

Ордена Ленина

ИАЭ-2180

Институт атомной энергии

им. И. В. Курчатова

А. Ф. Настоящий. А. П. Шевченко

Исследование структуры термоядерной
волны горения в слое плазмы,
удерживаемой материальными стенками

Москва 1972

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И.В.КУРИТОВА

А.Ф.Настоящий
Л.П.Шевченко

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕРМОЯДЕРНОЙ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ В СЛОЕ ПЛАЗМЫ,
УДЕРЖИВАЕМОЙ МАТЕРИАЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

М о с к в а
1972

Ключевые слова:
плазма, расчет, исследование,
структура, термоядерные волны,
горение, скорость распространения,
бесконечный слой, холодная
плазма, горячая плазма, критерий,
устойчивость, тепловое равновесие.

0601.

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуются условия существования, скорость распространения и структура фронта термоядерной волны горения в бесконечно протяженном слое плазмы, удерживаемой тяжелыми материальными стенками. Задача исследована тремя методами: 1) посредством нахождения приближенных аналитических решений для "холодной" и "горячей" плазмы и последующей сшивки решений; 2) методом фазовой плоскости; 3) численным методом.

Показано, что волна горения возможна только в той области плотностей и температур, где эффективный источник тепла, включающий помимо теплового эффекта реакции синтеза также тепловые потери на стенки и излучение плазмы, имеет отрицательную производную по температуре. Это условие является одновременно критерием устойчивости теплового равновесия за фронтом волны. В обратном случае должно иметь место быстрое остывание плазмы.

Найдено, что скорость волны горения в ДТ-плазме остается меньше скорости звука вплоть до температур $\approx 5 \cdot 10^8$ К. Температура на фронте волны является резко меняющейся функцией координат в области холодной плазмы, но остается плавной функцией вблизи теплового равновесия (рис.6).

Приводятся оценки энергии, необходимой для возбуждения волны горения в ДТ-плазме.

Техред Н.И.Мазаева.

Корректор В.П.Горячева.

Т-18687.15.12.71г.Формат 60x90 /8.

Уч.-изд.л.2,73.Тир.150 экз.Зак.9374.

ОНТИ.ИАЭ.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с созданием мощных лазеров было предложено использовать лазеры для целей термоядерного синтеза [1, 2]. В литературе обсуждались различные возможные схемы постановки подобного термоядерного эксперимента. Некоторые из этих схем были осуществлены на опыте: в ряде работ [3, 4] при энергии лазера на уровне 50–100 дж наблюдались термоядерные реакции. При повышении энергии лазера до 10^5 дж и выше, согласно имеющимся оценкам [5], можно надеяться получить "физически выгодную" реакцию, когда выходящая энергия синтеза превысит энергию светового пучка. Однако на пути получения "энергетически выгодной" реакции возникает серьезное препятствие, связанное с низкой эффективностью лазерных систем (к.п.д. современных мощных лазеров на твердом теле не превышает 1%). Воодолеть этого для получения положительного энергетического баланса требуется, чтобы термоядерное вещество прореагировало практически полностью. Это в свою очередь означает, что могут быть приемлемыми только те системы, которые имеют достаточно большое "время удержания" плазмы. Например, для дейтерий-тритиевой плазмы с твердотельной плотностью $n = 4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, нагретой до температуры $T \sim 10^8 \text{ К}$, время удержания должно превышать величину порядка микросекунды.

Соответствующее время удержания достигается для плазмы, окруженной тяжелой оболочкой, препятствующей быстрому разлету плазмы. В такой системе мы имеем дело с почти стационарным горением, если только объем горячей плазмы превышает некоторую критическую величину, зависящую от плотности плазмы [6, 7]. Для ДТ-плазмы с $n \approx 4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ этот критический объем порядка 3 см^3 , а требуемая для инициирования горения энергия излучения лазера составляет величину порядка 10^8 дж. При включении магнитного поля порядка нескольких мегагаусс (для термоизоляции плазмы) энергия "поджига" может быть снижена до 10^6 дж. Таким образом, в этом случае требуются лазеры с большей энергией пучка, но зато требования к к.п.д. лазера существенно снижаются.

Ниже мы обсудим возможность распространения фронта горения в бесконечно длинном слое плазмы, заключенной в тяжелую оболочку, когда горением охватываются все новые слои вещества. При этом будет подробно рассмотрен случай медленного горения, когда перемещение границы "пламени" происходит с дозвуковой скоростью, и будут найдены условия существования термоядерной волны горения. Случай распространения волны детонации в неограниченной ДТ-плазме рассматривался в работе [8].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный слой плазмы (плоский или цилиндрический), ограниченный материальными стенками. В отличие от работы [6] будем предполагать, однако, что до термоядерных температур нагрета только некоторая часть плазменного слоя, отделенная от холодной плазмы некоторой переходной областью (рис.1). Полуширина слоя d выбирается такой, чтобы произведение плотности плазмы в центре слоя на его размер превышало некоторое критическое значение: $(n_0 d) > (n_0 d)_{кр.}[6]$. При этом возможно тепловое равновесие горячей плазмы, в которой происходят реакции, со стенками [6, 7].

