ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ
СПК 70-110

С.В. Клименко, О.И. Михайлов, А.М. Рыбин

УЧЕТ ИСКАЖЕНИЙ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕР

Серпухов 1970

Клименко С.В., Михайлов О.И., Рыбин А.М.

Учет искажений в оптических системах пузырьковых камер. Серпухов, 1970.

26 стр. (ИФВЭ. 70-110).
Библиогр. 2.

Рассмотрена система фотографирования классической пузырьковой камеры в общем случае в виде совокупности полюсов конического проектирования и системы преломляющих поверхностей. Реальная система фотографирования рассматривается как возмущение некоторой идеальной системы. Получена структура преобразования координат изображений точек пространства рабочего объема пузырьковой камеры от реальных к идеальным.

Препринт Института физики высоких энергий.
Серпухов,1970.

Klimenko S.V., Mikhaylov O.A., Rybin A.M.

Consideration of Distortions in Optical Systems of Bubble Chambers. Serpukhov, 1970.

26 p. (IHEP. 70-110).
Bibliogr. 2.

A system of taking pictures of a classical bubble chamber in a general case in the form of a set of poles of conical projection and of a system of refractive surfaces has been consictered. A real system of taking pictures is being consictered as a disturbance of some ideal system. A structure of transforming the coordinates of space point image of the bubble chamber operational volume from real into ideal ones has been obtained.

Preprint. Institute of High Energy Physics.
Serpukhov, 1970.

С.В. Клименко, О.И. Михайлов, А.М. Рыбин

УЧЕТ ИСКАЖЕНИЙ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕР

1. В в е д е н и е

1.1. Фотографическая регистрация событий, происходящих в рабочем объеме пузырьковой камеры, с помощью системы фотограмметрических камер является пока единственным средством съема информации с пузырьковой камеры.

Пространственная геометрия событий восстанавливается с помощью фотограмметрического метода, ставящего в соответствие набору координат, измеренных на пленке точек изображений траекторий частиц, набор пространственных координат точек, принадлежащих траекториям частиц в пространстве рабочего объема камеры.

В пузырьковых камерах классической конструкции, оптическим системам которых посвящена настоящая работа, фотографирование производится через набор сред с различными толщинами и показателями преломления. В данном случае фотограмметрический метод является сложной вычислительной процедурой, учитывающей оптические свойства сред и геометрические параметры системы фотографирования. В связи с тем, что юстировка элементов системы фотографирования несовершенна, а геометрические параметры ее известны с некоторыми погрешностями, причем параметры эти могут меняться в процессе работы пузырьковой камеры, прямой и точный учет их влияния при обработке каждого снимка затруднен вследствие значительного объема вычислений.

Обойти эти трудности можно следующим образом:

Построить достаточно простую математическую модель системы фотографирования пузырьковой камеры, которая описывает некоторую идеальную систему, достаточно близкую к реальной, так что реальная система может рассматриваться как идеальная с возмущениями.

Найти преобразование измеренных на пленке координат к некоторым идеальным координатам, которые связаны с пространством реального рабочего объема пузырьковой камеры идеальной оптической системой.

Такое преобразование будет учитывать несовершенство элементов системы фотографирования и ее юстировки в любом порядке возмущений. В нулевом порядке - это просто тождественное преобразование.

Цель данной работы состоит в том, чтобы выяснить в общем виде структуру такого преобразования для систем фотографирования классических пузырьковых камер.

1.2. Система фотографирования пузырьковой камеры в общем случае может быть представлена в виде совокупности полюсов конического проектирования M_{oj} ($j > 2$) с известной передачей углов, т.е. с известной функцией $q' = f(q)$, и системой преломляющих поверхностей (в частном случае плоскостей), определенным образом ориентированных относительно полюсов конической проекции (см. рис. 1).

Координаты любой точки C_i (x, y, z) пространства рабочего объема пузырьковой камеры могут быть найдены как координаты точки пересечения линий реконструкции, соответствующих данной (·) C_i для двух или более фотограмметрических камер. Под линией реконструкции фотокамеры j , соответствующей $(\cdot)\ C_i$, мы будем далее понимать последнее звено $M_{nj}\ C_i$ пространственной ломаной $C'_{ij}\ M_{oj} M_{1j} \dots M_{nj} C_i$, проходящей через изображение $C'_{ij}\ (\cdot)\ C_i$, полюс проекции M_{oj} и $(\cdot)\ C_i$ и в своих изломах $M_{nj}(\ n = 1, \dots, n)$, подчиняющейся закону преломления света.

Очевидно, для определения координат $(\cdot)\ C_i\ (x, y, z)$ должны быть известны координаты $(\cdot)\ M_{oj}$ и параметры, описывающие оптические свойства сред и положение их поверхностей раздела в пространстве.

В данной работе рассмотрено влияние возмущений оптической системы в виде наклонов и искривлений преломляющих поверхностей на координаты $(\cdot)\ M_n$ линии реконструкции и на ее направляющий вектор $\bar{K}_{n+1}$ и определена связь координат изображений точек пространства рабочего объема пузырьковой камеры, полученных идеальной оптической системой и оптической системой с возмущениями.

1.3. Введем камерную систему координат следующим образом:

плоскость xy совпадает с опорной плоскостью, т.е. с поверхностью рабочей жидкости, которую всегда без ограничения общности можно считать плоской;

ось z перпендикулярна этой плоскости.

Будем считать, что плоскость пленки параллельна опорной плоскости, а возмущения рассмотрим в виде наклонов поверхностей раздела промежуточных сред относительно опорной плоскости.

