ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ
СТФ 72-88

С.В.Семёнов

ЗАДАЧА ТРЁХ ТЕЛ В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

Серпухов, 1972

Семёнов С.В.

Задача трёх тел в теории сильной связи. Серпухов, 1972.

31 стр. (ИФВЭ СТФ 72-86).

Библиогр.: 5

С помощью метода Н.Н.Боголюбова рассмотрена задача трёх тел, сильновзаимодействующих со скалярным полем. Построена итерационная схема для нахождения энергии и волновой функции системы и получено уравнение относительного движения. Исследуется предельный случай этого уравнения, соответствующий задаче рассеяния.

Препринт Института физики высоких энергий.
Серпухов, 1972.

Semenov S.V.

Three Body Problem in Strong Coupling Theory. Serpukhov, 1972.

p. 31. (IHEP 72-86).

Ref. 5.

The problem of three bodies, strongly interacting with scalar field, has been considered with the help of N.N.Bogolubov method. Iteration scheme for energy and system wave function has been constructed and equation of relative motion has been obtained. Limiting case of this equation, corresponding to scattering problem, is considered.

Preprint. Institute of High Energy Physics.
Serpukhov, 1972.

С.В.Семёнов

ЗАДАЧА ТРЁХ ТЕЛ В ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

M-24

При описании сильновзаимодействующих систем возникает нетривиальная задача совмещения итерационной схемы со строгим учётом законов сохранения. Принципиально эта задача была решена в работе Н.Н.Боголюбова [1]. В дальнейшем метод Н.Н.Боголюбова был применён при решении задачи двух тел [2,3], в результате чего был найден потенциал взаимодействия двух частиц, сильновзаимодействующих со скалярным полем. При этом, как результат сильной связи с полем, возникает специфическая картина взаимодействия, в которой адроны обладают определённой структурой. Такие свойства адронов характерны для многих предложенных в последнее время моделей теории сильных взаимодействий [5]. В настоящей работе показывается, что методы, развитые в работе [3] в случае задачи двух тел, можно обобщить на систему, состоящую из трёх сильновзаимодействующих частиц. Ниже находятся уравнения для определения уровней энергии системы в поле, уравнение относительного движения, потенциальная энергия взаимодействия системы трёх частиц.

Преобразование гамильтониана

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}_1^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec{p}_2^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec{p}_3^{\,2} + g\sum a_f\left(e^{i\vec{f}\vec{r}_1} + e^{i\vec{f}\vec{r}_2} + e^{i\vec{f}\vec{r}_3}\right)b_f +$$

$$+ g\sum a_f^*\left(e^{-i\vec{f}\vec{r}_1} + e^{-i\vec{f}\vec{r}_2} + e^{-i\vec{f}\vec{r}_3}\right)b_f^+ + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum \omega_f\left(b_f^+ b_f + b_f b_f^+\right); \quad (1)$$

$$a_f^* = a_{-f};$$

оператор $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \hbar\sum \vec{f}\, b_f^+ b_f$ (2)

коммутирует с гамильтонианом H, что соответствует сохранению полного импульса системы $\vec{P}$. Чтобы правильно учесть закон сохранения полного импульса, воспользуемся методом канонических преобразований, развитым в работе /1/. Рассмотрим случай адиабатической связи $g = \varepsilon \ll 1$. Переходя к комплексным координатам

$$q_f = \varepsilon\,\frac{b_f + b_{-f}^+}{\sqrt{2}}, \qquad p_f = i\,\frac{b_f^+ - b_{-f}}{\varepsilon\sqrt{2}}, \quad (3)$$

запишем гамильтониан в виде

$$H = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m} + \frac{\vec{p}_3^{\,2}}{2m} + \sum A_f\left(e^{i\vec{f}\vec{r}_1} + e^{i\vec{f}\vec{r}_2} + e^{i\vec{f}\vec{r}_3}\right)q_f +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum \omega_f q_f^+ q_f + \frac{\varepsilon^4}{2}\sum \omega_f p_f^+ p_f, \quad (4)$$

$$A_f = \sqrt{2}\, a_f.$$

Так как последний член в выражении (4) мал, то в первом приближении гайзенберговы уравнения движения

$$q_f(t) = \mathrm{const} \,, \qquad (5)$$

и взаимодействие приводит к созданию для каждой из частиц потенциальных ям, движение которых кинематически независимо. Этой картине движения частиц в поле отвечает следующее преобразование координат:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{\lambda}_1 + \vec{q} + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\vec{x} \\ \vec{r}_2 = \vec{\lambda}_2 + \vec{q} - \sqrt{\dfrac{1}{6}}\,\vec{x} + \sqrt{\dfrac{1}{2}}\,\vec{y} \\ \vec{r}_3 = \vec{\lambda}_3 + \vec{q} - \sqrt{\dfrac{1}{6}}\,\vec{x} - \sqrt{\dfrac{1}{2}}\,\vec{y} \,, \end{cases} \qquad (6)$$

где $\vec{\lambda}_i$ описывает движение частицы внутри потенциальной ямы, $\vec{q}$ имеет смысл координаты центра масс системы, а $\vec{x}$ и $\vec{y}$ связаны с относительным движением частиц. Именно, записывая

$$\vec{r}_i = \vec{\lambda}_i + \vec{q}_i \,, \qquad (7)$$

получаем

$$\begin{cases} \vec{q} = \dfrac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3}{3} \\ \vec{x} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\left(\vec{q}_1 - \dfrac{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3}{3}\right) \\ \vec{y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{q}_2 - \vec{q}_3\right) , \end{cases} \qquad (8)$$

т.е. $\vec{x}$ пропорционален расстоянию 1-й частицы от центра тяжести, а $\vec{y}$ пропорционален относительному расстоянию 2-й и 3-й частиц. Следует подчеркнуть, что выбор преобразования координат в виде (6)-(8) связан с необходимостью учёта свойств симметрии системы, учёт которых в случае двух частиц тривиален. Именно переменная $\vec{q}$ реализует симметричное одномерное, а $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – двумерное представление группы перестановок координат трёх частиц. Преобразованием (6) мы вместо 9 переменных $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ ввели восемнадцать $\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{q}, \vec{x}, \vec{y}$. Дополним это преобразование преобразованием координат поля /3/

$$q_f = e^{-i\vec{f}\vec{q}}\left(u_f e^{-i\vec{f}\vec{\Delta}_1} + u_f e^{-i\vec{f}\vec{\Delta}_2} + u_f e^{-i\vec{f}\vec{\Delta}_3} + \varepsilon\, Q_f\right), \tag{9}$$

где

$$\vec{q}_i = \vec{q} + \vec{\Lambda}_i$$
$$u_f^* = u_{-f} \tag{10}$$

Из (6) и (9) следует что $\vec{q}$ действительно имеет смысл координаты центра масс системы, так как

$$-i\frac{\partial}{\partial\vec{q}} = -i\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1} - i\frac{\partial}{\partial\vec{r}_2} - i\frac{\partial}{\partial\vec{r}_3} - i\sum\vec{f}\,q_f p_f = \vec{P}\,. \tag{11}$$

Q_f в формуле (9) обозначает новые переменные поля, на которые необходимо положить 9 дополнительных условий, чтобы сохранить число независимых переменных системы. Запишем эти условия в виде соотношений /3/

$$\sum_f Q_f N^{(i)}_{f\alpha} = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ \alpha = 1, 2, 3\,. \end{matrix} \tag{12}$$

Введём ещё матрицы $M^{(i)}_{\alpha f}$, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_f M^{(i)}_{\alpha f} N^{(k)}_{f\beta} = \delta_{ik}\,\delta_{\alpha\beta}\,. \tag{13}$$

Теперь мы можем построить следующие матрицы:

$$A^{(i)}_{ff'} = \delta_{ff'} - \sum_\alpha N^{(i)}_{f\alpha} M^{(i)}_{\alpha f'}\,; \tag{14}$$

$$A_{ff'} = A^{(1)} A^{(2)} A^{(3)}{}_{ff'}\,. \tag{15}$$

При этом справедливы равенства

$$\sum_f M^{(i)}_{\alpha f} A_{ff'} = 0 \ , \qquad \sum_{f'} A_{ff'} N^{(i)}_{f'\alpha} = 0 \ , \tag{16}$$

из которых следует, что

$$\sum_\ell A^{(i)}_{f\ell} A^{(i)}_{\ell f'} = A_{ff'} \ , \qquad \sum_\ell A_{f\ell} A_{\ell f'} = A_{ff'} \ , \tag{17}$$

то есть матрицы $A^{(i)}$, A – проекционные операторы, причём $A^{(i)}$ уменьшает число независимых переменных на три, A – на девять. Используя матрицу A, дополнительное условие (12) сформулируем в следующем виде:

$$Q_f = \sum_{f'} Q_{f'} A_{f'f} \ , \tag{18}$$

тем самым указывая, что Q_f – переменные, связанные с подпространством, выделенным матрицей A.

