IN(S

LYCEN/7202
Janvier 1972

Notice 725

La méthode de la fonction génératrice et les développements en quasi-bosons

M. Hage-Hassan* et M. Lambert

Institut de Physique Nucléaire - Université Claude Bernard de Lyon
43, Bd du 11 Novembre 1918 - 69, Villeurbanne (France)
Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules

---

Résumé. On établit un isomorphisme entre le sous-espace $\mathcal{H}'$ des états physiques liés et un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ normé. Cet *isomorphisme est réalisé avec une fonction génératrice des* états de $\mathcal{H}'$. En choisissant pour espace $\mathcal{F}$ un espace de Bargmann, on établit un isomorphisme entre un espace $\mathcal{H}_F$ des états fermions et un espace $\mathcal{H}_B$ des états bosons. On obtient alors un développement en termes d'opérateurs de quasi-bosons de tout opérateur de $\mathcal{H}_F$, notamment de l'hamiltonien pour lequel le développement obtenu est semblable à ceux de Beliaev- Zelevinski et de Marumori en étant toutefois plus simple et plus convergent.

Abstract. An isomorphism beetween the $\mathcal{H}'$ subspace of the physical bound states and a normalized $\mathcal{F}$ functionnal space is established. This is done by introducing a genereting function of this $\mathcal{H}'$ states. By choosing for the $\mathcal{F}$ space, the Bargmann's space an isomorphism is obtained beetween an $\mathcal{H}_F$ space of the fermions states an $\mathcal{H}_B$ space of the boson states. An expansion of any quasi-bosons operator of $\mathcal{H}_B$ is thus feasible. This is particularly interesting for the hamiltonian operator. In this case the expansion obtained, similar to the Beliaev-Zelevinski and Marumori expansions, appear to be simple and more convergent.

* Boursier C.N.R.S. Libanais

1. Introduction

Les techniques de développement des opérateurs de systèmes de fermions en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons[1, 2] se sont révélées particulièrement efficaces pour étudier les hamiltoniens collectifs et les opérateurs de transition des noyaux pair-pair[3]. Deux méthodes de développement ont été employées : celle de Beliaev et Zelevinsky[1] et celle de Marumori et al.[2] dont les relations ont été étudiées par Marshalek[4]. Malheureusement ces développements convergent lentement quand ils convergent, et ne respectent plus le principe de Pauli quand ils sont tronqués. Nous nous proposons de montrer comment la méthode de la *fonction génératrice* permet de construire des développements en quasi-bosons qui respectent rigoureusement le principe de Pauli et sont par ailleurs plus rapidement convergents.

La méthode des coordonnées génératrices s'est révélée être tout particulièrement bien adaptée à l'étude des mouvements collectifs des systèmes de fermions en interaction[5; 7]. A partir de l'approximation la plus simple, qui consiste à décrire ce système par une fonction d'onde $|\Phi(\alpha, x)>$ de particules indépendantes placées dans un potentiel moyen $V(\alpha)$, dépendant de paramètres α, on construit une meilleure fonction d'onde d'essai plus générale, en superposant linéairement les états correspondants aux déformations possibles du potentiel :

$$|\Psi(x)> = \int f(\alpha) \,|\Phi(\alpha, x)> d\alpha$$

La meilleure solution $|\Psi>$ est celle définie par la fonction de poids $f(\alpha)$ qui minimise la fonctionnelle $<\Psi| H |\Psi>$ On a déjà montré antérieurement[7, 9] comment cette méthode des coordonnées génératrices permet de retrouver l'approximation "quasi-bosons" ou la R. P. A., sans toutefois améliorer ces précédentes méthodes d'approximation.

Nous nous proposons de montrer qu'il est très intéressant de choisir pour fonction de poids $f(\alpha)$, des fonctions analytiques $f(Z)$ appartenant à un des sous-espaces fonctionnels $\mathfrak{F}'$ de l'espace de Bargmann[10]. On peut alors définir une fonction $|\Phi(Z, x)>$ génératrice de tous les états $|\Psi(x)>$ du système physique étudié et qui établit un isomorphisme entre ce sous-espace $\mathfrak{F}'$ de Bargmann et l'espace des états physiques de telle sorte que :

$$|\Psi(x)> = \int f(Z) \,|\Phi(Z, x)> d\mu(Z)$$

La fonction $f(Z)$ est image dans $\mathcal{F}'$ de l'état $|\Psi(x)>$ et $d\mu(Z)$ est la métrique de Bargmann.

Tout problème de recherche d'état propre ou de valeur propre d'une observable A du système physique est alors transformé en un problème semblable mais de solution plus aisée et concernant l'opérateur image $\hat{A}$ de A dans le sous-espace $\mathcal{F}'$ de Bargmann. Etant donné par ailleurs l'isomorphisme bien connu qui relie les espaces de Bargmann et les espaces des états des oscillateurs harmoniques, il en résulte finalement que tout opérateur A concernant un système de fermions admettra par image un opérateur $(A)_B$ concernant des quasi-bosons La méthode de la fonction génératrice décrite ici permettra donc finalement d'obtenir des développements rigoureux en termes de quasi-bosons, des observables d'un système de fermions, valables jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le désire. Ces développements se révèleront très rapidement convergents et donc très utiles.

Dans la section 2 nous allons définir la fonction génératrice et l'isomorphisme qu'elle engendre. Dans les sections 3 et 4 nous appliquerons la méthode aux systèmes de bosons et de fermions. Nous donnerons enfin dans la section 5 quelques applications.

2. La méthode de la fonction génératrice.

a) L'application T

Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des états du système physique étudié et soit par ailleurs $\mathcal{F}$ l'espace fonctionnel normé des fonctions $f(Z)$ où $Z = (Z_1, Z_2; Z_N)$ est un point de l'espace euclidien réel ou complexe E_N à N dimensions (N entier quelconque) :

$$(f, g) = \int \overline{f(Z)}\; g(Z)\; d\mu_N(Z) \qquad (1)$$

avec $d\mu_N(Z) = \mu_N(Z)\, dZ$ caractérisant la mesure adoptée dans $\mathcal{F}$.
Nous nous proposons de montrer qu'il est possible d'établir, à l'aide d'une fonction génératrice qui va être définie, une application linéaire et injective T de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{F}$, telle que tout problème dans $\mathcal{H}$ se ramène à un problème semblable, mais de solution plus aisée dans un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons qu'un sous-espace $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ sous-tendu par une base dénombrable constituée des vecteurs orthonormés $|m>$ et nous établirons une correspondance bi-univoque, qui, à tout vecteur de base $|m>$ de $\mathcal{H}'$ fasse correspondre un vecteur $P_m(Z)$

d'une base orthonormée de $\mathcal{F}'$:

$$P_m(Z) = T \,|m> \qquad (2)$$

et pour un vecteur $|\Psi>$ quelconque de :

$$|\Psi> = \sum_m f_m \,|m>$$

$$T\,|\Psi> = \sum_m f_m \, P_m(Z) = f(Z)$$

Ainsi tout vecteur $|\Psi_f>$ de $\mathcal{H}'$ et son image f dans $\mathcal{F}'$ ont mêmes composantes. L'application linéaire T peut être étendue aux opérateurs de telle sorte que tout opérateur A de $\mathcal{H}'$ admette toujours un opérateur image $\hat{A}$ et un seul dans $\mathcal{F}'$ de telle sorte que :

$$\hat{A} = T \,.\, A \,.\, T^{-1} \qquad (3)$$

et d'une façon plus générale pour toute fonction algébrique ou développable :

$$f(\hat{A}) = T \,.\, f(A) \,.\, T^{-1}$$

ou

$$f(A) = T^{-1} \,.\, f(\hat{A}) \,.\, T \qquad (4)$$

b) La fonction génératrice.

