 8 представлены результаты расчета температуры теплоносителя на выходе из канала реактора после мгновенного падения мощности тепловыделения до нуля. Постоянная ТВЭЛ равна 1,5 сек,

$\varepsilon = 4,4$ , скорость натрия в канале 8 м/сек, высота активной части ТВЭЛ - 1 м, начальный подогрев натрия в канале 300°C. Кривая 1 получена точным расчетом (численно), кривая 2 - на основе линейного приближения (формула 33), кривая 3 - на основе вариационного решения с линейной координатной функцией (формула 40), кривая 4 - на основе вариационного решения с линейной и гармонической координатными функциями (формула 44), кружками помечена кривая, полученная на основе второго приближения вариационного решения с линейной и степенной координатными функциями (формула 52). В связи с тем, что при заданных параметрах выполняется условие (35) точность всех решений высока (погрешность не больше 2-3% от максимального отклонения). Точки, полученные на основе второго приближения вариационного решения с линейной и степенной

координатными функциями, лежат практически на кривой точного расчета. Таким образом, для таких условий даже линейное приближение является вполне приемлемым. Более точные методики необходимы для расчета переходных процессов в реакторе при пониженном расходе теплоносителя, когда точность линейного приближения ухудшается.

На рис. 9 представлены результаты расчета температуры теплоносителя на выходе из канала активной зоны реактора в режиме, описанном в предыдущем примере. Все исходные данные предыдущего примера сохраняются за исключением скорости натрия, и начального тепловыделения, которые здесь уменьшены в 10 раз. Нумерация кривых прежняя. В связи с тем, что условия (35) теперь уже не соблюдаются погрешность линейного приближения возрастает до 7-8% от максимального отклонения, погрешность первого вариационного приближения, примерно, в 2 раза меньше. Результаты, полученные на основе второго вариационного приближения с линейной и степенной координатными функциями, и для этого режима практически не отличаются от точных.

Таким образом, этот метод может применяться для расчета переходных процессов в широком диапазоне расхода теплоносителя. Решения, полученные вариационными методами, удобны тем, что могут использоваться в расчетах на ЭВМ по программам, написанным на основе линейного приближения с разбиением ТВЭЛ на отдельные участки, путем введения поправочных коэффициентов в исходные данные.

Рассмотрим теперь некоторые приближенные решения уравнения энергии, которые могут быть построены методом интегральных оценок. При использовании одноэмкостных передаточных функций ТВЭЛ, полученных на основе параболического приближения, вариационными

или иными методами, решение задачи о температурном поле элемента при возмущениях по температуре теплоносителя на входе в канал и по мощности тепловыделения выражается через специальную функцию  $V_1(\zeta, \xi)$  (см. [1, 13]). Через эту же функцию выражается решение задачи о температурном поле трубопровода при возмущении по температуре теплоносителя на входе в него (см. [1, 13]).

$$V_1(\zeta, \xi) = \exp(-\xi - \zeta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{\xi}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot J_n(2\sqrt{\xi\zeta}) \quad (59)$$

При единичном возмущении по температуре теплоносителя на входе в канал его температура на выходе, отсчитанная от начальной, равна  $V_1(\xi, \zeta)$

Известно, что передаточная функция от входной температуры теплоносителя к выходной [1]

$$\frac{u}{u_0} = \exp\left(\frac{\xi}{1+s} - \xi\right) \quad (60)$$

При построении этой передаточной функции использовано преобразование Лапласа по переменной

$$\zeta = \varphi(\tau - \tau_* \cdot z) \quad (61)$$

$\varphi$  - темп охлаждения в использованной передаточной функции ТВЭЛ или стенки трубопровода

$$\xi = z \cdot \varepsilon \cdot \tau_* \cdot \varphi \quad (62)$$

Будем искать приближенную передаточную функцию в виде

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)_{пр} = \exp(-\xi) \cdot \frac{m \cdot s + \exp(\xi)}{m \cdot s + 1} \quad (63)$$

Как видно из сравнения ее с точной функцией (60), она удовлетворяет условиям

$$\text{при } s \rightarrow (\zeta \rightarrow \infty) \text{ и } s \rightarrow \infty (\zeta \rightarrow 0)$$

Параметр  $m$  найдём из условия

$$\frac{d(\frac{u}{u_0})}{ds} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{d(\frac{u}{u_0})_{np}}{ds} \Big|_{s \rightarrow 0} \quad (64)$$

Отсюда

$$m = \frac{\xi}{1 - \exp(-\xi)} \quad (65)$$

После подстановки этого выражения в (63) и нахождения оригинала при единичном возмущении по входной температуре ( $u_0 = \frac{1}{s}$ ) определяем приближенное выражение для функции

$$V_1(z, \xi) = 1 + [\exp(-\xi) - 1] \cdot \exp\left[\frac{\exp(-\xi) - 1}{\xi} \cdot z\right] \quad (66)$$

На рис. 10 представлены результаты расчетного сравнения приближенной функции (66) с точной функцией  $V_1(z, \xi)$ .

Расчеты показывают, что эта функция хорошо описывает точную при малых значениях  $\xi$  ( $\xi < 1 \div 2$ ).

Такой диапазон достаточен для расчета переходных процессов в ТВЭЛ при малых значениях  $\xi$  и, тем более, для расчета переходных процессов в трубопроводах.