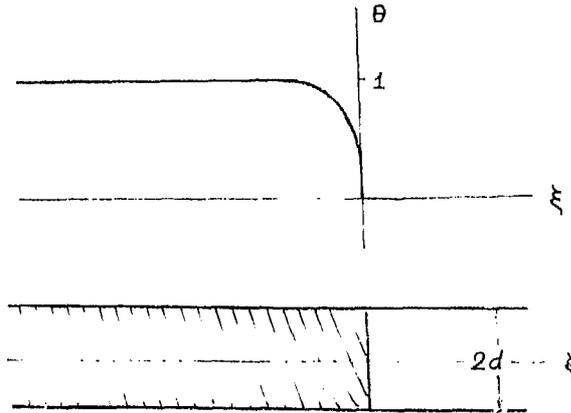


Рис. 1.

Посредством теплопроводности тепло будет передаваться от более нагретых к холодным слоям вещества, в результате чего будет происходить нагрев первоначально холодной плазмы и может оказаться возможным распространение термоядерной реакции в сторону холодного вещества ("термоядерная волна горения").

Возникает вопрос: какие условия необходимо выполнить, чтобы распространение фронта "пламени" в сторону холодного вещества было возможным. Из физических соображений ясно, что волна горения может иметь место только в том случае, если эффективный тепловой источник Q , включающий помимо теплового эффекта реакции также потери тепла на стенки и на излучение плазмы, является положительным при температурах, близких к максимальной температуре плазмы T_0 (рис.2), где происходит основное выделение тепла. Действительно, только в этом случае потери тепла на нагрев холодных слоев плазмы могут быть скомпенсированы. В последующем разделе соответствующее условие (I7) будет получено, исходя из более строгих соображений.

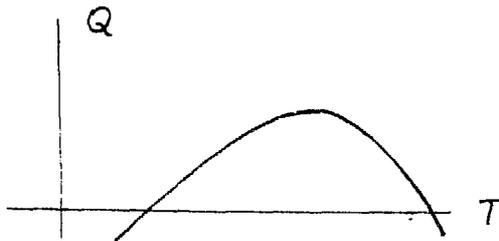


Рис. 2.

Перейдем к рассмотрению исходного уравнения и граничных условий. Как известно, уравнение теплового баланса (уравнение теплопроводности) имеет вид [9]

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{q} + Q_s(\rho, T), \quad (1)$$

где \vec{q} - вектор потока тепла, связанный с градиентом температуры и гидродинамической скоростью вещества \vec{v} соотношением

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T + \rho \vec{v} \cdot C_p T. \quad (2)$$

Выше Q_s - количество тепла, выделяемого тепловыми источниками в единице объема за 1 сек, ρ - масса единицы объема и C_p - теплоемкость при постоянном давлении.

Поскольку в термоядерной плазме существенную роль играют потери на излучение Q_R , то в Q_s необходимо включить также и эти потери:

$$Q_s = F \cdot Q_F - Q_R \quad (3)$$

где Q_F - тепловыделение за счет реакции синтеза.

Функция F учитывает то обстоятельство, что при поперечных размерах плазмы, малых по сравнению с длиной торможения заряженных частиц - продуктов реакции, на нагрев плазмы идет только часть выделившейся энергии.

Выражения для Q_F, Q_R можно найти в монографии [10].

Коэффициент теплопроводности будет предполагаться для простоты зависящим от температуры по степенному закону:

$$\kappa = \beta T^k. \quad (4)$$

Для кулоновской плазмы в отсутствие магнитного поля показатель степени в (4) следует положить равным $k=5/2$, при этом $\beta = 2,1 \cdot 10^{-6}$ эрг/см.сек.град $7/2^k$.

Первый член справа в уравнении (1) описывает поток тепла вдоль системы и на стенки. Задачу можно существенно упростить, если воспользоваться для описания потока тепла на стенки выражением, полученным в работе [1], т.е. тем выражением, которое описывает поток тепла на стенки в равновесном состоянии,

$$Q_x = \beta \frac{2s}{k+1} \frac{T^{k+1}}{d^2}. \quad (5)$$

В выражении (5) следует положить $S=1$ для плоского слоя и $S=2$ для бесконечно длинного цилиндра.

После введения этого упрощающего допущения мы имеем по существу одномерную задачу. Будем искать решение уравнения теплопроводности в виде установившейся плоской волны, движущейся с постоянной скоростью ω вдоль оси x , т.е. в виде

$$T = T(x - \omega t)$$

или в системе координат, движущейся вместе с волной, в виде $T = T(x')$.

^{x)} Здесь и далее кулоновский логарифм в выражениях для коэффициентов переноса и др. берется при плотности плазмы $\sim 10^{23}$ см⁻³ и температуре $\sim 10^8$ К.

Обозначая, как и прежде, через T_0 температуру в центре объема плазмы (там, где имеется тепловое равновесие; очевидно, T_0 есть максимальная температура в системе), введем безразмерную температуру $\theta = T/T_0^{-1}$ и безразмерную координату

$$\xi = x'd^{-1} \equiv (x - wt)d^{-1}.$$

В результате получаем следующее безразмерное уравнение теплопроводности (здесь и далее символами со значком $k_{||}$ будут отмечаться показатели степени, относящиеся к теплопроводности вдоль системы; в общем случае может быть $k \neq k_{||}$):

$$(\theta^{k_{||}} \theta_{\xi})_{\xi} + v \theta_{\xi} = -\phi, \quad (7)$$

где

$$v = \frac{m C_p}{\rho T_0^{k_{||}}} (n'_0 d) \omega,$$

$$\phi = \phi_F - \phi_R - \phi_X ;$$

Выше n'_0 - плотность плазмы непосредственно перед волновым фронтом; n_0 по-прежнему обозначает плотность горячей плазмы. В уравнении (7) необходимо учитывать, что плотность плазмы не является постоянной, а зависит от температуры; далее будет показано, что в достаточно широком интервале температур скорость волны остается меньше скорости звука, а в этом случае можно считать постоянным давление и, следовательно, $n = \rho T^{-1}$. Мы подробно исследуем далее этот случай как наиболее простой для аналитического рассмотрения.