L'application qui vient d'être considérée peut aussi être commodément définie à l'aide de la fonction génératrice $|\Phi(Z)>$ définie comme suit :

$$|\Phi(Z)> = \sum_m \overline{P_m(Z)} \,|m> \qquad (5)$$

Compte-tenu en effet de l'orthonormalité des états de base $P_m(Z)$

$$\int \overline{P_m(Z)} \, P_n(Z) \, d\mu(Z) = \delta_{n,m} \qquad (6)$$

on obtient immédiatement :

$$|\Psi_f> = \int f(Z) \,|\Phi(Z)> d\mu(Z) = T^{-1} f(Z) \qquad (7)$$

La fonction $|\Phi(Z)>$ est donc génératrice de tous les états $|\Psi>$ de $\mathcal{H}'$ dont chacun est représenté dans $\mathcal{F}'$ par la fonction de poids $f(Z)$. On remarque que les états $P_m(Z)$ qui figurent dans l'expression de $|\Phi(Z)>$ sont orthonormés. Cette dernière propriété est essentielle et nécessaire pour assurer la validité des résultats qui vont être établis. Nous examinerons toutefois ci-après (§ 4.b) un cas où cette condition d'orthonormalisation n'est pas satisfaite.

c) Relations d'orthogonalisation et de fermeture

On remarque :

$$< \Phi(Z) \,|\, \Phi(Z) > \; = \sum_m P_m(Z)\, \overline{P_m(Z')}$$

$$\int f(Z') < \Phi(Z) \,|\, \Phi(Z') > d\mu(Z') = \sum_{mn} f_m \int P_m(Z')\, P_n(Z)\, P_n(Z')\, d\mu(Z')$$

$$= \sum_m f_m\, P_m(Z) \;=\; f(Z)$$

La fonction génératrice satisfait donc à une relation d'orthogonalisation qui peut s'écrire symboliquement :

$$< \Phi(Z) \,|\, \Phi(Z') > \; = \; \delta\,(Z - Z') \qquad (8)$$

On obtient ensuite la relation de fermeture suivante :

$$\begin{aligned} \left|\Phi(Z') > d\mu(Z') < \Phi(Z')\right| &= \sum_{mn} \int \overline{P_m(Z')}\, |m><m|\, P_n(Z')\, d\mu(Z') \\ \left|\Phi(Z') > d\mu(Z') < \Phi(Z')\right| &= \sum_m |m><m| \;=\; 1 \end{aligned} \qquad (9)$$

De ces conditions résulte que l'application T peut être exprimée comme suit :

$$f(Z) \;=\; T\,|\,\Psi > \;=\; < \Phi(Z) \,|\, \Psi > \qquad (10)$$

On en déduit également :

$$\hat{A} < \Phi(Z)| = \sum_m <m| \left(T\, A\, T^{-1}\; P_m(Z)\right) = \sum_{mn} <m\,|\,A_{nm}\, P_n(Z)$$

$$= \sum_{nm} <n\,|\,A\,|\,m><m|\,P_n(Z) \;=\; < \Phi(Z)|\, A$$

ce qui permet de définir de la manière suivante l'application T étendue aux opérateurs :

$$\hat{A} < \Phi(Z)| \;=\; < \Phi(Z)\,|\,A \qquad (11)$$

dont on déduit finalement l'action de l'opérateur image $\hat{A}$ sur un vecteur quelconque de l'espace $\mathcal{F}'$:

$$\hat{A}\, f(Z) \;=\; \hat{A} < \Phi(Z) \,|\, \Psi_f > \;=\; \int < \Phi(Z)\,|\,A\,|\,\Phi(Z') > f(Z')\, d\mu(Z') \qquad (12)$$

d) Conservation du produit scalaire

Soient Ψ_f et Ψ_g deux vecteurs quelconques de $\mathcal{H}'$ admettant pour images les vecteurs f et g de $\mathcal{F}'$, on remarque :

$$\begin{aligned} <\Psi_f|\Psi_g> &= \iint f(Z) < \Phi(Z) \mid \Phi(Z') > g(Z')\, d\mu(Z)\, d\mu(Z') \\ &= \int \overline{f(Z)}\; g(Z)\; d\mu(Z) = (f, g) \end{aligned} \qquad (13)$$

Le produit scalaire est donc conservé dans la transformation T.

e) Conservation des éléments de matrice et des équations aux valeurs propres.

De la définition (11) de l'opérateur image $\hat{A}$ résulte immédiatement :

$$\hat{A} < \Phi(Z) \mid \Phi(Z') > \; = \; < \Phi(Z) \mid A \mid \Phi(Z') >$$

$$A \sum_m P_m(Z)\; \overline{P_m(Z')} = \sum_{m\,n} P_m(Z) < m \mid A \mid n > \overline{P_n(Z')}$$

et puisque les vecteurs $P_n(Z')$ sont linéairement indépendants :

$$A\, P_n(Z) = \sum_m < m \mid A \mid n > P_m(Z)$$

et donc :

$$(P_m\,,\, \hat{A}\, P_n) = < m \mid A \mid n > \qquad (14)$$

Les générateurs A et $\hat{A}$ ont donc mêmes éléments de matrice dans leurs bases respectives.

De même si A désigne un opérateur quelconque de $\mathcal{H}'$ et si :

$$(A - a) \mid \Psi > \; = 0$$

il en résulte de suite :

$$< \Phi(Z) \mid (A - a) \mid \Psi > \; = 0$$

$$\begin{aligned} < \Phi(Z) \mid (A - a) \mid \Psi > &= \int f(Z') \left[< \Phi(Z) \mid A \mid \Phi(Z') > - \, a < \Phi(Z) \mid \Phi(Z') > \right] d\mu(Z') \\ &= (\hat{A} - a)\, f(Z) = 0 \end{aligned} \qquad (15)$$

Toutes les valeurs propres sont donc conservées dans la transformation. T.

f) Isomorphisme de l'hermiticité

De la définition (12) de $\hat{A}$ on déduit successivement

$$\begin{aligned} \hat{A}\, g(Z) &= \int < \Phi(Z) \mid A \mid \Phi(Z') > g(Z')\, d\mu(Z') \\ \hat{A}^+ f(Z) &= \int < \Phi(Z) \mid A^+ \mid \Phi(Z') > f(Z')\, d\mu(Z') \\ &= \int < \Phi(Z') \mid A \mid \Phi(Z) >^* f(Z')\, d\mu(Z') \end{aligned}$$

et par suite :

$$(f, \hat{A}\, g) = \int \overline{f(Z)} < \Phi(Z) | A | \Phi(Z') > g(Z')\, d\mu(Z)\, d\mu(Z')$$

$$(\hat{A}^{+} f, g) = \int \overline{f(Z')} < \Phi(Z') | A | \Phi(Z) > g(Z)\, d\mu(Z)\, d\mu(Z')$$

d'où l'on déduit :

$$\widehat{A^{+}} = \hat{A}^{+} \qquad (16)$$

l'image de l'hermitique est donc l'hermitique de l'image.

g) Isomorphisme du produit des opérateurs

Des définitions (3) et (4) des opérateurs images résulte immédiatement :

$$\widehat{AB} = T\, AB\, T^{-1} = T A T^{-1} . T B T^{-1} = \hat{A}\, \hat{B}$$

et :

$$\widehat{AB} = \hat{A} . \hat{B} \qquad (17)$$

L'image du produit est donc égale au produit des images.

h) Etats propres de moment angulaire

La transformation T peut être suivie d'une opération de projection afin d'extraire d'un état $|\Psi>$ ses composantes $|\Psi_{JM}>$ de moment angulaire. On obtiendra ainsi :

$$|\Psi_{JM}> = N_J P_{JM} \Psi> = \int D^{J*}_{MM}(\Omega)\, R(\Omega) d\Omega \int f(Z) | \Phi(Z)> d\mu(Z) \qquad (18)$$

N_J désignant le facteur de normalisation :

$$N_J = < \Psi | P_{JM} | \Psi >^{-1/2}$$

En conclusion, l'application T linéaire injective de $\mathcal{H}'$ dans $\mathcal{F}$ est une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{F}'$ et un isomorphisme pour les structures de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$.