#### ОБ ОЗНАЧЕНИЯ :

$t(z, z, Z)$  - температура ТВЭЛ,

$Z = \frac{z'}{H}$  - безразмерная осевая координата, отсчитанная от входа в канал ( $z'$  - размерная координата),

$H$  - высота активной части ТВЭЛ,

$\tau = \frac{z' \cdot a_0}{R^2}$  - безразмерное время (критерий Фурье),

$\frac{R^2}{z'}$  - размерное время,

$z = \frac{z'}{R}$  - безразмерная радиальная координата  
( $z'$  - размерная координата),

- $R$  - радиус цилиндрического или половина толщины плоского ТВЭЛ,  
 $\theta$  - температура теплоносителя,  
 $q$  - удельное тепловыделение.

Значком "0" намечены теплофизические константы, относящиеся к сердечнику ТВЭЛ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.Е. Багдасаров и др. Технические проблемы реакторов на быстрых нейтронах. Атомиздат, 1969.
2. Ю.Е.Багдасаров, И.А.Кузнецов. ИФЖ, 12, № 3, 383, 1967.
3. А.С.Трофимов. ИФЖ, 5, № 4, 93, 1962.
4. П.В.Цой. Теплофизика высоких температур, 5, № 6, 1048, 1967.
5. П.В.Цой. ИФЖ, 16, № 1, 117, 1969.
6. В.Л.Похорилер . "Теплоэнергетика", № 4, 1969.
7. Ю.А. Рогожин. ИФЖ, № 8, 1970.
8. А.В.Судаков, А.С.Трофимов. ИФЖ, 17, 2, 1969.
9. А.А.Шевяков, Р.В.Яковлева. Инженерные методы расчета динамики теплообменных аппаратов. Изд. "Машиностроение", Москва, 1968.
10. Лыков А.В. "Теория теплопроводности, ГИТТЛ, М., 1952.
11. А.Я.Крамеров, Я.В. Шевелев. Инженерные расчеты ядерных реакторов. Атомиздат, М., 1964.
12. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, М., 1957.
13. Е.П.Серов, Б.П. Корольков. Динамика процессов в тепло- и массообменных аппаратах "Энергия", М., 1967.

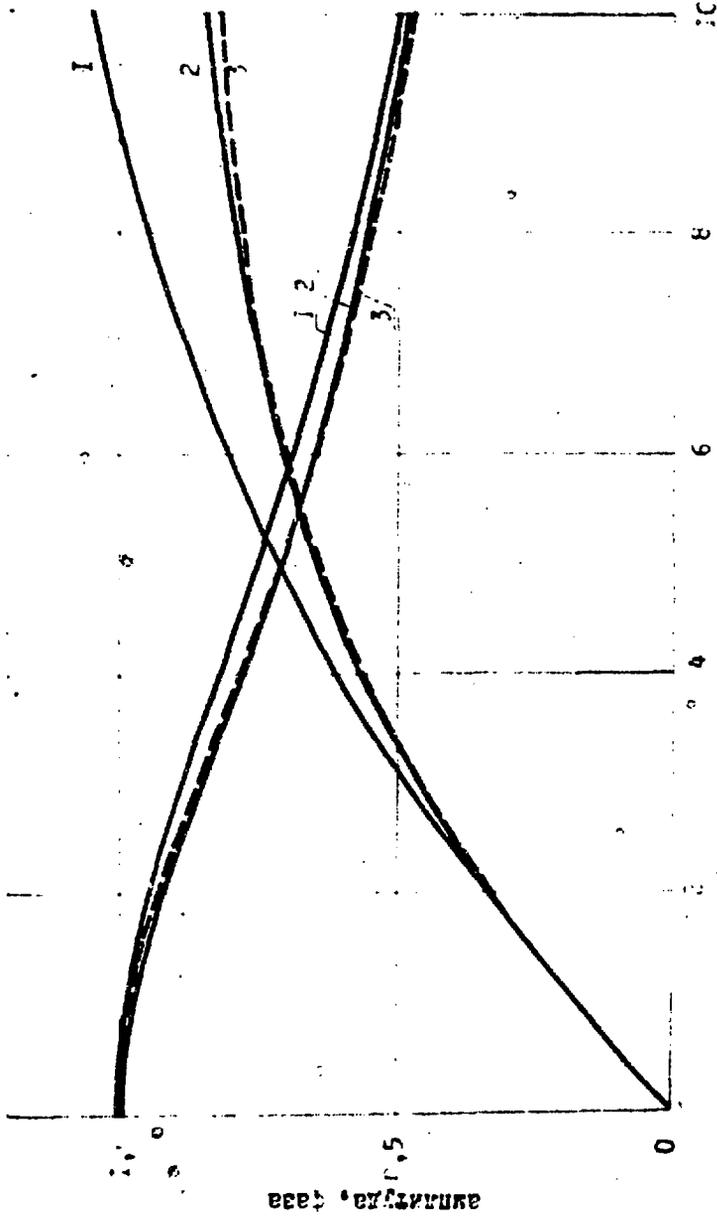


Рис. 1. Амплитудно- и фазочастотные характеристики цилиндра при возмущении по температуре теплоносителя. По оси ординат-амплитуда и фаза, по оси абсцисс-безразмерная частота.  $B_1 = 10$ .

1 - расчет на основе параболического приближения, 2 - расчет по точным формулам, 3 - расчет на основе второго согласованного приближения (----).