Если в правой части (7) опустить тот член, который описывает потери тепла на стенки путем теплопроводности, то мы получим уравнение теплового баланса для безграничной плазмы. Такое уравнение было численно проанализировано в работе [II] и было показано существование термоядерной волны горения пространственно-периодического типа. Согласно критерию (I7), полученному ниже, волны горения рассматриваемой нами структуры в этом случае, однако, не имеют места. Таким образом, наличие ограничивающих плазму стенок приводит к качественно новому явлению.

Сформулируем граничные условия. Выберем начало координат в системе отсчета, связанной с волной, непосредственно перед волновым фронтом (рис. I). Тогда область $\theta > 1$ будет находиться при $\xi < 0$. При $\xi \geq 0$ положим $\theta = 0$. Второе граничное условие при $\xi = 0$ сводится при этом к равенству нулю потока энергии.

С другой стороны, достаточно далеко за фронтом волны, в той области, где по предположению существует тепловое равновесие, должны быть выполнены два условия: $\theta = 1$ и $\theta_{\xi} = 0$, которые, как нетрудно видеть, эквивалентны, так что в области, где $\theta \sim 1$, мы имеем по существу одно граничное условие.

Из уравнения (7) и граничных условий должны быть получены: условие существования термоядерной волны горения, ее скорость, а также условие теплового равновесия за фронтом волны.

3. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

Итак, задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (7), которое является нелинейным и неоднородным. Поэтому найти его аналитическое решение во всей области изменения аргумента ξ не представляется возможным. Однако можно воспользоваться приближенным методом, состоящим в том, что ищется решение в двух предельных областях: при $\theta \ll 1$ и $\theta \sim 1$, затем полученные решения сшиваются в промежуточной области при $\theta \sim 1/2$. В точке сшивки, очевидно, должны выполняться два условия - равенство обоих решений и равенство их производных (в противном случае нарушается условие непрерывности потока энергии).

А. Решение уравнения в области, где $\theta \ll 1$

Как уже упоминалось выше, непосредственно перед волной полагаем $\theta = 0$. В начале водного фронта, очевидно, происходит разогревание плазмы, причем в основном за счет тепла, поступающего из соседней более горячей области (собственная генерация тепла здесь еще мала). Поступление тепла происходит посредством теплопроводности; подогревом за счет поглощения собственного излучения можно пренебречь. Этот поток тепла не только разогревает плазму, но и компенсирует потери на излучение и теплопроводность к стенкам в соседним более холодным областям.

Пренебрегая правой частью уравнения (7), описывающей тепловые потери и собственную генерацию тепла, по сравнению с первым членом слева, описывающим тепловой поток из более нагретой области, получим следующее уравнение:

$$(\theta^{k_{11}} \theta_{\xi})_{\xi} + \nu \theta_{\xi} = 0. \quad (8)$$

Искомое решение уравнения (8), удовлетворяющее граничным условиям, будет иметь вид

$$\theta = (-k_{11} \nu \xi)^{\frac{1}{k_{11}}}. \quad (9)$$

Знак минус в скобках появился здесь из-за того, что в силу выбранной нами системы отсчета область $\theta > 0$ находится при отрицательных ξ ; так что в скобках стоит положительная величина.

Подстановкой полученного решения в уравнение (7) легко убедиться в том, что в отсутствие заметных потерь на излучение правой частью (7) действительно можно пренебречь. Однако при наличии тормозных потерь такое пренебрежение возможно только при $k_{11} > 5/2$.

Решение в случае $k_{11} = 5/2$ имеет ту же самую зависимость от ξ , что и (9), если в последнем положить $k_{11} = 5/2$:

$$\theta = (-g_+ \xi)^{\frac{2}{5}}, \quad (10)$$

но с другим множителем перед ξ , учитывающим радиационные потери энергии $\phi_R(I)$,

$$g_+ = \frac{5}{4} v + \sqrt{\frac{25}{16} v^2 + \frac{25}{4} \phi_R(1)}. \quad (\text{II})$$

(Другой корень g_- не имеет физического смысла и поэтому здесь опущен.)

Приведем также приближенное решение при $1/2 < \kappa_{11} < 5/2$

$$\theta = \left[-\left(\kappa_{11} + \frac{5}{2}\right) \sqrt{\frac{\phi_R(1)}{2\kappa_{11}-1}} \right]^{\frac{2}{\kappa_{11}+5/2}}. \quad (\text{IIa})$$

Из полученных решений видно, что волновой фронт укрупняется по мере приближения к точке $\xi = 0$: $\theta \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow 0$. Решение с $v < 0$, когда граница перемещается в сторону горячей плазмы, как нетрудно видеть из (II), возможно только при $\phi_R(1) \neq 0$.

Б. Решение уравнения в области, где $\theta \sim 1$

Пренебречь каким-либо членом справа в уравнении (7) здесь, очевидно, нельзя. Однако уравнение можно существенно упростить путем введения новой функции Z согласно соотношению

$$Z = 1 - \theta \quad (\text{I2})$$

и последующего разложения членов уравнения (7) по Z .