2. Соотношения между векторами $\bar{K}_n$

2.1. Воспользовавшись тем, что для плоских поверхностей нормаль $\bar{N}_n$ не зависит от координат, найдем связь между $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_{n+1}$ в идеальном случае и при наличии возмущений.

Рассмотрим плоскость (k) с нормалью $\bar{N}_k(\cos t_k(1)$, $\cos t_k(2)$, $\cos t_k(3))$, $\mathrm{mod}\ \bar{N}_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

При переходе через плоскость (k) вектор $\bar{K}_k$ переходит в $\bar{K}_{k+1}$, согласно закону Снеллиуса: $n_k \sin S_k = n_{k+1} \cdot \sin S_{k+1}$, где S_k, S_{k+1} – углы между $\bar{N}_k$ и $\bar{K}_k$, $\bar{K}_{k+1}$. Кроме того, $\bar{N}$, $\bar{K}$ и $\bar{K}$ компланарны. Тогда

$$n_k^2 (1 - (\bar{K}_k \bar{N}_k)^2) = n_{k+1}^2 (1 - (\bar{K}_{k+1} \bar{N}_k)^2) .$$

Откуда, обозначив $W_k = n_k / n_{k+1}$, получим первое соотношение:

$$(\bar{K}_{k+1} \bar{N}_k) = (1 - W_k^2 (1 - (\bar{K}_k \bar{N}_k)^2))^{1/2} = A_k . \qquad (1)$$

Второе соотношение получается из условия компланарности:

$$\begin{aligned} &(\bar{K}_{k+1} \times \bar{N}_k) = \bar{U}_k \sin S_{k+1} \\ &(\bar{K}_k \times \bar{N}_k) = \bar{U}_k \sin S_k \\ &(\bar{K}_{k+1} \times \bar{N}_k) = (\sin S_{k+1} / \sin S_k)(\bar{K}_k \times \bar{K}_k) = \\ &\qquad = W_k (\bar{K}_k \times \bar{N}_k) = \bar{B} , \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\bar{U}_k$ – вектор, лежащий в плоскости раздела сред (k) и (k + 1). Система (1) и (2) допускает однозначное решение для вектора $\bar{K}_{k+1}$, если известны векторы $\bar{K}_k$ и $\bar{N}_k$:

$$\bar{K}_{k+1} = \bar{N}_k (A_k - W_k (\bar{N}_k \bar{K}_k)) + W_k \bar{K}_k , \qquad (3)$$

т.е. получено общее рекуррентное соотношение для направляющих векторов линии реконструкции.

2.2. Используя соотношение (3), получим связь между $\bar{K}_1$ и $\bar{K}_{n+1}$ в идеальном случае, т.е. когда $\bar{N}_k = (0, 0, 1)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{aligned} &K_{k+1} (1, 2) = W_k K_k (1, 2) \\ &K_{k+1} (3) = A_k - W_k K_k (3) + W_k K_k (3) = \\ &= (1 - W_k^2 (1 - (\bar{K}_k \bar{N}_k)^2))^{1/2} = (1 - W_k^2 + W_k^2 K_k^2 (3))^{1/2} . \end{aligned}$$

Далее произведение обозначаем символом Π , а сумму U:

$$K^2_{k+1}(1,2) = W^2_k K^2_k(1,2) = \prod_1^k W_i K^2_1(1,2)$$
$$K^2_{k+1}(3) = 1 - W^2_k + W^2_k K^2_k(3) = 1 - \prod_1^k W^2_i + \prod_1^k W^2_i K^2_1 . \qquad (3)$$

Так как $\prod_1^k W_i^2 = (n_1 / n_{k+1})^2$, то

$$K_{k+1}(1,2) = (n_1 / n_{k+1}) K_1(1,2) , \qquad (3а)$$

$$K_{k+1}(3) = (1 - (n_1 / n_{n+1})^2 (1 - K^2_1(3))^{1/2} . \qquad (3б)$$

2.3. Рассмотрим влияние вектора $\bar{N}_k$ (точнее его возмущения) на компоненты вектора $\bar{K}_{k+1}$. "Возмущенная" нормаль имеет координаты:

$$\bar{N}'_k = (\cos(pi/2 + t_k(1)), \cos(pi/2 + t_k(2)), \cos t_k(3)),$$

где $t_k(1) \ll 1$, $t_k(2) \ll 1$, $t_k(3) \ll 1$, т.е.

$$\bar{N}'_k = (t_k(1), t_k(2), 1) .$$

Перепишем соотношение (3) для i -ой компоненты вектора $\bar{K}_{n+1}$ в виде:

$$K_{n+1}(i) = N_n(i)((1 - W^2_n + W^2_n(N_n(j) K_n(j))^2)^{1/2} -$$
$$- W_n K_n(j) N_n(j)) + W_n K_n(i) .$$

Здесь производится суммирование по повторяющимся индексам j. Дифференцируя последнее выражение по компонентам углов возмущений t , в первом порядке возмущений получим:

$$K'_{n+1}(1) = K_{k+1}(1) - (A_n - W_n K_n(3))\, t_n(1),$$

$$K'_{n+1}(2) = K_{n+1}(2) - (A_n - W_n K_n(3))\, t_n(2), \qquad (4)$$

$$K'_{n+1}(3) = K_{n+1}(3) - (W_n^2 K_n(3)/A_n - W_n)(K_n(1)t_n(1) + K_n(2)t_n(2)).$$