При этом дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial Q_f}$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_f M_{\alpha f} \frac{\partial}{\partial Q_f} = 0 \ ; \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial Q} = \sum_{f'} A_{ff'} \frac{\partial}{\partial Q_{f'}} \ . \tag{20}$$

Как и в случае двухчастичной задачи, будем считать, что матрицы $M^{(i)}_{\alpha f}$ и $N^{(i)}_{\alpha f}$ зависят от переменных, описывающих относительное движение частиц (в нашем случае $\vec{x}$ и $\vec{y}$). Записав дополнительное условие (12) в виде

$$\sum_f \Big(q_f e^{i\vec{f}\vec{q}} - u_f e^{-i\sqrt{\frac{2}{3}}\,\vec{x}\vec{f}} - u_f e^{-i(-\sqrt{\frac{1}{6}}\,\vec{x} + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{y})\vec{f}} - u_f e^{-i(-\sqrt{\frac{1}{6}}\,\vec{x} - \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{y})\vec{f}}\Big) N^{(i)}_{f\alpha} = 0 \tag{21}$$

или

$$\sum_f \Big(q_f e^{i\vec{f}\vec{q}} - u_f e^{-i\vec{f}\vec{\Delta}_1} - u_f e^{-i\vec{f}\vec{\Delta}_2} - u_f e^{-i\vec{f}\vec{\Delta}_3}\Big) N^{(i)}_{f\alpha} = 0 \ , \tag{22}$$

мы получим девять соотношений, позволяющих выразить переменные $\vec{q}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ как функции только переменных поля q_f, но не координат частиц $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$. Соотношения (21), (22) позволяют найти производные векторов $\vec{q}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ по переменным поля. Продифференцировав (21) по q_f, получаем соотношения:

$$
\begin{aligned}
& N^{(i)}_{f\alpha} e^{i\vec{f}\vec{q}} + i\frac{\partial q^\beta}{\partial q_f}\sum_\ell \ell_\beta\left(u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_1} + u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_2} + u_\ell \ell^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_3}\right) N^{(i)}_{\ell\alpha} + \\
& + i\varepsilon\frac{\partial q^\beta}{\partial q_f}\sum_\ell \ell_\beta Q_\ell N^{(i)}_{\ell\alpha} + i\frac{\partial x^\beta}{\partial q_f}\sum_\ell \ell_\beta\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_1} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\frac{1}{6}}\, u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_2} - \sqrt{\frac{1}{6}}\, u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_3}\right) N^{(i)}_{\ell\alpha} + i\frac{\partial y^\beta}{\partial q_f}\sum_\ell \ell_\beta\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\, u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_2} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\frac{1}{2}}\, u_\ell e^{-i\vec{\ell}\vec{\Delta}_3}\right) N^{(i)}_{\ell\alpha} + \varepsilon\frac{\partial x^\beta}{\partial q_f}\sum_\ell Q_\ell N^{(i)}_{\ell\alpha,\beta_1} + \varepsilon\frac{\partial y^\beta}{\partial q_f} N^{(i)}_{\ell\alpha,\beta_2} = 0,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где

$$
N^{(i)}_{\ell\alpha,\beta_1} = \frac{\partial N^{(i)}_{\ell\alpha}}{\partial x^\beta},
$$

$$
N^{(i)}_{\ell\alpha,\beta_2} = \frac{\partial N^{(i)}_{\ell\alpha}}{\partial y^\beta}. \tag{24}
$$

Подстановка

$$
\frac{\partial q^\beta}{\partial q_f} = i\tilde{S}_{f\beta} e^{i\vec{f}\vec{q}};\quad \frac{\partial x^\beta}{\partial q_f} = i\tilde{T}_{f\beta} e^{i\vec{f}\vec{q}};\quad \frac{\partial y^\beta}{\partial q_f} = i\tilde{K}_{f\beta} e^{i\vec{f}\vec{q}} \tag{25}
$$

превращает соотношение (23) в систему уравнений для функций $\tilde{S}_{f\beta}$, $\tilde{T}_{f\beta}$, $\tilde{K}_{f\beta}$, которые зависят только от Q_f, $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Эти уравнения существенно упрощаются при следующем выборе матриц $M^{(i)}_{\alpha f}$:

$$M^{(i)}_{\alpha f} = f_\alpha u_f\, e^{-i\vec{\Delta}_i \vec{f}} \quad . \qquad (26)$$

Учитывая (25),(26), преобразуем систему (23) к виду

$$\begin{cases} N^{(1)}_{f\alpha} - \tilde{S}_{f\alpha} - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\tilde{T}_{f\alpha} + \sum\limits_{\ell,\beta}\Big(-\varepsilon\,\tilde{S}_{f\beta}\ell_\beta Q_\ell N^{(1)}_{\ell\alpha} + i\varepsilon\,\tilde{T}_{f\beta}\, Q_\ell N^{(1)}_{\ell\alpha,\,\beta} + \\ + i\varepsilon\,\tilde{K}_{f\beta}\, Q_\ell \tilde{N}^{(1)}_{\ell\alpha,\,\beta_2}\Big) = 0\,; \\ N^{(2)}_{f\alpha} - \tilde{S}_{f\alpha} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\tilde{T}_{f\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{K}_{f\alpha} + \sum\limits_{\ell,\beta}\Big(-\varepsilon\,\tilde{S}_{f\beta}\ell_\beta Q_\ell N^{(2)}_{\ell\alpha} + \\ i\varepsilon\,\tilde{T}_{f\beta}\, Q_\ell N^{(2)}_{\ell\alpha,\beta_1} + i\varepsilon\,\tilde{K}_{f\beta}\, Q_\ell N^{(2)}_{\ell\alpha,\beta_2}\Big) = 0; \\ N^{(3)}_{f\alpha} - \tilde{S}_{f\alpha} + \frac{1}{\sqrt{6}}\,\tilde{T}_{f\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tilde{K}_{f\alpha} + \sum\limits_{\ell,\beta}\Big(-\varepsilon\,\tilde{S}_{f\beta}\,\ell_\beta Q_\ell N^{(3)}_{\ell\alpha} + \\ + i\varepsilon\,\tilde{T}_{f\beta}\, Q_\ell N^{(3)}_{\ell\alpha,\beta_1} + i\varepsilon\,\tilde{K}_{f\beta}\, Q_\ell N^{(3)}_{\ell\alpha,\beta_2}\Big) = 0\,. \end{cases} \qquad (27)$$

Введём следующие величины:

$$S_{f\alpha} = \frac{N^{(1)}_{f\alpha} + N^{(2)}_{f\alpha} + N^{(3)}_{f\alpha}}{3}\,;$$

$$T_{f\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,N^{(1)}_{f\alpha} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,N^{(2)}_{f\alpha} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,N^{(3)}_{f\alpha}\,; \qquad (28)$$

$$K_{f\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,N^{(2)}_{f\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,N^{(3)}_{f\alpha}\,.$$

Здесь мы опять учли свойства симметрии системы по отношению к перестановкам. Матрица $S_{f\alpha}$ реализует симметричное одномерное, а $T_{f\alpha}$ и $K_{f\alpha}$ – двумерное представление группы перестановок трёх частиц:

$$\sum_{\ell} \ell_{\beta} Q_{\ell} S_{\ell\alpha} = a_{\beta\alpha} \qquad -i\sum_{\ell} Q_{\ell} S_{\ell\alpha,\beta_1} = b_{1\beta\alpha} \qquad -i\sum_{\ell} Q_{\ell} S_{\ell\alpha,\beta_2} = b_{2\beta\alpha};$$

$$\sum_{\ell} \ell_{\beta} Q_{\ell} T_{\ell\alpha} = c_{\beta\alpha} \qquad -i\sum_{\ell} Q_{\ell} T_{\ell\alpha,\beta_1} = d_{1\beta\alpha} \qquad -i\sum_{\ell} Q_{\ell} T_{\ell\alpha,\beta_2} = d_{2\beta\alpha}; \tag{29}$$

$$\sum_{\ell} \ell_{\beta} Q_{\ell} K_{\ell\alpha} = e_{\beta\alpha} \qquad -i\sum_{\ell} Q_{\ell} K_{\ell\alpha,\beta_1} = g_{1\beta\alpha} \qquad -i\sum_{\ell} Q_{\ell} K_{\ell\alpha,\beta_2} = g_{2\beta\alpha}.$$