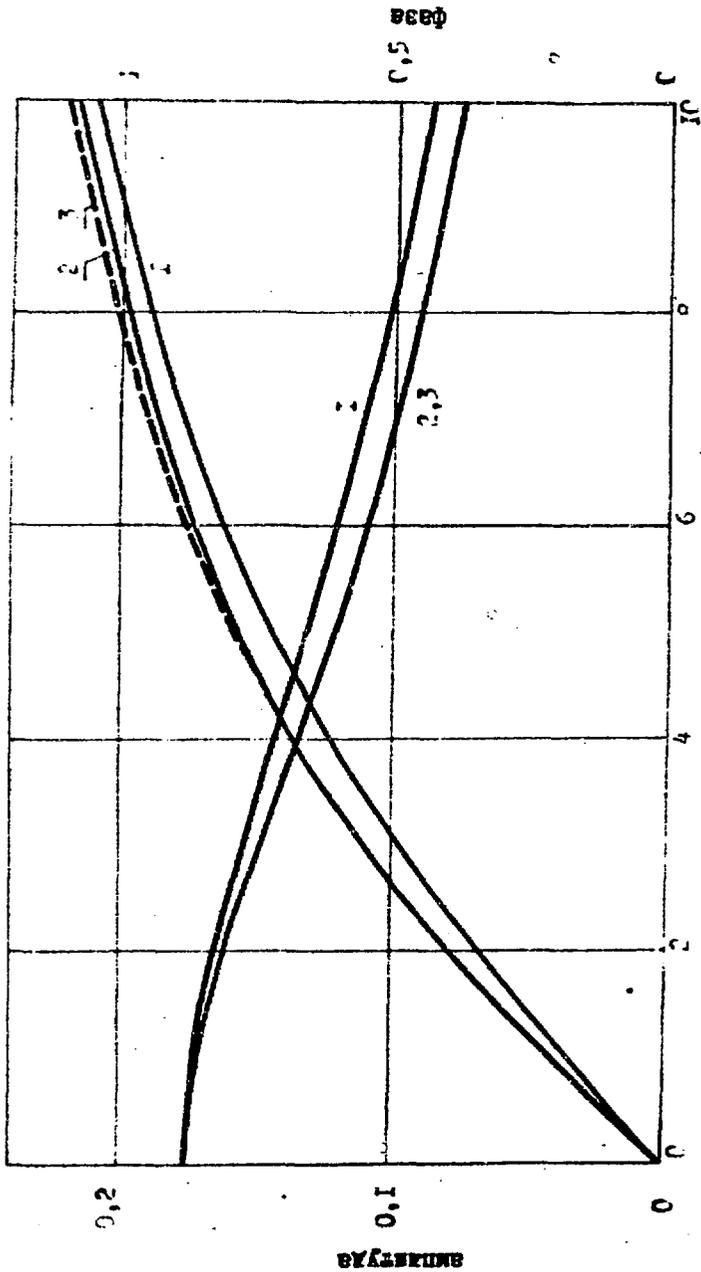
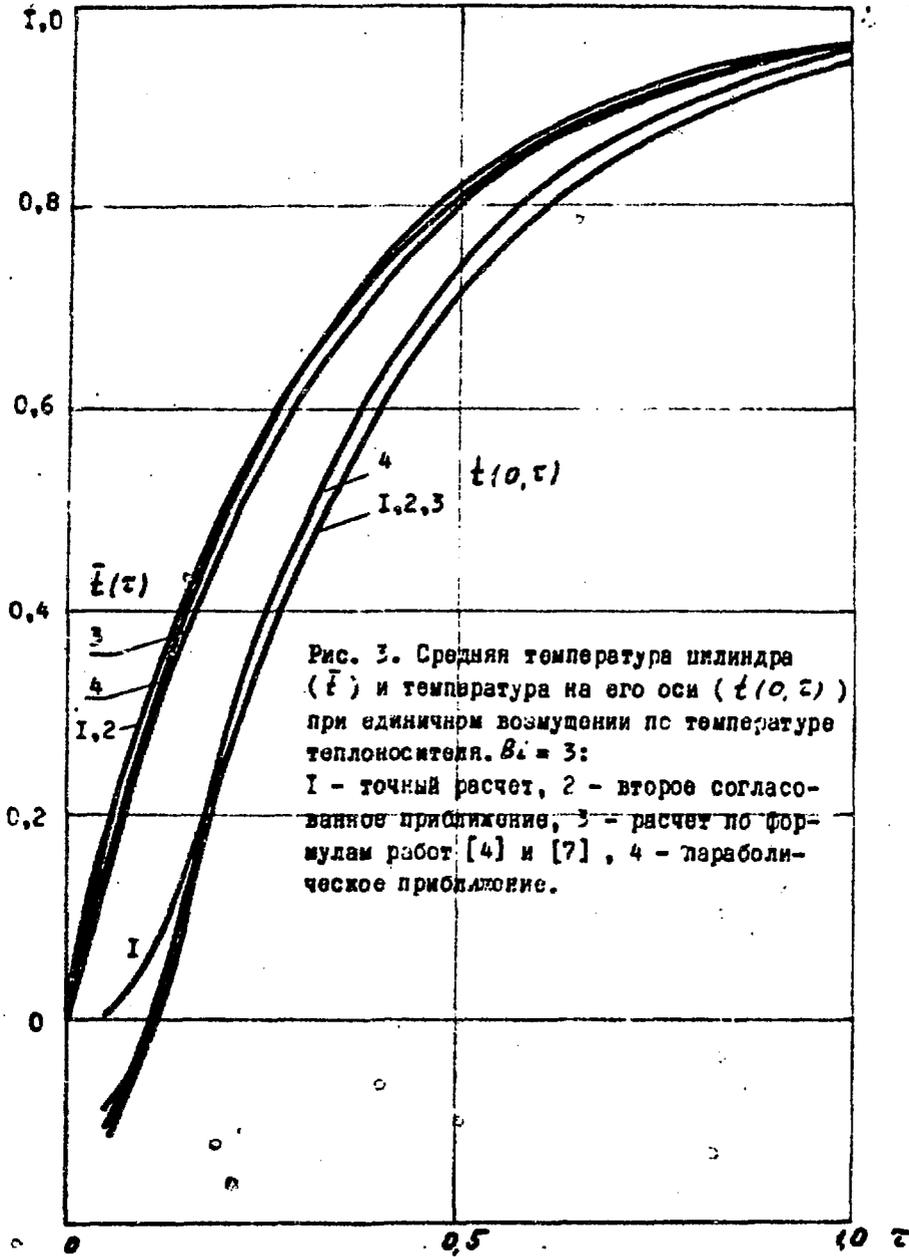
