JAERI-M
5486

輻射問題における角度因子計算への正射影法の応用

(射影面積法)

1973年12月

阿部　清治

日　本　原　子　力　研　究　所
Japan Atomic Energy Research Institute

輻射問題における角度因子計算への正射影法の応用
(射影面積法)

日本原子力研究所動力炉開発管理室
阿部　清治

(1973年11月27日受理)

輻射問題における角度因子計算の新しい手法(射影面積法)を紹介する。この方法は,角度因子の計算に正射影の考え方を取り入れたもので,それによると角度因子は,輻射体および被輻射体の平行光線による射影面積の関数として表わされる。射影面積法を採用することにより,これまでLambert の式で4重積分形で表わされてきた角度因子は,3次元問題では2重積分形で,2次元問題では単積分形で表わされ,しかも,多くの場合,これまでより簡単な被積分関数になる。この結果,多くの問題で角度因子が解析的に求まるようになり,また,解析的に求めることができない場合でも,数値積分の精度と速さを向上させられるようになった。

Application of Orthography to the Angle Factor Calculation in Radiation Problems ; the Shadow Area Method

Kiyoharu ABE

Office of Power Reactor Projects, JAERI

(Received November 27, 1973)

A new method to calculate an angle factor in the radiation problem (named the "shadow area method") is described. In this method the idea of orthography is applied to angle factor calculation, and the angle factor is given as a function of the shadow areas of the radiating and the irradiated bodys by parallel beams. By the shadow area method, the angle factor, written in fourfold integration in the Lambert's equation, can be expressed in double or single integration for the three or two dimensional problem respectively, and besides the integrated function becomes simple in most cases. Angle factors may thus be obtained analytically in many problems, and where not obtained analytically, accuracy and rapidity of the numerical integrations can be increased considerably.

目　次

はじめに …… 1
1. 輻射の概要とこれまでの角度因子計算法 …… 3
1.1 輻射現象の概要 …… 3
1.2 輻射の等方性とLambert の式 …… 5
2. 射影面積法による角度因子の計算法 …… 9
2.1 輻射体から出て行く熱量 …… 9
2.2 二体間の輻射による熱伝達 …… 11
2.3 平面問題 …… 14
2.4 Lambert の方法と射影面積法との関係 …… 18
まとめ …… 22
記号表 …… 23
参考文献 …… 24
謝辞 …… 24
付録：射影面積法の原子炉燃料集合体ヒートアップ計算への応用 …… 25

はじめに

原子力発電が電力の中核となる日が近ずき，大型プラントが各地に続々と建設されるにつれて，原子力施設は当然のことながらより一層の安全性を要求される。そして，現在特に問題になっているのが，軽水炉の再循環系配管の破断によっておきる，冷却材喪失事故（LOCA）の解析である。

冷却材が破断口から流出するにつれて，原子炉の冷却能は著しく低下する。ブローダウンの初期は核沸騰によって熱除去されていたものが，流量の低下に伴い，膜沸騰に変わって，伝熱量が低下する。炉心流量がほとんどなくなると，もはや対流による熱伝達は期待できず，輻射による，高温部分から低温部分への熱移動だけで温度分布が決まる。このように，LOCA時の原子炉炉心のヒートアップを計算するには，炉心内部での輻射による熱伝達を正しく評価することが，必要欠くべからざる要因である。

ところで，輻射による熱伝達を考えるとき，最初に問題になるのは，角度因子計算の困難さである。ここで角度因子とは，ある物体から出された熱輻射線のうち，別のある物体に到達する確率である。本報告書で紹介するのは，新しい，従来の方法に比べてより簡単な，角度因子の計算法である。

角度因子の計算は，これまで，ほとんどの場合，次に示すLambert の式を用いてなされてきた。

$$f_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \frac{1}{\ell_{12}^2} dA_1 dA_2$$

Lambert の式は，輻射体および被輻射体上の微小面 dA_1，dA_2 の間の熱輻射量を求め，それをそれぞれの全表面 A_1，A_2 について積分するという方法により，二体間の角度因子を求めている。しかしながら，この方程式は三角関数と距離の二乗分の一の項の混在する関数を二重に面積分（すなわち4重積分）するものであり，解析的に解が求まるのは，実際には極めて稀である。また，計算機を用いて数値積分するにしても，4重積分の計算は，時間もかかるし精度も望めない。

ここに紹介する方法は，最初にある方向 ω を与え，その方向の熱輻射線による伝熱量を求め，それを全方向 Ω について積分することにより伝熱量を求めようとするものであり，具体的には次の式で計算される。

$$f_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{\Omega} S_{12}^{(\omega)} d\omega$$

ここで，$S_{12}^{(\omega)}$ とは，輻射体 A_1 と被輻射体 A_2 それぞれの，ω 方向平行光線による正射影 $S_1^{(\omega)}$，$S_2^{(\omega)}$ の共通部分の面積である。このように，角度因子が正射影面積を用いて表わされることから，この方法を「射影面積法」と呼ぶことにする。

射影面積法は，輻射体表面上で温度および輻射体が一様でない場合についても定義されるが，このときの表示はあまり簡単にならない。しかし，輻射体表面上で温度と輻射率が一様である

場合には，上記の式を用いて，Lambert の式よりもはるかに簡単に角度因子を計算できる。

射影面積法の特徴をまとめて示すと次のようになる。

- 積分回数が少なくなる。Lambert の式に2回の面積分を含むから，実際には4重積分である。これに対し，射影面積法では1回の立体角積分をすればよく，三次元問題では2回，二次元問題ではただ1回の積分をすることにより，角度因子が計算できる。
- 被積分関数が比較的簡単になることが多い。特に二次元問題では，ほとんどの場合著しく簡単になる。

以上の結果，解析的に角度因子を求められる問題が飛躍的に増えた。たとえば，付録に示すように，正方格子配列の燃料棒間の角度因子が解析的に求められた。また，もし解析的に解が求まらない場合でも，積分回数の減少により，数値積分の速さと精度を向上させられるようになった。

1　輻射の概要とこれまでの角度因子計算法

1.1　輻射現象の概要

固体表面からは，その表面温度と表面黒度に応じて熱輻射線が出る。理想的な物体（完全黒体）では，単位時間に単位表面積からその上部半空間に放出される熱輻射量$\ddot{q}^{(b)}$は，Stefan－Boltzmannの法則により，次式で表わされる。

$$\ddot{q}^{(b)} = \sigma T^4 \tag{1}$$

ここで，　　T＝黒体の表面温度（°K）

σ＝Stefan － Boltzmann 定数

＝1.355×10^{-12} cal/sec·cm²·°K⁴

実際の物体には，完全黒体というものはなく，その単位表面積から出る単位時間あたり熱輻射量$\ddot{q}$は，同一温度の黒体単位表面から単位時間に出る熱輻射量$\ddot{q}^{(b)}$よりも必ず小さい。この関係は，係数εを用いて次式に表わされる。

$$\ddot{q} = \varepsilon \ddot{q}^{(b)} = \varepsilon \sigma T^4 \tag{2}$$

ここで，εは黒度または輻射率と呼ばれる無次元数であり，完全黒体の場合には1，そうでない物体では1より小さい正数である。輻射率εは，一般には温度の関数となるが，本報告書ではεを温度に依存しない物質によって決まる定数として取り扱う。（このように取り扱える物体は灰色体と呼ばれる。）

次に，輻射を受ける側について考える。被輻射体表面に到達した熱輻射線は，一部は吸収されて熱に変り，残りは反射されて再び空間中に放出される。吸収された熱量の，全到達熱量に対する割合を吸収率と呼び，記号aで表わす。完全黒体の場合だと，到達した全熱輻射線が吸収されるので，a＝1となるが，実際の物体ではaは1より小さい正数である。