Тогда система (27) приводится к виду, легко решающемуся последовательными приближениями,

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= S - \varepsilon S a - \varepsilon T b_1 - \varepsilon K b_2; \\ \tilde{T} &= T - \varepsilon S c - \varepsilon T d_1 - \varepsilon K d_2; \\ \tilde{K} &= K - \varepsilon S e - \varepsilon T g_1 - \varepsilon K g_2. \end{aligned} \tag{30}$$

С точностью до ε^2 –

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= S - \varepsilon \tilde{S}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{S}^{(2)}; \\ \tilde{T} &= T - \varepsilon \tilde{T}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{T}^{(2)}; \\ \tilde{K} &= K - \varepsilon \tilde{K}^{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{K}^{(2)}; \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{(i)} &= \tilde{S}^{(i-1)} a + \tilde{T}^{(i-1)} b_1 + \tilde{K}^{(i-1)} b_2; \\ \tilde{T}^{(i)} &= \tilde{S}^{(i-1)} c + \tilde{T}^{(i-1)} d_1 + \tilde{K}^{(i-1)} d_2; \\ \tilde{K}^{(i)} &= \tilde{S}^{(i-1)} e + \tilde{T}^{(i-1)} g_1 + \tilde{K}^{(i-1)} g_2; \end{aligned} \tag{32}$$

$$\tilde{S}^{(o)} = S; \qquad \tilde{K}^{(o)} = K; \qquad \tilde{T}^{(o)} = T.$$

Найдём теперь явный вид оператора p_f в новых переменных

$$p_f = -i\frac{\partial}{\partial q_f} = -i\sum_{f'} \frac{\partial Q_{f'}}{\partial q_f}\frac{\partial}{\partial Q_{f'}} + \frac{\partial q^{\alpha}}{\partial q_f}\left(-i\frac{\partial}{\partial q^{\alpha}}\right) + \frac{\partial x^{a}}{\partial q_f}\left(-i\frac{\partial}{\partial x^{a}}\right) + \tag{33}$$

$$+\frac{\partial\lambda_1^a}{\partial q_f}\left(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_1^a}\right)+\frac{\partial\lambda_2^a}{\partial q_f}\left(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_2^a}\right)+\frac{\partial\lambda_3^a}{\partial q_f}\left(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_3^a}\right). \qquad (33)$$

Выражая Q_f через q_f по формуле (22), учитывая (12) и пользуясь выбором $M_{\alpha f}^{(i)}$ в виде (26), а также вспоминая, что $\Sigma M_{\alpha f}^{(i)}A_{ff'}=0$, получаем, что

$$-i\sum_{f'}\frac{\partial Q_{f'}}{\partial q_f}\frac{\partial}{\partial Q_{f'}}=e^{i\vec f\vec q}\left[\frac{1}{\varepsilon}P_f-\tilde S_{f\alpha}\ell_\alpha Q_\ell P_\ell\right], \qquad (34)$$

где $$P_\ell=-i A_{\ell f}\frac{\partial}{\partial Q_f} \qquad (35)$$

и удовлетворяет условию $M_{\alpha f}^{(i)}P_f=0$. (36)

Так как в силу определения $\vec\lambda_1,\ \vec\lambda_2,\ \vec\lambda_3,\ \vec q,\ \vec x,\ \vec y$

$$\frac{\partial\lambda_1^a}{\partial q_f}=-i\,e^{i\vec f\vec q}\left(\tilde S_{fa}+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\tilde T_{fa}\right);$$

$$\frac{\partial\lambda_2^a}{\partial q_f}=-i\,e^{i\vec f\vec q}\left(\tilde S_{fa}-\sqrt{\frac{1}{6}}\,\tilde T_{fa}+\sqrt{\frac{1}{2}}\,\tilde K_{fa}\right); \qquad (37)$$

$$\frac{\partial\lambda_3^a}{\partial q_f}=-i\,e^{i\vec f\vec q}\left(\tilde S_{fa}-\sqrt{\frac{1}{6}}\,\tilde T_{fa}-\sqrt{\frac{1}{2}}\,\tilde K_{fa}\right),$$

то p_f можно записать в виде

$$p_f=e^{i\vec f\vec q}\Big[\frac{P_f}{\varepsilon}-S_{f\alpha}\ell_\alpha Q_\ell P_\ell+i\tilde S_{f\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial q^a}\right)+i\tilde T_{f\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial x^a}\right)+$$

$$+i\tilde K_{fa}\left(-i\frac{\partial}{\partial y^a}\right)-i\left(\tilde S_{fa}+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\tilde T_{fa}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_1^a}\right) - \qquad (38)$$

$$i\left(\tilde S_{fa}-\sqrt{\frac{1}{6}}\,\tilde T_{fa}+\sqrt{\frac{1}{2}}\,\tilde K_{fa}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_2^a}\right)-$$

$$-i\left(\tilde S_{fa}-\sqrt{\frac{1}{6}}\,\tilde T_{fa}-\sqrt{\frac{1}{2}}\,\tilde K_{fa}\right)\left(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_3^a}\right)\Big].$$

Как и в случае двухчастичной задачи, подстановка выражения для P_f (38) в гамильтониан (4) приводит к появлению множителя ε^4 при вторых производных по $\vec{q}$ и по переменным, описывающим относительное движение частиц. В работе /3/ было указано, что это обстоятельство вызвано тем, что основной вклад в полный импульс системы дает пассивно движущаяся с частицей классическая составляющая поля, которая не меняет своего порядка при переходе к многочастичной задаче, а малость производных по $\vec{x}$ и $\vec{y}$ соответствует большой эффективной массе частиц. Кроме того, переменная $\vec{q}$ выпадает из гамильтониана, что соответствует сохранению полного импульса. Пользуясь развитой в работе /3/ итерационной схемой, волновую функцию системы ищем в виде

$$\Psi(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{q}, \vec{x}, \vec{y}, Q) = \exp(i \frac{\vec{J}\vec{q}}{\varepsilon^2}) \exp(\frac{i}{\varepsilon} \sum_f t_f Q_f) \times$$

$$\times \Phi(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{x}, \vec{y}) . \tag{39}$$

Числа t_f должны удовлетворять условию

$$t_f^* = t_{-f} \tag{40}$$

и, кроме того, не ограничивая общности, их можно выбрать так, что

$$M^{(i)}_{\alpha f} t_f = 0 . \tag{41}$$

Преобразование (39) влечёт преобразование операторов:

$$-i \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \to \frac{1}{\varepsilon^2} \vec{J} - i \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \tag{42}$$

и, учитывая (41), –

$$P_f \to \frac{1}{\varepsilon} t_f + P_f . \tag{43}$$

Кроме того, считаем, что t_f – функция $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Поэтому

$$-i \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \to \frac{1}{\varepsilon} Q_f t_{f,\alpha_1} - i \frac{\partial}{\partial x^\alpha} ,$$

$$-i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \to \frac{1}{\varepsilon} Q_f t_{f,\alpha_2} - i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} . \tag{44}$$

При анализе относительного движения совершим преобразование координат

$$\vec{x} = \varepsilon\, \vec{\xi}_1,$$
$$\vec{y} = \varepsilon\, \vec{\xi}_2, \tag{45}$$

которое позволит учитывать это движение уже во втором порядке по ε. Однако это преобразование не означает, что функции, зависящие от $\vec{x}$ и $\vec{y}$, можно разлагать в ряд по ε, так как в этом случае нельзя рассматривать большие значения $|\vec{x}|$ и $|\vec{y}|$. Таким образом, как и в случае двухчастичной задачи, нам нужно одновременно применить теорию возмущений по переменным Q_f и адиабатические методы по переменным $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Учитывая преобразование (42)–(45), напишем разложение оператора p_f по степеням ε с точностью до слагаемых нулевой степени по ε:

$$p_f = e^{i\vec{f}\vec{q}}\Big\{ \frac{1}{\varepsilon^2}(t_f + iS_{f\alpha}J_\alpha) + \frac{1}{\varepsilon}\big[P_f - S_{f\alpha}\ell_\alpha Q_\ell t_\ell - \tilde{S}^{(1)}_{f\alpha}J_\alpha +$$
$$+ iT_{f\alpha}Q_\ell t_{\ell,\alpha_1} + iT_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\xi_1^a}\Big) + iK_{f\alpha}Q_\ell t_{\ell,\alpha_2} + iK_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\xi_2^a}\Big)\big] +$$
$$+ \varepsilon^0\big[-S_{f\alpha}\ell_\alpha Q_\ell P_\ell + \tilde{S}^{(1)}_{f\alpha}\ell_\alpha Q_\ell t_\ell + \tilde{S}^{(2)}_{f\alpha}J_\alpha - i\tilde{T}^{(1)}_{f\alpha}Q_\ell t_{\ell,\alpha_1} - \tag{46}$$
$$- i\tilde{T}^{(1)}_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\xi_1^a}\Big) - i\tilde{K}^{(1)}_{f\alpha}Q_\ell t_{\ell,a_2} - i\tilde{K}^{(1)}_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\xi_2^a}\Big) -$$
$$- iN^{(1)}_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_1^a}\Big) - iN^{(2)}_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_2^a}\Big) - iN^{(3)}_{f\alpha}\Big(-i\frac{\partial}{\partial\lambda_3^a}\Big)^2\big]\Big\}.$$