3. Application aux systèmes de bosons.

a) L'espace $\mathcal{B}$ de Bargmann

Dans le cas où le système physique étudié est une assemblée de bosons, il y a avantage à choisir pour espace $\mathcal{F}$ l'espace[10)] de Bargmann $\mathcal{B}_n$ constitué des fonctions analytiques $f(Z)$ développables en séries convergentes :

$$f(Z) = \sum_{h_1 \dots h_n} a_{h_1 h_2 \dots h_n} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \dots z_n^{h_n}$$

et dans lesquelles une variable complexe Z_i est associée à chaque type éventuel de boson. On écrira symboliquement :

$$f(Z) = \sum_h \alpha_n Z^{(h)}$$

Cet espace est normé (1) avec la métrique :

$$d\mu_n(Z) = \pi^{-n} e^{\overline{Z} Z} \prod_n dx_k \, dy_k$$

avec :

$$Z_k = x_k + i y_k$$

et admet la base orthonormée constituée des vecteurs :

$$u_k(Z) = \frac{Z^{(h)}}{\sqrt{h\,!}} = \frac{Z_1^{h_1} \ldots\ldots Z_n^{h_n}}{\sqrt{h_1\,! \ldots\ldots h_n\,!}} \qquad (20)$$

Chaque nombre complexe, a, permet de définir un vecteur $e_a(Z)$ de $\mathcal{B}_n$

$$e_a(Z) = e^{\overline{a}.\,Z} \qquad (21)$$

tel que :

$$(e_a . f) = \int e^{a, \overline{Z}} f(Z) \, d\mu(Z) = f(a) \qquad (22)$$

La fonction $e_a(Z)$ joue donc dans $\mathcal{B}_n$ un rôle semblable à la fonction $\delta(x-a)$ dans l'espace de Hilbert de la mécanique quantique.

Il y a lieu de considérer dans $\mathcal{B}_n$ tout particulièrement les opérateurs Z_k et $d_k = \partial/dZ_k$ qui satisfont aux relations de commutations :

$$\left[Z_k , Z_\ell\right] = 0 \quad ; \quad \left[d_k , d_\ell\right] = 0 \quad ; \quad \left[d_k , Z_\ell\right] = \delta_{k,\ell} \qquad (23)$$

On notera enfin que les opérateurs Z_k et d_k sont hermitiques adjoints l'un de l'autre :

$$Z_k = d_k^{+} \qquad (24)$$

et par suite pour tout couple de vecteur f et g de $\mathcal{B}_n$, on obtient :

$$(Z_k f, g) = (f , d_k g) \qquad (25)$$

b) L'oscillateur harmonique

Soit $\mathcal{H}_B$ l'espace des états de l'oscillateur harmonique. Tout état $|\psi\rangle$ admet sa représentation de Fock :

$$|\psi\rangle = \sum_n f_n |n\rangle = \sum_n C_n \sqrt{n!}\, |n\rangle = \sum_n C_n (a^+)^n |0\rangle$$
$$= \psi(a^+) \, |0\rangle$$

avec :

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0$$
$$[a, a^+] = 1 \qquad (26)$$
$$a \mid 0 > = 0$$

Faisons correspondre à tout état $|n>$ de l'oscillateur, le vecteur $u_n(z)$ de l'espace $\mathcal{B}$ de Bargmann. La fonction génératrice correspondante s'écrit alors :

$$|\Phi(Z)> = \sum_m \overline{u_m(Z)} \, |m> = \sum_m \frac{\bar{Z}^m}{\sqrt{m!}} |m> \qquad (27)$$

et l'application considérée est un isomorphisme qu'à tout état $|\psi>$ de $\mathcal{H}_B$ fait correspondre un vecteur $f(Z)$ de $\mathcal{B}$ conformément à la relation :

$$f(Z) = \sum_n < n | \psi > \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} \qquad (28)$$

et inversement :

$$|\psi> = \sum_n (u_n, f) \, |n>$$

On remarquera :

$$< \Phi(Z) | \Phi(Z') > = \sum_n u_n(Z) \overline{u_n(Z')} = e^{\bar{Z}'Z} = e_{Z'}(Z)$$
$$= \delta(Z - Z') \qquad (29)$$

On obtient aisément des images dans $\mathcal{B}$ des opérateurs de base a et a^+ en utilisant la relation (11) de définition :

$$a^+ < \Phi(Z)| = < \Phi(Z) | a = \sum_m \frac{Z^m}{\sqrt{m!}} < m | a$$

$$= \sum_m \frac{(m+1)}{\sqrt{(m+1)!}} Z^m < m+1 | = d_Z < \Phi(Z)|$$

et par suite :

$$T \, a \, T^{-1} = \hat{a} = dZ \qquad \text{et} \qquad T \, a^+ \, T^{-1} = \hat{a}^+ = Z \qquad (30)$$

L'équation $a \, |0> = 0$ a pour image $d_Z 1 = 0$ et on remarque :

$$< \Phi(Z) | a | \Phi(Z') > = \frac{d}{dZ} \delta(Z - Z')$$

c) Applications

Nous considérons l'oscillateur harmonique à trois dimensions qui a pour hamiltonien :

$$H = a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + a_z^+ a_z + \frac{3}{2}$$

et la fonction géneratrice :

$$|\phi(Z)\rangle = e^{\vec{Z}.\vec{a}^+} |000\rangle$$

$$\vec{Z} = (Z_x, Z_y, Z_z) \quad ; \quad \vec{a}^+ = (a_x^+, a_y^+, a_z^+)$$

En utilisant les relations (17) et (30) nous obtenons l'image $\hat{H}$ de H :

$$\hat{H} = \vec{Z} \cdot \frac{\vec{\partial}}{\partial Z} + \frac{3}{2}$$

A toute fonction propre $f(\vec{Z})$ de $\hat{H}$ correspond une fonction propre $|\psi_f\rangle$ de H de telle sorte que :

$$|\psi_f\rangle = \int f(Z_x, Z_y, Z_z) \, |\phi(Z)\rangle \, d\mu(Z) = f(a_x^+, a_y^+, a_z^+) \, |000\rangle$$

On peut ainsi obtenir plusieurs types de fonctions propres de H et notamment les suivantes :

1) Nous avons :

$$\hat{H} f(Z_x, Z_y, Z_z) = E f(Z_x, Z_y, Z_z)$$

Nous pouvons remarquer que $\hat{H}$ a pour fonction propre la fonction :

$$f(Z_x, Z_y, Z_z) = f_{n_x}(Z_x) f_{n_y}(Z_y) f_{n_z}(Z_z) = \frac{Z_z^{n_x} \; Z_y^{n_y} \; Z_z^{n_z}}{\sqrt{n_y! \; n_x! \; n_z!}}$$

Nous en déduisons que :

$$|\psi_f\rangle = |\psi_{n_x n_y n_z}\rangle = \frac{a_x^{+n_x} \; a_y^{+n_y} \; a_z^{+n_z}}{\sqrt{n_x! \; n_y! \; n_z!}} |000\rangle$$

2) Nous pouvons aussi déterminer des fonctions propres communes $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ sachant que (30) et (4) :

$$\vec{\hat{L}} = + i \; \vec{Z} \wedge \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial Z} \right)$$

$\vec{\hat{L}}$ étant la transformée du moment cinétique $\vec{L}$

On remarque que les fonctions propres de $\hat{H}$ et $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ sont les harmoniques sphériques s'écrivant sous la forme :

$$f_{\nu\ell m}(Z_x, Z_y, Z_z) = A_{\nu\ell m} \; \rho^{\frac{\nu-\ell}{2}} \; Y_{\ell m}(\vec{Z})$$

$A_{\nu\ell m}$ étant une constante de normalisation et :

$$\rho^2 = Z_x^2 + Z_y^2 + Z_z^2$$

Ainsi nous obtenons :

$$|\psi_{\nu\ell m}> = A_{\nu\ell m}\, \rho'^{\frac{\nu-\ell}{2}}\, Y_{\ell m}(\vec{a}^+)\, |000>$$

avec :

$$\rho^2 = a_x^{+2} + a_y^{+2} + a_z^{+2}$$

3) De la conservation du produit scalaire (13), nous déduisons que :

$$<n_x, n_y, n_z|\nu\ell m> = (f_{n_x n_y n_z}, f_{\nu\ell m}) = \frac{A_{\nu\ell m}}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}}$$

$$\iiint \bar{Z}_x^{n_x} \bar{Z}_y^{n_y} \bar{Z}_z^{n_z}\, \rho^{\frac{\nu-\ell}{2}}\, Y_{\ell m}(\vec{z})\, d\mu(Z)\, dZ$$

L'intégration s'effectue en développant $Y_{\ell m}(Z)$, $\rho^{\frac{\nu-\ell}{2}}$, tenu-compte des relations d'orthonormalisation des vecteurs de base (20) et nous pouvons ainsi calculer facilement les éléments de la matrice de changement de représentation. D'autres applications ont déjà été obtenues[10].