Производя в уравнении (7) разложение по Z и удерживая первые не исчезающие члены, получаем следующее уравнение:

$$Z_{\xi\xi} + v Z_{\xi} + \phi'(1)Z = 0. \quad (\text{I3})$$

Здесь было учтено также то обстоятельство, что достаточно далеко за фронтом волны, при $\theta = 1$, должно выполняться условие теплового равновесия

$$\phi \Big|_{\theta=1} = 0. \quad (\text{I4})$$

Общее решение уравнения (I5) имеет вид

$$Z = C_+ e^{\rho_+ \xi} + C_- e^{\rho_- \xi}, \quad (\text{I5})$$

где ρ_+ , ρ_- - корни характеристического уравнения

$$\rho_{\pm} = -\frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - \phi'(1)}. \quad (\text{I6})$$

Поскольку при приближении к области теплового равновесия $\theta \rightarrow 1$ и, следовательно, должно быть $\xi \rightarrow 0$, то необходимо положить $C_- = 0$.

Для того чтобы экспонента при C_+ убывала по мере удаления от фронта в область высоких температур, необходимо потребовать, чтобы было $\rho_+ > 0$, а это возможно лишь при

$$\phi'(1) < 0. \quad (17)$$

(Область параметров $n_0 d$ и T_0 , для которой выполняется неравенство (17), на рис.3 заштрихована.)

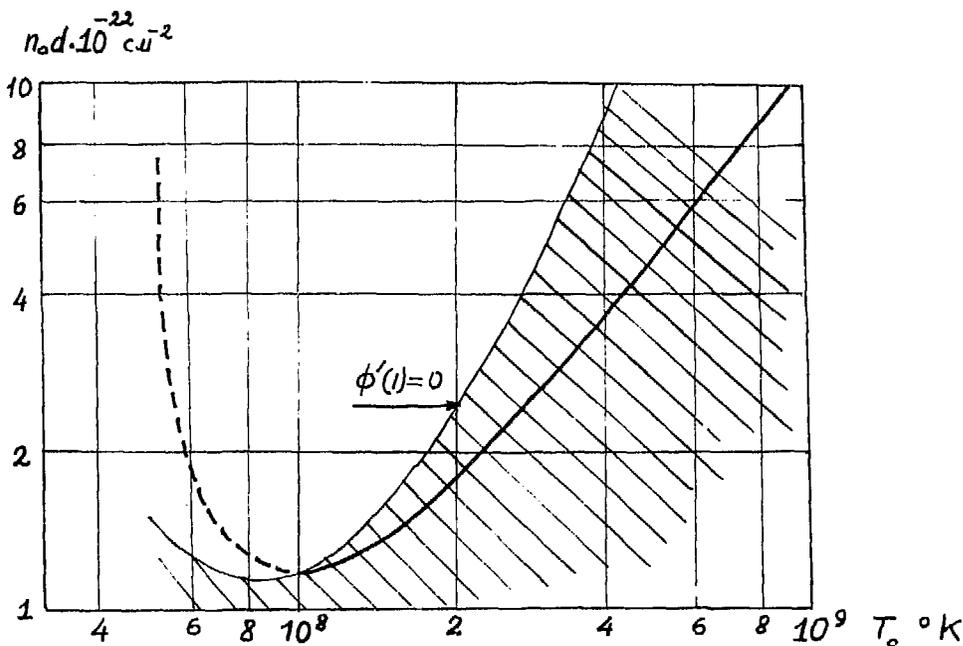


Рис.3. Кривая теплового равновесия горячей плазмы со стенками (пунктиром отмечается часть кривой, на которой состояние теплового равновесия неустойчиво).

Неравенство (17) означает, что существование термоядерной волны горения возможно лишь в той области температур, где правая часть уравнения (7) имеет отрицательную производную по θ . Нетрудно заключить, исходя из физических соображений, что в противоположном случае, когда $\phi'(1) > 0$, само тепловое равновесие за фронтом волны неустойчиво^x).

При условии выполнения неравенства (17) возможна также волна остывания. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что волне остывания соответствует $\nu < 0$ (волна остывания, очевидно, должна распространяться в сторону, противоположную волне горения); при этом $\rho_+ > 0$.

Окончательно для области $\theta \sim 1$ получаем решение

^xИсходя из структуры выражения для ϕ , легко получить, что

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial T_0} - 2(\phi_F - \phi_R)$$

и, следовательно, $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} > 0$ возможно лишь при $\frac{\partial \phi}{\partial T_0} > 0$, а в этом случае состояние плазмы за фронтом волны неустойчиво [6]; на устойчивой ветви кривой рис.3, напротив, всегда $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} < 0$.

$$\theta = 1 - C_+ e^{P_+ \xi}.$$

(19)

Входящая в (18) константа не может быть определена из граничных условий, т.к. в области $\theta \sim 1$ имеется по существу одно граничное условие, которое уже использовано при определении C_- .

В. Сшивка решений и скорость волны

Как уже упоминалось в начале третьего раздела, сшивку полученных решений необходимо производить при $\theta \sim 1/2$, т.е. там, где собственная генерация мала, но не настолько, чтобы ее можно было пренебречь по сравнению с потоком тепла из более горячей области; при этом в точке сшивки должны выполняться два условия, вытекающие из непрерывности температуры и ее производной.