吸収率aは，到達するエネルギーのスペクトルの関数であるから，一般には輻射体の表面温度の関数である。しかし，灰色体の場合には，被輻射体の吸収率は輻射体の表面温度に依存しないこと，および，被輻射体の吸収率はその物体自身の輻射率に等しいことが知られている(Kirchhoff　の法則)。すなわち，灰色体については温度によらず次の関係が成り立つ。

$$a = \varepsilon \tag{3}$$

ある物体表面から出る単位時間あたりの熱輻射量qは，(2)式をその物体での全表面積Aについて積分することにより得られる。すなわち，

$$q = \int_A \ddot{q}\, dA = \sigma \int_A \varepsilon T^4\, dA \tag{4-1}$$

特に，輻射体表面で温度および輻射率が一定である場合には，（4－1）式は次のように簡略

化される。

$$q = \ddot{q} A = \varepsilon \sigma T^4 A \tag{4-2}$$

さて，物体表面A_1から空間中に放出された熱輻射線は，あるものは別な物体A_2，A_3，A_4……に到達し，そこで吸収もしくは反射される。あるものは無限のかなたに消えていってしまう。また，A_1が凹面体の場合だと，A_1自身にも到達し，そこで吸収もしくは反射される。熱エネルギ保存の法則から，単位時間にA_1から放出される熱輻射量q_1と，単位時間にこれら各物体（無限　を含む）に到達する熱量との間には，次の関係が成り立っている。

$$q_1 = \sum_{n=1}^{N} q_{1\to n} + q_{1\to\infty} \tag{5}$$

ただし，　$q_{1\to n}$ ＝ 物体A_1から出て物体A_nに到達する単位時間あたり熱輻射量。

n＝1のときはA_1自身への熱輻射量。

$q_{1\to\infty}$ ＝ 物体A_1から出て無限遠に行ってしまう単位時間あたり熱輻射量。

N ＝ 考えている体系中に存在する物体の数。

ここで，A_1から出た輻射熱q_1のうち，物体A_nに到着する確率を$f_{1\to n}$，無限遠に行く確率を$f_{1\to\infty}$で表わす。これらの確率は，角度因子と呼ばれるものであり，次式で定義される。

$$\begin{cases} f_{1\to n} = \dfrac{q_{1\to n}}{q_1} \\[2ex] f_{1\to\infty} = \dfrac{q_{1\to\infty}}{q_1} \end{cases} \tag{6}$$

角度因子は，一般には，各物体の形状，相互の位置関係，および輻射体表面での温度と輻射率の分布によって決まる。特に，輻射体表面で温度および輻射率が一様である場合には，角度因子は各物体の幾何学的形状および相対位置だけで決定される。

本報告書が対象とするのは，このように定義された角度因子の計算法である。この計算には，「輻射の等方性」が前提となっており，これまで使われてきているLambert の式もこの原則から導き出されているので，次章ではこれらについて説明する。

なお，(6)式を(5)式に代入すれば，各角度因子間の関係が得られる。すなわち，

$$\sum_{n=1}^{N} f_{1\to N} + f_{1\to\infty} = 1 \tag{7}$$

(7)式において，輻射体A_1が凸面体であれば$f_{1\to 1}=0$，また，N個の面によって空間が囲まれていれば$f_{1\to\infty}=0$である。

1.2 輻射の等方性とLambertの式

本報告書では，輻射は等方的であるとみなされる。いま，Figure 1に示す微小な単位平面からの輻射を考える。単位平面の法線からαだけ傾いた方向への，単位面積，単位時間，単位立体角あたりの熱輻射量$\ddot{q}^{(\omega)}$は，輻射の等方性から，次のように表わされる（Lambertの余弦法則）。

$$\ddot{q}^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\ddot{q}\cos\alpha \tag{8}$$

ここで，$\ddot{q}^{(\omega)}$の添字(ω)は，三次元空間でのある一方向を表わすものと約束する。方向ωは，Figure 1に見られるように，法線からの傾きの角αと，法線まわりの角βによって表わすことができる。また，$\ddot{q}$は，前述の(3)式で定義された，輻射体の単位表面から単位時間に出される熱輻射量である。

(8)式の右辺に係数$1/\pi$が現われる理由は次のとおりである。

輻射の等方性は，未定係数Cを用いて次のように表わせる。

$$\ddot{q}^{(\omega)} = C\cdot\ddot{q}\cos\alpha$$

輻射体の単位表面から，単位時間にその上部半空間$\Omega/2$に放出される熱輻射量$\ddot{q}$は，この式の両辺に微小立体角$d\omega$をかけ，それを$\Omega/2$について積分すれば得られる。単位表面内では$\ddot{q}$は一様であると考えられるので，この関係は次のようになる。

$$\ddot{q} = \int_{\frac{\Omega}{2}}\ddot{q}^{(\omega)}d\omega$$

$$= C\ddot{q}\int_{\frac{\Omega}{2}}\cos\alpha\, d\omega$$

これを極座標表示になおすと，微小角間の関係

$$d\omega = \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \tag{9}$$

を用いて次のように書ける。

$$\ddot{q} = C\ddot{q}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$= C\cdot\pi\ddot{q}$$

$$\therefore\quad C = \frac{1}{\pi}$$

次に，Figure 2において，微小平面dA_1から微小平面dA_2に到達する，単位時間あたり熱輻射量を求める。dA_1，dA_2を結ぶ直線をℓ_{12}とし，ℓ_{12}とdA_1の法線との間の角

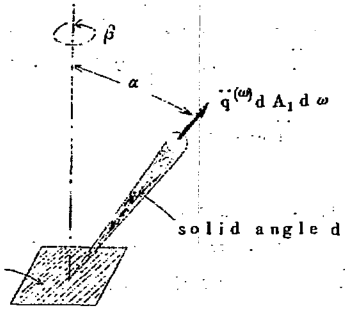

Figure 1 Lambert's cosine law: The energy emitted per unit area per unit time per unit solid angle in a direction ω is given by the following eguation :

$$\ddot{q}^{(\omega)} = \frac{\ddot{q}}{\pi} \cos \alpha$$

where $\ddot{q}$ is the radiant energy emitted from the surface per unit area per unit time, and α is the angle with the normol to dA.

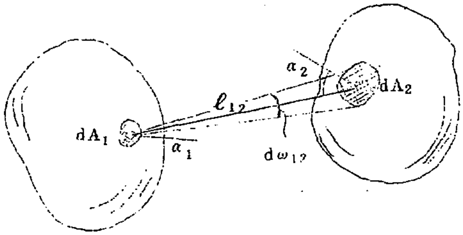

Figure 2 Radiant energy transported from dA_1 to dA_2.

をα_1とする。このような表示をすれば，単位時間にdA_1からℓ_{12}方向の微小立体角$d\omega$中に出ていく熱輻射量$dq_1^{(\omega)}$は，(8)式を用いて次のように書くことができる。

$$dq_1^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\ddot{q}_1 \cos\alpha_1 d\omega dA_1 \tag{10}$$

ところで，ℓ_{12}の終端において，ℓ_{12}に垂直な平面$\Pi^{(\omega)}$を考え，$\Pi^{(\omega)}$におろしたdA_2の射影をdS_2とすると，α_2をℓ_{12}とdA_2の法線の間の角として，dS_2は次のように書かれる。

$$dS_2 = \cos\alpha_2 dA_2 \tag{11}$$

dA_2を通る熱輻射線の量と，dS_2を通る熱輻射量は同じと考えてよく，また，微小面dA_1から微小面dA_2を見込む微小な立体角$d\omega_{12}$は

$$d\omega_{12} = \frac{dS_2}{\ell_{12}^2} \tag{12}$$

で与えられることから，単位時間にdA_1からdA_2に伝えられる熱輻射量$dq_{1\to2}$は，(10)式を用いて次のように書ける。

$$dq_{1\to2} = \frac{1}{\pi}\ddot{q}_1 \cos\alpha_1 \frac{dS_2}{\ell_{12}^2} dA_1$$

$$= \frac{1}{\pi}\ddot{q}_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdot \frac{1}{\ell_{12}^2} dA_1 dA_2 \tag{13}$$

これから，表面A_1から表面A_2への伝熱量$q_{1\to2}$は次式で与えられる。

$$q_{1\to2} = \frac{1}{\pi}\int_{A_2}\int_{A_1} \ddot{q}_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{1}{\ell_{12}^2} dA_1 dA_2 \tag{14-1}$$