4. Application aux systèmes de fermions

Pour étudier commodément certaines propriétés d'un système de fermions, nous allons voir qu'il est utile d'associer à l'espace $\mathcal{H}_F$ des états liés de ce système, un des sous-espaces $\mathcal{B}'$ de l'espace $\mathcal{B}$ de Bargmann. On établit un isomorphisme entre $\mathcal{H}_F$ et $\mathcal{B}'$ qui, notamment fait correspondre à tout opérateur A de $\mathcal{H}_F$ un opérateur $\hat{A}$ de $\mathcal{B}'$. Nous nous proposons de déterminer tout d'abord l'expression de $\hat{A}$ en fonction de celle de A. Tenu-compte ensuite de l'isomorphisme établit précédemment entre $\mathcal{B}'$ et l'espace $\mathcal{H}_B$ des états d'un système de bosons, nous obtiendrons finalement l'expression de tout opérateur A sous forme d'un développement en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons.

a) Premier type de développement

Soit $|n>$ une base complète orthonormée de $\mathcal{H}_F$ et considérons l'application linéaire T qui à tout état $|n>$ fait correspondre le vecteur $u_n(Z)$ de $\mathcal{B}'$. La fonction génératrice s'écrit alors :

$$|\Phi(Z)> = \sum_n \overline{u_n(Z)}\ n> = \sum_n \frac{\bar{Z}^n}{\sqrt{n!}}\, |n> \qquad (31)$$

On obtient successivement :

$$< \Phi(Z) | A | \Phi(Z') > = \sum_{ij} \frac{Z}{\sqrt{i\,!}} < i | A | j > \frac{\overline{Z'}^{\,j}}{\sqrt{j\,!}}$$

$$\hat{A}\, f(Z) = \sum_{ij} \frac{Z^i}{\sqrt{i\,!}} < i | A | j > \int \frac{\overline{Z'}}{j\,!} f(Z')\, d\mu(Z')$$

$$\hat{A}\, f(Z) = \sum_{ij} \frac{Z^i}{\sqrt{i\,!}} < i | A | j > (u_j\,, f)$$

Or le premier (n = 0) vecteur de base 1 de $\mathcal{B}$ peut encore s'écrire :

$$1 = \bar{e}^{Z'Z}\; {}^{Z'Z} = \sum_k (-1)^k \frac{Z^k \overline{Z'}^k}{K\,!} \,{}^{\overline{Z}'Z} = \sum_k (-1)^k \frac{Z^k}{K\,!} \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^k e^{\overline{Z'}Z}$$

$$1 = e^{-(Z,\, d_Z)}\; e^{\overline{Z'},\, Z} \qquad (32)$$

et il en résulte tenu-compte de (24) et (25)

$$(u_j,\, f) = \left(\frac{\overline{Z'}^{\,j}}{\sqrt{j!}},\, f\right) = \left(1,\, \frac{d^j_{Z'}}{\sqrt{j\,!}} f\right) = \int e^{-(Z,\, d_Z)}\; e^{\overline{Z'}Z}\, \frac{d^j_{Z'}}{\sqrt{j!}}\, f(Z)\, d\mu(Z')$$

et tenu-compte de la relation (22) :

$$(u_j\,, f) = e^{-(Z,\, d_Z)}\, \frac{d^j_Z}{\sqrt{j!}}\, f(Z)$$

et finalement :

$$\hat{A} = \sum_{ij} \frac{Z^i}{\sqrt{i!}} < i | A | j > e^{-(Z,\, d_Z)}\, \frac{d^j_Z}{\sqrt{j\,!}} \qquad (33)$$

En utilisant ensuite l'isomorphisme établi précédemment entre $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{H}_B$ et étendu aux opérateurs (cf. relations (3) et(4), on obtient enfin le développement suivant de l'opérateur $(A)_B$ image de A dans l'espace des quasi-bosons :

$$(A)_B = \sum_{ij} \frac{(a^+)^i}{\sqrt{i\,!}} < i | A | j > e^{-(a^+,\, a)}\, \frac{a^j}{\sqrt{j\,!}} \qquad (34)$$

Ce développement en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons est le développement déjà établi précédemment par Marumori[2].

b) Deuxième type de développement

Au lieu de laisser indéterminée comme précédemment, la base $|n>$ de l'espace $\mathcal{H}_F$ nous allons choisir une base particulière qui nous permettra d'effectuer un calcul plus explicite et d'obtenir ainsi un développement plus convergent que le développement de Marumori.

La base $|n>$ sera constituée d'un état de référence $|\Phi_o>$ (déterminant de Slater quelconque qui peut être la solution d'un calcul préalable de Hartree-Fock) et de tous les états n trous, n particules déduits de $|\Phi_o>$.

A toute paire constituée d'un trou α et d'un état particule i on fera correspondre une variable complexe $Z_{i\alpha}$ et la fonction génératrice s'écrira alors :

$$|\Phi(Z)> = \sum_n \frac{A^n}{n!\sqrt{n!}} |\Phi> \qquad (35)$$

avec :

$$A = \sum_{i\alpha} \bar{Z}_{i\alpha} a_i^+ a_\alpha \qquad (36)$$

Chaque terme d'ordre n du développement précédent apparie un état n trous $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ n particules $(i, j, k, \dots)$ avec un vecteur appartenant au sous-espace $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}_n$ tel que $h_1 = h_2 = \dots = 1$ et dont les éléments sont des déterminants normés des variables $Z_{i\alpha}$.

Il est intéressant de comparer la fonction génératrice précédente avec la fonction d'essai de Thouless[11, 12]

$$|\Phi'(Z)> = \sum_n \frac{A^n}{n!} |\Phi_o> \qquad (37)$$

Cette dernière n'est pas normalisée et de ce fait, bien qu'elle puisse s'écrire sous la forme (5) d'une fonction génératrice, elle apparie les états $|m>$ de $\mathcal{H}_F$ à des vecteurs $P_m(Z)$ de l'espace de Bargmann qui ne sont pas normalisés. Dans ce cas, la plupart des propriétés de l'isomorphisme T étudié précédemment ne sont plus vérifiées. Il en résulte en particulier que la transformation définie par la fonction génératrice (37) ne conserve plus l'hermiticité bien qu'elle conserve les valeurs propres. On peut toutefois établir avec la fonction (37) un développement en quasi-bosons (voir annexe 1) qui généralise le développement établi par Jancovici et Schiff[8].

Il est donc beaucoup plus intéressant d'adopter la fonction génératrice (35) et d'en déduire l'opérateur image $\hat{A}$ de tout opérateur A de $\mathcal{H}_F$ par application de la relation de définition :

$$\hat{A} < \Phi(Z)| = < \Phi(Z)| A$$

c) Calcul des images des opérateurs de création et d'annihilation trou-particule

Tenu compte de la conservation du nombre de fermions, les seuls opérateurs trou-particule qui ont une signification physique sont de la forme $a_i^+ a_j$, $a_\alpha a_\beta^+$, $a_\alpha^+ a_i$ et leurs hermitiques adjoints.