Из первого условия находим константу интегрирования C_+ , а из второго — скорость волны. Особенно простое выражение имеет скорость волны в том случае, когда радиационными потерями можно пренебречь,

$$w' = \alpha \frac{n_0}{n'_0} \frac{\beta T_0^{k_{II}}}{m C_p} \frac{\sqrt{|\phi'(l)|}}{n_0 d}, \quad (20)$$

где численный множитель α определяется из условия сшивки и в общем случае зависит от показателя степени k_{II} (отметим, что α слабо меняется при изменении точки сшивки в достаточно широкой области, включающей точку $\theta = 1/2$).

Напомним, что при $k_{II} > 5/2$ формула (20) остается справедливой также и при учете излучения плазмы; однако при $k_{II} = 5/2$ требуется уточнение этой формулы.

Воспользовавшись асимптотическим решением (10-11), в котором излучение плазмы учтено и сшивая это решение с решением (19), приближенно находим

$$w' = \alpha \frac{n_0}{n'_0} \frac{\beta T_0^{k_{II}}}{m C_p} \frac{\sqrt{|\phi'(l)|}}{n_0 d} \left[1 - b \frac{\phi_R(l)}{|\phi'(l)|} \right], \quad (21)$$

где b — константа сшивки, $b \sim 1$; предполагается, что $\phi_R \ll |\phi'|$. В той области температур ($T \approx 10^8$ °К), где волна возможна, поправки на излучение малы.

Скорость w' есть скорость перемещения фронта по отношению к холодному веществу (или гидродинамическая скорость холодной плазмы относительно неподвижного фронта). Скорость горячей плазмы w связана с w' простым соотношением, следующим из условия непрерывности потока вещества:

$$w = (n'_0/n_0) w'. \quad (22)$$

Используя связь между $n_0 d$ и \bar{T}_0 , накладываемому условию теплового равновесия за фронтом волны, можно найти зависимость w от равновесной температуры T_0 . Такая зависимость изображена графически на рис.4.

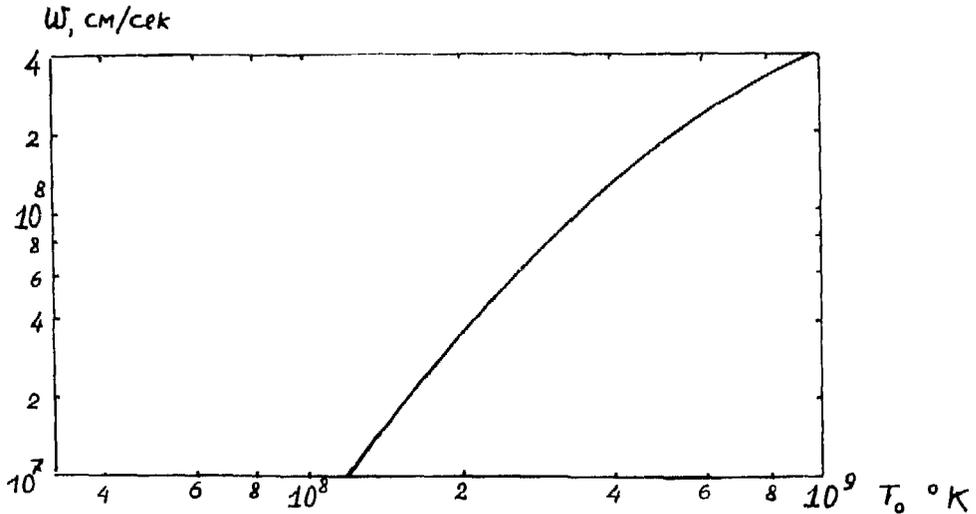


Рис. 4. График скорости волны горения W для плазмы ДТ.

Как уже отмечалось ранее, при $\phi'(1) < 0$ помимо волны горения имеется также решение, соответствующее волне остывания. В этом случае граница раздела между холодным и горячим веществом должна перемещаться в сторону горячего вещества. Дополнительным условием существования такой волны является перенос энергии излучением (см. этот раздел, п.А). С точки зрения физической это условие вполне понятно: действительно, поскольку поток тепла обращается в нуль, $\dot{q} \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow 0$, то сброс энергии может осуществляться только посредством излучения.

Приведем выражение для скорости волны остывания (C - константа сшивки, $C \sim 1$):

$$W_{\text{осм}} = -2 \frac{n_0}{n_0'} \frac{\beta T_0^{5/2}}{m C_p} \frac{1}{n_0 d} \sqrt{\frac{\phi_R(1)}{\phi_R(1) + C \phi'(1)}}. \quad (23)$$

В отличие от волны горения скорость волны остывания при $\phi'(1) \rightarrow 0$ не обращается в нуль, а стремится к некоторому конечному пределу, зависящему помимо ($n_0 d$)_{кр} также от отношения плотностей (n_0/n_0').