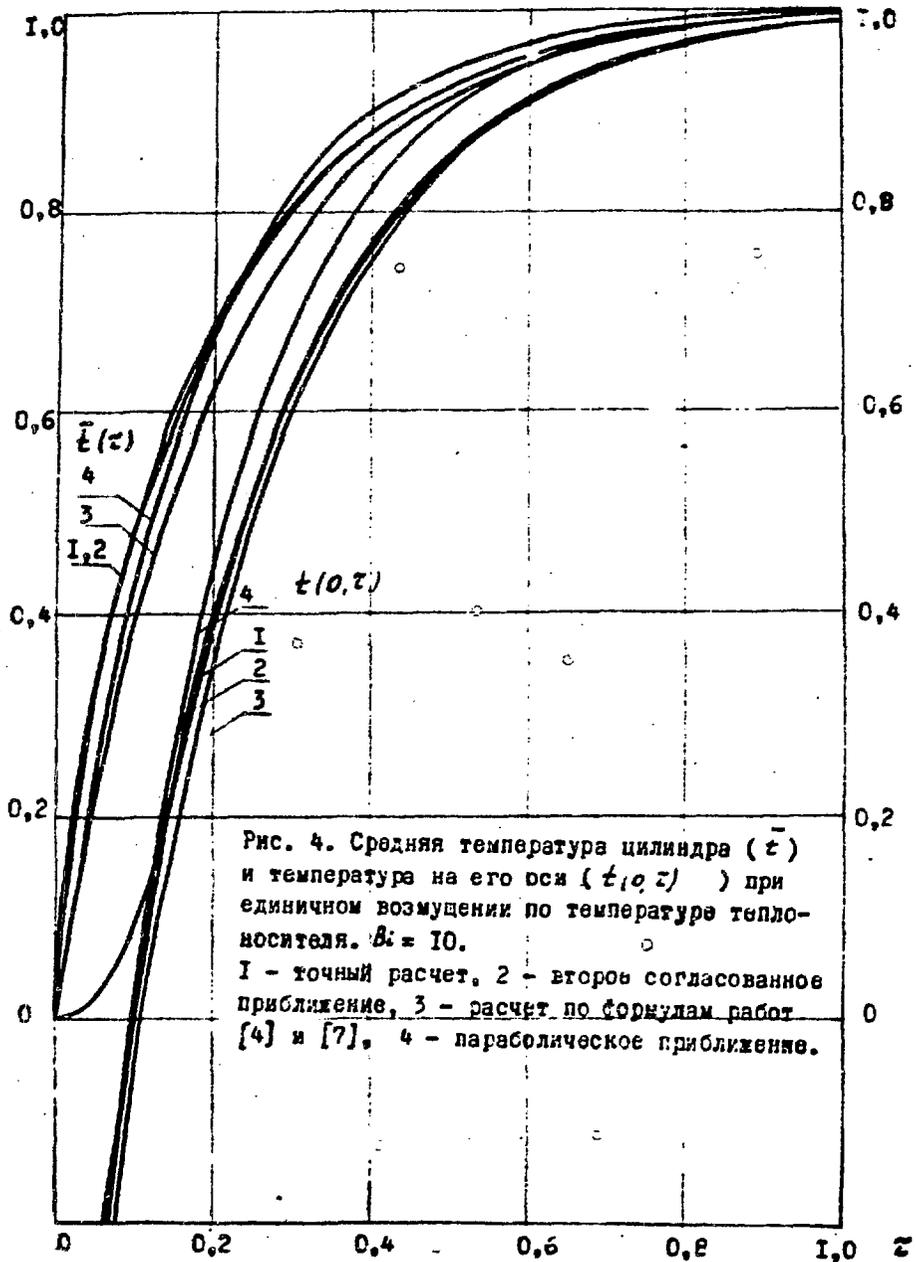