Здесь $A_n = (1 - W_n^2 + W_n^2 K_n^2(3))^{1/2}$. Линеаризуем A_n по компонентам вектора $\bar{K}_n$. Для малых углов $K_n(3) \cong 1$, $A_n \cong 1$. Не ограничиваясь малыми углами, будем предполагать, что $W_n = 1 + h_n$ и $h_n < 0{,}5$. Тогда $A_n = (K_n^2(3) - (2h_n + h_n^2)(1 - K_n^2(3)))^{1/2}$. Если считать $K_n(1) \sim K_n(2) \sim \overset{\circ}{h}_n$, $K_n^2(3) \sim 1 - \overset{\circ}{h}{}_n^2 \sim 1$, т.е. $A_n = (K_n^2(3) - (2h_n + h_n^2)\overset{\circ}{h}{}_n^2)^{1/2}$, и так как к тому же $K_n^2(3) \gg (2h_n + h_n^2)\overset{\circ}{h}{}^2$, то $A_n \simeq K_n(3)$.

В таком случае соотношение (4) перепишем в виде:

$$K'_{n+1}(1,2) = K_{n+1}(1,2) - (1 - W_n) K_n(3)\, t_n(1),$$

$$K'_{n+1}(3) = K_{n+1}(3) - (W_n^2 - W_n)(K_n(1)t_n(1) + K_n(2)t_n(2)).$$

2.4. Полученное преобразование векторов можно записать в матричном виде, как

$$\bar{K}'_{n+1} = \bar{K}_{n+1} + MT_n \bar{K}_n, \qquad (5)$$

где

$$MT_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & W'_n t_n(1) \\ 0 & 0 & W'_n t_n(2) \\ W''_n t_n(1) & W''_n t_n(2) & 0 \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

$$W'_n = W_n - 1, \quad W''_n = W_n(1 - W_n),$$

Используя результаты линеаризации, можно переписать соотношение (3) так же в матричном виде:

$$\bar{K}_{n+1} = MTid_n\bar{K}_n \quad , \qquad \text{где}$$

$$MTid_n = \begin{vmatrix} W_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Тогда вместо выражения (5) получим:

$$\bar{K}'_{n+1} = (MTid_n + MT_n)\bar{K}_n = \prod_{j=1}^{n} (MTid_j + MT_j)\bar{K}_1 . \tag{7}$$

Путем несложных, но громоздких преобразований можно показать, что в линейном приближении по

$$\prod_{j=1}^{n} (MTid_j + MT_j) = S_0 + S,$$

где матрицы S_0 и S имеют вид:

$$S_0 = \begin{vmatrix} n_1/n_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & n_1/n_{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} , \tag{8}$$

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & Q_n(1) \\ 0 & 0 & Q_n(2) \\ B(1) & B(2) & 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Матрица S_0 не зависит от возмущений, а матрица S линейна по возмущениям.

Таким образом, имеем:

$$\bar{K}'_{n+1} = (S_0 + S)\bar{K}_1 . \tag{10}$$

3. Соотношения для точек привязки M_k

3.1. Если имеется луч с направляющим вектором $\bar{K}$, который проходит через (•) M_o, то (•) его пересечения с плоскостью $(\bar{N}\bar{r}) = D$ определится из системы:

$$(\bar{N}\bar{M}) = D, \tag{11}$$

$$\bar{M} - \bar{M}_o = A\bar{K}. \tag{12}$$

Умножая (12) скалярно на $\bar{N}$, получим:

$$A(\bar{N}\bar{K}) = (\bar{N}\bar{M}) - (\bar{N}\bar{M}_o) = D - (\bar{N}\bar{M}_o),$$

что в свою очередь приводит к результату

$$A = (D - (\bar{N}\bar{M}_o))/(\bar{N}\bar{K}). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получим:

$$\bar{M} = \bar{M}_o + \bar{K}(D - (\bar{N}\bar{M}_o))/(\bar{N}\bar{K}). \tag{14}$$

С помощью последней формулы легко установить связь между $\bar{M}_n$ и $\bar{M}_{n-1}$:

$$M_n = M_{n-1} + K_n(D_n - M_{n-1}(j)N_n(j))/(K_n(j)N_n(j)). \tag{15}$$

Здесь по повторяющимся индексам j производится суммирование. В идеальном случае, когда $N_n(1,2) = 0$, $N_n(3) = 1$,

$$M_n(1,2) = M_{n-1}(1,2) + K_n(1,2)(D_n - M_{n-1}(3)/K_n(3),$$

$$M_n(3) = M_{n-1}(3) + D_n - M_{n-1}(3) = D_n \tag{16}$$

или, вводя обозначение $b(1,2) = K(1,2) / K(3)$,

$$M_n(1,2) = M_{n-1}(1,2) + b_n(1,2)(D_n - D_{n-1}),$$
$$M_n(3) = D_n$$

3.2. Здесь, как и выше, при наличии возмущений определим вектор нормали в виде:

$$\bar{N}'_n = (t_n(1), t_n(2), 1), \quad t_n(1,2) \ll 1.$$

Тогда из формулы (14), используя обозначения $K'(1,2)/K'(3) = b(1,2)$, $b(3) = 1$, получим:

$$M'_n(i) = M_{n-1}(i) + b_n(i)(D_n - M_{n-1}(3)) -$$
$$- b_n(i)(t_n(1) M_{n-1}(1) + t_n(2) M_{n-1}(2)) +$$
$$+ b_n(i)(D_n - M_{n-1}(3))(b_n(1) t_n(1) + b_n(2) t_n(2)).$$