特に，A_1上で$\ddot{q}_1$が一様であるとき，すなわち，A_1上で表面温度および輻射率が一様であるとき，(14-1)式は次のように書ける。

$$q_{1\to2} = \frac{\ddot{q}_1}{\pi}\int_{A_2}\int_{A_1} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{1}{\ell_{12}^2} dA_1 dA_2 \tag{14-2}$$

また，A_1からの単位時間あたり熱輻射量q_1は，$\ddot{q}_1$を使って次のように表わせる。
〔A_1上で$\ddot{q}_1$が一様でないとき〕

$$q_1 = \int_{A_1} \ddot{q}_1 dA_1 \tag{15-1}$$

〔A_1上で$\ddot{q}_1$が一様であるとき〕

$$q_1 = \ddot{q}_1 A_1$$

(6)式で定義された角度因子の式に(14)，(15)式を代入すれば，A_1 から A_2 への角度因子 $f_{1\rightarrow 2}$ が次のように求まる。

〔A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$f_{1\rightarrow 2} = \frac{q_{1\rightarrow 2}}{q_1} = \frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{A_2}\int_{A_1} \ddot{q}_1 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{1}{\ell_{12}{}^2} dA_1 dA_2}{\displaystyle\int_{A_1} \ddot{q}_1 \, dA_1} \qquad (16-1)$$

〔A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$f_{1\rightarrow 2} = \frac{q_{1\rightarrow 2}}{q_1} = \frac{\dfrac{\ddot{q}_1}{\pi}\displaystyle\int_{A_2}\int_{A_1} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{1}{\ell_{12}{}^2} dA_1 dA_2}{\ddot{q}_1 A_1}$$

$$= \frac{1}{\pi A_1}\int_{A_2}\int_{A_1} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \frac{1}{\ell_{12}{}^2} dA_1 dA_2 \qquad (16-2)$$

これが，Lambert の方法による角度因子の計算法である。

2. 射影面積法による角度因子の計算法

2.1 輻射体から出て行く熱量

ある輻射体の全表面Aから出る，単位時間あたり熱輻射量qについて考える。

今，ある立体角ωを定め，Aから出る熱輻射線のうち，方向がωであるものだけを取り出しそれらによって運ばれる単位時間あたり熱輻射量を$q^{(\omega)}$とする。（正確には，方向ωの近傍に微小立体角$d\omega$をとり，熱輻射線の方向が$d\omega$に含まれるものを取り出して，それらによる単位時間あたり伝熱量をdq^{*}とし，$d\omega \to 0$のときの$dq^{*}/d\omega$の極限値として$q^{(\omega)}$を与える。）

このように定義すると，Aからの単位時間あたり全熱輻射量qは，$q^{(\omega)}\ d\omega$ を全空間Ωにわたって積分することにより求められる。

$$q = \int_{\Omega} q^{(\omega)} d\omega \tag{17-1}$$

(9)式の関係を用いれば，この式はまた次のように極座標表示される。

$$q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} q^{(\theta,\varphi)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{17-2}$$

よって，ω方向への熱輻射量$q^{(\omega)}$がわかれば，(17-1)もしくは(17-2)式を用いることによりqを求めることができる。

Figure 3 において，物体Aからω方向に出て行く，単位時間，単位立体角あたりの熱輻射量$q^{(\omega)}$を考える。方向ωに垂直な平面$\Pi^{(\omega)}$を考え，$\Pi^{(\omega)}$へのAの正射影を$S^{(\omega)}$とする。A上の微小面dAは，$S^{(\omega)}$上の微小面$dS^{(\omega)}$に写される。今，dAからω方向に出た熱輻射線$dq^{(\omega)}$について考えると，dAの方線と方向ωの間の角をαとすれば，(8)式から$dq^{(\omega)}$は次のように表わされる。

$$dq^{(\omega)} = \frac{1}{\pi} q \cos\alpha\ dA \tag{18}$$

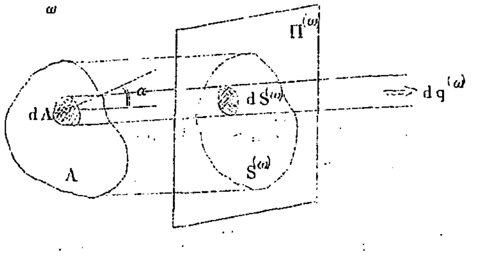

Figure 3 Radiant energy emitted from dA in a direction ω.

ところが，Figure 3 からあきらかなように，

$$\cos\alpha\, dA = dS^{(\omega)} \tag{19}$$

であるから

$$dq^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\ddot{q}\, dS^{(\omega)} \tag{20}$$

さて，(20)式における$\ddot{q}$は，微小面 dA の上で定義されたものであった。しかし，dA から出た輻射線がすべて $dS^{(\omega)}$ を通過することを考えると，ω 方向の熱輻射線は，すべて $dS^{(\omega)}$ からそれと垂直な方向に出されているとみなすこともできる。正射影により，dA 上の温度および輻射率も $dS^{(\omega)}$ 上に写されたと考えると，$dS^{(\omega)}$ 上で定義される。単位時間単位面積あたりの仮想の熱輻射量は $\ddot{q}$ に等しくなる。すなわち，(20)式における $\ddot{q}$ は，正射影により $dS^{(\omega)}$ 上に写されたものであると考えてさしつかえない。

物体 A 全体からの ω 方向への単位時間あたり熱輻射量 $q^{(\omega)}$ は，このようにして求めた $dq^{(\omega)}$ を，A の射影面積 $dS^{(\omega)}$ 全体について積分すれば得られる。すなわち，(20)式から，

$$q^{(\omega)} = \int_{S^{(\omega)}} dq^{(\omega)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{S^{(\omega)}} \ddot{q}\, dS^{(\omega)} \tag{21-1}$$

特に，$S_1^{(\omega)}$ 上で $\ddot{q}$ が一様であるとき，$q^{(\omega)}$ は次のように表わせる。

$$q^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\ddot{q}\, S^{(\omega)} \tag{21-2}$$

すなわち，このとき $q^{(\omega)}$ は，A の ω 方向への射影面積 $S^{(\omega)}$ （に係数 $\frac{\ddot{q}}{\pi}$ をかけたもの）で表わされる。

(21-1)，(21-2)式を (17-1)，(17-2)式に代入すれば，輻射体 A からの単位時間あたり全輻射量 q が次のように求められる。

〔A 上に $\ddot{q}$ の分布があるとき〕

$$q = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\left\{\int_{S^{(\omega)}} \ddot{q}\, dS^{(\omega)}\right\} d\omega \tag{22-1}$$

または

$$q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\int_{S^{(\omega)}} \ddot{q}\, dS^{(\omega)}\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{22-2}$$

〔A上に$\ddot{q}$の分布がないとき〕

$$q = \frac{\ddot{q}}{\pi}\int_{\Omega} S^{(\omega)} d\omega \tag{22-3}$$

または
$$q = \frac{\ddot{q}}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S^{(\omega)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{22-4}$$

2.2 二体間の輻射による熱伝達

輻射体A_1から被輻射体A_2への輻射による単位時間あたりの伝熱量を求める。A_2が黒体でない場合は，A_2の表面で熱輻射線の一部が反射されるが，ここでは反射されるものも含めて，とにかくA_2の表面に到達する熱量$q_{1\to2}$について考えることにする。（これは，A_2が黒体であったとき，A_2に吸収される熱量とも考えられる。）

さて，前節と同様に，ある三次元的な方向ωを定め，ω方向の熱輻射線について考える。このように方向を決められた熱輻射線によってA_1からA_2に単位時間に移送される熱輻射量を$q_{1\to2}^{(\omega)}$とすると，A_1からA_2に単位時間に移送される全熱輻射量$q_{1\to2}$は次式で求められる。

$$q_{1\to2} = \int_{\Omega} q_{1\to2}^{(\omega)} d\omega \tag{23-1}$$

極座標表示で書けば，

$$q_{1\to2} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} q_{1\to2}^{(\theta,\varphi)} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{23-2}$$

Figure 4に示すように，方向ωに垂直な平面を$\Pi^{(\omega)}$とし，A_1およびA_2の$\Pi^{(\omega)}$への正射影をそれぞれ$S_1^{(\omega)}$, $S_2^{(\omega)}$とする。また，$S_1^{(\omega)}$と$S_2^{(\omega)}$の重なった部分を$S_{12}^{(\omega)}$とする。

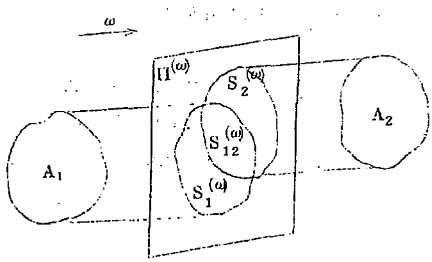

Figure 4 Radiation from A_1 to A_2 in a direction ω.