Рис. 2. Амплитудно- и фазочастотные характеристики цилиндра при возмущении по мощности тепловыделения ( $\bar{q}$ ). По оси ординат - амплитуда, отнесенная к величине температурного перепада  $\Delta T$ , и фаза, по оси абсцисс - безразмерная частота.  $\beta_1 = 10$ .

1 - расчет на основе параболического приближения, 2 - расчет по точным формулам.  
3 - расчет на основе второго согласованного приближения (-----).





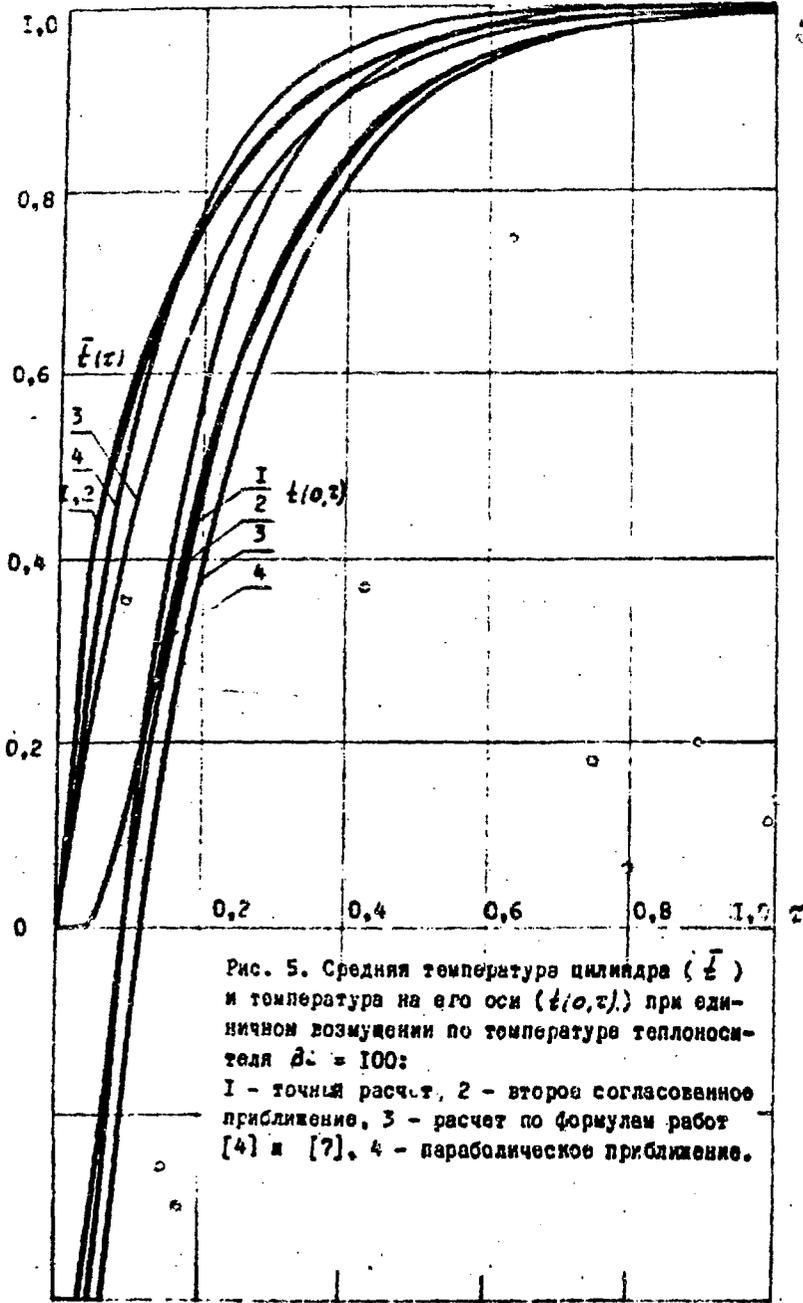


Рис. 5. Средняя температура цилиндра ( $\bar{t}$ ) и температура на его оси ( $t(0, z)$ ) при единичном возмущении по температуре теплоносителя  $\beta_0 = 100$ :  
1 - точный расчет, 2 - второе согласованное приближение, 3 - расчет по формулам работ [4] и [7], 4 - параболическое приближение.