Используя соотношения (10) и (16) и оставляя только линейные по возмущениям члены, после несложных преобразований получим:

$$M'_n(i) = M_n(i) - (n_1/n_n) b_1(i)(t_n(1) M_{n-1}(1) + t_n(2) M_{n-1}(2)) -$$
$$- (n_1/n_n)^2 b_1(i) M_{n-1}(3)(b_1(1) t_n(1) + b_1(2) t_n(2)) +$$
$$+ (n_1/n_n)^2 b_1(i) D_n (b_1(1) t_n(1) + b_1(2) t_n(2))$$

$i = 1, 2$,

$$M'_n(3) = M_n(3) - (t_n(1) M_{n-1}(1) + t_n(2) M_{n-1}(2)) +$$
$$+ (D_n - M_{n-1}(3))(n_1/n_n)(b_1(1) t_n(1) + b_1(2) t_n(2)).$$

3.3. Полученные соотношения можно переписать в матричном виде:

$$\overline{M}'_n = \overline{M}_n + R_n \overline{M}_{n-1} + \overline{D}_n \quad , \tag{17}$$

где

$$R_n = - \begin{vmatrix} b'_1(1)\, t_n(1) & b'_1(1)\, t_n(2) & b'_1(1)\, g'_n \\ b'_1(2)\, t_n(1) & b'_1(2)\, t_n(2) & b'_1(2)\, g'_n \\ t_n(1) & t_n(2) & g'_n \end{vmatrix} , \tag{18}$$

$$\overline{D}_n = (\, b'_1(1),\ b'_1(2), 1\,)\, g'_n\, D_n ,$$

$$b'_1 = (n_1 / n_n)\, b_1 \ , \quad g'_n = b'_1(1)\, t_n(1) + b'_1(2)\, t_n(2) \ ,$$

$$\overline{M}_n = R_o\, \overline{M}_{n-1} + \overline{H}_n \ ,$$

$$R_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \tag{19}$$

$$\overline{H}_n = ((D_r - D_{n-1})\, b_n(1),\ (D_n - D_{n-1})\, b_n(2),\ D_n\,) .$$

Тогда (17) можно переписать в виде:

$$\overline{M}'_n = (R_o + R_n)\, \overline{M}_{n-1} + \overline{H}_n + \overline{D}_n =$$

$$= (R_o + R_n)(R_c + R_{n-1})\, \overline{M}_{n-2} + (R_o + R_n)(\overline{H}_{n-1} + \overline{D}_{n-1}) + H_n + \overline{D}_n \ .$$

Вектор H_n можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит от возмущений, а другое нет.

$$H_n(1,2) = (D_n - D_{n-1})\, b'_1(1,2) + (D_n - D_{n-1})\, b'_1(1,2) \times$$

$$\times (-B_n(1)\, b_1(1) - B_n(2)\, b_1(2)) + (D_n - D_{n-1})\, Q_n(1,2) .$$

$$H_n(3) = D_n \ .$$

Следовательно, $\overline{H}_n = \overline{H}_{n1} + \overline{H}_{n2}$, где

$\overline{H}_{n1} = ((D_n - D_{n-1})b_1'(1), (D_n - D_{n-1})b_1'(2), D_n)$ – не зависит от возмущений,

$$\overline{H}_{n2} = \begin{vmatrix} (D_n - D_{n-1})(b_1'(1)(-B_n(1)b_1(1) - B_n(2)b_1(2)) + Q_n(1)) \\ (D_n - D_{n-1})(b_1'(2)(-B_n(1)b_1(1) - B_n(2)b_1(2)) + Q_n(2)) \\ 0 \end{vmatrix}$$ – линеен по возмущениям

Тогда получим:

$$\overline{H}_n + \overline{D}_n = \overline{H}_{n1} + (\overline{H}_{n2} + \overline{D}_n) = \overline{P}_{on} + \overline{P}_n ,$$

где

$$\overline{P}_{on} = \overline{H}_{n1}, \quad \overline{P}_n = \overline{H}_{n2} + \overline{D}_n .$$

В новых обозначениях

$$\overline{M}_n' = (R_o + R_n)\overline{M}_{n-1} + \overline{P}_{on} + \overline{P}_n =$$

$$= (R_o + R_n)(R_o + R_{n-1})\overline{M}_{n-2} + (R_o + R_n)(\overline{P}_{on-1} - \overline{P}_{n-1}) + (\overline{P}_{on} + \overline{P}_n) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(R_o + R_k)\overline{M}_o + \prod_{j=2}^{n}(R_o + R_j)(\overline{P}_{o1} + \overline{P}_1) + \ldots + (\overline{P}_{on} + \overline{P}_n) .$$

Всегда можно выбрать $\overline{M}_o = 0$ (начало координат совпадает с положением объектива). Тогда получим:

$$\overline{M}_n' = \prod_{j=2}^{n}(R_o + R_j)(\overline{P}_{o1} + \overline{P}_1) + \ldots + \prod_{j=k+1}^{n}(R_o + R_j)(\overline{P}_{ok} + \overline{P}_k) + \ldots +$$
$$+ (R_o + R_n)(\overline{P}_{on-1} + \overline{P}_{n-1}) + (\overline{P}_{on} + \overline{P}_n) . \qquad (20)$$

Матрицы типа $\prod_{j=k}^{n}(R_o + R_j)$ будем искать в первом порядке по возмущениям.

$$\prod_{j=k}^{n}(R_o + R_j) = (R_o + R_n)\ldots(R_o + R_k) = R_o^k + R_n R_o \ldots R_o + \ldots + R_o \ldots R_i \ldots R_o + \ldots$$

$$\ldots + R_o \ldots R_o R_k = R_o + R_n R_o + R_o R_k + \ldots + R_o R_i R_o + \ldots = R_o + G_k ,$$

