

**ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УССР  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**В.Ф.АЛЕКСИН, В.В.НЕМОВ, А.А.ШИШКИН**

**РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ  
В КОНФИГУРАЦИЯХ С ВИНТОВОЙ  
МАГНИТНОЙ ОСЬЮ  
ПРИ УЧЕТЕ ТОРОИДАЛЬНОСТИ II**

**ХАРЬКОВ  
1971**

ХФТИ-71/13

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УССР  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.Ф. Алексин, В.В. Немов, А.А. Шикин

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КОНФИГУРАЦИЯХ С ВИНТОВОЙ МАГНИТНОЙ ОСЬЮ  
ПРИ УЧЕТЕ ТОРОИДАЛЬНОСТИ II

Харьков-1971

В настоящей работе (~~являющейся продолжением работы [1]~~), рассматриваются резонансные явления в конфигурациях с винтовой магнитной осью при сворачивании в тор. Исследуется не только область точного резонанса [~~1~~], но и подходы к этой области из нерезонансной зоны. Указано на возможность усложнения магнитной структуры при наличии расстройки некоторой характерной частоты  $\omega_0$  от ее резонансного значения.

(Работа докладывалась на семинаре по физике плазмы.)

## I. Введение

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Рассматриваются резонансные явления, возникающие при сворачивании в тор вакуумной конфигурации с винтовой магнитной осью. Тороидальность учитывается как возмущение, накладываемое на конфигурацию с винтовой магнитной осью. При вычислениях предполагается, что шаг винтовой намотки и радиус круговой оси тора значительно больше малого радиуса тора. Это означает, что  $\delta = \frac{b}{R} \ll 1$  и  $\varepsilon = l \frac{b}{R} \ll 1$ , где  $b$  и  $R$  - соответственно малый и большой радиусы тора,  $l$  - число оборотов винтового проводника вокруг тора.

В [1,2] было показано, что исследуемая конфигурация вблизи магнитной оси качественно изменяется, когда частота вращения силовых линий вокруг винтовой магнитной оси  $\omega_0$  становится равной (или кратной) частоте "возмущающей силы"  $\Omega$ , появляющейся при учете тороидальности. Были изучены резонансные явления в случае точных резонансов, когда строго выполняется условие  $\omega_0 = \frac{m}{n}$  (здесь  $\omega_0$  измеряется в единицах  $\Omega$ ,  $m$  и  $n$  - целые числа и  $m \leq n$ ). Дифференциальные уравнения магнитных силовых линий решались методом усреднения (см. [3] стр. 296).

В настоящей работе на двух примерах  $\omega_0 = 1$  и  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  мы рассмотрим, что представляет собой исследуемая магнитная конфигурация не только в области точного резонанса, но и при подходе к этой области из нерезонансной зоны, то есть при наличии расстройки частоты  $\omega_0$  от ее резонансных значений.

Асимптотические методы при решении дифференциальных уравнений магнитных силовых линий будут применяться так, как это сделано в [3] стр. 170.

## 2. Метод решения дифференциальных уравнений силовых линий.

Выберем в качестве одной из координатных осей винтовую линию на торе и введем координаты Мерсье  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $S$ , где  $\rho$  - расстояние от координатной оси,  $S$  - длина дуги вдоль координатной оси,  $\omega = \Theta + \int \alpha ds$ ,  $\Theta$  - полярный угол, отсчитываемый от главной нормали  $\vec{\nu}$  к оси,  $\alpha$  - кручение оси (рис. I). Тогда компоненты магнитного поля могут быть представлены в виде разложения по степеням  $\rho$  и гармоникам  $u$  и  $\vartheta_s$  [1,2]. Здесь  $\rho = \frac{r}{r_0}$ ,  $u = \Theta + \gamma$ ,  $\gamma$  - периодическая функция от  $S$  [2], обращающаяся в нуль при  $\delta = 0$ ;  $\vartheta_s = \tau_0 + \ell t$ , где  $\tau_0$  - начальная фаза,  $t$  - угловая координата точек, принадлежащих винтовой линии на торе, отсчитываемая вдоль круговой оси тора,  $\ell$  - число оборотов винтового проводника вокруг тора.

В переменных  $x = \rho \cos u$ ,  $y = \rho \sin u$  и  $\tau = \ell t$  дифференциальные уравнения магнитных силовых линий будут иметь вид [1,2]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} - y(1+A) &= f_x, \\ \frac{dy}{d\tau} - x(1-A) &= f_y. \end{aligned} \quad (I)$$

где правые части уравнений  $f_x$  и  $f_y$  определяются такими соотношениями.