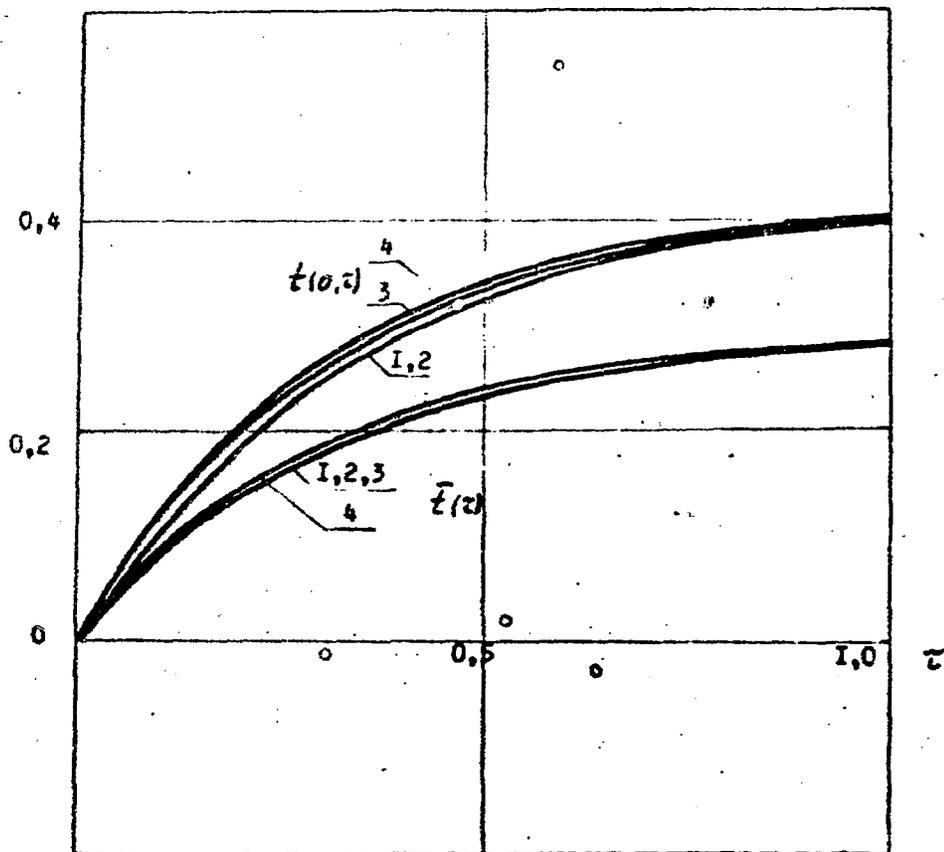


Рис. 6. Средняя температура цилиндра ( $\bar{t}$ ) и температура на его оси ( $t(0, z)$ ) при единичном возмущении по мощности тепловыделения ( $\delta t = \bar{\alpha} = 1$ ),  $Bi = 3$ :

1 - точный расчет, 2 - второе согласованное приближение, 3 - расчет по формулам работ [4] и [7], 4 - параболическое приближение.

