

ИФВЭ

СКУ 71-63

Ю.С.Федотов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ  
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ДЛЯ МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА ЧАСТИЦ  
ИЗ УСКОРИТЕЛЕЙ С СИЛЬНОЙ ФОКУСИРОВКОЙ

Серпухов 1971

Федотов Ю.С.

Использование нелинейных резонансов бетатронных колебаний для медленного вывода частиц из ускорителей с сильной фокусировкой. Серпухов, 1971.

27 стр. (ИФВЭ 71-63).  
Библиогр. 8.

В работе приводятся результаты теоретического исследования динамики нелинейных резонансов с точки зрения использования их для медленного вывода частиц из ускорителей с сильной фокусировкой. Приводятся формулы, удобные для расчета основных параметров системы медленного вывода - заброса пучка, требуемой величины резонансной гармоники, ширины резонансной полосы, эмиттанса выведенного пучка, а также фазовые траектории, характеризующие резонанс. Численные примеры приводятся для ускорителя ИФВЭ на 70 Гэв.

Препринт Института физики высоких энергий.  
Серпухов, 1971.

Fedotov Yu.S.

Application of Nonlinear Resonances of  
Betatron Oscillations in Slow Particle Ejection  
From the Accelerator with Strong Focusing.  
Serpuukhov, 1971.

27 p. (IHEP. 71-63).  
Ref. 8.

The results of theoretical investigations on dynamics of nonlinear resonances in the view of applying them in slow particle ejections from the accelerator with strong focusing are presented in the paper. There are given the formulas, suitable for calculations of the main parameters of the SE-system, i.e. of the beam displacement the magnitude of the resonance harmonics required, the width of the resonance band, ejected beam emittance, as well as the phase trajectories characteristic for the resonance. Numerical results are given for the 70 GeV IHEP accelerator.

Preprint. Institute of High Energy Physics.  
Serpuukhov, 1971.

Ю.С.Федотов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСОВ  
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ДЛЯ МЕДЛЕННОГО ВЫВОДА ЧАСТИЦ  
ИЗ УСКОРИТЕЛЕЙ С СИЛЬНОЙ ФОКУСИРОВКОЙ

M-24

## В в е д е н и е

Удобная возможность использования нелинейных резонансов для медленного вывода частиц из ускорителей объясняется тем, что эти резонансы разбивают фазовую плоскость на области с разным качеством движения <sup>/1/</sup>. Внутри областей, ограниченных замкнутыми сепаратрисами, чаще всего для колебаний с малой амплитудой, движение устойчиво. Амплитуда колебаний ограничена и лишь испытывает биения, максимальная величина которых не превышает обычно удвоенной амплитуды, которую частицы имели вдали от резонанса. Вне этих областей при принятии специальных мер по компенсации стабилизирующей кубической нелинейности <sup>/2/</sup> движение неустойчиво, неограничено. Величина области устойчивого движения при выбранной силе резонансной гармоники зависит от расстройки. Изменяя расстройку с необходимой скоростью, мы имеем возможность вытеснять частицы, находящиеся внутри сепаратрисы устойчивого движения, и заставлять их двигаться по фазовым траекториям, уходящим в бесконечность, — захватываться в резонанс.

Выбор силы резонансной гармоникки определяется требованием получения достаточно большого шага нарастания амплитуды (заброса) при движении частицы вдоль сепаратрисы неустойчивого движения, чтобы обеспечить хорошую эффективность вывода. Сепаратрисы, соответствующие началу и концу вывода, ограничивают фазовый объем выведенного пучка и при выбранном забросе определяют его величину.

При наличии нелинейных членов до третьей степени (более высокие степени не дают интересных с прикладной точки зрения результатов) уравнение радиальных бетатронных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 r}{d x^2} + \left( \frac{1}{R^2} + \frac{G}{P} \right) r = - \frac{\Delta H(x)}{P} - \frac{\Delta G(x)}{P} r - \frac{1}{2P} \frac{d^2 H}{d r^2}(x) r^2 - \frac{1}{6P} \frac{d^3 H}{d r^3}(x) r^3 \quad (1)$$

Здесь  $R$  - радиус орбиты,  $P = HR$  - импульс частицы,  $H(x)$  - поле на орбите,  $G(x)$  - градиент на орбите,  $\Delta H(x)$  и  $\Delta G(x)$  - возмущения поля и градиента на орбите.

Величины возмущений в правой части уравнения (1) предполагаются малыми, поэтому можно представить решения в виде:<sup>/3/</sup>

$$r(x) = a(x) \phi(x) + \text{k.c.} = 2 |a| |\phi| \cos(2\pi Q N + \chi(x) + \eta(x)), \quad (2)$$

$$r'(x) = a(x) \phi'(x) + \text{k.c.} = 2 |a| |\phi'| \cos(2\pi Q N + \chi(x) + \eta'(x)), \quad (3)$$

где  $a(x) = |a| e^{i\chi(x)}$  - комплексная амплитуда,  $\phi(x) = f(x) e^{i2\pi Q N}$  - функция Флоке,  $f(x) = |\phi| e^{i\eta(x)}$  - периодическая часть функции Флоке,  $f'(x) = |\phi'| e^{i\eta'(x)}$  - периодическая часть производной функции Флоке,  $Q$  - частота бетатронных колебаний,  $L$  - длина орбиты,  $N = \frac{x}{L}$  - номер оборота.

Усредненные уравнения для резонанса  $k$ -го порядка могут быть записаны в гамильтоновой форме<sup>/1/</sup> для канонических переменных  $|a|^2$  и  $\psi$

$$\frac{d|a|^2}{dN} = -\frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad (4)$$

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{\partial H}{\partial |a|^2}, \quad (5)$$

с гамильтонианом

$$H = \sum_{k=1}^4 \frac{|A_m|^k}{k} |a|^k \cos(k\psi + \alpha_m) + \sum_{k=1}^2 |B_n|^k |a|^{k+2} \cos(k\psi + \beta_n) + 2\pi\delta |a|^2 + \frac{3}{4} K_{\text{куб.}} |a|^4, \quad (6)$$

где  $\psi = 2\pi\delta N + \chi$  — обобщенная фаза;

$$A_m = \frac{2}{|w|} \int_0^L \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)} H(x)}{dx^{(k-1)}} \frac{1}{P} f^{*k} e^{-im \frac{2\pi x}{L}} dx = |A_m| e^{i\gamma_m} \quad (7)$$