где $G_k = R_n R_o + \dots + R_o R_i R_o + \dots + R_o R_k$ – матрица, линейная по возмущениям, $i = n-1,\ n-2, \dots,\ k+1$. Используя явный вид матриц R_o и R_i (см. (18) и (19)), получим для матрицы G_k следующее выражение:

$$G_k = \begin{vmatrix} \bigcup\limits_{j=k}^{n} b_1'(1)\, t_j(1) & \bigcup\limits_{j=k}^{n} b_1'(1)\, t_j(2) & b_1'(1)\, g_k' \\ \bigcup\limits_{j=k}^{n} b_1'(2)\, t_j(1) & \bigcup\limits_{j=k}^{n} b_1'(2)\, t_j(2) & b_1'(2)\, g_k' \\ t_n(1) & t_n(2) & 0 \end{vmatrix} \qquad (21)$$

Используя G_k, перепишем (20):

$$\overline{M}_n' = (\overline{P}_{on} + \overline{P}_n) + \bigcup_{k=1}^{n-1} \prod_{j=k+1}^{n} (R_o + R_j)(\overline{P}_{ok} + \overline{P}_k) =$$

$$= (\overline{P}_{on} + \overline{P}_n) + \bigcup_{k=1}^{n-1} (G_{k+1} + R_o)(\overline{P}_{ok} + \overline{P}_k).$$

С точностью до членов первого порядка по возмущению

$$\overline{M}_n' = \overline{P}_{on} + \overline{P}_n + \bigcup_{k=1}^{n-1} (R_o \overline{P}_{ok} + R_o \overline{P}_k + G_{k+1} \overline{P}_{ok}). \qquad (22)$$

Подставляя явные выражения для векторов $\overline{P}$ и матриц R и G, получим для координат точек привязки по компонентам соотношения:

$$M_n'(1) = S_1(t)\, b_1^2(1) + S_2(t)\, b_1(1)\, b_1(2) + \bigcup_{k=1}^{n} h_k b_1(1)\, n_1 / n_k + \qquad (23a)$$

$$+ \bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(1),$$

$$M_n'(2) = S_2(t)\, b_1^2(1) + S_1(t) b_1(1) b_1(2) + \bigcup_{k=1}^{n} h_k b_1(2) n_1/n_k + \bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(2), \tag{23б}$$

$$M_n'(3) = (1 + g_n')D_n + T_1(t) b_1(1) + T_2(t)\, b_1(2). \tag{23c}$$

Здесь коэффициенты $S(t)$ и $T(t)$ линейны по возмущениям.

$$S_1(t) = -\bigcup_{k=1}^{n-1} h_k B_k(1)(n_1/n_n),\ S_2(t) = -\bigcup_{k=1}^{n-1} h_k B_k(2)(n_1/n_n),$$

$$T_1(t) = \bigcup_{k=1}^{n-1} t_n(1)\, h_k(n_1/n_n),\quad T_2(t) = \bigcup_{k=1}^{n-1} t(2)\, h_k(n_1/n_n).$$

При отсутствии возмущений мы должны получить:

$$M_n'(1,2) = M_n(1;2) = \bigcup_{k=1}^{n} h_k b_1(1,2)\, n_1/n_k. \tag{24}$$

Следовательно,

$$M_n'(1) = M_n(1) + S_1(t)\, b_1^2(1) + S_2(t) b_1(1) b_1(2) + \bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(1), \tag{25a}$$

$$M_n'(2) = M_n(2) + S_2(t)\, b_1(2) + S_1(t) b_1(1)\, b_1(2) + \bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(2). \tag{25б}$$

По определению номер n присвоен опорной поверхности с уравнением $z = D_n$. Это эквивалентно тому, что $N_n' = (0, 0, 1)$, т.е.

$t_n(1) = t_n(2) = 0$, а так как $g' = (n / n)(b_1(1) t_n(1) + b_1(2) t_n(2))$, то автоматически получаем:

$$M_n'(3) = M_n(3) = D_n . \tag{25c}$$

4. Структура математической модели системы фотографирования

4.1. В программах /1/ геометрической реконструкции для камер классического типа широко используется следующая математическая модель системы фотографирования:

1. Поверхности раздела всех промежуточных сред считаются плоскопараллельными и перпендикулярными оптическим осям объективов.

2. Фотокамеры осуществляют коническое проектирование на так называемую идеальную пленку, которая параллельна опорной плоскости.

3. Все искажения, связанные с возмущениями системы фотографирования, учитываются в нелинейном преобразовании от реальной пленки к идеальной.

4. Линия реконструкции спределяется идеальными координатами.

Далее координаты, измеряемые на пленке, будем называть <u>реальными</u> координатами; реальные координаты, для которых учтены усадки пленки, будем называть <u>физическими</u>; а координаты, которые получаются при проектировании пространства камеры идеальной системой фотографирования на идеальную пленку – <u>идеальными.</u>

Преобразование от реальных координат к физическим тривиально и нас интересовать не будет.