図からあきらかなように，A_1 から出たω方向熱輻射線（すなわち，$S_1^{(\omega)}$ から出たとみなされた$S_1^{(\omega)}$ と垂直方向への熱輻射線）のうち，A_2 に到達するのは，$S_{12}^{(\omega)}$ を通過するものだけである。よって，A_1 からA_2 へのω方向熱輻射線による単位時間あたり伝熱量$q_{1\to2}^{(\omega)}$ は，(21-1)あるいは(21-2)式での考察と同様にして，次のように表わすことができる。

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$q_{1\to2}^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)} \tag{24-1}$$

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$q_{1\to2}^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\ddot{q}\, S_{12}^{(\omega)} \tag{24-2}$$

(24-1)および(24-2)式を，(23-1)および(23-2)式に代入すれば，輻射体A_1 から被輻射体A_2 に単位時間に移送される熱量$q_{1\to2}$ が次のように求められる。

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$q_{1\to2} = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)}\, d\omega \tag{25-1}$$

または $$q_{1\to2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{25-2}$$

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$q_{1\to2} = \frac{\ddot{q}}{\pi}\int_{\Omega} S_{12}^{(\omega)}\, d\omega \tag{25-3}$$

または $$q_{1\to2} = \frac{\ddot{q}}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{12}^{(\omega)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{25-4}$$

さて，A_1 からA_2 への角度因子$f_{1\to2}$ は，(22-1)～(22-4)式で計算されるq_1 および(25-1)～(25-4)式で計算される$q_{1\to2}$ を，(6)式に代入することにより求められる。しかしながら，q_1 の計算式としては，(22-1)～(22-4)式よりも(15-1)および(15-2)の方が簡単なので，そちらを用いることにすれば，角度因子$f_{1\to2}$ が次のように求められる。

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$f_{1\to2} = \frac{q_{1\to2}}{q_1} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)}\, d\omega}{\int_{A_1} \ddot{q}_1 \, dA_1} \tag{26-1}$$

あるいは

$$f_{1\to2}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{S_{12}^{(\omega)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\omega)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\displaystyle\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1} \tag{26-2}$$

〔 A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき 〕

$$f_{1\to2}=\frac{\dfrac{\ddot{q}}{\pi}\displaystyle\int_{\Omega}S_{12}^{(\omega)}\,d\omega}{\ddot{q}A_1}$$

$$=\frac{1}{\pi A_1}\int_{\Omega}S_{12}^{(\omega)}\,d\omega \tag{26-3}$$

あるいは

$$f_{1\to2}=\frac{1}{\pi A_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S_{12}^{(\omega)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \tag{26-4}$$

このように，特に輻射体 A_1 上で温度および輻射率が一様であるとき，角度因子は射影面積の簡単な積分関数として表わされる。

A_2 に到達しない確率

さて，Figure 4にもどって，$S_1^{(\omega)}$ に含まれ $S_2^{(\omega)}$ には含まれない射影面積を $S_{1\infty}^{(\omega)}$ で表わすと，これまでの方法と同様にして，A_1 から放出された熱輻射量のうち A_2 に届かない確率 $f_{1\to\infty}$ を求めることができる。結果は次のようになる。

〔 A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様でないとき 〕

$$f_{1\to\infty}=\frac{q_{1\to\infty}}{q_1}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\Omega}\int_{S_{1\infty}^{(\omega)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\omega)}\,d\omega}{\displaystyle\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1} \tag{27-1}$$

あるいは

$$f_{1\to\infty}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{S_{1\infty}^{(\omega)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\omega)}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{\displaystyle\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1} \tag{27-2}$$

〔 A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき 〕

$$f_{1\to\infty}=\frac{1}{\pi A_1}\int_{\Omega}S_{1\infty}^{(\omega)}\,d\omega \tag{27-3}$$

あるいは，

$$f_{1\to\infty} = \frac{1}{\pi A_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} S_{1\infty}^{(\omega)} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{27-4}$$

あきらかに，

$$f_{1\to 2} = 1 - f_{1\to\infty}$$

であるから，問題によっては，$f_{1\to\infty}$ を求めることにより $f_{1\to 2}$ を求めることもできる。

二体間に妨害物のある場合の輻射熱伝達

二体 A_1，A_2 間に妨害物 A_3，A_4，A_5，……が入っている体系について，A_1 から A_2 への角度因子を考える。A_1 を出た熱輻射線が，A_3，A_4，A_5，…… に反射してから A_2 に入るような場合は無視して考えると，すなわち，A_3，A_4，A_5，…… は黒体と仮定して考えると，A_1 から A_2 への角度因子 $f_{1\to 2}$ は，(26-1) ～ (26-4) 式 および (27-1) ～ (27-4) 式に現われた射影面積 $S_{12}^{(\omega)}$ および $S_{1\infty}^{(\omega)}$ を次のように定義しなおしさえすれば，これらの式をそのまま用いて計算することができる。

今，ω 方向に垂直な平面を $\Pi^{(\omega)}$ とする。$\Pi^{(\omega)}$ への，A_1，A_2，A_3，A_4，…… の正射影を，それぞれ $S_1^{(\omega)}$，$S_2^{(\omega)}$，$S_3^{(\omega)}$，$S_4^{(\omega)}$，……とする。$S_1^{(\omega)}$，$S_2^{(\omega)}$ のどちらにも含まれ，かつ $S_3^{(\omega)}$，$S_4^{(\omega)}$，$S_5^{(\omega)}$，…… のどれにも含まれない部分を $S_{12}^{(\omega)}$ とする。また $S_1^{(\omega)}$ から $S_{12}^{(\omega)}$ を除いた残りを $S_{1\infty}^{(\omega)}$ とする。

このような再定義により，これまでの議論は妨害物のある体系についてもそのまま成り立つ。今後，単に $S_{12}^{(\omega)}$ あるいは $S_{1\infty}^{(\omega)}$ と言った場合は，すべて上記の定義によるものとする。

2.3 平面問題

Z 方向に無限の長さを持ち，形状も温度も Z 方向に一様である物体間の輻射熱伝達を考える (Figure 5)。

このような問題は，平面問題として取り扱うことができる。すなわち，熱輻射線はすべて Z 軸に垂直な平面内を走るとみなすことができ，Z 方向単位厚さに含まれる部分について，A_1 から A_2 への輻射熱伝達を考えれば十分である。

最初に，平面問題についての輻射の等方性について考える。輻射体 A 上の単位長さから単位時間にその外側に出てくる熱輻射量を $\ddot{q}$ とすると，その法線方向から α だけ傾いた方向に出て行く単位平面角あたり熱輻射量 $\ddot{q}^{(\alpha)}$ は次の式で表わされる (Lambert の余弦法則，Figure 6)

$$\ddot{q}^{(\alpha)} = C\,\ddot{q}\,\cos\alpha$$

ここで，C は未定係数であり以下のようにして定められる。

Figure 6 からあきらかなように，上記の式に微小角 $d\alpha$ をかけ，それを $\alpha = -\pi/2$ から $\alpha = \pi/2$ まで積分した結果は，単位面積から単位時間に放出される熱輻射量 $\ddot{q}$ に等しいはずである。よって

$$\ddot{q} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ddot{q}^{(\alpha)} \, d\alpha$$

$$= C \ddot{q} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha$$

$$= 2 C \ddot{q}$$

$$\therefore C = \frac{1}{2}$$

これから，平面問題における輻射の等方性は次の式で表わされる。

$$\ddot{q}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \ddot{q} \cos \alpha \tag{29}$$