амплитуда  $m$ -ой гармоники возмущения, создаваемого нелинейностью степени  $k-1$  в правой части уравнения (1);

$$B_n = \frac{2}{|w|} \int_0^L \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{(k+1)} H(x)}{dx^{(k+1)}} \frac{1}{P} |\phi|^2 f^{*k} e^{-in \frac{2\pi x}{L}} dx = |B_n| e^{i\gamma_n} \quad (8)$$

амплитуда  $n$ -ой гармоники возмущения, создаваемого нелинейностью степени  $k+1$  в правой части уравнения (1);

$$\delta = Q - \frac{m}{k} = Q - \frac{n}{k} \ll 1 \quad \text{— расстройка;} \quad (9)$$

$\alpha_m$  и  $\beta_n$  — фазы, зависящие от выбора начала системы координат и фазы возмущения  $\gamma$ ;  $w = \phi\phi^{*'} - \phi'\phi^* = -2im$  — нормировка функций Флоке;

$$(10)$$

$$K_{\text{куб.}} = \frac{1}{w} \int_0^L \frac{1}{3P} \frac{d^3 H(x)}{d r^3} |a|^4 dx \quad (10)$$

коэффициент, учитывающий нелинейный сдвиг частоты за счет кубической нелинейности.

Из (6) видно, что наряду с резонансом  $k$ -го порядка нелинейность может возбуждать резонанс  $k-2$ -го порядка. Так, для ускорителя ИФВЭ возможны резонансы вида:

а) четвертого порядка на 40-й, 39-й и 38-й гармониках кубической нелинейности при  $Q = \frac{40}{4} = 10$ ,  $Q = \frac{39}{4} = 9,75$ ,  $Q = \frac{38}{4} = 9,5$ ;

б) третьего порядка на 29-й и 30-й гармониках квадратичной нелинейности при  $Q = \frac{29}{3} = 9^{2/3}$ ,  $Q = \frac{30}{3} = 10$ ;

в) второго порядка на 19-й и 20-й гармониках кубической нелинейности и градиента при  $Q = \frac{19}{2} = 9,5$ ,  $Q = \frac{20}{2} = 10$ ;

г) первого порядка на 10-й гармонике квадратичной нелинейности и 20-й гармонике градиента при  $Q = 10$ .

Как известно<sup>/1/</sup>, постоянная составляющая кубической нелинейности (член  $\frac{3}{4} K_{\text{куб.}} |a|^4$  в гамильтониане) вызывает стабилизирующее действие на резонансы бетатронных колебаний. С прикладной точки зрения при использовании нелинейного резонанса для вывода ограничение амплитуды вызывает уменьшение эффективности вывода. Практически существенное влияние кубическая нелинейность оказывает лишь при максимальных полях в ускорителе. Компенсация ее в этом случае значительно улучшает характеристики выведенного пучка<sup>/2/</sup>, поэтому в дальнейшем считается  $K_{\text{куб.}} = 0$ .

Поскольку гамильтониан (6) явно не зависит от  $N$ , то уравнение  $H = \text{const}$  представляет собой уравнение фазовых траекторий вблизи резонанса. Система (4) - (5) имеет особые решения при

$$\frac{d|a|^2}{dN} = \frac{d\psi}{dN} = 0. \quad (11)$$

Эти решения на плоскости  $(r, r')$  представляют собой фиксированные точки

$$r_{\varphi} = 2 |a| |\phi| \cos \left( 2\pi \frac{m}{k} N + \psi_{\varphi} + \eta + \gamma \right), \quad (12)$$

$$r'_{\varphi} = 2 |a| |\phi| \sin \left( 2\pi \frac{m}{k} N + \psi_{\varphi} + \eta' + \gamma \right), \quad (13)$$

которые за  $k$  или  $k-2$  оборотов повторяют сами себя. Характер движения вблизи этих точек можно исследовать обычным методом по Ляпунову<sup>/4/</sup>.

Обычно решение  $|a| |\phi| = 0$  является устойчивым (особая точка-центр), а  $|a| |\phi| \neq 0$  - неустойчивым (особая точка-седло). Уравнение  $H = H(|a| |\phi|, \psi_{\varphi})$  представляет собой уравнение фазовых траекторий-сепаратрис, проходящих через фиксированные точки. При медленном изменении расстройки  $\delta$  (медленный вывод) частицы, вышедшие из области устойчивости, будут двигаться практически по сепаратрисам.

Удобно рассматривать свойства решений системы (4) - (5) на нормализованной фазовой плоскости, где в качестве независимой переменной взята фаза функции Флоке<sup>/3/</sup>

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{|w| dx}{2 |\phi|^2} \quad (14)$$

Нормализованное отклонение записывается как

$$r_{\text{н}} = \frac{r}{|\phi|} = 2 |a| \cos \left( \psi + 2\pi \frac{m}{k} N + \eta + \gamma \right) = 2 |a| \cos(\Phi + \chi).$$

Нормализованный угол равен

$$r'_{\text{н}} = \frac{dr_{\text{н}}}{d\Phi} = \frac{2|\phi|}{|w|} \frac{dr}{dx} - \frac{2}{|w|} \frac{d|\phi|}{dx} r = -2 |a| \sin(\Phi + \chi).$$

Операцию нормализации можно представить в форме

$$\begin{pmatrix} r_N \\ r'_N \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где матрица  $N$  имеет вид:

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{|\phi|} & 0 \\ -\frac{2|\phi|'_x}{|w|} & \frac{2|\phi|}{|w|} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Так как  $\det N = 1$ , то преобразование (15) численно сохраняет площади фазовых областей.

#### 1. Резонанс четвертого порядка на кубической нелинейности.

$$\frac{4Q}{\text{рез.}} = m.$$

При  $\alpha_m = \frac{\pi}{2}$  и  $\delta = Q - \frac{m}{4} > 0$  из (6) получаем фиксированные решения:

$$\psi_{\varphi} = \frac{3\pi}{8}; \quad \frac{7\pi}{8}; \quad \frac{11\pi}{8}; \quad \frac{15\pi}{8}; \quad (17)$$

$$|a|_{\varphi} = \sqrt{\frac{4\pi\delta}{|A_m|}}. \quad (18)$$

Уравнение сепаратрис в системе  $(r, r')$  имеет вид (здесь и далее индекс  $N$  опускается, так как используется только нормализованная система координат):

$$\frac{|A_m|}{16} r r' (r^2 - r'^2) + \frac{\pi\delta}{2} (r^2 + r'^2) = \frac{4\pi^2\delta^2}{|A_m|}. \quad (19)$$