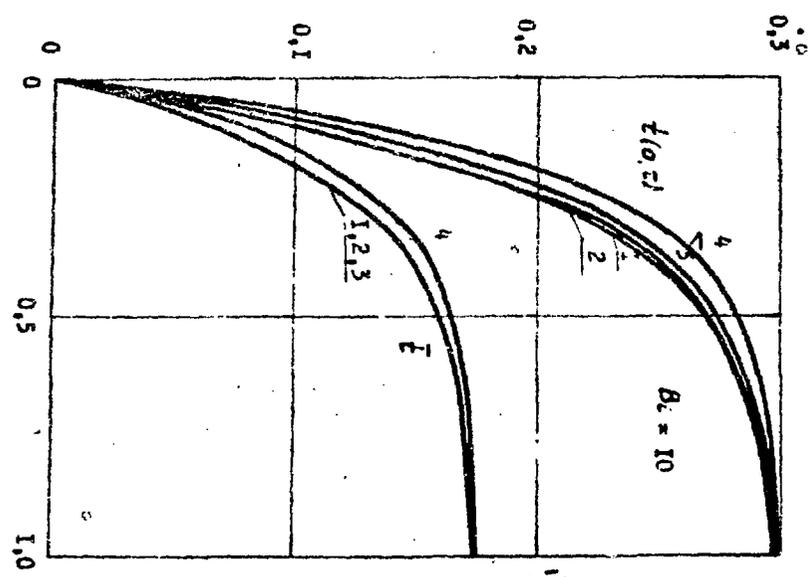
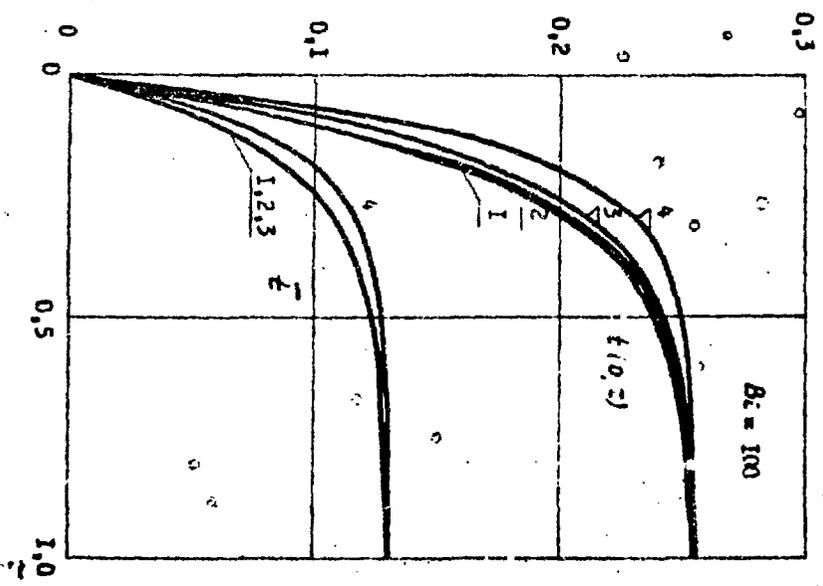
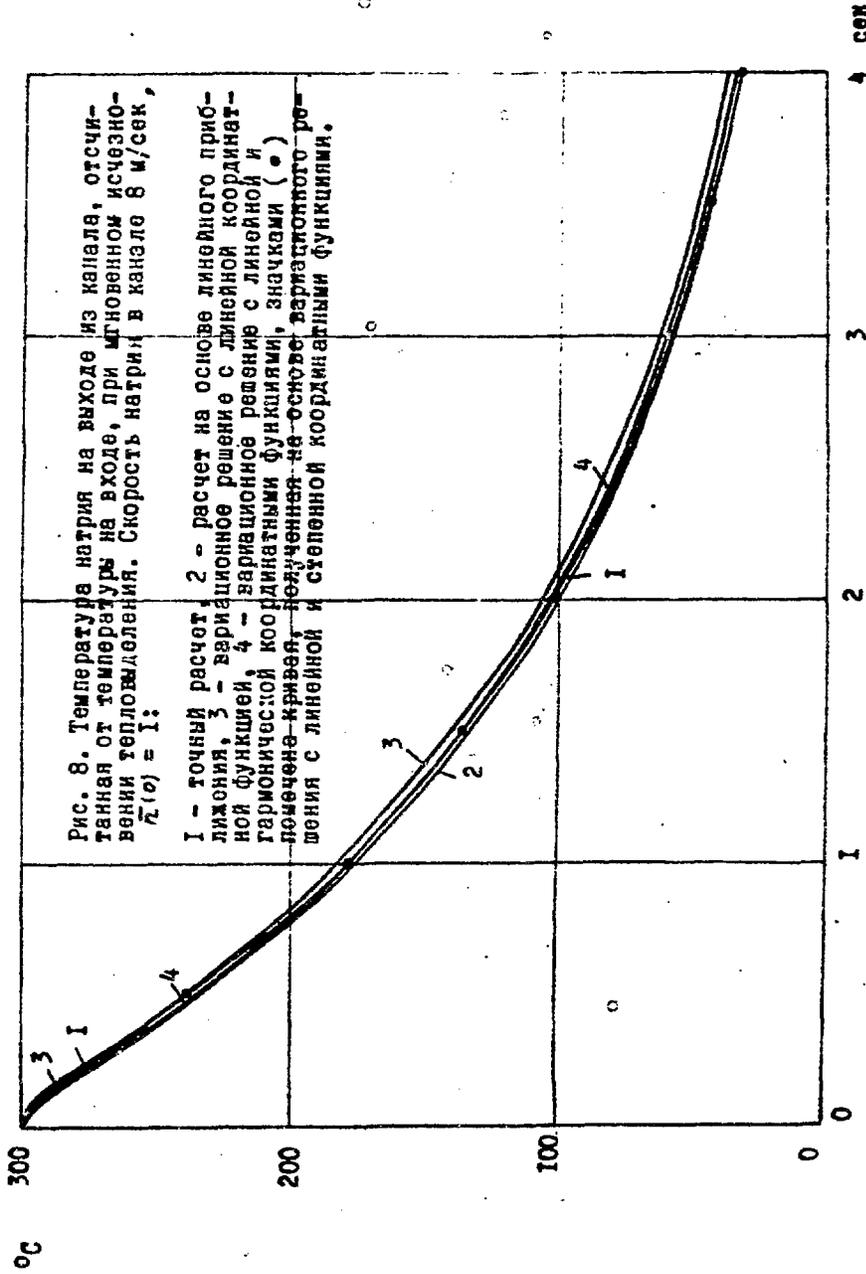
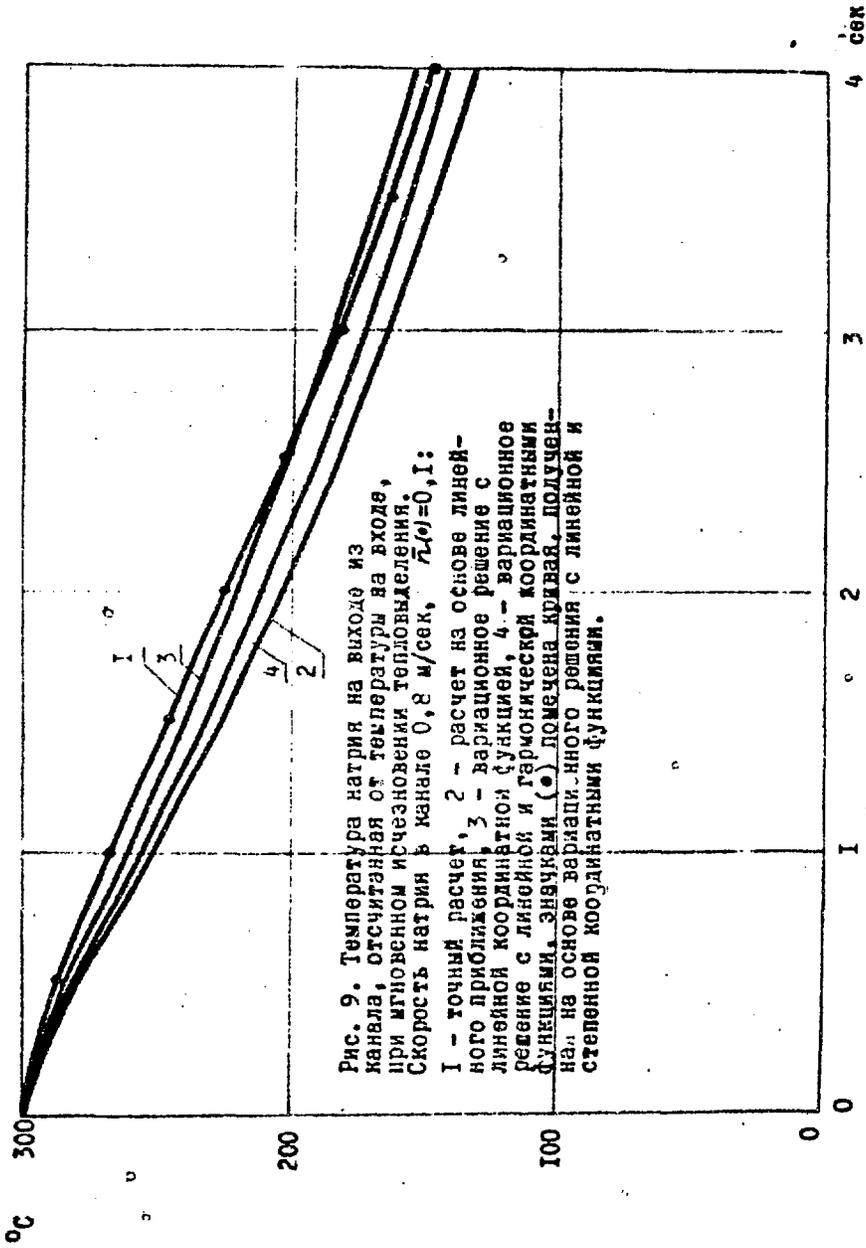