さて，前節までと同様に，まず熱輻射線の方向を与え，それに垂直な平面への輻射体と被輻射体の正射影をとることによって角度因子を求める。平面問題では，Figure 7に示すように，熱輻射線の方向は平面角φひとつだけで決り，それに垂直な平面は図上では直線$L^{(\varphi)}$におろした正射影を，それぞれ$S_1^{(\varphi)}$および$S_2^{(\varphi)}$とし，その重なった部分を$S_{12}^{(\varphi)}$とする。このような体系について，2.2節と同様の考察を行う。

今，ある方向φを与え，その方向の熱輻射線により，A_1からA_2に運ばれる単位時間あたりの熱輻射量を$q_{1\to2}^{(\varphi)}$とする。A_1からA_2への単位時間あたり全伝熱量$q_{1\to2}$は，これを全方向（平面問題では$\varphi=0$から$\varphi=2\pi$）について積分することにより得られるから，

$$q_{1\to2} = \int_0^{2\pi} q_{1\to2}^{(\varphi)} \, d\varphi \tag{30}$$

ここで，$q_{1\to2}^{(\varphi)}$は，$S_1^{(\varphi)}$上で定義される$\ddot{q}_1$（平面問題では単位長さ単位時間あたりの熱輻射量）の関数で表わされる。(29)式から，この関係は次のように表わされる。

〔A_1上で$\ddot{q}_1$が一様でないとき〕

$$q_{1\to2}^{(\varphi)} = \frac{1}{2} \int_{S_{12}^{(\varphi)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\varphi)} \tag{31-1}$$

〔A_1上で$\ddot{q}_1$が一様であるとき〕

$$q_{1\to2}^{(\varphi)} = \frac{1}{2} \ddot{q}_1 \, S_{12}^{(\varphi)} \tag{31-2}$$

(31-1)および(31-2)式を(30)式に代入すれば，$q_{1\to2}$は次のように表わされる。

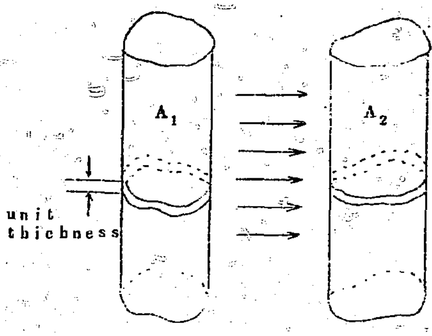

Figure 5 Plane problem

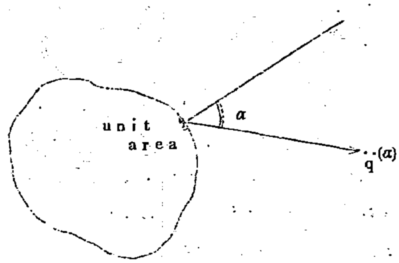

Figure 6 Lambert's cosine law in the plane problem. $\ddot{q}^{(\alpha)}$ is represented as follows ;

$$\ddot{q}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\ddot{q}\cos\alpha$$

where $\ddot{q}$ is the radiant evergy emitted from a unit area per unit time.

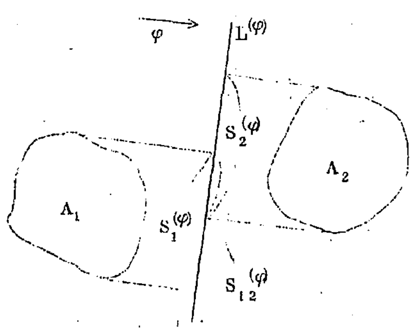

Figure 7 Projection in the case of a plane problem.

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$q_{1\to 2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{S_{12}^{(\varphi)}} \ddot{q}_1 \ dS_1^{(\varphi)} d\varphi \qquad (32\text{-}1)$$

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$q_{1\to 2} = \frac{\ddot{q}_1}{2}\int_0^{2\pi} S_{12}^{(\varphi)} d\varphi \qquad (32\text{-}2)$$

ところで，A_1 からの単位時間あたり全熱輻射量q_1 は次式で与えられる。

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$q_1 = \int_{A_1} \ddot{q}_1 \ dA_1 \qquad (33\text{-}1)$$

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$q_1 = \ddot{q}_1 \ A_1 \qquad (33\text{-}2)$$

(32-1)および(33-1)式，(32-2)および(33-2)式を，それぞれ角度因子の定義式(6)式に代入すれば，平面問題での角度因子$f_{1\to 2}$が次のように求まる。

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$f_{1\to 2} = \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{S_{12}^{(\varphi)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\varphi)} d\varphi}{\displaystyle\int_{A_1} \ddot{q}_1 \ dA_1} \qquad (34\text{-}1)$$

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$f_{1\to 2} = \frac{1}{2A_1}\int_0^{2\pi} S_{12}^{(\varphi)} d\varphi \qquad (34\text{-}2)$$

(34-1)および(34-2)式は，(26-2)および(26-4)式から直接求めることもできる。(26-2)，(26-4)式に現われる$dS_1^{(\omega)} = dS_1^{(\theta,\varphi)}$および$S_{12}^{(\omega)} = S_{12}^{(\theta,\varphi)}$は，Z軸方向に変化のない体系の単位長をとってみれば，次のように表わせる。

$$dS_1^{(\theta,\varphi)} = dS_1^{(0,\varphi)} \sin\theta \qquad (35)$$

$$S_{12}^{(\theta,\varphi)} = S_{12}^{(0,\varphi)} \sin\theta \qquad (36)$$

$dS_1^{(0,\varphi)}$を$dS_1^{(\varphi)}$，$S_{12}^{(0,\varphi)}$を$S_{12}^{(\varphi)}$とかき，(35)，(36)式を(26-2)および(26-4)式に代入すると，それぞれ(34-1)および(34-2)式が得られる。

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$f_{1\to 2}=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{S_{12}^{(\varphi)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\varphi)}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi}{\displaystyle\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\int_{S_{12}^{(\varphi)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\varphi)}\,d\varphi}{\displaystyle\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{S_{12}^{(\varphi)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\varphi)}\,d\varphi}{\displaystyle\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1} \qquad (34-1)$$

〔A_1 上で$\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$f_{1\to 2}=\frac{1}{\pi A_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}S_{12}^{(\varphi)}\sin^2\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{\pi A_1}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}S_{12}^{(\varphi)}\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{2A_1}\int_0^{2\pi}S_{12}^{(\varphi)}\,d\varphi \qquad (34-2)$$

2.4 Lambert の方法と射影面積法との関係

この節では，従来使われてきたLambert による方法と，ここに述べてきた射影面積法との差異について述べる。

微小面dA_1 から微小面dA_2 への，単位時間あたり熱輻射量$q_{dA_1\to dA_2}$ は，(1)式でみたように，次のように表わせる（輻射の等方性，Lambert の余弦法則）。

$$q_{dA_1\to dA_2}=\frac{\ddot{q}_1}{\pi}\cos\omega_1\,d\omega_{12}\,dA_1 \qquad (37)$$

ここで，　$\ddot{q}_1 =$ dA_1 から放出される，単位時間単位面積あたり熱輻射量

ω_1 = dA_1，dA_2 を結ぶ直線 ℓ_{12} と，A_1 の法線とのなす角

$d\omega_{12}$ = dA_1 から dA_2 を見込む立体角

さて，Lambert の式について考える。(38)式を，まず立体角 $d\omega_{12}$ について積分すると，dA_1 から dA_2 への熱輻射量 $q_{dA_1 \to A_2}$ が次のように求まる。

$$q_{dA_1 \to A_2} = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{\Omega^{(A_2)}} \ddot{q}_1 \cos\omega_1 \, d\omega_{12} \right\} dA_1 \qquad (38)$$

ここで，　$\Omega^{(A_2)}$ = dA_1 から A_2 を見込む立体角

これを，A_1 上の全表面について積分すると，A_1 から A_2 への単位時間あたり全熱輻射量 $q_{A_1 \to A_2}$ が次のように求まる。

$$q_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_1} \left\{ \int_{\Omega^{(A_2)}} \ddot{q}_1 \cos\omega_1 \, d\omega_{12} \right\} dA_1 \qquad (39)$$