Après avoir démontré par récurrence la validité de la relation :

$$[\,(A^+)^n\,,\ a_i^+\,] = n \sum_\gamma Z_{i\gamma}\,(A^+)^{n-1}\,a_\gamma^+$$

il est aisé de déterminer l'image de l'opérateur $a_i^+ a_j$:

$$\widehat{a_i^+ a_j} = \hat{A}_{ij} = \sum_\gamma Z_{i\gamma}\,\frac{\partial}{\partial Z_{j\gamma}} \qquad (38)$$

De même de la relation :

$$[\,a_\alpha\,,\ (A^+)^n\,] = n \sum_j Z_{j\alpha}\,(A^+)^{n-1}\,a_j$$

on déduit l'opérateur image de $a_\alpha a_\beta^+$

$$\widehat{a_\alpha a_\beta^+} = \sum_j Z_{j\alpha}\,\frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \qquad (39)$$

Enfin, un raisonnement par récurrence permet d'établir l'image de l'opérateur $a_\alpha^+ a_i$:

$$\widehat{a_\alpha^+ a_i} = \alpha_o\,\frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \alpha_1 \sum_\beta A_{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} + \alpha_2 \sum_{\beta\gamma} A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}\,\frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} + \dots \qquad (40)$$

avec :

$$A_{\alpha\beta} = \sum_j Z_{j\beta}\,\frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}}$$

et la convention de notation suivante :

$$A_{\alpha\beta}\,A_{\beta\gamma}\,\frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} = \sum_{jk} Z_{j\beta}\,Z_{k\gamma}\,\frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}}\,\frac{\partial}{\partial Z_{k\beta}}\,\frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}}$$

Ce dernier développement est rapidement convergent avec $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$ $\alpha_2 \# - 0{,}048$, $\alpha_3 \# - 0{,}0076$, le terme général α_n étant défini par la relation de récurrence :

$$n\,\alpha_o - n(n-1)\,\alpha_1 + n(n-1)(n-2)\,\alpha_2 + \dots\dots + (-1)^n n!\,\alpha_n = \sqrt{n}$$

A partir des développements précédents, établis dans l'espace de Bargmann, on déduit immédiatement les développements correspondants en quasi-bosons. Il suffit pour cela d'utiliser l'isomorphisme établi précédemment entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}_B$ et de poser :

$$Z_{i\alpha} = B^{+}_{i\alpha} \qquad \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} = B_{i\alpha}$$

Nous obtenons alors les développements cherchés des opérateurs de création et d'annihilation des paires trou-particule en fonction des opérateurs de création B^{+} et d'annihilation B' de quasi-bosons.

Il y a lieu de noter que les développements qui viennent d'être obtenus sont légèrement différents de ceux de Beliaev, Zelevinsky[10, 11, 12] et plus rapidement convergents.

Remarques

(1) Pour comparer entre elles les deux méthodes précédentes de développement et celle de Beliaev-Zelevinsky, il suffit de remarquer que ces développements diffèrent entre eux par la présence d'opérateurs dont l'action sur tous les éléments du sous-espace $\mathcal{B}'$ est nul. Un tel opérateur est par exemple le suivant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} \right) f(Z) = 0 \qquad \forall f(Z) \in \mathcal{B}'$$

d'où :

$$B_{j\beta}\, B_{i\alpha} + B_{j\alpha}\, B_{i\beta} = 0$$

En tenant compte de cette propriété, les développements de Marumori et de Beliaev-Zelevinsky peuvent être simplifiés.

(2) On peut encore choisir une autre base dans $\mathcal{H}_F$ constituée d'un état $|\Phi\rangle$, vide de quasi-particules, et des états qui s'en déduisent par action des opérateurs $\{a^{+}_{\alpha}\}$ créateurs de quasi-particules La fonction génératrice correspondante α cette nouvelle base peut s'écrire :

$$|\Phi(Z)\rangle = \sum_{n} \frac{A^{n}}{2^{n}\, n!\, \sqrt{(2n-1)!!}} \,|\Phi\rangle$$

avec :

$$A' = \sum_{\alpha\beta} \bar{Z}_{\alpha\beta}\, a^{+}_{\alpha}\, a^{+}_{\beta}$$

Le calcul des opérateurs images correspondant à cette nouvelle fonction génératrice s'effectue en appliquant la même méthode que précédemment.

d) Développement des opérateurs à un et deux corps et développement en quasi-bosons de l'hamiltonien

L'hamiltonien du système étudié a la forme générale :

$$H = \sum_{ij} h_{ij} \; a_i^+ a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ij\,,\,k\ell} \; a_i^+ a_j^+ a_\ell \, a_k \qquad (41)$$

où h_{ij} désignent les éléments de matrice d'un opérateur à un corps h et $V_{ij,k\ell}$ désignent les éléments de matrice anti-symétrisés de l'interaction V à deux corps.

Si on choisit pour nouveau vide de référence un état $| \Phi_o >$ d'énergie moyenne E_o ce nouveau vide définit des quasi-particules dont certaines sont des particules repérées par des indices latins : i, j, k, ... et d'autres sont des trous repérés par des indices grecs : α, β, γ, ...
On notera respectivement a^+ et b^+ les opérateurs de création d'états "particule" et d'états "trous".

L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H = E_o + H_{11} + (H_{20} + H_{20}^+) + H_{22} + (H_{40} + H_{40}^+) + H'_{22} + (H_{31} + H_{31}^+) \qquad (42)$$

avec :

$$E_o = < \Phi_o | H | \Phi_o > = \sum_\alpha h_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta,\,\alpha\beta}$$

$$H_{11} = \sum_{ij} (h_{ij} + \sum_\alpha V_{i\alpha\,,\,j\alpha}) \; a_i^+ a_j - \sum_{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta} + \sum_\gamma V_{\alpha\gamma,\,\beta\gamma}) \; b_\alpha^+ b_\beta$$

$$H_{20} = \sum_{i\alpha} (h_{i\alpha} + \sum_\beta V_{i\beta,\,\alpha\beta}) \; a_i^+ b_\alpha^+$$

$$H_{22} = \sum_{i\alpha j\beta} V_{i\beta,\,\alpha j} \; a_i^+ b_\alpha^+ b_\beta a_j$$

$$H_{40} = \frac{1}{4} \sum_{i\alpha\gamma\beta} V_{ij,\,\alpha\beta} \; a_i^+ b_\alpha^+ \; a_j^+ b_\beta^+$$

$$H'_{22} = \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ij,\,k\ell} \; a_i^+ a_j^+ a_\ell a_k + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} \; b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha \, b_\beta$$

$$H_{31} = \frac{1}{2} \sum_{ijk\alpha} V_{ij,\,\alpha k} \; a_i^+ b_\alpha^+ a_j^+ a_k + \frac{1}{2} \sum_{i\alpha\beta\gamma} V_{i\alpha\,,\,\beta\gamma} \; a_i^+ b_\gamma^+ b_\beta^+ b_\alpha$$

Dans le cas où l'état de référence $|\Phi_o\rangle$ choisi est un état de Hartree-Fock, le terme H_{20} est nul.

Nous avons déjà donné précédemment les développements en opérateurs de quasi-bosons des opérateurs de création ou d'annihilation de paires "trou-particule". Il nous reste à calculer les opérateurs qui figurent dans les expressions des termes d'interaction à deux corps, H_{22}, H_{40} ou H^+_{40} , H'_{22}, H_{31} ou H^+_{31}. Ces opérateurs peuvent évidemment s'écrire sous la forme de produits de deux développements d'opérateurs à deux corps. Cependant les calculs directs qui suivent permettent d'obtenir des développements plus convergents.

Dans ce qui suit, on s'est toujours limité au calcul des termes d'ordre inférieur ou égal à 4.