На рис. 1 приведены фазовые траектории, определяемые уравнением (19) при  $\delta \neq 0$  и  $\delta = 0$ . Площадь, ограниченная замкнутой сепаратрисой устойчивого движения, равна:

$$S = \frac{32\pi\delta \ln(\sqrt{2}+1)}{|A_m|}$$

Вдали от резонанса фазовые траектории являются окружностями. При медленном изменении расстройки к нулю область устойчивого движения сокращается, фазовые траектории деформируются, но таким образом, что площадь, охватываемая ими, остается постоянной (адиабатический инвариант)

$$S_0 = 4 \pi |a|_0^2.$$

В случае равенства  $S = S_0$  частицы, имевшие начальную амплитуду  $|a|_0$ , получают возможность двигаться по фазовым траекториям, уходящим в область больших амплитуд, — захватываются в резонанс. Расстройка  $\delta_p$ , при которой  $S = S_0$ , определяет граничную резонансную частоту для частиц с начальной амплитудой  $|a|_0$ . Ширина резонансной полосы для рассматриваемого резонанса равна:

$$\delta_p = \frac{|A_m| |a|_0^2}{8 \ell n(\sqrt{2} + 1)}. \quad (20)$$

При частоте, равной граничной, амплитуда биений максимальна и равна:

$$|a|_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{2 \ell n(\sqrt{2} + 1)}} |a|_0 = 1,34 |a|_0.$$

Уравнения движения в системе  $(r, r')$  имеют вид:

$$\frac{dr}{dN} = -\frac{|A_m|}{8} r (3 r'^2 - r^2) + 2 \pi \delta r', \quad (21)$$

$$\frac{dr'}{dN} = -\frac{|A_m|}{8} r' (3 r^2 - r'^2) - 2 \pi \delta r. \quad (22)$$

При практическом осуществлении вывода на выбранном азимуте ускорителя желательно, чтобы частицы в резонансе двигались по фазовой траектории, соответствующей  $r = r_{\max}$ , т.е. по огибающей. На плоскости  $(r, r')$  огибающая определяется как  $r = 2 |a|$ ,  $r' = 0$ .

При  $\delta = 0$  уравнения сепаратрис из (19) определяются формулами

$$r = 0; \quad r' = 0; \quad r'' = \pm r.$$

Из уравнения (21) при  $\delta = 0$  получаем скорость изменения отклонения вдоль сепаратрисы  $r' = 0$

$$\frac{dr}{dN} = \frac{|A_m|}{8} r^3.$$

Интегрируя это уравнение за 4 оборота от  $r_1$  до  $r_2$ , получаем необходимую силу резонансной гармоники, обеспечивающую заброс частицы,

$$\text{равный } \Delta r = |r_2 - r_1|,$$

$$|A_m| = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}. \quad (23)$$

Сепаратрисы при  $\delta = \delta_p$  и  $\delta = 0$  ограничивают фазовый объем выведенного пучка, который в данном случае равен:

$$\Delta S \approx 1,6 \sqrt{\frac{\pi \delta_p}{|A_m|}} (r_2 - r_1) \approx \frac{|a|_0}{2} (r_2 - r_1). \quad (24)$$

При учете импульсного разброса у частиц, который приводит к разбросу по частотам бетатронных колебаний, фазовый объем выведенного пучка будет больше, чем дает формула (24). Для уменьшения влияния неустойчивости поля главного магнита удобно использовать систему компенсации зависимости частоты  $Q$  от импульса<sup>/2/</sup>. В этом случае формула (24) будет верна и с учетом импульсного разброса.

## II. Резонанс третьего порядка на квадратичной нелинейности<sup>/2,5/</sup>

$$3Q_{\text{рез.}} = m$$

При  $a_m = -\frac{\pi}{2}$  и  $\delta = Q - \frac{m}{3} > 0$  из (6) получаем фиксированные решения:

$$\psi_\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{7\pi}{6}; \quad \frac{11\pi}{6}; \quad (25)$$

$$|a|_\varphi = \frac{4\pi\delta}{|A_m|}; \quad (26)$$

и уравнение сепаратрис

$$-\frac{|A_m|}{24} r' (3r^2 - r'^2) + \frac{\pi \delta}{2} (r^2 + r'^2) = \frac{32 \pi^3 \delta^3}{3 |A_m|^2}, \quad (27)$$

которое распадается на три уравнения прямых:

$$\left( r' - \frac{4 \pi \delta}{|A_m|} \right) \left( r' + \sqrt{3} r + \frac{8 \pi \delta}{|A_m|} \right) \left( r' - \sqrt{3} r + \frac{8 \pi \delta}{|A_m|} \right) = 0.$$

На рис. 2 приведены фазовые траектории, определяемые уравнением (27) при  $\delta \neq 0$  и  $\delta = 0$ .

Ширина резонансной полосы равна

$$\delta_p = \frac{|A_m| |a|_0}{2 \sqrt{3} \pi \sqrt{3}}; \quad (28)$$

максимальная амплитуда биений вблизи резонанса

$$|a|_{\max} = \frac{2 \pi |a|_0}{\sqrt{3} \pi \sqrt{3}} \approx 1,56 |a|_0,$$

уравнения движения

$$\frac{d r}{d N} = \frac{|A_m|}{4} (r'^2 - r^2) + 2 \pi \delta r', \quad (29)$$

$$\frac{d r'}{d N} = \frac{|A_m|}{2} r r' - 2 \pi \delta r; \quad (30)$$

величина резонансной гармоники, необходимая для получения заброса

$\Delta r = |r_2 - r_1|$  за три оборота вдоль сепаратрисы  $r' = 0$  при  $\delta = 0$ ,

$$|A_m| = \frac{4}{3} \frac{|r_2 - r_1|}{r_1 r_2}. \quad (31)$$

При расстройке  $\delta \neq 0$  вдоль сепаратрисы  $\Gamma' = \frac{4\pi\delta}{|A_m|}$  для такого же заброса требуется возмущение

$$|A_m| = \frac{4}{3} \frac{|r_2 - r_1|}{r_1 r_2} (1 + 3\sqrt{3}\pi\delta).$$

Величина фазового объема выведенного пучка равна

$$\Delta S = \frac{4\pi\delta_p}{|A_m|} |r_2 - r_1| \approx 1,56 |a|_0 |r_2 - r_1|, \quad (32)$$

### III. Резонанс второго порядка на кубической нелинейности. $m = 2 Q_{\text{рез.}}$

При частоте  $Q_{\text{рез.}} = m/2$  возможен нелинейный резонанс на гармонике кубической нелинейности  $n = 2 Q_{\text{рез.}}$  и гармонике градиента  $m = 2 Q_{\text{рез.}}$ . Вначале рассмотрим "чистый" нелинейный резонанс, а затем дадим оценку влияния гармоники градиента.