Для  $\omega_0 = 1$

$$\begin{aligned} f_x &= \alpha \sin \vartheta_s - 2Cxy + Ky(y^2 - 3x^2), \\ f_y &= \beta \cos \vartheta_s - C(x^2 - y^2) + Kx(3y^2 - x^2), \end{aligned} \quad (2)$$

для  $\omega_0 = \frac{1}{2}$

$$f_x = f_x^{(0)} + f_x^{(1)}, \quad f_y = f_y^{(0)} + f_y^{(1)},$$

где

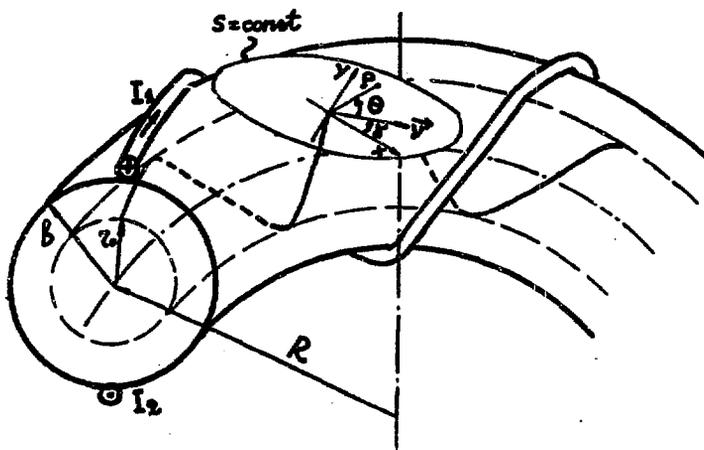


Рис. 1.

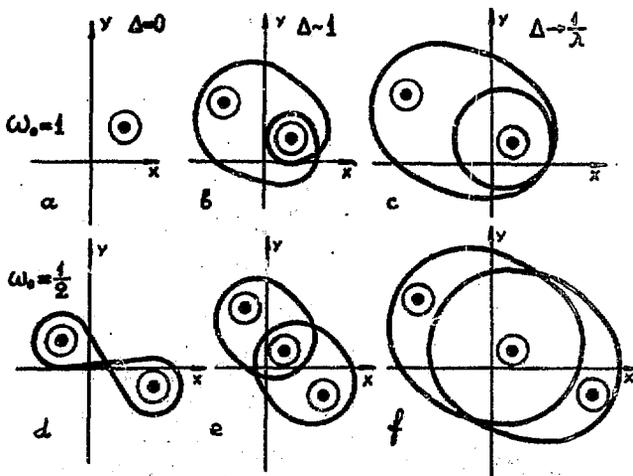


Рис. 2.

$$f_x^{(1)} = \delta [b_1 y \cos \vartheta_s + b_2 x \sin \vartheta_s], \quad (3)$$

$$f_y^{(1)} = \delta [b_3 x \cos \vartheta_s + b_4 y \sin \vartheta_s],$$

$f_x^{(0)}$  и  $f_y^{(0)}$  определяются выражениями (2).

Члены, содержащие гармоники  $\vartheta_s$ , представляют собой тороидальное возмущение.

В выражениях (2) и (3)

$$\alpha = M \delta \ln \delta^{-1} - N \delta,$$

$$\beta = M \delta \ln \delta^{-1} - P \delta,$$

причем постоянные  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $b_i$  выражаются через основные параметры прямых ловушек [1,2]. Отметим, что  $\omega_0$  определяется через основные параметры ловушек посредством соотношения  $\omega_0^2 = 1 - A^2$ .

Положим, что

$$\omega_0^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \lambda \cdot \Delta, \quad (4)$$

где  $\lambda \cdot \Delta$  - представляет собой расстройку между квадратом собственной частоты и квадратом ее резонансного значения,  $\lambda$  - малый параметр.

Тогда систему уравнений вида (1) можно свести к одному уравнению, которое представится следующим образом

$$\frac{d^2 x'}{d\tau^2} + \left(\frac{m}{n}\right)^2 x' = \lambda \left\{ f(\tau, x', \frac{dx'}{d\tau}) - \Delta x' \right\}, \quad (5)$$

где  $x = \lambda x'$ . Через  $f(\tau, x', \frac{dx'}{d\tau})$  обозначена некоторая функция, которая записывается с учетом (2) или (3).

Решение уравнения (5) ищется в виде выражения

$$x' = a \cos \left( \vartheta + \frac{m}{n} \tau \right) + \lambda u_1(a, \tau, \vartheta) + \dots, \quad (6)$$

где  $a$  - амплитуда колебаний,  $\vartheta$  - разность между полной фазой колебания и фазой внешнего воздействия. Величины  $a$  и  $\vartheta$  должны удовлетворять уравнениям (см. [3] стр. 172).