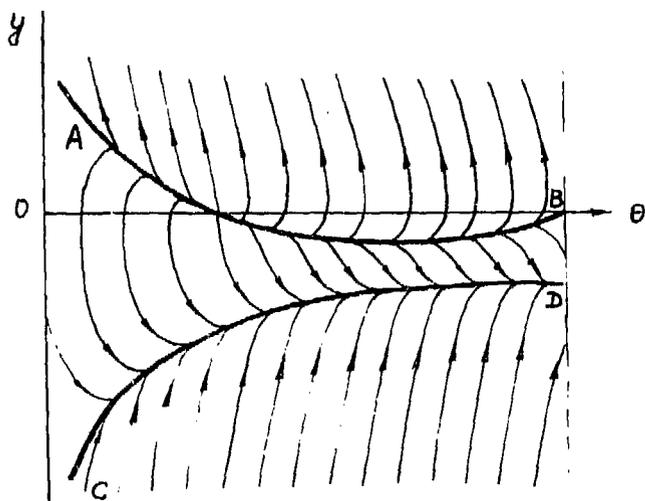
4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Метод фазовой плоскости позволяет сравнительно легко получить качественные выводы о возможности существования термоядерной волны горения, а также оценить количественно скорость волны. Этот метод был успешно использован в работе [12] для исследования волны неравновесной ионизации в однородном электрическом поле.

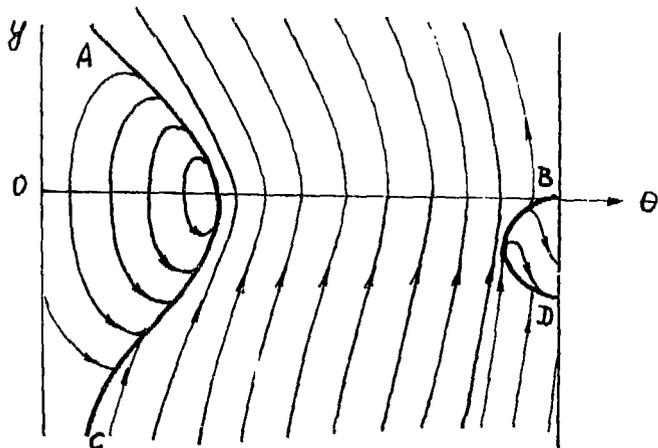
Вводя фазовую переменную $y = \theta_\xi$, преобразуем исходное уравнение (7) к следующему виду:

$$y^2 + \frac{\nu}{k_{11} \theta^{k_{11}-1}} y + \frac{\phi(\theta)}{k_{11} \theta^{k_{11}-1}} = -\frac{1}{k_{11}} \theta y y_\theta, \quad (24)$$

a)
 $v > v_{кр}$



б)
 $v < v_{кр}$



в)
 $v \approx v_{кр}$

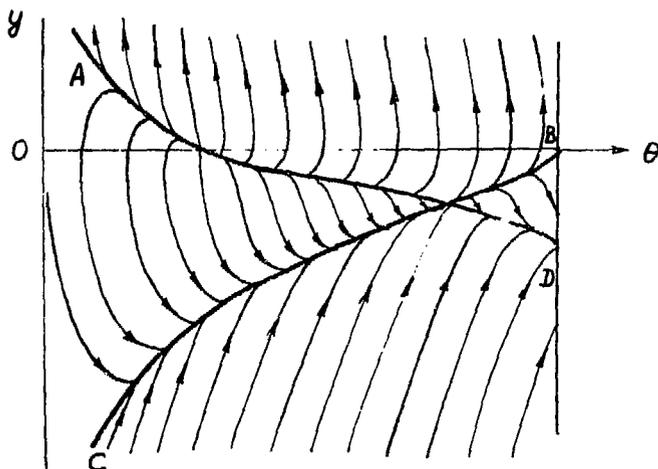


Рис.5. Интегральные кривые уравнения (26).

где $\phi = \phi(\theta)$ - функция теплового источника, включающая генерацию тепла, потери тепла на стенки и излучение.

Используя далее функции

$$y_{\pm}(\theta) = -\frac{\nu}{2\kappa_{II}\theta^{\kappa_{II}-1}} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu}{2\kappa_{II}\theta^{\kappa_{II}-1}}\right)^2 - \frac{\phi(\theta)}{\kappa_{II}\theta^{\kappa_{II}-1}}} \quad (25)$$

которые являются корнями уравнения (24) без правой части, уравнение (24) можно привести к виду

$$y_{\theta} = -\frac{\kappa_{II}}{\theta y} [y - y_+(\theta)] [y - y_-(\theta)]. \quad (26)$$

Семейство интегральных кривых уравнения (26) схематически показано для $\kappa_{II} = 5/2$ на рис.5. Жирными линиями показаны графики функций $y_{\pm}(\theta)$.

Используя результаты предыдущего раздела, нетрудно показать, что искомая интегральная кривая при $\theta \ll 1$ связана с $y_-(\theta)$ линейной зависимостью $y(\theta) = C y_-(\theta)$, где коэффициент пропорциональности $C > 1$. При $\theta \sim 1$ также имеем линейную связь $y = C y_+(\theta)$, однако $C < 1$. Таким образом, интегральная кривая, представляющая решение задачи, должна идти ниже особой кривой $y_-(\theta)$ при $\theta \ll 1$ и выше $y_+(\theta)$ при $\theta \sim 1$.

Ход интегральных кривых существенно меняется в зависимости от соотношения между значениями ν и $\nu_{кр}$, где $\nu_{кр}$ - то наименьшее значение ν , при котором подкоренное выражение в (25) еще неотрицательно ни при каких θ из интервала $[0, 1]$.

Рис.5а соответствует случаю $\nu > \nu_{кр}$. Интегральная кривая, удовлетворяющая граничному условию $\theta = 1, \theta_{\xi} = 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$, должна исходить из точки $\theta = 1, y = 0$ (точка В). Как видно из рис. 5а, необходимых интегральных кривых, соединяющих "холодное" состояние вещества ($\theta \rightarrow 0, y \rightarrow -\infty$) и "горячее", в этом случае нет.