При  $\beta_n = \frac{\pi}{2}$  и  $\delta = Q - \frac{n}{2} > 0$  из (6) получаем фиксированные решения:

$$\psi_\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \quad (33)$$

$$|a|_\varphi = \sqrt{\frac{\pi\delta}{|B_n|}}; \quad (34)$$

уравнения сепаратрис в системе  $(r, r')$

$$\frac{|B_n|}{8} (r^2 + r'^2) r r' + \frac{\pi\delta}{2} (r^2 + r'^2) = \frac{\pi^2 \delta^2}{|B_n|}. \quad (35)$$

На рис. 3а приведены траектории, определяемые уравнением (35) при  $\delta = 0$  и  $\delta \neq 0$ .

Ширина резонансной полосы равна

$$\delta_p = \frac{|B_n| |a|_0^2}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)}; \quad (36)$$

максимальная амплитуда биений вблизи резонанса

$$|a|_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln(\sqrt{2} + 1)}} |a|_0 \approx 1,34 |a|_0;$$

уравнения движения

$$\frac{d r}{d N} = \frac{|B_n|}{4} (r^3 + 3 r r'^2) + 2 \pi \delta r', \quad (37)$$

$$\frac{d r}{d N} = - \frac{|B_n|}{4} (3 r^2 r' + r'^3) - 2 \pi \delta r; \quad (38)$$

величина резонансной гармоники, необходимая для получения заброса

$\Delta r = |r_2 - r_1|$  за два оборота вдоль сепаратрисы  $r' = 0$  при  $\delta = 0$ ,

$$|B_n| = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}; \quad (39)$$

величина фазового объема выведенного пучка равна

$$\Delta S \approx |a|_0 (r_2 - r_1). \quad (40)$$

Усилить резонанс на кубической нелинейности можно введением

$m$ -ой гармоники градиента. При  $\alpha_m = \beta_n = \frac{\pi}{2}$  и  $\delta = Q - \frac{m}{2} = Q - \frac{n}{2} > 0$  из (6) получаем (здесь принято обозначение  $|G_m| = |A_m|$ ) фиксированные решения:

$$\psi_\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \quad (41)$$

$$|a|_\varphi = \sqrt{\frac{2\pi\delta - \frac{|G_m|}{2}}{2|B_n|}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot \Delta}{|B_n|}}, \quad \Delta = \delta - \frac{|G_m|}{4\pi}. \quad (42)$$

Из (42) видно, что введение гармоники градиента сдвигает резонансную частоту от  $\frac{Q}{4\pi} = \text{"целое"} + \frac{1}{2}$  на ширину параметрического резонанса  $\frac{|G_m|}{4\pi} / 3$ .

Уравнение сепаратрис имеет вид:

$$\frac{|B_n|}{8} (r^2 + r'^2) r r' + \frac{|G_m|}{4} r r' + \frac{\pi}{2} \left( \Delta + \frac{|G_m|}{4\pi} \right) (r^2 + r'^2) = \frac{\pi^2 \Delta^2}{|B_n|}. \quad (43)$$

На рис. 3б приведены траектории, определяемые уравнением (43) при  $\delta \neq 0$  и  $\delta = 0$ . Для оценки ширины резонанса можно пользоваться выражением для площади, ограниченной сепаратрисой устойчивого движения,

$$S = \frac{8 \pi \Delta \ell \ln(\sqrt{2} + 1)}{|B_n|} \sqrt{\frac{\Delta}{\Delta + \frac{|G_m|}{2\pi}}}. \quad (44)$$

Уравнения движения в системе  $(r, r')$ :

$$\frac{dr}{dN} = \frac{|B_n|}{4} (r^3 + 3 r r'^2) + 2 \pi \Delta \cdot r' + \frac{|G_m|}{2} (r + r'), \quad (45)$$

$$\frac{dr'}{dN} = - \frac{|B_n|}{4} (3 r^2 r' + r'^3) - 2 \pi \Delta \cdot r - \frac{|G_m|}{2} (r + r'). \quad (46)$$

Получить точную зависимость величины заброса от сил гармоник  $|B_n|$  и  $|G_m|$  можно из (45) и (46) лишь численным интегрированием. Для оценки  $\Delta r$  с точностью  $\sim 10\%$  можно пользоваться формулой

$$\frac{1}{r_2^2} = \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{|B_n|}{2|G_m|} \right) e^{-2|G_m|} - \frac{|B_n|}{2|G_m|}, \quad (47)$$

которая получена интегрированием (45) за два оборота при  $r' = 0$ .

Окончательный выбор соотношения между гармониками градиента и кубической нелинейности можно сделать только в реальной системе, исходя из технических возможностей и требований, предъявляемых к выведенному пучку.

При  $Q_{\text{рез.}} = \text{"целое"} + \frac{1}{2}$  возможен и резонанс четвертого порядка на гармонике  $m = 4Q_{\text{рез.}}$  кубической нелинейности. Согласно (17)–(18), для этого резонанса существуют 4 фиксированные точки, через которые проходят 4 сепаратрисы. При частоте  $Q_{\text{рез.}} = \text{"целое"} + \frac{1}{2}$  эти

точки попарно через два оборота повторяют сами себя, не проходя через две других, т.е. существуют две независимые орбиты, образующие фиксированные точки. Пучок в резонансе распадается на две независимые части.

### 1У. Резонанс первого порядка на квадратичной нелинейности.

При целом значении частоты возможны все резонансы одновременно. Здесь будет рассмотрен резонанс на квадратичной нелинейности и с добавлением гармоник градиента. Последний резонанс используется для медленного вывода из ускорителя ЦЕРНа. Приводимая ниже трактовка несколько отличается от известной /6,7,8/.

С учетом только квадратичной нелинейности при  $\beta_n = \frac{\pi}{2}$  и  $\delta = Q - n > 0$  из (6) получаем фиксированные решения

$$\psi_{\varphi} = \frac{\pi}{2}, \quad (48)$$

$$|a|_{\varphi} = \frac{4 \pi \delta}{3 |B_n|}; \quad (49)$$

уравнение сепаратрис

$$\frac{|B_n|}{8} (r^2 + r'^2) r' + \frac{\pi \delta}{2} (r^2 + r'^2) = \frac{32 \pi^3 \delta^3}{27 |B_n|^2}. \quad (50)$$

На рис. 4а приведены траектории, определяемые уравнением (50) при  $\delta \neq 0$  и  $\delta = 0$ .