Полученные выше результаты позволяют сформулировать в общем виде структуру нелинейного преобразования от физических координат к идеальным, которые используются в указанной модели системы фотографирования. Далее будем работать в системе координат с началом в центре конического проектирования. Тогда координаты точки пересечения проектирующего луча с плоскостью пленки определятся из системы:

$$\begin{cases} x / K_1 = y / K_2 = z / K_3 \\ z = -F \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -F\, b_1(1) \\ y = -F\, b_1(2)\,. \end{cases}$$

Если для удобства считать координаты (x, y) на пленке обращенными, то имеем связь:

$$x = F\, b_1(1), \tag{26а}$$

$$y = F\, b_1(2)\,. \tag{26в}$$

Если далее взять в пространстве камеры $(\cdot)$ $C = (C(1), C(2), C(3))$, через которую проходит луч $\overline{K}_{n+1}$ при отсутствии возмущений системы фотографирования и луч $\overline{K}'_{n+1}$ при их наличии, то

$$(M_n(1) - C(1))/K_{n+1}(1) = (M_n(2) - C(2))/K_{n+1}(2) = (M_n(3) - C(3))/K_{n+1}(3),$$

$$(M'_n(1) - C(1))/K'_{n+1}(1) = (M'_n(2) - C(2))/K'_{n+1}(2) = (M'_n(3) - C(3))/K'_{n+1}(3).$$

Отсюда

$$C(1,2) = M_n(1,2) - (M_n(3) - C(3))K_{n+1}(1,2)/K_{n+1}(3) =$$
$$= M_n(1,2) - b_{n+1}(1,2)(D_n - C(3))\,,$$

или

$$C(1,2) = M'_n(1,2) - b'_{n+1}(1,2)(D_n - C(3))\,.$$

Получаем следующие равенства:

$$M_n(1) - b_{n+1}(1)(D_n - C(3)) = M'_n(1) - b'_{n+1}(1)(D_n - C(3)), \tag{27а}$$

$$M_n(2) - b_{n+1}(2)(D_n - C(3)) = M'_n(2) - b'_{n+1}(2)(D_n - C(3)). \qquad (27в)$$

Из соотношений (3а) и (8–10) и определения величин $b(1,2)$ получим в идеальном случае:

$$b_{n+1}(1,2) = b_1(1,2)\, n_1 / n_{n+1},$$

а при наличии возмущений –

$$b'_{n+1}(1,2) = b'_1(1,2)\, n_1 / n_{n+1} + (n_1/n_{n+1})\, b'_1(1,2)(-B_n(1)\, b'_1(1) -$$
$$- B_n(2)\, b'_1(2)) + Q_n(1,2).$$

Подставляя в уравнение (27а) выражения для b_{n+1} и b'_{n+1}, а также соотношения (25а) и (25), получаем;

$$b_1(1)\bigcup_{k=1}^{n} h_k n_1/n_k - (n_1/n_{n+1})\, b_1(1)(D_n - C(3)) =$$
$$= b'_1(1)\Big(\bigcup_{k=1}^{n} h_k n_1/n_k - (n_1/n_{n+1})(D_n - C(3)) +$$
$$+ S_1(t)\, b'^2_1(1) + S_2(t)\, b'_1(1)\, b'_1(2) +$$
$$+ (n_1/n_{n+1})\, b'_1(1)(B_n(1)\, b'_1(1) + B_n(2)\, b'_1(2))(D_n - C(3)).$$

Обозначив $\bigcup_{k=1}^{n} h_k n_1/n_k + (n_1/n_{n+1})(C(3) - D_n) = L$ и учитывая, что $D_n - C(3) = z$, перепишем это в виде:

$$b_1(1) = b'_1(1) + L^{-1}(S_1(t) + z(n_1/n_{n+1})\, B_n(1))\, b'^2_1(1) +$$
$$+ L^{-1}(S_2(t) + z(n_1/n_{n+1})\, B_n(2))\, b'_1(1)\, b'_1(2).$$

Отсюда непосредственно получаем:

$$x^* = x'(1 + t_1(x'/F) + t_2(y'/F)). \qquad (28а)$$

Аналогичным образом из уравнения (27в) получаем:

$$y^* = y'(1+q_1(x'/F) + q_2(y'/F)), \quad (28б)$$

где $x^* = x - F(\bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(1) - Q_n(1)z)/L = x - DELx$,

$$y^* = y - F(\bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(2) - Q_n(2)z)/L = y - DELy .$$

Здесь через (x , y) обозначены идеальные координаты, а через (x′, y′) – физические. Таким образом,

$$x = x'(1+t_1(x'/F) + t_2(y'/F)) + DELx , \quad (29а)$$

$$y = y'(1+q_1(x'/F) + q_2(y'/F)) + DELy. \quad (29б)$$

Для упрощения этих выражений можно положить:

$$Q_n(j) \simeq Q(j), \quad j = 1, 2, \quad \text{для всех } n .$$

Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} h_k Q_k(j) + Q_n(j) \simeq Q(j)(Uh + z),$$

$$L \simeq Uh + z .$$

Следовательно ,

$$F(\bigcup_{1}^{n} h_k Q_k(j) + Q_n(j)z)/L \simeq$$

$$\simeq (FQ(j)(Uh+z))/(Uh+z) = F\,Q(j),$$

т.е. члены DELx и DELy слабо зависят от z , поэтому в выражениях (29 а и б) их можно компенсировать сдвигом координат в плоскости пленки.

Если обозначить физические координаты как

$$x_{ph} = x' + DELx, \quad y_{ph} = y' + DELy$$

и подставить полученные отсюда значения (x', y') в выражения (29а и б), то, пренебрегая квадратичными членами по возмущениям, получим преобразование от физических координат к идеальным, учитывающим в линейном приближении непараллельность поверхностей раздела промежуточных сред:

$$x = x_{ph} (1 + t_1 (x_{ph} / F) + t_2 (y_{ph} / F)), \tag{30а}$$

$$y = y_{ph} (1 + q_1 (x_{ph} / F) + q_2 (y_{ph} / F)). \tag{30б}$$

4.2. В приложении 1 показано, что возмущение оптической системы, обусловленное наклоном пленки относительно опорной плоскости, приводит к преобразованию физических координат в идеальном виде:

$$x = x' (1 + t(1)(x' / F) + t(2)(y' / F)), \tag{31а}$$

$$y = y' (1 + t(1)(x' / F) + t(2)(y' / F)), \tag{31б}$$

где $t(1)$ и $t(2)$ - малые параметры, определяющие возмущения.