(39)式に，1.3 節で見た関係

$$d\omega_{12} = \frac{\cos\omega_2 \, dA_2}{\ell_{12}^{\,2}}$$

を代入すると

$$q_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{\pi} \int_{A_1} \int_{A_2} \ddot{q}_1 \cos\omega_1 \cos\omega_2 \frac{1}{\ell_{12}^{\,2}} dA_2 \, dA_1 \qquad (40\text{-}1)$$

特に，A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき，

$$q_{A_1 \to A_2} = \frac{\ddot{q}_1}{\pi} \int_{A_1} \int_{A_2} \cos\omega_1 \cos\omega_2 \frac{1}{\ell_{12}^{\,2}} dA_2 \, dA_1 \qquad (40\text{-}2)$$

A_1 からの単位時間あたり熱輻射量 q_{A_1} は，(15-1) および (15-2) 式により表わされるから，Lambert の方法による角度因子 $f_{A_1 \to A_2}$ は次のようになる。

〔A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様でないとき〕

$$f_{A_1 \to A_2} = \frac{\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{A_1} \int_{A_2} \ddot{q}_1 \cos\omega_1 \cos\omega_2 \frac{1}{\ell_{12}^{\,2}} dA_2 \, dA_1}{\displaystyle\int_{A_1} \ddot{q}_1 \, dA_1} \qquad (41\text{-}1)$$

〔A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$f_{A_1 \to A_2} = \frac{\dfrac{\ddot{q}_1}{\pi} \displaystyle\int_{A_1} \int_{A_2} \cos\omega_1 \cos\omega_2 \frac{1}{\ell_{12}} dA_2 \, dA_1}{\ddot{q}_1 \, A_1}$$

$$= \frac{1}{\pi A_1}\int_{A_1}\int_{A_2} \cos\omega_1 \cos\omega_2 \frac{1}{\ell_{12}} dA_2 dA_1 \qquad (41-2)$$

次に，射影面積法について考える。(40)式を，まず輻射体A_1の全表面について積分すると，その結果は，方向ωを定めた場合の，A_1からA_2への単位時間単位立体角あたり伝熱量$q_{A_1\to A_2}^{(\omega)}$となる。

$$q_{A_1\to A_2}^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{A_1^{(S)}} \ddot{q}_1 \cos\omega_1 \, dA_1 \right\} d\omega \qquad (42)$$

ここに，　$A_1^{(S)}$ = A_1から放たれたω方向熱方射線がA_2に達する場合の，A_1の一部分。ところが，$\cos\omega_1\, dA_1$ はdA_1の影dS_1に等しく，dS_1を$A_1^{(S)}$について積分した結果は，2.2節で定義した$S_{12}^{(\omega)}$に等しくなる。よって(42)式は次のように書きなおせる。

$$q_{A_1\to A_2}^{(\omega)} = \frac{1}{\pi}\left\{ \int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)} \right\} d\omega \qquad (43)$$

これを全方向Ωについて微分すれば，$q_{A_1\to A_2}$が次のように求められる。

$$q_{A_1\to A_2} = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)} \, d\omega \qquad (44-1)$$

特に，A_1上で$\ddot{q}_1$が一様であるとき，(44-1)式は次のように書かれる。

$$q_{A_1\to A_2} = \frac{\ddot{q}_1}{\pi}\int_{\Omega} S_{12}^{(\omega)} \, d\omega \qquad (44-2)$$

あとは，Lambert の方法と同様の処理をすることにより，角度因子$f_{A_1\to A_2}$が次のように求まる。

〔A_1上で$\ddot{q}_1$が一様でないとき〕

$$f_{A_1\to A_2} = \frac{\frac{1}{\pi}\int_{\Omega}\int_{S_{12}^{(\omega)}} \ddot{q}_1 \, dS_1^{(\omega)} \, d\omega}{\int_{A_1} \ddot{q}_1 \, dA_1} \qquad (45-1)$$

〔A_1上で$\ddot{q}_1$が一様であるとき〕

$$f_{A_1\to A_2} = \frac{1}{\pi A_1}\int_{\Omega} S_{12}^{(\omega)} \, d\omega \qquad (45-2)$$

以上見てきたように，Lambert の方法と，射影面積法との違いは，単に積分の順序を逆にしただけである。ただ，積分の順序が逆になった結果，(44-1)式から(44-2)式への変換のところに見られるように，輻射体表面で温度と輻射率が一様である場合には，面積分を1回省

略できる。これが，射影面積法の最大の長所である。

平面問題についての Lambert の式

以上とまったく同様の考察を行うことにより，平面問題についても，Lambert の式に対応する角度因子の計算式を求めることができる。結果は次のとおりである。

〔A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$f_{A_1 \to A_2} = \frac{\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{A_1} \int_{A_2} \ddot{q}_1 \frac{\cos\omega_1 \cos\omega_2}{\ell_{12}} dA_2 dA_1}{\displaystyle\int_{A_1} q_1 \, dA_1} \qquad (46-1)$$

〔A_1 上で $\ddot{q}_1$ が一様であるとき〕

$$f_{A_1 \to A_2} = \frac{1}{2A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos\omega_1 \cos\omega_2}{\ell_{12}} dA_2 dA_1 \qquad (46-2)$$

ま と め

以上述べてきたように，輻射における角度因子は，射影面積法を採用することにより，著しく簡単に求められるようになった。なお，Lambert の方法と射影面積法による角度因子の計算式を，Table 2.1 にまとめて示す。

Table 1. Lambert の方法と射影面積法との角度因子計算式の表示の違い

次元	$\ddot{q}_1$	Lambert の方法	射影面積法
3	分布	$\dfrac{\dfrac{1}{\pi}\int_{A_1}\int_{A_2}\ddot{q}_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dfrac{1}{\ell_{12}^2}dA_2dA_1}{\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1}$ (4)	$\dfrac{\dfrac{1}{\pi}\int_{\Omega}\int_{S_{12}^{(\omega)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\omega)}d\omega}{\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1}$ (4)
	一様	$\dfrac{1}{\pi A_1}\int_{A_1}\int_{A_2}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dfrac{1}{\ell_{12}^2}dA_2dA_1$ (4)	$\dfrac{1}{\pi A_1}\int_{\Omega}S_{12}^{(\omega)}d\omega$ (2)
2	分布	$\dfrac{\dfrac{1}{2}\int_{A_1}\int_{A_2}\ddot{q}_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dfrac{1}{\ell_{12}}dA_2dA_1}{\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1}$ (2)	$\dfrac{\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{S_{12}^{(\varphi)}}\ddot{q}_1\,dS_1^{(\varphi)}d\varphi}{\int_{A_1}\ddot{q}_1\,dA_1}$ (2)
	一様	$\dfrac{1}{2A_1}\int\cos\alpha_1\cos\alpha_2\dfrac{1}{\ell_{12}}dA_2dA_1$ (2)	$\dfrac{1}{2A_1}\int_0^{2\pi}S_{12}^{(\varphi)}d\varphi$ (1)