Ширина резонансной полосы равна  $\delta_p = \frac{3 \sqrt{3}}{2 \sqrt{5} \pi} |B_n| |a|_0$ ; (51)  
максимальная амплитуда биений вблизи резонанса

$$|a|_{\max} = \frac{2 \sqrt{3}}{\sqrt{5}} |a|_0 \approx 1,55 |a|_0;$$

уравнения движения:

$$\frac{dr}{dN} = \frac{|B_n|}{4} (r^2 + 3 r'^2) + 2 \pi \delta r', \quad (52)$$

$$\frac{dr'}{dN} = -\frac{|B_n|}{2} r r' - 2 \pi \delta r; \quad (53)$$

величина резонансной гармоники для заброса  $\Delta \Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$  вдоль сепаратрисы  $\Gamma' = 0$  при  $\delta = 0$

$$|B_n| = 4 \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad (54)$$

а при расстройке  $\delta \neq 0$  вдоль сепаратрисы  $\Gamma' \approx -\frac{4\pi\delta}{|B_n|}$

$$|B_n| = 4 \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 \Gamma_2} (1 - \sqrt{3}\pi\delta);$$

величина фазового объема выведенного пучка равна

$$\Delta S \approx 6 \sqrt{\frac{3}{5}} |a|_0 (\Gamma_2 - \Gamma_1) \approx 4,65 |a|_0 (\Gamma_2 - \Gamma_1). \quad (55)$$

Из (54) видно, что по сравнению с резонансом третьего порядка для одинакового заброса здесь требуется в три раза большая сила резонансной гармоники. Усилить квадратичный резонанс можно введением

гармоники градиента  $|G_m|$  с  $m = 2Q$  рез.

При  $\alpha_m = \beta_n = \frac{\pi}{2}$  и  $\delta = Q - n = Q - \frac{m}{2} > 0$  фиксированные решения определяются из уравнений

$$1 - 2 \cos 2\psi_\varphi = x \operatorname{ctg} \psi_\varphi, \quad (56)$$

$$|a|_\varphi = -\frac{|G_m|}{|B_n|} \frac{\cos 2\psi_\varphi}{\cos \psi_\varphi}, \quad (57)$$

где  $x = \frac{4\pi\delta}{|G_m|}$ . При  $\Delta = \delta - \frac{|G_m|}{4\pi} > 0$  ( $x \gg 1$ ) решения этих уравнений равны (с точностью  $\sim 3\%$ )

$$\psi_\varphi = \frac{\pi}{4} \left( 1 + \frac{x-1}{6} \right), \quad (58)$$

$$|a|_\varphi = \frac{26}{15} \frac{\pi \Delta}{|B_n|}. \quad (59)$$

Существуют решения и при  $|x| < 1$ , но они не имеют практического значения для вывода. Как видно из (59), добавление гармоник градиента и здесь сдвигает резонансную частоту на ширину параметрического резонанса.

Для смешанного резонанса нет простого аналитического выражения для сепаратрисы устойчивого движения. На рис. 4б приведена сепаратриса, полученная интегрированием уравнений движения

$$\frac{d r}{d N} = \frac{|B_n|}{4} (r^2 + 3 r'^2) + \frac{|G_m|}{2} (r + r') + 2 \pi \Delta \cdot r', \quad (60)$$

$$\frac{d r'}{d N} = -\frac{|B_n|}{4} r r' - \frac{|G_m|}{2} (r + r') - 2 \pi \Delta \cdot r. \quad (61)$$

Точную зависимость заброса от сил гармоник  $|G_m|$  и  $|B_n|$  можно получить численным интегрированием этих уравнений. Для оценок с точностью  $\sim 5\%$  можно пользоваться формулой

$$r_2 = \frac{1}{\frac{1}{r_1} - \frac{|B_n|}{4}} \left( 1 + \frac{|G_m|}{2} \right), \quad (62)$$

полученной из (60) при  $r' = 0$  за один оборот. Площадь фазовой области выведенного пучка равна (с точностью  $\sim 5\%$ )

$$\Delta S = \frac{2 \pi \Delta_p}{|B_n|} (r_2 - r_1). \quad (63)$$

Для оценки ширины резонанса  $\Delta_p$  при  $|G_m| > 0$  (что практически всегда выполнимо) можно использовать формулу, определяющую площадь устойчивого движения (с точностью  $\sim 5\%$ )

$$S = \frac{6 \pi \Delta^3}{|B_n|^2 \left( \Delta + \frac{|G_m|}{4\pi} \right)}. \quad (64)$$

Вблизи  $Q_{\text{рез.}} = \text{"целое"}$  возможен также и резонанс третьего порядка. В этом резонансе существуют три фиксированные точки и три независимые сепаратрисы неустойчивого движения, через них проходящие.

При выводе пучок будет распадаться на три части, что может быть удобным при выводе на три направления одновременно.

При резонансе на целом  $Q$  необходимо учесть влияние на нелинейный резонанс целой гармоники возмущений поля  $|h_m| = |A_m|$ , приводящей к искажению замкнутой орбиты. При согласном включении гармоники нелинейности и поля ( $\alpha_m = \beta_n = \frac{\pi}{2}$ ) и  $\delta > 0$  из (6) получаем:

$$\psi_\varphi = \frac{\pi}{2}. \quad (65)$$

$$|a|_\varphi = \frac{2\pi\delta}{3|B_n|} \pm \sqrt{\frac{4\pi^2\delta^2}{9|B_n|^2} - \frac{|h_m|}{3|B_n|}}, \quad \delta > \frac{1}{2\pi} \sqrt{3|h_m||B_n|}, \quad (66)$$

причем решение со знаком "+" неустойчиво, а со знаком "-" устойчиво.

Таким образом, гармоника поля сдвигает устойчивую точку - центр области устойчивого движения от нуля. При  $\delta_\varphi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{3|h_m||B_n|}$  оба решения сливаются в одно  $|a|_\varphi = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{|h_m|}{3|B_n|}}$ , площадь устойчивого движения равна нулю, т.е. собственно резонансной частотой является "целое"  $\pm \delta$ .

В реальной машине фаза возмущения поля произвольна, и точный учет его может быть сделан только численным интегрированием. Определить амплитуду и фазу гармоники возмущения поля можно из анализа искажений замкнутой орбиты. Численные оценки при допустимых  $|h_m|$  показывают, что гармоника поля не сильно искажает картину нелинейного резонанса.