На рис.5б изображены интегральные кривые уравнения (26) для случая $\nu < \nu_{кр}$. Из этого рисунка следует, что интегральные кривые, удовлетворяющие условиям задачи, также отсутствуют.

Соответствующая интегральная кривая (BC) существует, как следует из рис.5в, при $\nu \approx \nu_{кр}$. Отсюда находим скорость волны, которая качественно согласуется с величиной, полученной приближенным методом в третьем разделе. Подтверждается также необходимое условие существования термоядерной волны горения, а именно - производная правой части уравнения (7) должна быть отрицательной при $\theta = \theta_0 \sim 1$,

$$[\phi']_{\theta=\theta_0} < 0, \quad (17a)$$

где θ_0 - то значение θ , при котором величина $\theta^{3/2}\phi$ является максимальной. Поскольку тепловой эффект реакции синтеза сильно зависит от температуры, то максимум этой величины лежит в области температур, близких к равновесной, и $\theta_0 \approx 1$.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОЯДЕРНОЙ ВОЛНЫ ГОРЕНИЯ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Изложенные выше аналитические методы обладают тем бесспорным преимуществом, что они являются сравнительно простыми и физически наглядными. В тех случаях, когда достаточно иметь качественную картину, полученные результаты позволяют легко оценить величину скорости

перемещения фронта горения и найти ширину температурного скачка, а также исследовать его структуру. Более строгие результаты могут быть получены посредством численного исследования задачи.

В этом разделе мы опишем схему численного решения задачи, которая позволяет получить практически точное решение, включая значение величины скорости волны, структуру фронта и др. Представляется интересным воспользоваться этой возможностью, чтобы сравнить полученные приближенными методами результаты с точным решением задачи. Такое сравнение показывает как будет видно из дальнейшего, что результаты предыдущих разделов качественно правильно передают все основные особенности распространения термоядерного пламени.

С математической точки зрения поставленная задача сводится к решению следующего дифференциального уравнения:

$$(\theta^{k_{II}} \theta_{\xi})_{\xi} + \nu \theta_{\xi} = -\phi \quad (27)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta = 0, \quad \theta_{\xi} \theta^{5/2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow +\infty \\ \theta = 1, \quad \theta_{\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (28)$$

Покажем, что мы имеем дело с типичной задачей на собственные значения: исходное уравнение имеет решение, удовлетворяющее условиям задачи, только при определенных значениях $\nu = \nu_*$. В последнем легко убедиться, если переписать уравнение (27), переходя к новым переменным $y = \theta_{\xi}, \theta$. Вследствие того что уравнение (27) не содержит в явном виде безразмерной переменной ξ , удастся понизить порядок дифференциального уравнения. В результате мы имеем уравнение первого порядка с двумя граничными условиями - одно условие необходимо в качестве начального условия, другое фиксирует величину ν . Факт однозначности найденного решения легко устанавливается, если прибегнуть к методу фазовой плоскости.

В силу того что на одном конце граничное условие накладывается на величину $(\theta^{k_{II}} \theta_{\xi})$, оказывается целесообразным перейти к новой функции $y = \theta^{k_{II}} \theta_{\xi}$, для которой будем иметь следующее уравнение:

$$yy_{\theta} + \nu y = -\psi, \quad (29)$$

$$y|_{\theta=0} = y|_{\theta=1} = 0, \quad (30)$$

где обозначено

$$\psi = \theta^{k_{II}} \phi.$$

Задача решается в три этапа. Сначала при заданной температуре T_0 находится соответствующее ей значение $n_0 d$, исходя из условия теплового равновесия:

$$\psi(1; n_0 d, T_0) = 0 \quad (31)$$

Затем, используя найденную связь между $n_0 d$ и T_0 , находится значение $\nu = \nu_0$ по приближенной формуле.

Далее решается уравнение (29) с граничными условиями (30), при этом используется в качестве пробного значения $\nu = \nu_0$. Значения ν потом уточняются путем построения некоторой функции ошибок

$$\Delta(\nu) = [y^2(0) + y^2(1)]^{1/2}. \quad (32)$$

Решение считается найденным, если вычисленное значение ψ удовлетворяет условиям задачи с заданной точностью.

Структура фронта волны находится, исходя из вычисленной функции $y = y(\theta)$,

$$\xi = \int_1^\theta \frac{\theta^{k_{11}}}{y(\theta)} d\theta. \quad (33)$$

Таким образом, можно получить полное решение задачи.

Расчеты показывают, что полученная в 3 разделе формула для скорости волны правильно описывает характер зависимости скорости от температуры горячей плазмы. Правильно передается также структура фронта пламени. Сама величина скорости распространения фронта, однако, оказывается заниженной в несколько раз. Правильные результаты получаются, если положить константу сшивки в (20) равной $\alpha = 1$. Полученная по методу фазовой плоскости величина скорости оказывается близкой к ее истинному значению.

На рис.6 приводится график типичной зависимости температуры от координаты на фронте волны. Ширина фронта составляет величину порядка $\delta \sim 10d$ и относительно слабо зависит от параметров плазмы. Следовательно, для возбуждения волны требуются энергии, по крайней мере на порядок превышающие те, которые приводятся в [6] для случая почти стационарного горения в шаре.