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= \lambda A_1(a, \vartheta) + \lambda^2 A_2(a, \vartheta) + \dots, \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \lambda B_1(a, \vartheta) + \lambda^2 B_2(a, \vartheta) + \dots,\end{aligned}\quad (7)$$

где  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $B_1(a, \vartheta)$  и т.д. - функции от  $a$  и  $\vartheta$ .

Так как правые части этих уравнений зависят от  $a$  и  $\vartheta$ , то проинтегрировать их в общем случае не удастся, но к этим уравнениям можно применить качественные методы исследования.

В последующих разделах, определив функции  $A_1(a, \vartheta)$ ,  $B_1(a, \vartheta)$  и т.д. для случаев  $\omega_0 = 1$  и  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ , мы найдем постоянные значения  $a$  и  $\vartheta$ , которые обращают правые части уравнений (7) в нуль. Это особые точки уравнений (7). В переменных  $X$  и  $Y$ , этим особым точкам соответствуют уравнения магнитных осей - гиперболической или эллиптической - в зависимости от характера особой точки.

### 3. Резонанс $\omega_0 = 1$ .

Для случая  $\omega_0 = 1$  уравнения (7) принимают такой вид:

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= \lambda^2 \Gamma_1 \sin(\tau_0 - \vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{d\tau} &= \lambda \frac{\Delta}{2} - \lambda^2 \left[ \frac{\Delta^2}{8} + \Gamma_0 a^2 + \frac{\Gamma_1}{2} \cos(\tau_0 - \vartheta) \right],\end{aligned}\quad (8)$$

где малый параметр  $\lambda \sim (\delta \epsilon \eta \delta^{-1})^{1/3}$ ,  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  - вещественные постоянные, зависящие от параметров прямых ловушек.

Величины  $a$  и  $\vartheta$  будут постоянными, если выполняются такие условия:

$$\begin{aligned}\sin(\tau_0 - \vartheta) &= 0, \\ a^3 + 3\zeta a + 2\eta &= 0,\end{aligned}\quad (9)$$

где

$$\zeta = \frac{1}{3} \left[ \frac{\Delta}{2\lambda\Gamma_0} - \frac{\Delta^2}{8\Gamma_0} \right], \quad \eta = \pm \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_0}.\quad (10)$$

Выражения (9) с учетом (10) являются уравнениями для определения постоянных  $a$  и  $\vartheta$ .

а). При  $\Delta = 0$  (случай точного резонанса  $\omega_0 = 1$ )  $\zeta$  обращается в нуль. Уравнения (9) дают одно значение для  $a$  при определенном  $\vartheta$  :

$$a = \left(-\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\right)^{1/3}, \quad \vartheta = \tau_0 + 2\pi k \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (II)$$

При  $\vartheta = \tau_0 + \pi(2k+1)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) величина  $a$  меняет знак на противоположный.

В переменных  $X$  и  $Y$  особой точке (II) соответствует уравнение эллиптической магнитной оси, причем значения  $X$  и  $Y$  будут порядка  $(\delta \epsilon n \delta^{-1})^{1/3}$  (рис. 2а). Этот результат совпадает с тем, который был получен в [2].

б). При  $\Delta \neq 0$  (считаем пока, что  $\Delta > 0$ ) число различных действительных значений  $a$  при фиксированном  $\vartheta$  зависит от знака величины  $\zeta$ .

Если  $\zeta > 0$ , то существует одно действительное значение

$$a = -2\tau \operatorname{sh} \frac{\varphi}{3}, \quad (12)$$

где  $\varphi = 3\tau \operatorname{sh} \eta/\tau^3$ ,  $\tau = \pm \sqrt{\zeta}$ , знак  $\tau$  должен совпадать со знаком  $\eta$ . Этой точке, также как и (II), соответствует уравнение эллиптической магнитной оси. Значения  $X$  и  $Y$  будут порядка  $(\delta \epsilon n \delta^{-1})^{2/3}$ .

Если  $\zeta < 0$ , то  $\eta^2 + \zeta^3 < 0$ , тогда из (9) при значении  $\vartheta = \tau_0 + 2\pi k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) получим три действительных различных корня

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\tau \cos \frac{\varphi}{3}, \\ a_2 &= 2\tau \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right), \\ a_3 &= 2\tau \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\varphi = a\epsilon \cos \eta/\tau^3$  и  $\tau = \pm \sqrt{|\zeta|}$ , знак  $\tau$  должен совпадать со знаком  $\eta$ .