При  $Q_{\text{рез.}} = \text{"целое"}$  на квадратичной нелинейности возможен резонанс связи горизонтального и вертикального движения. Гамильтониан связанных колебаний имеет вид:

$$H = 2|C_n| |a|_r |a|_z^2 \sin \psi_r - |B_n| |a|_r^3 \sin \psi_r + \\ + 2\pi\delta (|a|_r^2 + |a|_z^2), \quad (67)$$

где

$$C_n = \frac{1}{|W|} \int_0^L \frac{1}{P} \frac{d^2 H(x)}{dx^2} f_r^* |\phi|_z^2 e^{-i n \frac{2 \pi x}{L}} dx, \quad (68)$$

$$\psi_z = \chi_z + 2 \pi \cdot \delta \cdot N. \quad (69)$$

Если квадратичное возмущение создается линзами, расположенными в прямолинейных промежутках, то обычно  $|\phi|_r \approx |\phi|_z$ , поэтому можно положить  $|C_n| = |B_n|$ . В системе координат  $(r, r')$  уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dr}{dN} = \frac{|B_n|}{4} (3r'^2 + r^2) - 2|B_n| |a|_z^2 + 2\pi\delta r', \quad (70)$$

$$\frac{dr'}{dN} = -\frac{|B_n|}{2} r r' - 2\pi\delta r. \quad (71)$$

Отсюда при  $\delta > 0$  получаем фиксированные решения:

$$r_{\varphi}' = -\frac{4\pi\delta}{3|B_n|} \pm \sqrt{\frac{16\pi^2\delta^2}{9|B_n|^2} + \frac{8}{3}|a|_z^2}, \quad r_{\varphi} = 0, \quad (72)$$

$$r_{\varphi} = \pm 2 \sqrt{2|a|_z^2 - \frac{4\pi^2\delta^2}{|B_n|^2}}, \quad r_{\varphi}' = -\frac{4\pi\delta}{|B_n|}. \quad (73)$$

Решение (73), существующее при  $\delta < \delta_{\varphi} = \frac{\sqrt{2}|a|_z|B_n|}{2\pi}$ , неустойчиво.

При  $\delta > \delta_{\varphi}$  решение (72) со знаком "+" устойчиво, со знаком "-" неустойчиво. При  $\delta < \delta_{\varphi}$  оба решения (72) устойчивы.

Из приведенных формул видно, что замкнутая орбита устойчивой области движения при  $|a|_z \neq 0$  является смещенной относительно орбиты при  $|a|_z = 0$ . При  $\delta > \delta_{\varphi}$  уравнение фазовой траектории, проходящей через неустойчивую фиксированную точку, имеет вид:

$$\frac{|B_n|}{8} (r^2 + r'^2) r' - |B_n| |a|_z^2 r' + \frac{\pi \delta}{2} (r^2 + r'^2) - \frac{32 \pi^3 \delta^3}{27 |B_n|^2} - \frac{92 \pi \delta}{27} |a|_z^2 = 0, \quad (74)$$

Эта траектория довольно близка к траектории (50).

При  $-\delta\varphi < \delta < \delta\varphi$  существуют четыре фиксированные точки: устойчивые (72) и неустойчивые (73). Фазовые траектории, проходящие через неустойчивые точки, определяются уравнением

$$\frac{|B_n|}{8} (r^2 + r'^2) r' - |B_n| |a|_z^2 r' + \frac{\pi \delta}{2} (r^2 + r'^2) = 4 \pi \delta |a|_z^2,$$

которое распадается на два (см. рис. 4в)

$$r^2 + r'^2 = 8 |a|_z^2, \quad (75)$$

$$r' = -\frac{4 \pi \delta}{|B_n|}. \quad (76)$$

Прямая (76) является сепаратрисой неустойчивого движения. Она разделяет окружность (75) на две части. Одна из этих частей заполнена частицами, вторая пуста. При довольно быстром изменении частоты вблизи  $\delta = 0$  часть частиц может оказаться в пустой области и остаться невыведенной. Если вывод начинался с  $\delta > 0$ , то верхняя половина окружности при  $\delta = 0$  все еще будет заполнена частицами. Для полного вывода всех частиц необходимо изменить знак  $\delta$ , при  $\delta = -\delta\varphi$  верхняя область сожмется в точку - все частицы выведутся. Сдвиг сепаратрисы неустойчивого движения на величину  $\Delta r' = \frac{4 \pi \delta \varphi}{|B_n|}$  для частиц с  $|a|_z \neq 0$  приводит к существенному увеличению фазового объема выведенного пучка. Поскольку  $|a|_z < |a|_r$  для выводимого пучка, то на величину заброса учет двумерности движения влияет слабо. При добавлении гармони-

ки градиента картина резонанса с учетом связи существенно усложняется, сохраняя в основном свой характер.

#### У. Численный пример для ускорителя ИФВЭ на 70 Гэв

Гармоники нелинейности (7) или (8) можно создать линзами, расположенными в прямолинейных промежутках. В этом случае формулы (7) - (8) принимают простой вид. В таблице I приведены характеристики систем медленного вывода, рассчитанные по выше изложенной методике. Взяты следующие параметры ускорителя и пучка:  $|\phi| = 5$  м - модуль функции Флоке;  $A_1 = 30$  мм - минимальная амплитуда выводимого пучка;  $A_2 = 50$  мм - максимальная амплитуда выводимого пучка;  $A_0 = 5$  мм - амплитуда невозмущенного пучка;  $H = 12000$  э - поле на орбите;  $R = 194,125$  м - радиус орбиты;  $\ell = 3$  м - длина нелинейного возмущения;  $R_L = 8,5$  см - радиус нелинейной линзы;  $H_L$  - поле на полюсах линзы.

#### З а к л ю ч е н и е

Рассмотрение процессов, происходящих при нелинейных резонансах бетатронных колебаний, показывает большие возможности их использования для медленного вывода. Выбор типа резонанса и вида возмущения зависит от характера ускорителя, требований к выведенному пучку и технических возможностей создания нелинейного возмущения. Общими требованиями к выведенному пучку являются малость его эмиттанса и равномерность интенсивности в течение времени вывода. Последнее требование легче удовлетворить при достаточно широкой резонансной полосе. Как видно из таблицы I, наиболее подходящими резонансами являются резонанс третьего порядка по квадратичной нелинейности и резонанс второго порядка при совместном действии кубичной нелинейности и градиента. А особенно неподходящим является резонанс первого порядка при целом  $Q$ .

В заключение автор приносит благодарность В.И.Балбекову за многочисленные плодотворные обсуждения.