Рис. 7. Средняя температура цилиндра ( $\bar{t}$ ) и температура на его оси ( $t(0,r)$ ) при единичном возмущении по мощности тепловыделения ( $Sc \cdot Pr = 1$ ),  $Bi = 10$  и  $100$ :  
 1 - точный расчет, 2 - второе согласованное приближение, 3 - расчет по формулам работ [4] и [7], 4 - параболическое приближение.







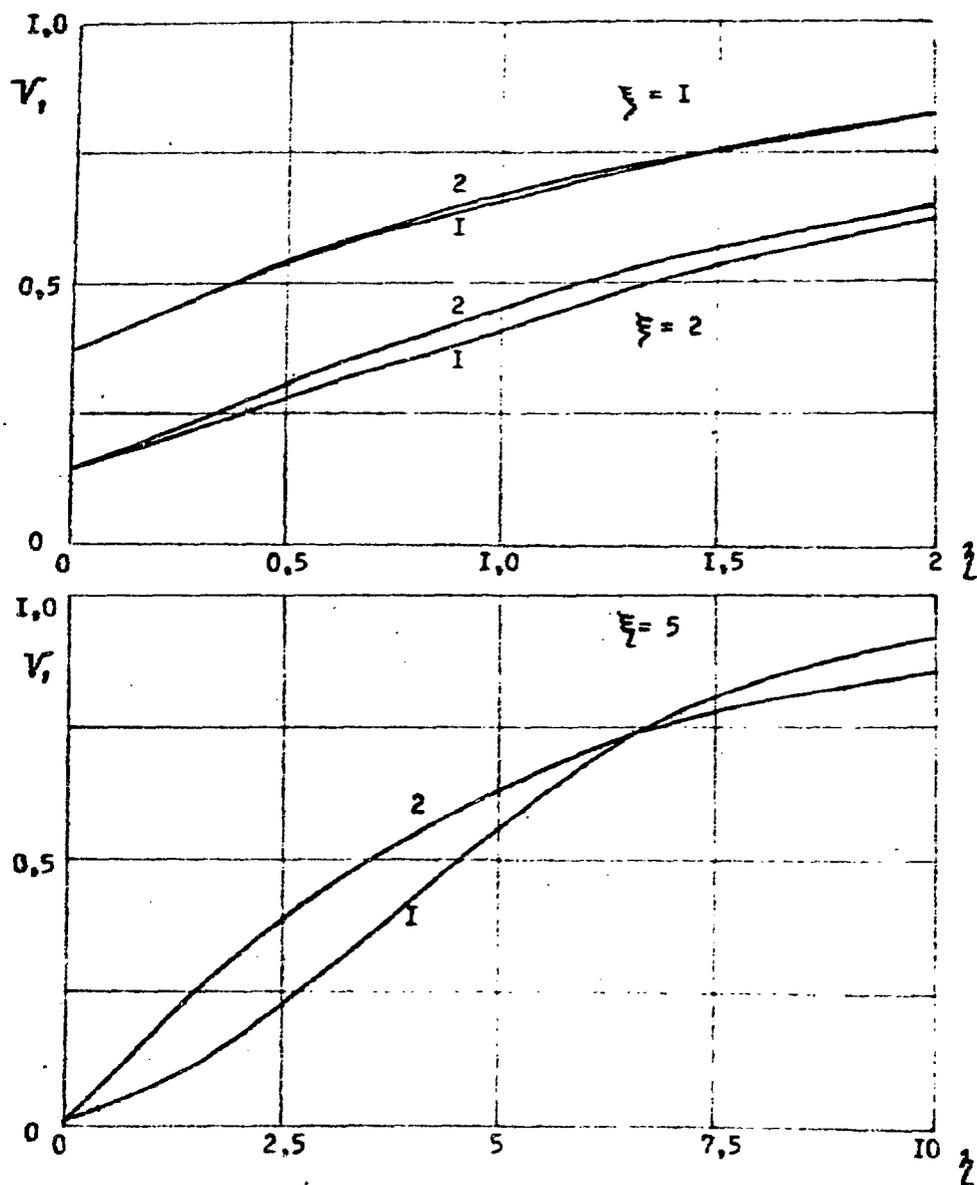


Рис. 10. Функция  $V_r(z, \xi)$ : 1 - точный расчет, 2 - приближенный.