В приложении II показано, что возмущения в виде искривлений поверхностей раздела промежуточных сред приводят к более сложному преобразованию:

$$x = x'(1 + t_1^* (x'/F) + t_2^*(y'/F) + t_3^*(x'/F)^2 + t_4^*(y'/F)^2), \tag{32а}$$

$$y = y'(1 + q_1^*(x'/F) + q_2^*(y'/F) + q_3^*(x'/F)^2 + q_4^*(y'/F)^2), \tag{32б}$$

где малыми параметрами, линейными по возмущениям, являются коэффициенты t^* и q^*. Учитывая выражения (30 – 32), напишем общее преобразование физических координат в идеальные, учитывающее возмущения оптической системы в виде дисторсий объективов, наклона пленки, наклона и искривления поверхностей раздела промежуточных сред и др.:

$$x = x'(1 + a_1 (x'/F) + a_2 (y'/F) + a_3 (x'/F)^2 + a_4 (y'/F)^2 + a_5 (x'/F)(y'/F)),$$

$$y = y'(1 + a_6 (x'/F) + a_7 (y'/F) + a_8 (x'/F)^2 + a_9 (y'/F)^2 + a_{10} (x'/F)(y'/F)).$$

Очевидно, что в эти выражения, при необходимости, можно еще добавлять члены более высоких степеней по (x'/F) и (y'/F).

Для конкретных систем фотографирования часто используется в некотором смысле симметризованное преобразование /2/

$$(x, y) = (1 + q_1(x'/F) + q_2(y'/F) + q_3(r'/F)^2)(x', y'),$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2$ или более сложное преобразование

$$x = x' + q_1 x'^2 + q_2 x'y' + q_3 y'^2 + q_4 x'^2 y' + q_5 x' r'^2 ,$$

$$y = y' + q_6 x' + q_7 x'y' + q_8 y' + q_9 x'y' + q_{10} y' r' .$$

Последнее преобразование записано для координат в единицах F, т.е. для $(x, y) = (X, Y)/F$.

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить В.В.Аммосова, П.А.Горичева, П.Ф.Ермолова, В.Г.Иванова, Е.П.Кузнецова и Е.Д.Щербакова за полезные обсуждения и помощь.

Литература

1. THRESH-MANUAL, CERN T.C. Program Library F.T.Solmitz, A.D. Johnson, T.B. Day - TVGP, UCRL Alvarez Group "Programmes Note", May 1965.
2. PYTHON-MANUAL, CERN T.C. Program Library.

Рукопись поступила в издательскую группу
14 декабря 1970 года.

П р и л о ж е н и е 1

Наклон пленки как возмущение

Пусть плоскости идеальной и возмущенной пленок определяются уравнениями:

$$(\bar{N}\,\bar{r}) = D, \quad (\bar{N}'\bar{r}') = D'$$

$\bar{N} = (0, 0, 1)$ – единичный вектор нормали к плоскости идеальной пленки. $\bar{N}' = (t(1), t(2), 1)$ – соответствующий вектор для возмущенной пленки, $t(1), t(2) \ll 1$. Точки пересечения луча $\bar{K} = (K(1), K(2), K(3))$, проходящего через (·) M_o с этими плоскостями найдутся из системы:

$$(\bar{N}\bar{M}) = D, \quad (\bar{N}'\bar{M}') = D',$$

$$\bar{M} - \bar{M}_o = A\bar{K}, \quad \bar{M}' - \bar{M}_o = A'\bar{K}.$$

Из этих систем следует решение:

$$\bar{M} = \bar{M}_o + (D - (\bar{M}_o\bar{N}))\bar{K} / (\bar{K}\bar{N}),$$

$$\bar{M}' = \bar{M}_o + (D' - (\bar{M}_o\bar{N}'))\bar{K} / (\bar{K}\bar{N}).$$

Можно считать, что $\bar{M}_o = (0, 0, 0)$. Обозначив $M(1) = x$, $M(2) = y$,

$b(1) = K(1)/K(3)$, $b(2) = K(2)/K(3)$,

получим:

$$x = (DK(1))/(K(3)N(3)) = Db(1), \; y = (DK(2))/(K(3)N(3)) = Db(2),$$

$$x = (DK(1))/(K(3)N(3)) = Db(1), \; y = (DK(2))/(K(3)N(3)) = Db(2),$$

$$x' = (D'K(2))/(K(1)t(1) + K(2)t(2) = K(3)) = D'b(1)(1 - b(1)t(1) - b(2)t(2)),$$

$$y' = (D'K(2))/(K(1)t(1) + K(2)t(2) = K(3)) = D'b(2)(1 - b(1)t(1) - b(2)t(2).$$

Поскольку $\bar{M}_o = (0, 0, 0)$, то $D = F$, $D' = F'$. Кроме того, $x = Fb(1)$, $y = Fb(2)$. Если пренебречь изменением масштаба изображения, т.е.