## Л и т е р а т у р а

1. A.Schoch. CERN Report, 52-21, 1958.
2. К.П.Мызников, В.М.Татаренко, Ю.С.Федотов. Препринт ИФВЭ 70-51, Серпухов, 1970.
3. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., Физматгиз, 1962.
4. А.М.Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
5. А.Машке, К.Саймон. "Система вывода для ускорителя на 200 Гэв". Труды Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. М., 1968.
6. H.G.Hereward. AR/Int., GS/61-5, 1961.
7. C.Bovet. MPS/DL Int/65-6, 1965.
8. P.Strolin. ISR-TH/66-41, 1966.

Рукопись поступила в издательскую группу  
5 июля 1971 года.

Таблица 1

Тип резонанса	Нелинейность	$ A_m  ;  B_n $	$\delta_p$	$\Delta s$ мм.мрад	$N_L$ , э
$4Q = 39$	кубичная	17780	$6.3 \times 10^{-4}$	0,32 п	13560
$3Q = 29$	квадратичная	90	$5.5 \times 10^{-3}$	π	4000
$2Q = 19$	кубичная	17780	$2.52 \times 10^{-3}$	0,64 п	13560
$2Q = 19$	кубичная + градиент	8890 0,26	$4.3 \times 10^{-3}$	0,85 п	6780 690
$Q = 10$	квадратичная	270	$48 \times 10^{-3}$	3 п	12000
$Q = 10$	квадратичная + градиент	100 0,85	$25 \times 10^{-3}$	2 п	4440 2250

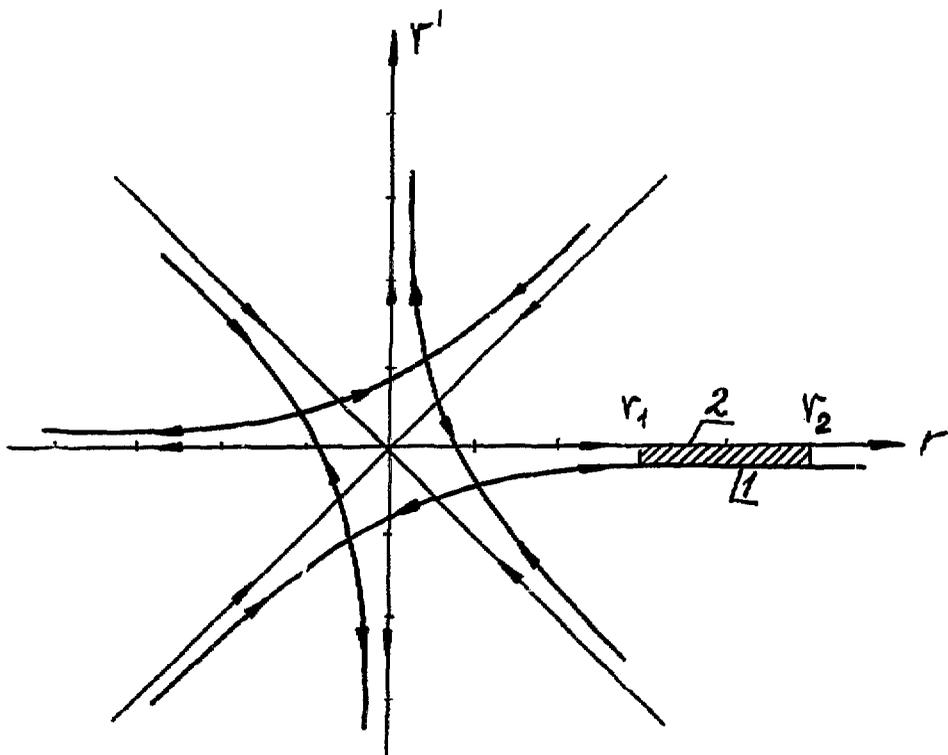


Рис. 1. Фазовые траектории вблизи резонанса четвертого порядка  
 ( 1 -  $\delta \neq 0$ ; 2 -  $\delta = 0$  ).