(1) Image de l'opérateur $a^+_i b^+_\alpha b_\beta a_j$

$$\langle\Phi(Z)| a^+_i b^+_\alpha b_\beta a_j = \sum_k \langle\Phi| \frac{(k \sum_\alpha b_\alpha A^{k-1} Z_{i\alpha} + a^+_i A^k)}{k!\sqrt{k!}} b^+_\alpha b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \langle\Phi| \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \sum_\gamma Z_{i\gamma} b_\gamma A^{k-1} b^+_\alpha b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \langle\Phi| \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \sum_\gamma Z_{i\gamma} b_\gamma \left[-(k-1) \sum_m Z_{m\alpha} a_m A^{k-2} + b^+_\alpha A^{k-1}\right] b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \left[\langle\Phi| \frac{-k(k-1)}{k!\sqrt{k!}} \sum_{m\gamma} Z_{i\gamma} b_\gamma Z_{m\alpha} a_m A^{k-2} + \langle\Phi| \frac{k}{k!\sqrt{k!}} Z_{i\alpha} A^{k-1}\right] b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \sum_{m\gamma} Z_{i\gamma} Z_{m\alpha} \langle\Phi| \frac{-k(k-1)}{k!\sqrt{k!}} A^{k-2} b_\gamma a_m b_\beta a_j + Z_{i\alpha} \langle\Phi| \frac{k}{k!\sqrt{k!}} A^{k-1} b_\beta a_j$$

$$= \left[Z_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} - \sum_{m\gamma} Z_{i\gamma} Z_{m\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{m\gamma}} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}}\right] \langle\Phi(Z)|$$

En utilisant l'isomorphisme établi précédemment entre l'espace de Bargmann $\mathcal{B}$ et l'espace $\mathcal{H}_B$ des quasi-bosons, il suffit de remplacer dans les développements précédents $Z_{i\alpha}$ par $\mathcal{B}^+_{i\alpha}$ et $\partial/\partial Z_{i\alpha}$ par $\mathcal{B}_{i\alpha}$ pour obtenir le développement de l'opérateur considéré en fonction des opérateurs de création $\mathcal{B}^+_{i\alpha}$ et d'annihilation $\mathcal{B}_{i\alpha}$ de quasi-bosons. On obtient ainsi :

$$(a_i^+ b_\alpha^+ b_\beta a_j)_B = \mathcal{B}_{i\alpha}^+ \mathcal{B}_{j\beta} - \sum_{m\gamma} \mathcal{B}_{i\gamma}^+ \mathcal{B}_{m\alpha}^+ \mathcal{B}_{m\gamma} \mathcal{B}_{j\beta} + \ldots\ldots \qquad (43)$$

(2) Image de l'opérateur $b_\beta a_j b_\alpha a_i$

$$< \Phi(Z) | \, b_\beta \, a_j \, b_\alpha \, a_i = \sum_k < \Phi | \frac{A^k}{k! \sqrt{k!}} \, b_\beta \, a_j \, b_\alpha \, a_i$$

$$= \left[\alpha_0 \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \alpha_1 \sum_\gamma A_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{j\gamma}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \ldots \right] < \Phi(Z) |$$

et par suite :

$$(b_\beta a_j b_\alpha a_i)_B = \alpha_1 \mathcal{B}_{j\beta} \mathcal{B}_{i\alpha} + \alpha_2 \sum_{k\gamma} \mathcal{B}_{k\gamma}^+ \mathcal{B}_{k\beta} \mathcal{B}_{j\gamma} \mathcal{B}_{i\alpha} + \ldots \qquad (44)$$

avec :

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \qquad ; \qquad \alpha_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6} = -1,035$$

Le troisième terme admet pour coefficient :

$$\alpha_3 = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{6})}{2} \;\#\; -0,01$$

est donc négligeable.

(3) Image de l'opérateur $a_k^+ a_j b_\alpha a_i$

$$< \Phi(Z) | \, a_k^+ \, a_j \, b_\alpha \, a_i = \sum_n < \Phi | \frac{A^n}{n! \;\; n!} \, a_k^+ \, a_j \, b_\alpha \, a_i$$

$$= \sum_n < \Phi | \frac{n}{n! \sqrt{n!}} \, A^{n-1} \, Z_{k\beta} \, b_\beta \, a_j \, b_\alpha \, a_i$$

$$= \left(\sqrt{2} \sum_\beta Z_{k\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \ldots\ldots \right) < \Phi(Z) |$$

et par suite :

$$(a_k^+ a_j b_\alpha a_i)_B = \sqrt{2} \sum_\beta \mathcal{B}_{k\beta}^+ \mathcal{B}_{j\beta} \mathcal{B}_{i\alpha} + \ldots \qquad (45)$$

(4) Image de l'opérateur $a_i^+ a_j^+ a_\ell a_k$

$$< \Phi(Z) | a_i^+ a_j^+ a_\ell a_k = \sum_k < \Phi | \frac{k}{k! \sqrt{k!}} \sum_\alpha Z_{i\alpha} b_\alpha A^{k-1} a_j^+ a_\ell a_k$$

$$= \sum_k < \Phi | \frac{k(k-1)}{k! \sqrt{k!}} \sum_{\alpha\beta} Z_{i\alpha} Z_{j\beta} A^{k-2} b_\alpha b_\beta a_\ell a_k =$$

$$= - \sum_{\alpha\beta} Z_{i\alpha} Z_{j\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{\ell\alpha}} \frac{\partial}{\partial Z_{k\beta}} < \Phi (Z) |$$

et donc :

$$(a_i^+ a_j^+ a_\ell a_k)_B = - \sum_{\alpha\beta} \mathcal{B}_{i\alpha}^+ \mathcal{B}_{j\beta}^+ \mathcal{B}_{\ell\alpha} \mathcal{B}_{k\beta} + \ldots.. \qquad (46)$$

(5) Image de l'opérateur $b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha b_\beta$

$$< \Phi(z) | b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha b_\beta = \sum_k < \Phi \frac{A^n}{k! \sqrt{k!}} b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha b_\beta =$$

$$= \sum_k < \Phi | \frac{k(k-1)}{k! \sqrt{k!}} \sum_{mn} Z_{m\delta} Z_{n\gamma} a_m a_n A^{k-1} b_\alpha b_\beta =$$

$$= - \sum_{mn} Z_{m\delta} Z_{n\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{m\alpha}} \frac{\partial}{\partial Z_{n\beta}} < \Phi (Z) |$$

et donc :

$$(b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha b_\beta)_B = - \sum_{mn} \mathcal{B}_{m\delta}^+ \mathcal{B}_{n\gamma} \mathcal{B}_{m\alpha} \mathcal{B}_{n\beta} + \ldots \qquad (47)$$

(6) Image de l'opérateur $b_\alpha^+ b_\beta b_\gamma a_i$

$$< \Phi(Z) | b_\alpha^+ b_\beta b_\gamma a_i = \sum_k -< \Phi | \frac{k}{k! \sqrt{k!}} \sum_m Z_{m\alpha} A^{k-1} a_m b_\beta b_\gamma a_i$$

$$= (\sum_m \sqrt{2} Z_{m\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{m\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} + \ldots) < \Phi (Z) |$$

et par suite :

$$(b_\alpha^+ b_\beta b_\gamma a_i)_B = \sqrt{2} \sum_m \mathcal{B}_{m\alpha}^+ \mathcal{B}_{m\beta} \mathcal{B}_{i\gamma} + \ldots \qquad (48)$$

e) Image de l'hamiltonien

Il suffit maintenant de rassembler les résultats partiels précédents (43 à 48) et de porter les développements obtenus dans l'expression (42) pour obtenir le développement de l'hamiltonien jusqu'au 4ème ordre.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = \; & E_{HF} + \sum_{i\alpha} (e_i - e_\alpha)\, B^+_{i\alpha} B_{i\alpha} + \sum_{i\alpha\, j\beta} V_{i\beta,\alpha j}\, B^+_{i\alpha}\, B_{j\beta} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{ij\alpha\beta} \left[V_{ij,\alpha\beta}\, B^+_{i\alpha}\, B^+_{j\beta} + \text{h.c.} \right] \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{ijk\alpha\beta} \left[V_{ij,\alpha k}\, B^+_{i\alpha}\, B^+_{j\beta}\, B_{k\beta} + \text{h.c.} \right] \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{im\alpha\beta\gamma} \left[V_{i\alpha,\beta\gamma}\, B^+_{i\gamma}\, B^+_{m\beta}\, B_{m\alpha} + \text{h.c} \right] \\
& - \sum_{ijm\alpha\beta\gamma} V_{i\beta,\alpha\gamma}\, B^+_{i\gamma}\, B^+_{m\alpha}\, B_{m\gamma}\, B_{j\beta} - \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell\alpha\beta} V_{ij,k\ell}\, B^+_{i\alpha}\, B^+_{j\beta}\, B^+_{\ell\alpha}\, B_{k\beta} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{mn\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\gamma\delta}\, B^+_{m\delta}\, B_{n\gamma}\, B_{m\alpha}\, B_{n\beta} \\
& + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sum_{ijk\ell\alpha\beta\gamma} V_{ij,\alpha\beta}\, B^+_{i\alpha}\, B^+_{j\gamma}\, B^+_{k\beta}\, B_{k\gamma} + \text{h.c}
\end{aligned}
$$