Воспользовавшись выражением (45) для p_f, можно найти гамильтониан системы с точностью до членов порядка ε^2, учтя при этом кинетическую энергию фононов и энергию относительного движения частиц. При этом из условия регулярности волновой функции по $Q_f^{/1,2,3/}$ следует, что члены гамильтониана, линейные по p_f (появляющиеся в первом порядке по ε), должны обратиться в нуль. Условие отсутствия в гамильтониане членов, линейных по p_f, имеет вид, аналогичный соответствующему условию в двухчастичной задаче,

$$t_f + i\,S_{f\alpha} J_\alpha = i\,\frac{C^\beta E^*_{\beta f}}{\omega_t}, \tag{47}$$

где

$$E_{\beta f} = M^{(1)}_{\beta f} + M^{(2)}_{\beta f} + M^{(3)}_{\beta f}. \tag{48}$$

Из (47) получаем следующее выражение для полного импульса системы:

$$J_\alpha = 3\,\frac{C^{\beta *} E_{\beta f}}{\omega_f} M^{(1)}_{\alpha f} = 3\,\frac{C^\beta \overset{*}{E}_{\beta f}}{\omega_f} M^{(2)}_{\alpha f} = 3\,\frac{C^\beta \overset{*}{E}_{\beta f}}{\omega_f} M^{(3)}_{\alpha f}. \tag{49}$$

(Во всех формулах подразумевается суммирование по немым индексам). Причём действительная векторная функция $\vec{C}\,(\vec{x}, \vec{y})$ должна быть выбрана так, чтобы полный импульс системы не зависел от переменных $\vec{x}$, $\vec{y}$. Теперь можно выписать несколько упрощённое выражение для оператора p_f:

$$\begin{aligned}
p_f = e^{i\vec{f}\vec{q}} \{ & \frac{1}{\varepsilon^2}\, i\,\frac{C^\beta \overset{*}{E}_{\beta f}}{\omega_f} + \frac{1}{\varepsilon}\left(P_f' + i\,T_{f\alpha} L_{1_\alpha} + i K_{f\alpha} L_{2_\alpha}\right) + \\
& + \varepsilon^0 [-S_{f\alpha} \ell_\alpha Q_\ell P_\ell' + i\,T_{f\beta} b_{1_{\beta\alpha}} D_\alpha + i K_{f\beta} b_{2_{\beta\alpha}} D_\alpha - \\
& - i\,S_{f\alpha} C_{\alpha\beta} L_{1_\beta} - i\,T_{f\alpha} d_{1_{\beta\alpha}} L_{1_\beta} - i K_{f\alpha} d_{2_{\alpha\beta}} L_{1_\beta} - \\
& - i\,S_{f\alpha} e_{\alpha\beta} L_{2_\beta} - i\,T_{f\alpha} g_{1_{\alpha\beta}} L_{2_\beta} - i K_{f\alpha} g_{2_{\alpha\beta}} L_{2_\beta} - \\
& - i N^{(1)}_{f\alpha}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha_1}\right) - i N^{(2)}_{f\alpha}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha_2}\right) - i N^{(3)}_{f\alpha}\left(-i\,\frac{\partial}{\partial \lambda^\alpha_3}\right)] \},
\end{aligned} \tag{50}$$

где

$$L_{1\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial \xi_1^{\alpha}} - b_{1\beta\alpha} J_{\beta} + Q_{\ell} t_{\ell,\alpha_1}, \tag{51}$$

$$L_{2\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial \xi_2^{\alpha}} - b_{2\alpha\beta} J_{\beta} + Q_{\ell} t_{\ell,\alpha_2}, \tag{52}$$

$$P_f' = P_f - i S_{f\alpha} D_{\alpha}, \tag{53}$$

$$D_{\alpha} = \ell_{\alpha} Q_{\ell} \frac{C^{\beta}}{\omega_{\ell}} E_{\beta\ell}, \tag{54}$$

или, воспользовавшись (47), –

$$L_{1_{\alpha}} = -i\frac{\partial}{\partial \xi_1^{\alpha}} - R_{1\alpha} + i C^{\beta}_{,\alpha_1} \frac{1}{\omega_f} Q_f E_{\beta f}, \tag{55}$$

где

$$R_{1\alpha} = \frac{f_{\alpha} Q_f \overset{*}{F}{}^{(1)}_{\beta f}}{\omega_f}, \tag{56}$$

а

$$F^{(1)}_{\beta f} = \sqrt{\frac{2}{3}} M^{(1)}_{\beta f} - \sqrt{\frac{1}{6}} M^{(2)}_{\beta f} - \sqrt{\frac{1}{6}} M^{(3)}_{\beta f}, \tag{57}$$

$$L_{2_{\alpha}} = -i\frac{\partial}{\partial \xi_2^{\alpha}} - R_{2_{\alpha}} + i C^{\beta}_{,\alpha_2} \frac{1}{\omega_f} Q_f E_{\beta f}, \tag{58}$$

где

$$R_{2_{\alpha}} = \frac{f_{\alpha} Q_f C^{\beta} \overset{*}{F}{}^{(2)}_{\beta f}}{\omega_f}, \tag{59}$$

а

$$F^{(2)}_{\beta f} = \sqrt{\frac{1}{2}} M^{(2)}_{\beta f} - \sqrt{\frac{1}{2}} M^{(3)}_{\beta f}. \tag{60}$$

Как и в двухчастичной задаче, легко показать, что векторы D_{α} и R_{α} действительны, L_{α} эрмитов, а P_f', как и P_f, удовлетворяет соотношению

$$\overset{*}{P}{}_f' = P_{-f}'. \tag{61}$$

Всё это следует из определения величин $E, F^{(1)}, F^{(2)}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \overset{*}{E}_{\alpha f} &= -E_{\alpha,-f}, \\ \overset{*}{F}{}^{(1,2)}_{\alpha f} &= -F^{(1,2)}_{\alpha,-f}. \end{aligned} \tag{62}$$

Все члены, зависящие от $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$, входящие в оператор p_f, зависят от комбинации $\varepsilon\vec{\xi}_1, \varepsilon\vec{\xi}_2$, поэтому коммутаторы операторов L_{1_α}, L_{2_α} с соответствующими величинами – величины первого порядка малости по сравнению с самими величинами. Теперь легко выписать слагаемые H_o и H_1 в разложении гамильтониана по степеням ε:

$$H = H_o + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} H_o = {} & \frac{1}{2m}\vec{p}_1^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec{p}_2^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec{p}_3^{\,2} + \\ & + \sum A_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1} u_f\left(1 + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_2)} + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_3)}\right) + \\ & + \sum A_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2} u_f\left(1 + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_1)} + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)}\right) + \\ & + \sum A_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3} u_f\left(1 + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_1)} + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_2)}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\sum\left(\omega_f + \frac{(\vec{C}\vec{f})^2}{\omega_f}\right) d_f , \end{aligned} \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned} d_f = |u_f|^2 \Big(3 + 2e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_2)} + 2e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_3)} + \\ + 2e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)}\Big), \end{aligned} \tag{65}$$

$$\vec{p}_i = -i\frac{\partial}{\partial\vec{\lambda}_i} . \tag{66}$$

$$\begin{aligned} H_1 = \sum \Big\{ & A_f \left(e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1} e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_1} + e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2} e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_2} + e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3} e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_3}\right)\varepsilon Q_f + \\ & + \omega_f u_f^* \left(e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_1} + e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_2} + e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_3}\right) Q_f - \\ & - \frac{(\vec{C}\vec{f})^2}{\omega_f} Q_f u_f^* \left(e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_1} + e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_2} + e^{i\vec{f}\vec{\Delta}_3}\right) \Big\} . \end{aligned} \tag{67}$$

Оператор H_1 линеен по переменной Q_f, слагаемые, линейные по P_f, обратились в ноль в силу условия (47). Кроме того, выбор произвольной комбинации матриц $M^{(i)}_{\alpha f}$ в виде $E_{\alpha f}$, необходимой для непротиворечивого определения полного импульса по формуле (49) приводит к тому, что коэффициенты при $L_{1\alpha}$, $L_{2\alpha}$ в первом порядке по ε обращаются в нуль.