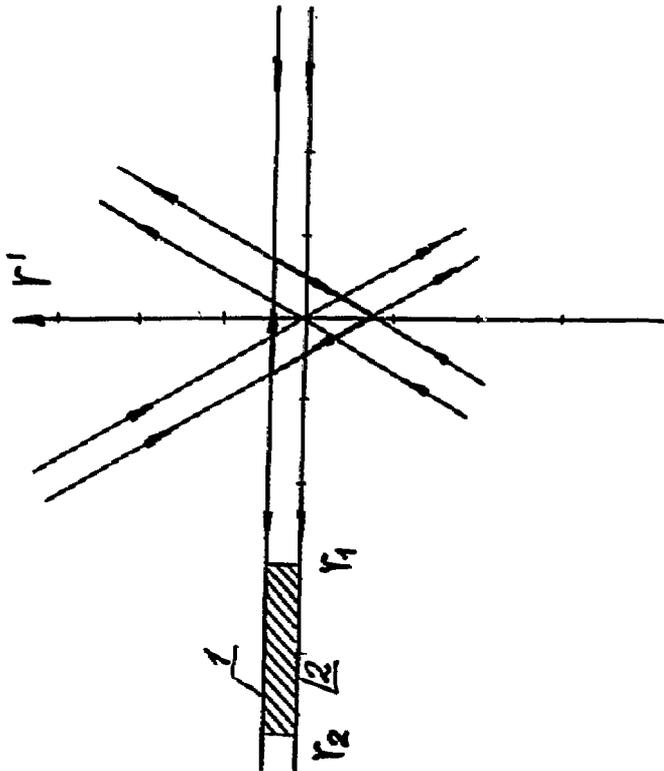
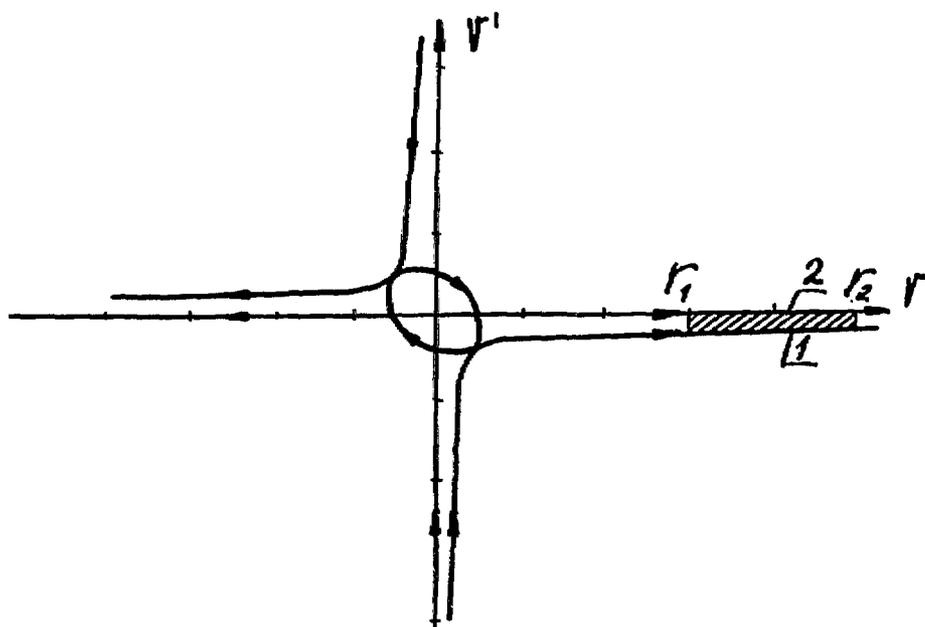
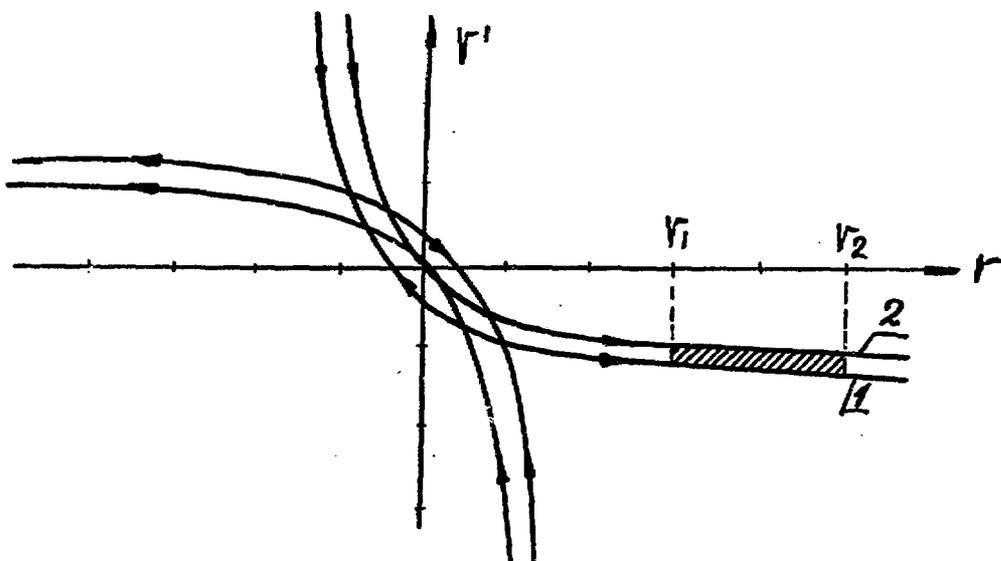


Рис. 2. Фазовые траектории вблизи резонанса третьего порядка  
(1 -  $\delta \neq 0$ ; 2 -  $\delta = 0$ ).



a)



b)

Рис. 3. Фазовые траектории вблизи резонанса второго порядка  
(1 -  $\delta \neq 0$ ; 2 -  $\delta = 0$ ).

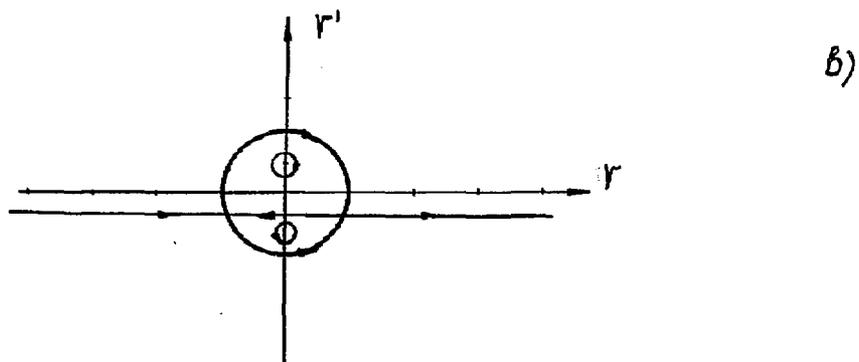
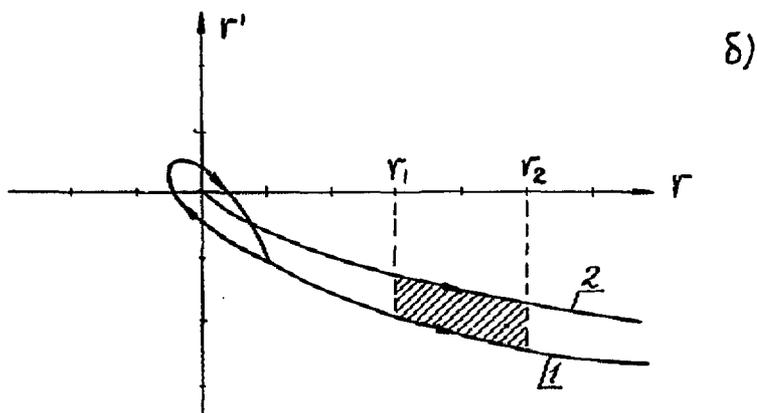
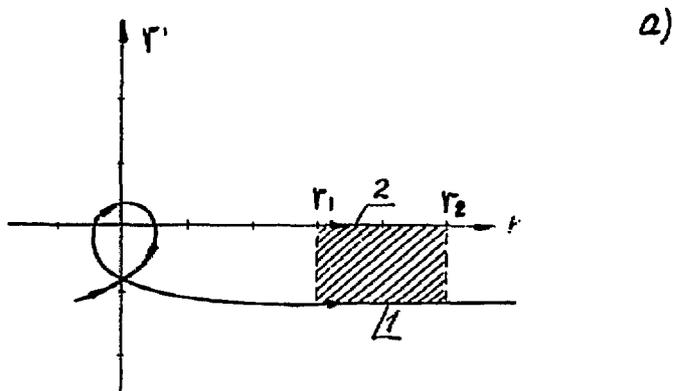


Рис. 4. Фазовые траектории вблизи резонанса первого порядка (1 -  $\delta \neq 0$ ; 2 -  $\delta = 0$ ).

Цена 14 коп.

Издательская группа И Ф В Э

Заказ 427. Тираж 290. 1,2 уч.-изд.л.Т-14655.

Редактор М.Л.Фоломешкина. Сентябрь 1971.