Поскольку  $\zeta \sim \lambda^{-1}$ , то из выражений (13) можно установить, что  $a_1 \sim a_2 \sim \lambda^{-1/2}$  — соответствующие значения  $X$  и  $Y$   $\sim (\delta \epsilon n \delta^{-1})^{1/6}$  и  $a_3 \sim \lambda$  — соответствующие значения  $X$  и  $Y$   $\sim (\delta \epsilon n \delta^{-1})^{2/3}$ . При этом, как показывает исследование характера

особых точек, точки со значениями амплитуд  $a_1$  и  $a_3$  являются центрами, им соответствуют эллиптические магнитные оси, точка со значением амплитуды  $a_2$  является точкой типа седла. Эта точка определяет гиперболическую магнитную ось - ребро сепаратрисы. Качественная картина фазовой траектории приведена на рис. 2б.

в). Если устремить  $\Delta \rightarrow 1/\lambda$ , то  $\tau_0 \rightarrow 1/\lambda^2$  и, как видно из (13),  $a_1 \sim a_2 \rightarrow 1/\lambda$  (соответствующие значения  $x$  и  $y \rightarrow 1$ ), в то время как  $a_3 \rightarrow \lambda^2$  ( $x$  и  $y \rightarrow \delta \ln \delta^{-1}$ ).

Таким образом, эллиптическая и гиперболическая магнитные оси, соответствующие значениям амплитуд  $a_1$  и  $a_2$ , будут удалены от координатной оси на большие расстояния, чем в случае  $\Delta \sim 1$ . Эллиптическая магнитная ось, соответствующая значению  $a_3$ , приблизится к координатной оси до расстояний  $\sim \tau_0 \delta \ln \delta^{-1}$ . Так осуществится переход к нерезонансному случаю (рис. 2с).

Таким образом, мы видим, что при расстройке частоты  $\omega_0$  от резонансного значения  $\omega_0 = 1$  может наблюдаться появление новых магнитных осей, которые будут удалены от координатной оси на значительно большие расстояния, чем магнитная ось в случае точного резонанса  $\omega_0 = 1$ .

#### 4. Резонанс $\omega_0 = \frac{1}{2}$

Для случая  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  уравнения (7) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \lambda^2 a \Gamma_2 \sin(\tau_0 - 2\vartheta), \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \lambda \Delta - \lambda^2 \left[ \Delta^2 + \Gamma_2 \cos(\tau_0 - 2\vartheta) + \Gamma_3 a^2 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь параметр разложения  $\lambda \sim \delta^{1/2}$ ,  $\Gamma_i$  - вещественные коэффициенты, зависящие от основных параметров прямых ловушек.

Постоянные величины  $a$  и  $\vartheta$  будут определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ \cos(\tau_0 - 2\vartheta) &= \frac{\Delta}{\lambda \Gamma_2} - \frac{\Delta^2}{\Gamma_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$a_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda \Gamma_3} - \frac{\Delta^2}{\Gamma_3} - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}}, \quad \vartheta = \frac{\tau_0}{2} + \pi k \quad (k=0,1,2\dots) \quad (I6)$$

и

$$a_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{\lambda \Gamma_3} - \frac{\Delta^2}{\Gamma_3} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}}, \quad \vartheta = \frac{\tau_0}{2} + \frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0,1,2\dots) \quad (I7)$$

а). При  $\Delta = 0$  осуществляются особая точка (I5), а также (I6) или (I7) в зависимости от знака  $\Gamma_2/\Gamma_3$ . При этом выражения (I5) определяют точку типа седла, а (I6) или (I7) две точки типа центр. Таким образом, при точном резонансе  $\omega_0 = \frac{I}{2}$  наблюдается расщепление магнитной оси на две эллиптические с образованием гиперболической магнитной оси между ними. Самопересекающаяся фазовая траектория имеет вид, изображенный на рис. 2а. Гиперболическая магнитная ось будет смещена относительно координатной оси на расстояние порядка  $\tau_0 \delta \ln \delta^{-1}$ . Эллиптические магнитные оси будут удалены от координатной оси на расстояние порядка  $\tau_0 \delta^{1/2}$ . Этот результат совпадает с тем, который получен в [I].