Адиабатическая теория возмущений

Как и в двухчастичной задаче, применим простейший вариант адиабатической теории возмущений, который даёт возможность провести исследование основных свойств относительного движения и получить одночастичные потенциалы.

Напишем уравнение Шредингера с гамильтонианом (63):

$$(H_o + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 - E)\Psi(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec\xi_1, \vec\xi_2, Q) = 0. \qquad (68)$$

H_o, определяемы формулой (63), зависит от переменных $\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec x, \vec y$ и не содержит производных по $\vec x$ и $\vec y$. Поэтому хорошим приближением будет представление волновой функции в виде произведения

$$\Psi(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec\xi_1, \vec\xi_2, Q) = \Phi(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec x, \vec y)\Theta(\vec\xi_1, \vec\xi_2. Q),$$

причём функция Φ удовлетворяет уравнению

$$(H_o - E(\vec x, \vec y))\, \Phi(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec x, \vec y) = 0, \qquad (69)$$

содержащему переменные $\vec x, \vec y$ как параметр. Тогда функция $\Theta(\vec\xi_1, \vec\xi_2, Q)$ будет удовлетворять уравнению

$$(\varepsilon \langle H_1\rangle + \varepsilon^2 \langle H_2\rangle + E(\vec x, \vec y) - E)\Theta(\vec\xi_1, \vec\xi_2, Q) = 0, \qquad (70)$$

где $\langle\ \rangle$ означает усреднение по функции $\Phi(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec x, \vec y)$. Оператор $\langle H_1\rangle$ – линейный оператор по переменным Q_f с коэффициентами, зависящими только от $\vec x$ и $\vec y$. Для того, чтобы $\Theta(\vec\xi_1, \vec\xi_2, Q)$ была регулярна по переменным Q_f, необходимо, чтобы оператор $\langle H_1\rangle$

обращался в нуль. Заметим, что с этой же целью был обращен в нуль оператор, линейный по P_f.

Условие

$$\langle H_1 \rangle = 0 \tag{71}$$

позволяет найти коэффициенты u_f (см. (67)). Для u_f получается следующее уравнение:

$$\overset{*}{u}_f \left(\omega_f - \frac{(\vec f\,\vec C)^2}{\omega_f}\right)\left(e^{i\vec f\vec\Delta_1} + e^{i\vec f\vec\Delta_2} + e^{i\vec f\vec\Delta_3}\right) =$$

$$= -A_f\left(\langle e^{i\vec f\vec\lambda_1}\rangle e^{i\vec f\vec\Delta_1} + \langle e^{i\vec f\vec\lambda_2}\rangle e^{i\vec f\vec\Delta_2} + \langle e^{i\vec f\vec\lambda_3}\rangle e^{i\vec f\vec\Delta_3}\right). \tag{72}$$

При этом уравнение (69) сводится к уравнению Шредингера

$$\left(\frac{1}{2m}\vec p_1^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec p_2^{\,2} + \frac{1}{2m}\vec p_3^{\,2} + V(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec x, \vec y) - W_o\right)\Phi = 0, \tag{73}$$

где

$$W_o = E(\vec x, \vec y) - \frac{1}{2}\Sigma\left(\omega_f + \frac{(\vec C\,\vec f)^2}{\omega_f}\right) d_f, \tag{74}$$

а потенциал определяется выражением

$$\begin{aligned} V(\vec\lambda_1, \vec\lambda_2, \vec\lambda_3, \vec x, \vec y) = \Sigma A_f u_f \Big\{ & e^{i\vec f\vec\lambda_1}\left(1 + e^{i\vec f(\vec\Delta_1-\vec\Delta_2)} + e^{i\vec f(\vec\Delta_1-\vec\Delta_3)}\right) + \\ & + e^{i\vec f\vec\lambda_2}\left(1 + e^{i\vec f(\vec\Delta_2-\vec\Delta_1)} + e^{i\vec f(\vec\Delta_2-\vec\Delta_3)}\right) + \\ & + e^{i\vec f\vec\lambda_3}\left(1 + e^{i\vec f(\vec\Delta_3-\vec\Delta_1)} + e^{i\vec f(\vec\Delta_3-\vec\Delta_2)}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{75}$$

Рассмотрим подробнее свойства этого потенциала. Прежде всего он позволяет провести разделение переменных $\vec\lambda_1$, $\vec\lambda_2$, $\vec\lambda_3$ в уравнении (73). На конечном расстоянии друг от друга ($|\vec\Delta_i - \vec\Delta_j| < \infty$) потенциальные ямы для каждой из частиц различны. Однако в пределе больших относительных расстояний ($|\vec\Delta_i - \vec\Delta_j| \to \infty$), когда все три частицы находятся далеко друг от друга, потенциал (75) имеет вид

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Sigma A_f u_f e^{i\vec f\vec\lambda_1} + \Sigma A_f u_f e^{i\vec f\vec\lambda_2} + \Sigma A_f u_f e^{i\vec f\vec\lambda_3}, \tag{76}$$

то есть потенциал в этом случае сводится к сумме одинаковых функций

$\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3$. Напомним, что $\vec{\Delta}_i$ имеет смысл расстояния частицы от центра масс системы. Так как приближение, используемое нами, рассчитано на описание основного состояния системы, то в качестве волновой функции $\Phi(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3)$ следует взять произведение волновых функций основного состояния $\Phi_o(\vec{\lambda}_1)\Phi_o(\vec{\lambda}_2)\Phi_o(\vec{\lambda}_3)$. Тогда формфакторы $\langle e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1}\rangle$, $\langle e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2}\rangle$, $\langle e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3}\rangle$ совпадают, и коэффициенты u_f, находятся из уравнения

$$\overset{*}{u}_f\left(\omega_f - \frac{(\vec{f}\vec{C})^2}{\omega_f}\right) = -A_f \langle e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_i}\rangle. \tag{77}$$

Выражение для коэффициентов u_f совпадает с соответствующим выражением, полученным в одночастичной задаче. Таким образом, как и в случае двухчастичной задачи, потенциальные ямы, приготовленные частицами после выделения из поля классической составляющей в пределе больших относительных расстояний, становятся одинаковыми для каждой частицы и совпадают с соответствующей одночастичной потенциальной ямой. Этот результат обобщается на случай n частиц. Выпишем явный вид $V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{x}, \vec{y})$:

$$V = \Sigma A_f u_f\Big(e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1}\Big(1 + e^{i\vec{f}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\vec{x} - \sqrt{\frac{1}{2}}\vec{y}\right)} + e^{i\vec{f}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\vec{x} + \sqrt{\frac{1}{2}}\vec{y}\right)}\Big) +$$

$$+ e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2}\Big(1 + e^{i\vec{f}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\vec{y} - \sqrt{\frac{3}{2}}\vec{x}\right)} + e^{i\vec{f}\sqrt{2}\vec{y}}\Big) + \tag{78}$$

$$+ e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3}\Big(1 + e^{i\vec{f}\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\vec{x} - \sqrt{\frac{1}{2}}\vec{y}\right)} + e^{-i\vec{f}\sqrt{2}\vec{y}}\Big)\Big).$$

Напомним, что $\vec{x}$ пропорционален расстоянию 1-й частицы от центра тяжести системы, $\vec{y}$ – расстоянию между 2-й и 3-й частицей. Случаю $|\vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j| \to \infty$ соответствует $|\vec{x}| = \mathrm{const}$, $|\vec{y}| \to \infty$. При этом экспоненты будут быстро осциллирующими функциями, и мы получаем выражение (76).