считать $D = D'$, то получаем соотношения для $\bar{r}$ и $\bar{r}'$:

$$x' = x(1 - t(1)(x/F) - t(2)(y/F))$$

$$y' = y(1 - t(1)(x/F) - t(2)(y/F)),$$

или обратное соотношение:

$$x = x'(1 + t(1)(x'/F) + t(2)(y'/F)),$$

$$y = y'(1 + t(1)(x'/F) + t(2)(y'/F)).$$

Приложение II

Учет возмущений в виде искривлений поверхностей сред

Если для простоты рассмотреть поверхности раздела сред как поверхности второго порядка, то компоненты нормали будут зависеть от координат x, y. При этом считаем, что радиус кривизны такой поверхности много больше линейных размеров рассматриваемой части поверхности.

Пусть (n) -я поверхность описывается уравнением:

$$(x - e_n(1))^2 / a_n^2 + (y - e_n(2))^2 / b_n^2 + (z - D_n)^2 / C_n^2 = 1.$$

По физическому смыслу задачи должно быть $C_n / a_n \ll 1$ $C_n / b_n \ll 1$. Кроме того, $x - e_n(1)/a \ll 1$, $y - e_n(2)/b \ll 1$. Тогда уравнение легко разрешить относительно z :

$$z = C(x - e_n(1))^2 / a^2 + C(y - e_n(2))^2 / b^2 + D_n. \tag{1}$$

Нормаль к поверхности с уравнением $f(xyz) = 0$ совпадает по направлению с $\mathrm{grad}\, f(xyz)$, т.е. $\bar{N}_n = \mathrm{drad}\, f_n(xyz) / \mathrm{mod}\, \mathrm{grad}\, f_n$:

$$N_n(1) = (2C / a_n^2)(x - e_n(1)) / \text{mod grad } f_n ,$$

$$N_n(2) = (2C / b_n^2)(y - e_n(2)) / \text{mod grad } f_n ,$$

$$N_n(3) = 1 / \text{mod grad } f_n ,$$

$\text{mod grad } f_n = 1$ с точностью до членов второго порядка. Таким образом, компоненты нормали есть

$$N_n(1) = C_n(x - e_n(1)) / a_n^2 , \; N_n(2) = C_n(y - e_n(2)) / b_n^2 . \qquad (II)$$

Ранее было получено соотношение для координат узловых точек плоских поверхностей, которыми можно апроксимировать поверхность второго порядка вблизи узловой точки:

$$M_n'(1) = M_n(1) + S^1(1) b_1^2(1) + S^1(2) b_1(1) b_1(2) + Uh_i a_i(1) , \qquad (III)$$

аналогично $M_n'(2)$

$$b(1) = x/F , \; b(2) = y/F ,$$

$a_i(1); \; S^1(1)$ линейны по возмущениям $t_j(1)$,

$a_i(2); \; S^1(2)$ линейны по возмущениям $t_j(2)$.

Подставляя (III) в (II) и учитывая выражения для $b_1(1)$ и $b_1(2)$, получим:

$$M_n'(1) = Q_x x / F + S^1(1)(x/F)^2 + S^1(2)(x/F)(y/F) + Uh_j a_j(1) ,$$

$$M_n'(2) = Q_y y / F + S^2(1)(x/F)^2 + S^2(2)(x/F)(y/F) + Uh_j a_j(2) ,$$

$$N_n(1) = (C_n/a_n^2) Q_x (x/F) + (C_n/a_n^2) S^1(1)(x/F)^2 + (C_n/a_n^2) S^1(2)(x/F)(y/F) +$$

$$+ (C_n/a_n) Uh_j a_j(1) - C_n e_n(1) / a_n^2 ,$$

$$N_n(2) = (C_n/a_n^2)\,Q_y(y/F) + (C_n/b_n^2)\,S^2(1)(x/F)^2 +$$

$$+ (C_n/b_n^2)\,S^2(2)(x/F)(y/F) + (C_n/b_n^2)\,Uh_j\,a_j(2) - C_n e_n(2)/b_n^2\,.$$

Для случая плоских поверхностей раздела были получены соотношения:

$$x = x'(1 + t_1^o x'/F + t_2^o y'/F),$$

$$y = y'(1 + q_1^o x'/F + q_2^o y'/F),$$

где t_1^o, t_2^o, q_1^o и q_2^o линейны по компонентам векторов нормали $N_n(1)$ и $N_n(2)$, причем t_1^o, q_1^o зависят только от $N_n(1)$, а t_2^o, q_2^o от $N_n(2)$. Используя полученные выражения для $N_n(1)$ и $N_n(2)$ и опуская члены высших порядков по возмущениям, получаем соотношения:

$$x = x'(1 + t_1^*(x'/F) + t_2^*(y'/F) + t_3^*(x'/F) + t_4^*(y'/F)),$$

$$y = y'(1 + q_1^*(x'/F) + q_2^*(y'/F) + q_3^*(x'/F) + q_4^*(y'/F)).$$

Коэффициенты t_j^* и q_j^* линейны по возмущениям, параметрами которых в данном случае будут малые величины вида C_n/a_n или C_n/b_n.

Рис.1. Поперечное сечение оптической системы пузырьковой камеры.

$\bar{K}_m$ – направляющий вектор луча в среде m . M_m – точка пересечения луча с поверхностью m , или точка привязки вектора $\bar{K}_m$. M_{oj} – положение объектива j . . $\bar{N}_m$ – вектор нормали к поверхности m . C_i – точка в рабочем объеме камеры. F – фокусное расстояние фотокамеры. Поверхность n – опорная поверхность.

Цена 14 коп.

Издательская группа И Ф В Э

Заказ 47. Тираж 290. 1,2 уч.-изд.л. Т-05721.

Редактор Н.В.Ежела. Январь 1971.