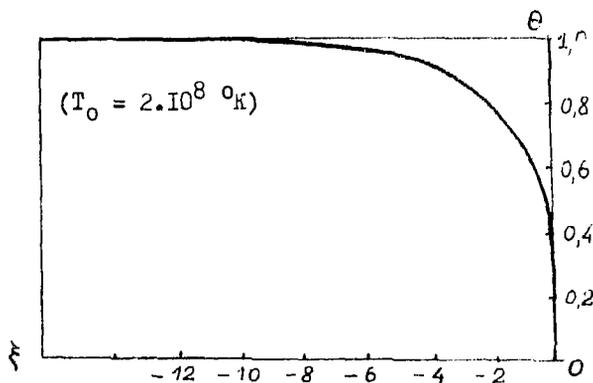


Рис.6. Типичный график изменения безразмерной температуры θ в зависимости от безразмерной координаты ξ .

Как следует из рис.4, скорость распространения процесса "самовоспламенения" термоядерной смеси ДТ достаточно быстро возрастает с температурой, оставаясь, однако, меньше скорости звука до температур $\sim 5 \cdot 10^8$ 0K.

В чистом дейтерии волна горения возможна, по оценкам авторов, в интервале температур $T_0 \sim 5 \cdot 10^8 - 5 \cdot 10^9$ 0K. Требуемые энергии возбуждения в этом случае, однако, более чем на 3 порядка выше, чем в равнопроцентной смеси ДТ.

Зная ширину температурного фронта δ , можно оценить время пребывания плазмы в "зоне воспламенения"

$$\tau \sim \frac{\delta}{w} \sim 5 \cdot 10^{-8} \text{ сек при } n \sim 5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}.$$

Это время, вообще говоря, мало по сравнению с временем, необходимым для полного выгорания горючего и, следовательно, во фронте волны сгорает лишь малая часть термоядерного вещества.

6. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Из проведенного выше анализа можно заключить, что термоядерная волна горения возможна при выполнении следующих условий:

1. Толщина слоя плазмы, находящейся в тепловом контакте со стенками, должна превышать некоторый критический размер $d > d_{кр}$, величина которого обратно пропорциональна плотности плазмы. При этом горячая плазма за фронтом волны будет находиться в тепловом равновесии с ограничивающими ее стенками.

2. Приходящаяся на единицу объема плазмы мощность тепловых источников, с учетом теплового эффекта и всех видов тепловых потерь, должна быть убывающей функцией температуры. Этому условию удовлетворяет правая ветвь кривой теплового равновесия плазмы со стенками, на которой состояние плазмы устойчиво [6].

Проведенные для ТД-плазмы расчеты показывают, что в достаточно широкой области температур плазмы, представляющих интерес, перемещение границы термоядерного горения происходит с дозвуковой скоростью. Толщина фронта волны составляет величину порядка $\delta \sim 10d$; это означает, что для возбуждения волны горения требуются на порядок большие энергии по сравнению с теми, которые необходимы для инициирования квазистационарного горения [6] в ДТ-плазме. Рассмотренные системы отличаются, однако, тем выгодным преимуществом, что для поджига все новых порций вещества может быть использована освобождающаяся энергия самой реакции синтеза. Световой (или электронный) пучок используется только для первоначального запуска системы.

Авторы ограничились исследованием задачи в некоторой идеализированной постановке, когда переходные процессы не имеют существенного значения и само явление выступает в его, так сказать, чистом виде. В реальном случае пришлось бы иметь дело с плазменным шнуром конечной длины, когда могут оказаться заметными эффекты, связанные с наличием торцов, в особенности на первоначальной стадии горения.

В заключение напомним оценку величины энергии, требуемой для инициирования волны горения в цилиндрическом столбе плазмы. При нормальной плотности твердой смеси ДТ $n = 4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и при включении магнитного поля $B \sim 500 \text{ кгс}$ требуемая энергия составляет $\sim 5 \text{ мдж}$. Следует, однако, иметь в виду, что энергия поджига достаточно быстро уменьшается с увеличением плотности плазмы ($1/n^2$) и магнитного поля ($1/B^3$ при $B > 2 \text{ мгс}$).

Авторы выражают благодарность Р.А.Шведовой за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Г.Басов, О.Н.Крохин. ЖЭТФ, т. 46, в. 1, 171 (1964).
2. J. M. Dawson. *Phys. Fluids*, 7, 981 (1964).
3. F. Floux et al. *Phys. Rev.*, A v. 3, n. 3 (1970) 821.
4. Н.Г.Басов и др. Письма ЖЭТФ, т. 13, стр. 691 (1971).
5. О.Н.Крохин. Доклад на Межд.конф. по лазерной плазме. Москва, 1970.
6. А.А.Веденов, Б.Я.Любимов, А.Ф.Настоящий. Доклад на Межд.конф. по лазерной плазме. Москва, 1970.
7. S. G. Alichanov et al. *Nuclear Fusion*, v. 10 n. 1 (1970).
8. A. L. Fuller, R. A. Gross. *Phys. Fluids*, 11, 534 (1968).
9. Д.А.Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., Наука, 1967.
10. Л.А.Арцимович. Управляемые термоядерные реакции. Физматгиз, М., 1964.
11. S. G. Alichanov, J. K. Konkashbaev. *Nuclear Fusion*, v. 11, n. 2 (1971)
12. Е.П.Велихов, А.М.Дыхне. Труды УП Межд.конф. по явлениям в иониз.газах, Белград, 1965.