(　　) 内は積分回数

記号表

a	吸収率（－）
A, A_i	i番物体の表面積（cm²）
$f_{i\to j}$	i番物体からj番物体への角度因子（－）
$f_{i\to\infty}$	i番物体から無限遠への角度因子（－）
$\ell_{i,j}$	i番物体とj番物体との表面間の距離（cm）
N	体系中に含まれる物体の数
q, q_i	単位時間に物体iから出る熱輻射量（cal/sec）
$q_{i\to j}$	単位時間に物体iから物体jに到達する熱輻射量（cal/sec）
$q_{i\to\infty}$	単位時間に物体iから無限遠に行ってしまう熱輻射量（cal/sec）
$q^{(\omega)}$, $q_i^{(\omega)}$	単位時間に物体iから出るω方向の熱輻射量（cal/sec·radian）
$q_{i\to j}^{(\omega)}$	単位時間にω方向熱輻射線により物体iから物体jに到達する熱輻射量（cal/sec·radian）
$q_{i\to\infty}^{(\omega)}$	単位時間にω方向熱輻射線により物体iから無限遠に行ってしまう熱輻射量（cal/sec·radian）
$\ddot{q}$, $\ddot{q}_i$	単位時間に物体iの単位表面から出る熱輻射量（cal/sec·cm²）
$\dot{q}^{(b)}$	単位時間に黒体iの単位表面から出る熱輻射量（cal/sec·cm²）
$S^{(\omega)}$, $S_i^{(\omega)}$	物体iから方向ωに垂直な平面Πにおろした正射影面積（cm²）
$S_{i,j}^{(\omega)}$	平面Πへの物体iと物体jのそれぞれの正射影面積の重なった部分の面積（cm²）
T, T_i	物体iの表面温度（°K）
α, β	微小平面の法線からの傾きの角と法線のまわりの角（radian）
ε, ε_i	物体iの輻射率，黒度（－）
θ, φ	極座標表示のための角度（radian）
σ	Stefan-Boltzmann constant（1.335×10^{-12} cal/sec·cm² °K⁴）
ω	三次元的なある方向，またその方向への立体角（radian）
Ω	全方向，全立体角（radian）
$\Omega/2$	微小面上の半空間（radian）

参考文献

1. 伝熱工学資料改訂第2版，日本機械学会，1966
2. Transport Phenomena, R.Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N.Lighfoot, John Wiley & Sons, Inc., 1960
3. Private Communication（JAERI-memo 4694），岸昭正，1972

謝辞

本報告書に述べた角度因子計算法を確立するにあたっては，動管室安全解析班内での討論を通じ，佐藤一男班長，秋元正幸氏，朝日義郎氏から，適切かつ親切な助言，指導を受けた。また，東北電力岸昭正氏には，特にヒートアップ計算においての輻射現象についての教えを受けた。以上の各氏には，ここに心からの感謝の意を表したい。

付録：射影面積法の原子炉燃料集合体ヒートアップ計算への応用

原子炉の冷却材喪失事故（ＬＯＣＡ）の一過程において，炉心部で冷却材がなくなることが考えられ，そのときの各燃料棒のヒートアップは，輻射による熱伝達によって支配される。このためには，各燃料棒間の角度因子を求める必要がある。正確には，軸方向を幾つかのノードに分け，三次元的な角度因子を求める必要があるが，ここでは，軸方向の熱移動はないと考え，各ノード内で平面問題として輻射を取り扱うものとする。この方法は，軸方向最高温度を出すノードの熱を他に散らさないので，通常は保守的な方法であると考えられる。

Figure A−1 にBWRの，また，Figure A−2 にPWRの，燃料集合体の断面の例を示す。両図に見られるように，通常の原子炉は，正方格子に円型断面の燃料棒を配列している。以下，このような形状の燃料集合体について，各燃料棒間の角度因子を求めていく。

〔各確率間の関係〕

Figure A−3 は，正方格子型燃料集合体をモデル化したものである。図は，1/8 象限を対象としたものであるが，残りの部分は対称性により補完される。

図に示すように，対象としている燃料棒から i 列右側，j 列上側の燃料棒へという角度因子を $f_{i,j}$ で表わす。半径対ピッチ比（$\xi = r/d$ で表わす）があまり小さいと，場合分けの数が増え繁雑になるので，ここでは $\xi \geq \sqrt{5}/10 \fallingdotseq 0.2236$ である範囲内で問題を考える。このとき，Figure A−3 の斜線で示した燃料棒には光が入らない。通常の原子炉では，ξ は 0.38〜0.40 程度であるから，このような限定により計算できなくなるようなことはない

以上の限定下では，計算すべき対象は以下の５通りに分けることができる。以下，それぞれの計算法について述べていくことにする。

(1) $f_{1,0}$ の計算
(2) $f_{1,1}$ の計算
(3) $f_{2,1}$ の計算
(4) $f_{k,1}$ ($k=3,4,5,\cdots$) の計算
(5) $f_{k,k-1}$ ($k=3,4,5,\cdots$) の計算

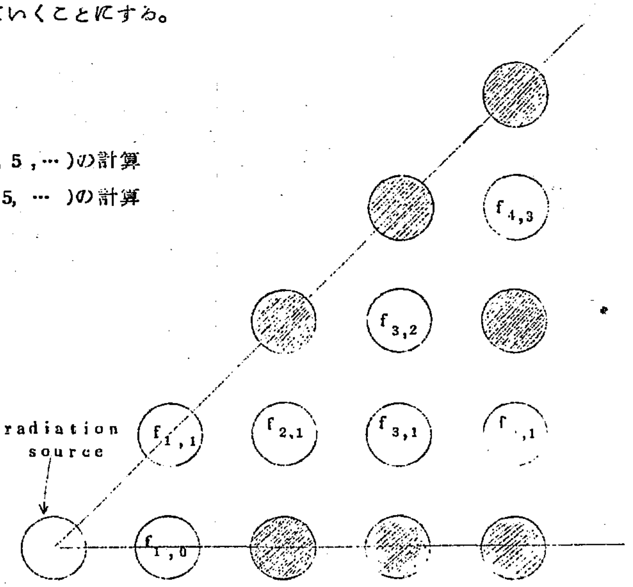

Figure A−3 1/8 model of a fuel assembly

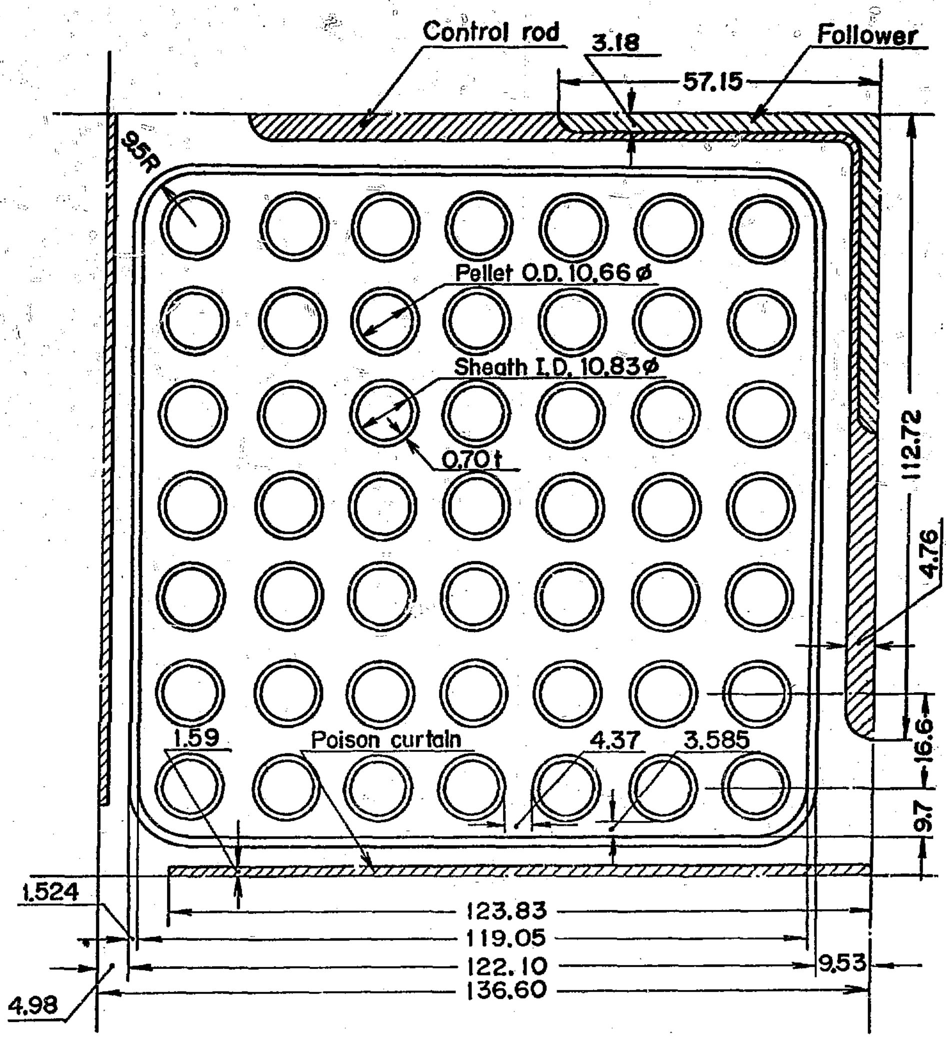

Figure A.1 BWR fuel assembly cell (JPDR)