On remarquera que le développement précédent, limité aux termes d'ordre inférieurs ou égaux à 2, est identique au développement de Marumori et al. obtenu récemment par Li et Klein[13]. Ce développement limité aux termes du second ordre est différent de l'hamiltonien de la R. P. A. et fournit des équations du mouvement différentes bien que formellement identiques.

5. Application au modèle de Lipkin

La méthode qui vient d'être développée sera maintenant appliquée au modèle de Lipkin[14] afin de comparer nos résultats et certains[15] de ceux obtenus antérieurement.

L'hamiltonien du système étudié s'écrit :

$$H = e\, J_o + \frac{1}{2} V (J_+^2 + J_-^2)$$

avec :

$$[J_+ , J_-] = 2 J_o \qquad [J_o , J_\pm] = \pm J_\pm$$

La base $|n>$ de la représentation adoptée est définie par :

$$J_o \,|n> \;=\; (n - J)\,|n>$$
$$J_+ \,|n> \;=\; \left[(2\,J - n)(n+1)\right]^{1/2} |n+1>$$
$$J_- \,|n> \;=\; \left[(2\,J - n + 1)\,n\right]^{1/2} |n-1>$$

et :

$$J_+^{N+1}\,|n> \;=\; 0 \qquad \forall n \qquad N = 2\,J$$

La fonction génératrice s'écrit :

$$|\Phi(Z)> \;=\; \sum_{i=0}^{N} \frac{\bar{Z}^i}{\sqrt{i\,!}}\,|i>$$

Nous allons déterminer les images des opérateurs J_o, J_+, J_+^2.

a) Image de J_o

$$\hat{J}_o < \Phi(Z)| = <\Phi(Z)|J_o = \sum_{k=0}^{N} \frac{Z^{k'}}{k\,!} <k|J_o = (Z\frac{\partial}{\partial Z} - J) \sum_{k=0}^{N} \frac{Z^k}{\sqrt{k!}} <k|$$

$$= (Z\frac{\partial}{\partial Z} - J) < \Phi(Z)|$$

par suite :

$$\hat{J}_o = Z\frac{\partial}{\partial Z} - J$$

b) Image de J_+

$$\hat{J}_+ < \Phi(Z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} <n|J_+ = \sum_{n=1}^{N} \frac{Z^k}{\sqrt{n\,!}} <n-1 \left[(2\,J - n + 1)\,n\right]^{1/2}$$

On remarque que J_+ doit être développé sous la forme :

$$\hat{J}_+ = \alpha_o Z + \alpha_1 Z^2 \frac{\partial}{\partial Z} + \alpha_2 Z^3 (\frac{\partial}{\partial Z})^2 + \ldots\ldots$$

$$\hat{J}_+ < \Phi(Z) = \sum_{i}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j Z^{j+1} (\frac{\partial}{\partial Z})^j \frac{Z^i}{i\,!} < i|$$

$$= \sum_{i\,j} \alpha_j \frac{(i-1)\; Z^i}{(i-1)\,!\,(i-j-1)!} < i - 1|$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{Z^i}{\sqrt{i\,!}} \left[(2\,J - i + 1)\,i\right]^{1/2} < i - 1|$$

Les vecteurs $|i>$ étant linéairement indépendants, nous en déduisons que :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!} = \left[(2J - n + 1)\right]^{1/2} \qquad (49)$$

Le calcul des coefficients α_j se fait par récurrence.

c) Image de J_+^2

En précédant comme pour J_+, on obtient la relation suivante :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \beta_j \frac{(n-2)!}{(n-j-2)!} = \left[(2J - n + 2)\right]^{1/2} \qquad (50)$$

et :

$$\hat{J}_+^2 = \beta_o Z^2 + \beta_1 Z^3 \frac{\partial}{\partial Z} + \beta_2 Z^4 \left(\frac{\partial}{\partial Z}\right)^2 + \ldots$$

Des relations (49) et (50) nous déduisons les premières valeurs de α_i et β_i

$$\alpha_o = \sqrt{2J}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2J-1} - \sqrt{2J}$$

$$\alpha_2 = 1/2\sqrt{2J-2} - \sqrt{2J-1} + 1/2\sqrt{2J}$$

$$\beta_o = \sqrt{2J(2J-1)}$$

$$\beta_1 = \sqrt{(2J-1)(2J-2)} - \sqrt{2J(2J-1)}$$

$$\beta_2 = 1/2\sqrt{(2J-2)(2J-3)} - \sqrt{(2J-1)(2J-2)} + 1/2\sqrt{2J(2J-1)}$$

Notre méthode permet donc d'obtenir rapidement la forme condensée des coefficients du développement.

6. Conclusions.

La méthode de la fonction génératrice est une méthode très générale qui permet de transposer tout problème de mécanique quantique posé dans l'espace $\mathcal{H}_F$ ou $\mathcal{H}_B$ des systèmes de fermions ou de bosons en un autre problème à traiter dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ que l'on choisira. L'essentiel est de définir dans $\mathcal{F}$ une base orthonormée $P_m(Z)$ correspondant au choix d'une certaine métrique $\mu(Z)$ la variable Z pouvant être réelle ou complexe :

$$(P_m, P_n) = \int \overline{P_m(Z)}\, P_n(Z)\, \mu(Z)\, dZ = \delta_{mn}$$

Cette base $\left\{P_m\right\}$ permet d'établir une correspondance biunivoque avec une base $\{m\}$ d'un sous-espace $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}$ et de définir une fonction :

$$|\Phi(Z) = \sum_m \overline{P_m(Z)} \; |m>$$

génératrice de tout vecteur $\Psi > \in \mathcal{H}$:

$$|\psi> = \int f(Z) \; |\Phi(Z)> \; \mu(Z) \; dZ$$

Tout état $\Psi > \in \mathcal{H}'$ admet ainsi une image $f(Z)$ et tout opérateur A agissant dans $\mathcal{H}'$ admet un opérateur image A agissant dans $\mathcal{F}'$, tel que :

$$\hat{A} f(Z) = \int < \Phi(Z) | A | \Phi(Z')> \; f(Z') \; \mu(Z') \; dZ'$$

La signification physique des paramètres Z ainsi introduits dépend évidemment du problème étudié.

La correspondance ainsi établie est un isomorphisme qui permet de résoudre rigoureusement dans $\mathcal{F}'$ un problème initialement posé dans $\mathcal{H}'$.

En appliquant cette méthode dans le cas particulier ou l'espace fonctionnel $\mathcal{F}'$ est l'espace de Bargmann, il a été facile d'exprimer rigoureusement tout opérateur de $\mathcal{H}_F$ notamment l'hamiltonien, en un développement d'opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons. Les développements ainsi obtenus sont rigoureux et semblables à ceux de Beliaev-Zelinsky et de Marumori. Ils en diffèrent d'une part par l'ordre des termes, en ce qui concerne les développements de Beliaev-Zelinsky et d'autre part par l'absence de termes excédentaires dont l'action est nulle dans le sous-espace dans lequel ils agissent. Les développements ainsi obtenus sont donc plus simples et plus rapidement convergents.