Пусть теперь $|\vec{y}| = \mathrm{const}$, $|\vec{x}| \to \infty$. Физически это соответствует тому случаю, когда первая частица бесконечно удалена от второй и третьей, которые находятся на конечном расстоянии друг от друга. При этом потенциал (78) принимает вид

$$V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, y) \to \Sigma A_f u_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1} +$$

$$+ \Sigma e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2}(1 + e^{if\sqrt{2}\vec{y}}) A_f u_f + \Sigma e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3} (1 + e^{-i\vec{f}\sqrt{2}\vec{y}}) A_f u_f, \tag{79}$$

Первый член в выражении (79) есть одночастичная потенциальная яма, приготовленная полем для первой частицы, 2-й совпадает с потенциалом двухчастичной задачи /3/ и зависит от относительного расстояния частиц. Как и в работах /1,2,3/, выясним физический смысл вектора $\vec{C}$. Используя (72), (73), (75), легко показать, что

$$\frac{\partial W_o}{\partial \vec{C}} = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \vec{C}} \right\rangle, \quad C^{\alpha} \frac{\partial J_{\alpha}}{\partial C^{\beta}} = \frac{\partial E(\vec{x}, y)}{\partial C^{\beta}} . \tag{80}$$

Из (80) следует, что

$$\frac{\partial E_o}{\partial J_{\alpha}} = C^{\alpha} . \tag{81}$$

Так как производная полной энергии системы по компонентам полного импульса определяет вектор средней скорости, то из (81) легко заключить, что средняя скорость трёхчастичной конфигурации $\vec{v}$ определяется равенством

$$\vec{v} = \varepsilon^2 \vec{C} . \tag{82}$$

Тогда эффективная масса трёхчастичной конфигурации равна

$$m_{эф} = \frac{1}{\varepsilon^4} \cdot \frac{1}{3} \Sigma \frac{\vec{f}^2}{\omega_f} d_f^{(0)}, \tag{83}$$

где d_f вычисляются при нулевой средней скорости системы. Из выражения для d_f (65) легко видеть, что в пределе больших относительных расстояний $|\vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j| \to \infty$ эффективная масса равна сумме эффективных масс отдельных частиц, а в случае, когда первая частица бесконечно удалена от 2-й и 3-й, эффективная масса трёхчастичной конфигурации равна сумме двух слагаемых, первое из которых есть эффективная масса одной частицы в поле, а второе – эффективная масса двухчастичной конфигурации (2-й и 3-й частиц), выражение для которой, естественно, совпадает с выражением, полученным в работе /3/. В общем случае эффективная масса трёхчастичной конфигурации зависит от относительных расстояний $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Относительное движение частиц

Относительное движение частиц и движение фононов описывается уравнением

$$(\varepsilon^2 \langle H_2 \rangle + E(\vec{x}, \vec{y}) - E)\,\Theta(\xi_1, \xi_2, Q) = 0\,. \tag{84}$$

В данном случае энергия трёхчастичной конфигурации $E(\vec{x}, \vec{y})$ играет в уравнении (84) роль потенциала взаимодействия частиц. Легко показать, что

$$\frac{\partial E(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \vec{\xi}_i} = \langle \frac{\partial V}{\partial \vec{\xi}_i} \rangle, \tag{85}$$

а так как коммутатор операторов L_1, L_2 с остальными функциями $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$, входящими в $\langle H_2 \rangle$, есть величина порядка ε, то считаем, что $E(\vec{x}, \vec{y})$ — единственная, зависящая от $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$, величина в операторе энергии относительного движения. Выражение $\langle H_2 \rangle$ в общем случае имеет весьма сложную структуру. Однако оно значительно упрощается, если рассматривать неподвижный центр инерции частиц. При этом $\vec{C} = 0$. Именно этот случай естественно рассматривать при анализе относительного движения. При $\vec{C} = 0$, $\langle H_2 \rangle$ имеет следующий вид:

$$\langle H_2 \rangle = \Sigma \frac{1}{2} \omega_f Q_f Q_f + \frac{1}{2} \Sigma \omega_f [(P_f - i \overset{*}{T}_{f\alpha}(-i \frac{\partial}{\partial \xi_1^\alpha}) - i \overset{*}{K}_{f\alpha}(-i \frac{\partial}{\partial \xi_2^\alpha})] \times \tag{86}$$

$$\times [P_f + i T_{f\beta}(-i \frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta}) + i K_{f\beta}(-i \frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta})]\,.$$

При этом оператор

$$-\frac{1}{2}\Sigma\omega_f\left[-i\overset{*}{T}_{f\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_1^{\alpha}}\right)-i\overset{*}{K}_{f\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_2^{\alpha}}\right)\right]\times$$
$$\times\left[+iT_{f\beta}\left(-\frac{\partial}{\partial\xi_1^{\alpha}}\right)+i\overset{*}{K}_{f\beta}\left(-i\frac{\partial}{\partial\xi_2^{\beta}}\right)\right] \tag{87}$$

играет роль оператора кинетической энергии относительного движения. С той степенью точности, с которой рассматривается это движение, его можно записать так:

$$-\frac{1}{2}\Sigma\omega_f\Big(\overset{*}{T}_{f\alpha}T_{f\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{\alpha}\partial\xi_1^{\beta}}+\overset{*}{T}_{f\alpha}K_{f\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{\alpha}\partial\xi_2^{\alpha}}+$$
$$+\overset{*}{K}_{f\alpha}T_{f\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{\beta}\partial\xi_2^{\alpha}}+\overset{*}{K}_{f\alpha}\tilde{K}_{f\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^{\alpha}\partial\xi_2^{\beta}}\Big). \tag{88}$$

Сравним выражение (88) с оператором кинетической энергии относительного движения 3 частиц одинаковой массы, найденных по обычной формуле нерелятивистской квантовой механики при учёте замены переменных, произведённой по формуле (8),

$$H' = -\frac{1}{2m\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{\xi}_1^{\,2}}-\frac{1}{2m\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{\xi}_2^{\,2}}. \tag{89}$$

Мы видим, что первый и последний члены в выражении (88) имеют простую аналогию с квантовой механикой и представляют собой кинетическую энергию, отвечающую переменным $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$. Перекрёстный член

$$\overset{*}{T}_{f\alpha}K_{f\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{\alpha}\partial\xi_2^{\beta}}+\overset{*}{K}_{f\alpha}T_{f\beta}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^{\beta}\partial\xi_2^{\alpha}} \tag{90}$$

уже не имеют такой аналогии. Физическая причина его появления состоит в том, что движение вдоль осей $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}_2$ в случае теории сильной связи уже не является независимым из-за наложения условий (12), (22).

До сих пор мы рассматривали случай $g = \varepsilon$ (адиабатическое взаимодействие). Дальнейшее изучение свойств относительного движения проведём для сильновзаимодействующих с полем частиц $g \gg 1$, $\varepsilon^2 = 1$. Это лишь незначительно видоизменит некоторые формулы. В частности H_0 и H_1 будут иметь порядок по константе связи g^2 и g, соответственно /4/.

Вместо преобразования (45), изменяющего масштаб переменных x и y, имеем

$$\vec{x} = \frac{1}{g}\,\vec{\xi}_1, \quad \vec{y} = \frac{1}{g}\,\vec{\xi}_2. \tag{91}$$

Уравнение относительного движения имеет вид

$$(\langle H_2\rangle + E(\vec{x},\vec{y}) - E)\,\Theta(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, Q) = 0\ . \tag{92}$$

Оценим квадратичные формы

$$-\frac{1}{2}\,\Sigma\omega_f \overset{*}{T}_{f\alpha} T_{f\beta}\,, \tag{93}$$

$$-\frac{1}{2}\,\Sigma\omega_f \overset{*}{K}_{f\alpha} K_{f\beta}\,, \tag{94}$$

$$-\frac{1}{2}\,\Sigma\omega_f (\overset{*}{T}_{f\alpha} K_{f\omega} + \overset{*}{K}_{f\alpha} T_{f\beta})\,, \tag{95}$$

входящие в $\langle H_2\rangle$ и дающие в сумме оператор кинетической энергии относительного движения. Напомним, что

$$T_{f\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,N^{(1)}_{f\alpha} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,N^{(2)}_{f\alpha} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,N^{(3)}_{f\alpha}\,, \tag{96}$$

$$K_{f\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,N^{(2)}_{f\alpha} - \sqrt{\frac{1}{2}}\,N^{(3)}_{f\alpha}\,. \tag{97}$$

Матрицы $M^{(i)}_{\alpha f}$ имеют вид

$$M^{(i)}_{\alpha f} = f_\alpha u_f\, e^{-i\vec{\Delta}_i \vec{f}}\,. \tag{98}$$

Кроме того,

$$F^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,M^{(1)} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,M^{(2)} - \sqrt{\frac{1}{6}}\,M^{(3)}\,, \tag{99}$$

$$F^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{2}}\, M^{(2)} - \sqrt{\frac{1}{2}}\, M^{(3)}. \qquad (100)$$