б). При  $\Delta \neq 0$  (считаем, что  $\Delta \sim I$ ) меняется характер особой точки (I5). Она становится центром. Особая точка (I5) будет единственной, если  $\Delta/\Gamma_3 < 0$  в (I6) и (I7). Если  $\Delta/\Gamma_3 > 0$ , то помимо точки (I5) будут существовать еще четыре особых точки (I6) и (I7), причем в зависимости от знака  $\Gamma_2/\Gamma_3$  одна пара точек будет центрами, другая - точками типа седла (рис. 2е). Точки (I6) и (I7) имеют амплитуды  $a_i \sim \lambda^{-1/2}$  и соответствующие значения  $x$  и  $y$  будут порядка  $\lambda^{1/2}$  т.е.  $\delta^{1/4}$ .

в). Если устремить  $\Delta \rightarrow 1/\lambda$  (переход к нерезонансному случаю), то в выражениях (I6) и (I7)  $a_i \rightarrow \lambda^{-1}$ , соответствующие значения  $x$  и  $y \rightarrow I$  и особые точки (I6) и (I7) удалятся от координатной оси (рис. 2ф).

Таким образом, мы видим, что и в случае  $\omega_0 = \frac{I}{2}$  переход от точного резонанса к нерезонансному случаю (и наоборот) может происходить с образованием новых магнитных осей, которые при расстройке квадрата частоты  $\omega_0$  от квадрата ее резонансного

значения на величину порядка  $\delta^{1/2}$  удалены от координатной оси на расстояния порядка  $\tau_0 \delta^{1/4}$ . По мере увеличения расстройки вновь образовавшиеся магнитные оси будут удаляться на большие расстояния.

### 5. Заключение

Из рассмотрения, проведенного в [1,2] и настоящей работе, можно сделать такие выводы.

Когда конфигурация с винтовой магнитной осью сворачивается в тор, могут осуществляться три случая.

1) Нерезонансный случай,  $\omega_0$  не близко к  $\frac{m}{n}$ , где  $\omega_0$  - частота, с которой силовые линии обвивают невозмущенную магнитную ось,  $m$  и  $n$  - целые числа и  $m \leq n$ . В этом случае магнитная ось тороидальной конфигурации - пространственная кривая, которая удалена от положения магнитной оси прямой системы на расстояние  $\sim \tau_0 \delta \ln \delta^{-1}$ .

2) Случай точных резонансов  $\omega_0 = \frac{m}{n}$ . При  $\omega_0 = 1$  магнитная ось не расщепляется, но удалена от координатной оси на расстояние  $\sim \tau_0 (\delta \ln \delta^{-1})^{1/2}$  (рис. 2а). При  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  наблюдается расщепление магнитной оси на две эллиптические с образованием гиперболической магнитной оси между ними (рис. 2б). При этом эллиптические магнитные оси удалены от координатной оси на расстояние  $\sim \tau_0 \delta^{1/2}$ . При резонансах  $\omega_0 = \frac{1}{3}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{4}$  и т.д. возникает еще более сложная магнитная структура, но величина удаления магнитных осей от координатной оси не превосходит расстояний  $\sim \tau_0 \delta \ln \delta^{-1}$ .

3) Случай резонанса с малой расстройкой  $\omega_0 \approx \frac{m}{n}$ . Магнитная структура, существовавшая при точных резонансах может усложняться образованием новых дополнительных осей (рис. 2в и 2е). Если квадрат частоты  $\omega_0$  отличается от квадрата ее резонансного значения ( $\frac{m}{n}$ ) на величину порядка  $\lambda$  (см. выражение (4)), то образовавшиеся при расстройке частоты магнитные оси будут отстоять от координатной оси на расстоянии  $\sim \tau_0 \lambda^{1/2}$ . По мере увеличения расстройки частоты  $\omega_0$  новые магнитные оси удаляются

на расстояния порядка  $\tau_0$ . Вблизи координатной оси на расстоянии  $\sim \tau_0 \delta \ln \delta^{-1}$  остается одна эллиптическая магнитная ось (рис. 2с и 2е). Так осуществляется переход к нерезонансному случаю.

Авторы благодарят К.Н. Степанова за постоянный интерес к работе и полезное обсуждение.

### Л и т е р а т у р а

1. В.Ф.Алексин, В.В.Немов, А.А.Шишкин. Препринт ФТИ АН УССР, ХФТИ 70-72, 1970.
2. В.Ф.Алексин, В.В.Немов, А.А.Шишкин. Препринт ФТИ АН УССР, ХФТИ 70-25, 1970.
3. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Госиздат ФМЛ, Москва, 1963.

Ответственный за выпуск А.А. Шишкин

Харьков, ротاپринт ФТИ АН УССР, формат 60x84/16,  
печатных листов 0,8, заказ 93. тираж 240.  
Т-099II от 31/У-71 г., цена 8 коп.