La méthode de la fonction génératrice qui vient d'être utilisée dans le sous-espace $\mathcal{H}'$ des états du spectre discret de l'hamiltonien peut être étendue à l'étude des états du continuum. Cette extension fait l'objet d'un travail en cours.

Annexe 1

Complément du développement de Jancovici et Schiff

La méthode dite des coordonnées génératrices, cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$< \psi \mid H \mid \psi >$$

en adoptant pour fonction d'essai :

$$|\psi > \; = \int f(Z) \; | \, \Phi \, (Z) > \, dZ$$

Z désignant ici l'ensemble des paramètres complexes $Z_{i\alpha}$ qui définissent la fonction d'onde de Thouless :

$$| \Phi(Z) > \; = \; \exp \left[\sum_{i\alpha} \bar{Z}_{i\alpha} \; a_i^+ \, a_\alpha \right] | \Phi >$$

$| \Phi >$ désignant un déterminant de Slater, solution des équations de Hartree-Fock.

La minimisation de la fonctionnelle conduit à l'équation intégrale :

$$\int \left[< \Phi(Z) \, | H | \, \Phi(Z') > - \; E \; < \Phi(Z) \, | \, \Phi(Z') > \right] \; f(Z') \; dZ' \; = \; 0$$

La transformation complète et rigoureuse de l'équation intégrale ci-dessus en une équation différentielle en Z, $\partial/\partial Z$ est réalisée en utilisant les résultats préliminaires suivants :

(a) $$< \Phi(Z) \mid \Phi(Z') > \; = \; \det \; (A_{\alpha\beta})$$

avec :

$$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i=N+1}^{\infty} Z_{i\alpha} \; \bar{Z}'_{i\beta}$$

(b) $$< \Phi | a_\beta^+ \, a_i \; \exp \left[\sum_{m\alpha} Z_{m\alpha} \, a_\alpha^+ a_m \right] | \Phi(Z') > \; = \; \frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} \; < \Phi(Z') | \, \Phi(Z') >$$

Avec la notation $R = \exp \left[\sum_{m\alpha} Z_{m\alpha} \; a_\alpha^+ \, a_m \right]$, on établit les relations suivantes :

$$R \, a_\alpha^+ = a_\alpha^+ \, R$$

$$R \, a_\alpha = (a_\alpha - \sum_{j=N+1}^{\alpha} Z_{j\alpha} \; a_j) \; R$$

$$R \, a_i = a_i \; R$$

$$R \, a_i^+ = (a_i^+ + \sum_{\alpha=1}^{N} Z_{i\alpha} \; a_\alpha^+) \; R$$

d'où l'on déduit :

$$< \Phi \,|\, a^+_\beta a_i R \,|\, \Phi(Z') > = \frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} < \Phi(Z) \,|\, \Phi(Z') >$$

$$< \Phi \,|\, R \; a^+_p a_q \,|\, \Phi(Z') > = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} Z_{p\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{q\alpha}} \right) < \Phi(Z) \,|\, \Phi(Z') >$$

$$< \Phi \,|\, R \; a_\beta a^+_\gamma \; \Phi(Z') > = \left(\sum_{i=N+1}^{\alpha_1} Z_{i\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} \right) < \Phi(Z) \,|\, \Phi(Z') >$$

$$< \Phi \,|\, R \; a^+_n a_\alpha \; \Phi(Z') > = \left(Z_{n\alpha} - \sum_{j,\beta} Z_{n\beta} Z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \right) < \Phi(Z') \,|\, \Phi(Z') >$$

En utilisant les résultats partiels précédents, on obtient le développement suivant de l'hamiltonien (42) :

$$H\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right) = \sum_{i\alpha} (e_i - e_\alpha) Z_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}$$

$$+ \sum_{i\alpha\, j\beta} V_{i\beta', \alpha j} \left[Z_{i\alpha} - \sum_{n\gamma} Z_{i\gamma} Z_{n\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{n\gamma}} \right] \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ij,\alpha\beta} V_{ij,\alpha\beta} \left[Z_{i\alpha} - \sum_{n\gamma} Z_{i\gamma} Z_{n\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{n\gamma}} \right] \left[Z_{j\beta} - \sum_{m\gamma} Z_{j\gamma} Z_{m\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{m\gamma}} \right]$$

$$+ V^*_{ij,\alpha\beta} \left[\frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} \right] + \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ij,k\ell} \sum_{\alpha\beta} Z_{i\alpha} Z_{j\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{k\alpha}} \frac{\partial}{\partial Z_{\ell\beta}}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\gamma\delta} \sum_{ij} Z_{j\delta} Z_{i\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ij,\alpha k} \Big[V_{ij,\alpha k} \Big(Z_{i\alpha} - \sum_{n\beta} Z_{i\beta} Z_{n\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{m\beta}} \Big) \Big(\sum_{\gamma} Z_{j\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{k\gamma}} \Big)$$

$$+ V^*_{ij,\alpha k} \Big(\sum_{\beta} Z_{k\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \Big) \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} \Big]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i\alpha\beta\gamma} \Big[V_{i\alpha,\beta\gamma} \Big(Z_{i\gamma} - \sum_{n\delta} Z_{i\delta} Z_{n\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{n\delta}} \Big) \Big(\sum_{j} Z_{j\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}} \Big)$$

$$+ V^*_{i\alpha,\beta\gamma} \Big(\sum_{j} Z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}} \Big) \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} \Big]$$

Si on limite ce développement aux termes d'ordre inférieur ou égal à 2 on obtient le développement de Jancovici et Schiff[8]

Bibliographie

1) S. T. Beliaev, V. G. Zelevinsky, Nucl. Phys., 39, (1962), 582

2) T. Marumori, M. Yamamura, A. Tokunaga, Prog. Theor. Phys., 31, (1964), 1009
T. Marumori, M. Yamamura, A. Tokunaga, K. Takaga, Prog. Theor. Phys., 32, (1964), 726

3) L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen, Rev. Mod. Phys., 35, (1963), 853
B. Sorensen, Nucl. Phys., A 97, (1967), 1
B. Sorensen, Nucl. Phys., A 119, (1968), 5
B. Sorensen, Prog. Theor. Phys., 39, (1968), 1468
B. Sorensen, Nucl. Phys., A 142, (1970), 392

4) E. R. Marshalek, "On the relation between Belieav- Zelevinsky and Marumori Boson expansion", Preprint

5) D. L. Hill, J. A. Wheeler, Phys. Rev., 89, (1953), 1102
J. J. Griffin, J. A. Wheeler, Phys. Rev., 108, (1957), 311

6) R. E. Peierls, J. Yoccoz, Proc. Phys. Soc., A 70, (1957), 981
R. E. Peierls, D. J. Thouless, Nucl. Phys., 38, (1962), 154

7) D. M. Brink, A. Weiguny, Nucl. Phys., A 120, (1968), 59
D. M. Brink, A. Weiguny, Phys. Lett., 26 B, (1968), 497
D. M. Brink, Cours, Orsay, (1969)

8) B. Jancovici, D. H. Schiff, Nucl. Phys., 58, (1964), 678

9) H. Ul, L. C. Biedenharn, Phys. Lett., 27 B, (1968), 608

10) V. Bargmann, Rev. Mod Phys., 34, (1962), 829

11) D. J. Thouless, Nucl Phys., 21, (1960, 225

12) M. Hage-Hassan, Thèse Doct. Specialité (3ème cycle), Lyon (1970)

13) S. Y. Li, A. Klein, Phys. Rev., 3, (1971), 1871

14) H. J. Lipkin, N. Meshkov, A. J. Glick, Nucl. Phys., 62, (1965), 188
D. A. Gassi, H. J. Lipkin, N? Mashkov, Nucl. Phys., 86, (1966), 321

15) S. C. Pang, A. Klein, R. M. Dreizler, Ann. of Phys., 49, (1968), 477