Выберем матрицы $T_{f\alpha}$, $K_{f\alpha}$, связанные с матрицами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ условиями нормировки

$$\sum_f F^{(1)}_{\beta f} T_{f\alpha} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (101)$$

$$\sum_f F^{(2)}_{\beta f} K_{f\alpha} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (102)$$

в виде

$$T_{f\alpha} = f_\alpha \overset{*}{v}{}^{(1)}_f \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{i\vec{\Delta}_1\vec{f}} - \sqrt{\frac{1}{6}}\, e^{i\vec{\Delta}_2\vec{f}} - \sqrt{\frac{1}{6}}\, e^{i\vec{\Delta}_3\vec{f}}\right), \qquad (103)$$

$$K_{f\alpha} = f_\alpha \overset{*}{v}{}^{(2)}_f \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\, e^{i\vec{\Delta}_2\vec{f}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\, e^{i\vec{\Delta}_3\vec{f}}\right). \qquad (104)$$

Тогда условия (101) и (102) запишутся в виде

$$\frac{1}{3}\sum \vec{f}^{\,2}\overset{*}{v}{}^{(1)}_f u_f \Big(1 - \frac{2}{3}\cos(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)\vec{f} - \frac{2}{3}\cos(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_1)\vec{f} + \frac{1}{3}\cos(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_2)\vec{f}\Big) = 1. \qquad (105)$$

$$\frac{1}{3}\sum \vec{f}^{\,2}\overset{*}{v}{}^{(2)}_f u_f \big(1 - \cos(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)\vec{f}\big) = 1. \qquad (106)$$

Следуя работе /3/, считаем, что числа u_f достаточно быстро убывают с ростом f и что функции $v^{(i)}_f$ можно выбрать так:

$$v^{(i)}_f = u_f F^{(i)}, \qquad (107)$$

причём в пределе $|\vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j| \to \infty$ значения функций $F^{(i)}$ совпадают. Тогда условие нормировки для $T_{f\alpha}$ имеет вид:

$$F^{(1)}\frac{1}{3}\sum |u_f|^2 \vec{f}^{\,2}\Big(1 - \frac{2}{3}\cos(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_1)\vec{f} - \frac{2}{3}\cos(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_1)\vec{f} + \frac{1}{2}\cos(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_2)\vec{f}\Big) = 1, \qquad (108)$$

и аналогично для $K_{f\alpha}$ –

$$F^{(2)}\frac{1}{3}\Sigma\,|u_f|^2(1-\cos(\vec{\Delta}_2-\vec{\Delta}_3)\vec{f}\,)=1\,. \tag{109}$$

Рассмотрим сначала случай больших относительных расстояний $|\vec{\Delta}_i-\vec{\Delta}_j|\to\infty$. Тогда условия нормировки для T и K имеют единообразный вид

$$\frac{1}{3}\Sigma\,|u_f|^2\vec{f}^{\,2}=1\,. \tag{110}$$

Будем теперь оценивать квадратичные формы

$$-\frac{1}{2}\Sigma\,\omega_f\,\overset{*}{T}_{f\alpha}\,T_{f\beta}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^\alpha\,\partial\xi_1^\beta}=$$

$$=-\frac{1}{6}F^2\,\Sigma\,\omega_f\,|u_f|^2\,\vec{f}^{\,2}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^\alpha\,\partial\xi_1^\beta}\,\delta_{\alpha\beta}\,. \tag{111}$$

Эффективная масса каждой из частиц равна

$$m_{эф}=\frac{g^2}{3}\Sigma\,\vec{f}^{\,2}\,\frac{|u_f|^2}{\omega_f}\,. \tag{112}$$

Заменим ω_f в выражениях (111),(112) на некоторую эффективную частоту ω_o и вынесем её за знак суммы, кроме того, воспользуемся (110) и (112). Тогда квадратичная форма (111) будет иметь вид

$$-\frac{1}{2}\Sigma\,\omega_f\overset{*}{T}_{f\alpha}T_{f\beta}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^\alpha\,\partial\xi_1^\beta}=-\frac{1}{2m_{эф}}\,g^2\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^\alpha\,\partial\xi_1^\beta}\,\delta_{\alpha\beta} \tag{113}$$

аналогично

$$-\frac{1}{2}\Sigma\,\omega_f\overset{*}{K}_{f\alpha}K_{f\beta}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^\alpha\,\partial\xi_2^\beta}=-\frac{1}{2m_{эф}}\,g^2\,\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^\alpha\,\partial\xi_2^\beta}\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{114}$$

Оценим теперь квадратичную форму (95). Легко показать, что в пределе асимптотически больших относительных расстояний она стремится к нулю. Действительно, учитывая (103) и (104), получаем

$$-\frac{1}{2}\Sigma\omega_f\,[\overset{*}{T}_{f\alpha}K_{f\beta}+\overset{*}{K}_{f\alpha}T_{f\beta}\,]=-\frac{F^2}{6}\Sigma\,\omega_f\,\vec{f}^{\,2}\,|u_f|^2\times \tag{115}$$

$$\times \sqrt{\frac{1}{3}} \times 2(\cos(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_1)\vec{f} - \cos(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_1)\vec{f}) \tag{115}$$

и в пределе $|\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_1| \to \infty$, $|\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_1| \to \infty$ выражение (115) стремится к нулю. Уравнение (92) в этом случае будет иметь вид

$$\Big(\frac{1}{2}\Sigma\,\omega_f \overset{*}{Q}_f Q_f - \frac{1}{2m_{эф}} g^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}_1^{\,2}} - \frac{1}{2m_{эф}} g^2 \frac{\partial^2}{\partial \vec{\xi}_2^{\,\beta}} + \frac{1}{2}\Sigma\,\omega_f \overset{*}{P}_f P_f +$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma\omega_f \overset{*}{P}_f \Big(T_{f\beta}\frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta} + K_{f\beta}\frac{\partial}{\partial \xi_2^\beta}\Big) - \frac{1}{2}\Sigma\omega_f P_f \Big(\overset{*}{T}_{f\beta}\frac{\partial}{\partial \xi_1^\beta} + \overset{*}{K}_{f\beta}\frac{\partial}{\partial \xi_2^\beta}\Big) + \tag{116}$$

$$+ E(\vec{x}, \vec{y}) - E\Big)\,\Theta(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, Q) = 0 .$$

При этом оператор кинетической энергии, входящий в состав $<H_2>$, имеет вид

$$-\frac{g^2}{2m_{эф}}\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} - \frac{g^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} \tag{117}$$

и в точности совпадает с соответствующим квантово-механическим оператором (89), в котором масса частиц заменена на эффективную массу частицы в поле. Выражение для оператора $<H_2>$ таково, что и в случае нулевой средней скорости переменные Q_f, и $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ в уравнении (116) не разделяются, и задачу описания свойств фононного поля и относительного движения нужно решать вместе. Физическая причина этого, как уже указывалось в работе /3/, состоит в том, что кинетическая энергия относительного движения вследствие большой эффективной массы частиц в поле - величина того же порядка, что и кинетическая энергия фононов.

Вычисление потенциала взаимодействия

Определим теперь функцию $E(\vec{x}, \vec{y})$, играющую роль потенциала в уравнении (92). $E(\vec{x}, \vec{y})$ находится из уравнения

$$(H_0 - E(\vec{x}, \vec{y}))\,\Psi(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{x}, \vec{y}) = 0, \tag{118}$$

где

$$H_o = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vec{\lambda}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\vec{\lambda}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial\vec{\lambda}_3^2}\right) +$$

$$+ g^2 \Sigma A_f u_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1} \left(1 + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_2)} + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_3)}\right) +$$

$$+ g^2 \Sigma A_f u_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2} \left(1 + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_1)} + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)}\right) + \tag{119}$$

$$+ g^2 \Sigma A_f u_f e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3} \left(1 + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_1)} + e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_3 - \vec{\Delta}_2)}\right).$$

$$d_f = |u_f|^2 \left(3 + 2e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_2)} + 2e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_3)} + 2e^{i\vec{f}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)}\right). \tag{120}$$

Будем рассматривать случай нулевой средней скорости $\vec{C} = 0$. Перепишем уравнение (118) в виде

$$\left(-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vec{\lambda}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\vec{\lambda}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial\vec{\lambda}_3^2}\right) + V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j) - W_o\right)\Psi = 0, \tag{121}$$

где

$$W_o = E(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{g^2}{2} \Sigma\, \omega_f |u_f|^2 \left(3 + 2\cos(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_2)\vec{f} + 2\cos(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)\vec{f} + 2\cos(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_3)\vec{f}\right). \tag{122}$$

Переменные $\vec{x}, \vec{y}$ входят в уравнения (118), (121) как параметры. Воспользуемся уравнением (121) для определения низшего уровня системы. В случае больших относительных расстояний $V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{x}, \vec{y})$ преобразуется к виду

$$V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) = g^2 \Sigma A_f u_f \left(e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_1} + e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_2} + e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_3}\right). \tag{123}$$

Введём в рассмотрение функцию

$$V_o(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) = 3g^2 \Sigma A_f u_f - \frac{g^2}{2} \Sigma A_f u_f \left[(\vec{f}\vec{\lambda}_1)^2 + (\vec{f}\vec{\lambda}_2)^2 + (\vec{f}\vec{\lambda}_3)^2\right]. \tag{124}$$

Теперь, как и в случае задачи двух тел [4], легко показать, что в уравнении

$$\left\{ -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{\lambda}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\lambda}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\lambda}_2^2} \right) + V_o(\vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) + [V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) - V_o(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3)] - W_o \right\} \Phi_o(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) = 0 \tag{125}$$

член $[V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) - V_o(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3)]$ можно рассматривать как слабое возмущение.

Введём частоту ω по формуле

$$\omega^2 = -\frac{1}{3m} \Sigma \vec{f}^2 A_f u_f . \tag{126}$$

Тогда

$$V_o = 3g^2 \Sigma A_f u_f + \frac{m(g\omega)^2}{2} (\vec{\lambda}_1^2 + \vec{\lambda}_2^2 + \vec{\lambda}_3^2), \tag{127}$$

и уравнение (125) сведётся к осцилляторному. Так как мы определяем основное состояние системы, то

$$\Phi_o(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) = \frac{(mg\omega)^{9/4}}{\pi} \exp\left[-\frac{mg\omega}{2} (\vec{\lambda}_1^2 + \vec{\lambda}_2^2 + \vec{\lambda}_3^2)\right] \tag{128}$$

и

$$\langle \exp(+i\vec{f}\vec{\lambda}_i) \rangle_o = \exp\left(-\frac{\vec{f}^2}{4mg\omega}\right), \tag{129}$$

$$\langle (\vec{f}\vec{\lambda}_i) \rangle_o = \frac{\vec{f}^2}{2mg\omega} . \tag{130}$$

Поэтому

$$\langle V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) - V_o(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3) \rangle_o = O(1), \tag{131}$$

и волновую функцию системы можно с хорошей точностью аппроксимировать функцией (128).

Найдём теперь

$$W_o(\vec{x}, \vec{y}) = \left\langle -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vec{\lambda}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\lambda}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{\lambda}_3^2} \right) + V(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2, \vec{\lambda}_3, \vec{x}, \vec{y}) \right\rangle_o . \tag{132}$$

После проведения соответствующих расчётов получим

$$W_o(\vec{x},\vec{y}) = \frac{9}{2}\omega g + 3g^2\Sigma A_f u_f + 2g^2\Sigma A_f u_f \exp\frac{f^2}{4mg\omega}\times$$
$$\times\left(\cos(\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_2)\vec{f} + \cos(\vec{\Delta}_2-\vec{\Delta}_3)\vec{f} + \cos(\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_3)\vec{f}\right). \qquad (133)$$

Определим теперь u_f. В случае описания основного состояния системы выбор волновой функции в виде (128) приводит к равенству формфакторов частиц $\langle e^{i\vec{f}\vec{\lambda}_i}\rangle$, и для определения u_f мы имеем выражение (77). В случае $\vec{C}=0$

$$u_f = -\frac{\overset{*}{A}_f}{\omega_f}\langle e^{-i\vec{f}\vec{\lambda}_i}\rangle, \qquad (134)$$

или, воспользовавшись формулой (129),

$$u_f = -\frac{\overset{*}{A}_f}{\omega_f}\exp\left(-\frac{f^2}{4mg\omega}\right). \qquad (135)$$

Тогда окончательно, учитывая (122), (133) и (135), для $E(\vec{x},\vec{y})$ имеем следующее выражение:

$$E(\vec{x},\vec{y}) = -\frac{3}{2}g^2\Sigma\frac{|A_f|^2}{\omega_f}\exp\left(-\frac{f^2}{4mg\omega}\right) + \frac{9}{2}\omega g -$$
$$-g^2\Sigma\frac{|A_f|^2}{\omega_f}\exp\left(-\frac{\vec{f}^2}{2mg\omega}\right)\left(\cos(\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_2)\vec{f}\right. + \qquad (136)$$
$$\left.+\cos(\vec{\Delta}_2-\vec{\Delta}_3)\vec{f} + \cos(\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_3)\vec{f}\right).$$

Напомним, что $\vec{\Delta}_i-\vec{\Delta}_j$ есть относительные расстояния между i-й и j-й частицей, которые выражаются через $\vec{x}$ и $\vec{y}$ по формулам

$$\begin{cases}\vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{x} - \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{y}\\ \vec{\Delta}_1-\vec{\Delta}_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{x} + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{y}\\ \vec{\Delta}_2-\vec{\Delta}_3 = \sqrt{2}\,\vec{y}.\end{cases} \qquad (137)$$

Проведя суммирование в последнем члене, получим зависящую от $\vec{x}, \vec{y}$ часть $E(\vec{x}, \vec{y})$ в виде

$$\tilde{E}(\vec{x}, \vec{y}) = -G^2 \exp\left(-\frac{a}{2}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_2)^2\right) - G^2 \exp\left(-\frac{a}{2}(\vec{\Delta}_1 - \vec{\Delta}_3)^2\right) -$$

$$- G^2 \exp\left(-\frac{a}{2}(\vec{\Delta}_2 - \vec{\Delta}_3)^2\right), \qquad (138)$$

$$a = m\omega g; \qquad G^2 = g^2\sqrt{g}\,\frac{m\omega\sqrt{2m\omega}}{2\pi^2\omega_0}\,A^2_{f_0}.$$

То есть потенциал взаимодействия частиц есть парный гауссовский потенциал.

Если в уравнении (116), описывающем относительное движение частиц, пренебречь членами вида $\Sigma\,\omega_f P_f \overset{*}{T}_{f\alpha}$, $\Sigma\,\omega_f P_f \overset{*}{K}_{f\alpha}$, то переменные Q_f, ξ_1, ξ_2 делятся. При этом для относительного движения частиц в случае $|\vec{\Delta}_i - \vec{\Delta}_j| \to \infty$ получаем следующее уравнение:

$$\left[-\frac{1}{2m_{\text{эф}}}\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}^2} - \frac{1}{2m_{\text{эф}}}\frac{\partial^2}{\partial\vec{y}^2} - G^2\exp\left(-\frac{m\omega g}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{x} - \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{y}\,\right]^2\right) -\right.$$

$$- G^2\exp\left(-\frac{m\omega g}{2}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\,\vec{x} + \sqrt{\frac{1}{2}}\,\vec{y}\,\right]^2\right) - G^2\exp\left(-\frac{m\omega g}{2}(\sqrt{2}\,\vec{y})^2\right) - \qquad (139)$$

$$\left. - E\right]\Psi(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$$

Таким образом, для системы трёх сильновзаимодействующих со скалярным полем частиц получено разложение энергии по степеням константы связи и найдено выражение для эффективной массы системы в поле. Было выведено уравнение, описывающее относительное движение частиц. В случае предельно больших относительных расстояний, что соответствует задаче рассеяния, это уравнение переходит в уравнение Шредингера для трёх частиц с массой $m_{\text{эф}}$, взаимодействующих посредством парного Гауссова потенциала.

В заключение автор выражает глубокую благодарность О.А.Хрусталёву за постановку задачи и советы, А.А.Архипову, В.И.Саврину, Н.Е.Тюрину за обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Н.Н.Боголюбов. УМЖ, 2, 1950; Избранные труды. т. 2. "Наукова думка", 1970.
2. Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе , О.А.Хрусталёв. ТМФ, 10, 162, 1972.
3. Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 12, 7, 1972.
4. А.А.Архипов, Н.Е.Тюрин. Препринт ИФВЭ 72-37, Серпухов, 1972.
5. Труды семинара "Fundamental Problems of the Elementary Particle Theory", Preprint ITF 70-99, Kiev, 1970.

Рукопись поступила в издательскую группу
31 октября 1972 года.

Цена 18 коп.

Издательская группа И Ф В Э

Заказ 43. Тираж 250. 1,4 уч.-изд.л. Т-20820.

Декабрь 1972. Редактор Н.П.Ярба.