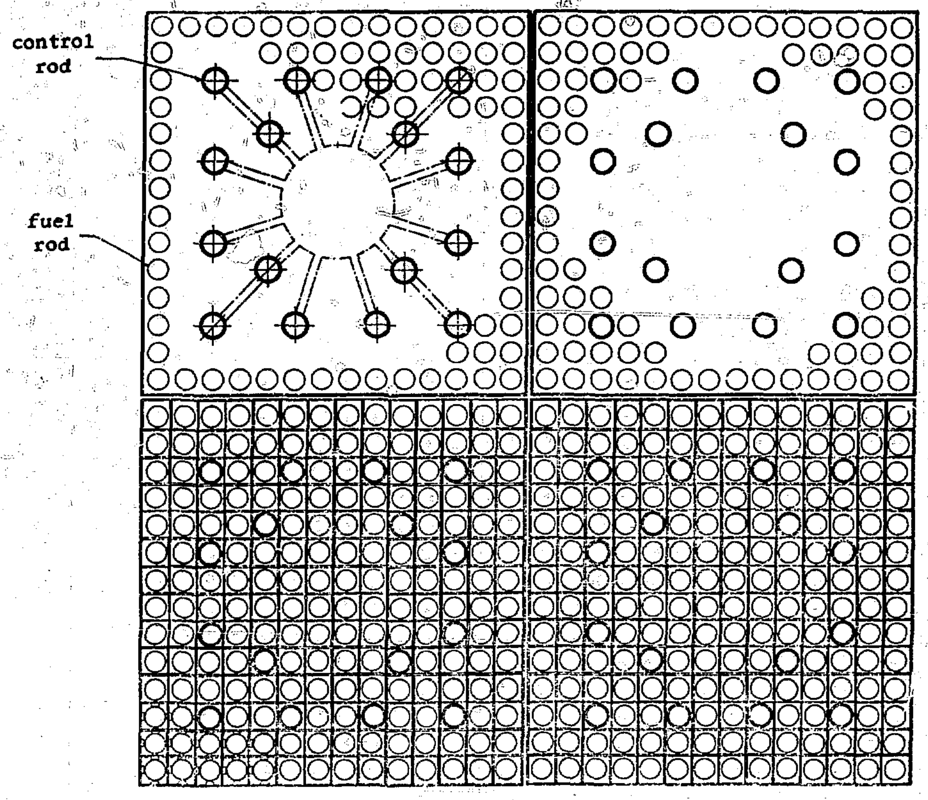

Figure A.2 PWR fuel assembly cell (Mihama)
(「美浜発電所原子炉設置許可申請書」より)

〔 $f_{1,0}$ の計算 〕

積分範囲計算

Figure A-4 から

$$\varphi_1 = \sin^{-1}\left(\frac{2r}{d}\right)$$

$$= \sin^{-1} 2\xi$$

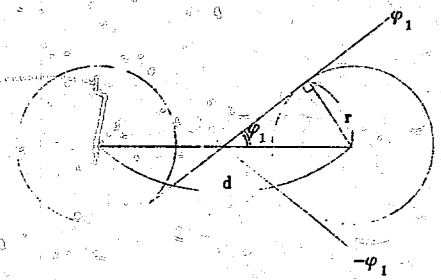

Figure A-4

射影面積計算

Figure A-5 から

$$S^{(\varphi)} = 2r - d\sin\varphi$$

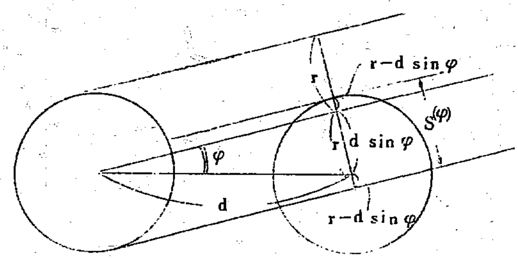

Figure A-5

積分計算

$$f_{1,0} = \frac{1}{2\cdot 2\pi r}\int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} (2r - d\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{\varphi_1} (2r - d\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left[\, 2r\varphi + d\cos\varphi \,\right]_0^{\varphi_1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{ \varphi_1 + \frac{1}{2\xi}(\cos\varphi_1 - 1) \right\}$$

〔 $f_{1,1}$ の計算 〕

I $\frac{\sqrt{5}}{10} \leqq \xi \leqq \frac{\sqrt{2}}{4}$ の場合

この場合は，Figue A-6からわかるように，（ 1 ， 1 ）にある燃料棒は（ 1 ， 0 ）にある燃料棒によって熱輻射線を妨害されない。よって，$f_{1,0}$ の計算法をそのまま用いることができる。

$f_{1,0}$ 計算に出てきたdのかわりに$\sqrt{2}$ dを代入すれば，

$$\varphi_1 = \sin^{-1}\sqrt{2}\,\xi$$

$$f_{1,1} = \frac{1}{\pi}\left\{\varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2\xi}(\cos\varphi_1 - 1)\right\}$$

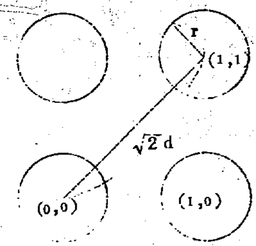

Figure A-6

II $\frac{\sqrt{2}}{4} \leqq \xi \leqq \frac{1}{2}$ の場合

場合分け

Figure A-7 のように φ_1, φ_2 を定めると，

$$f_{1,1} = \frac{2}{2\cdot 2\pi r}\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S(\varphi)\,d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{4}} S(\varphi)\,d\varphi\right\}$$

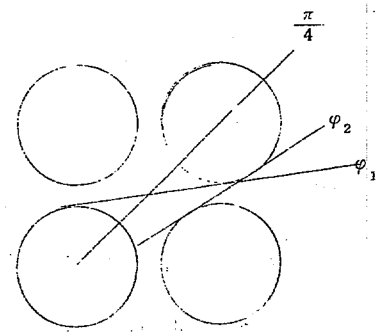

Figure A-7

積分範囲計算

φ_1 については，Figure A-8 から

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \varphi_{11}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \sin^{-1}\sqrt{2}\,\xi$$

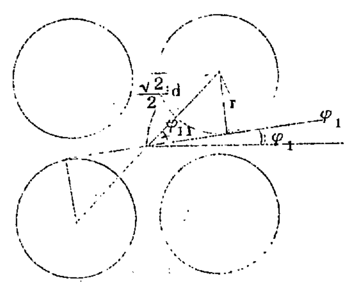

Figure A-8

φ_2 についてはFigure A－9 から

$$\varphi_2 = \cos^{-1} 2\xi$$

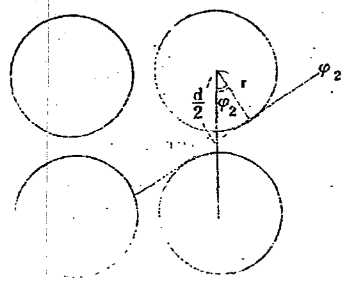

Figure A－9

射影面積計算

$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ のとき，Figure A－10 から

$$S^{(\varphi)} = 2r + d\sin\varphi - d\cos\varphi$$

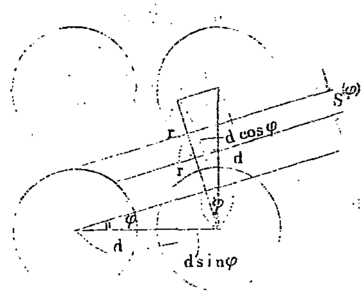

Figure A－10

$\varphi_2 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，Figure A－11 から

$$S^{(\varphi)} = d\sin\varphi + d\cos\varphi - 2r$$

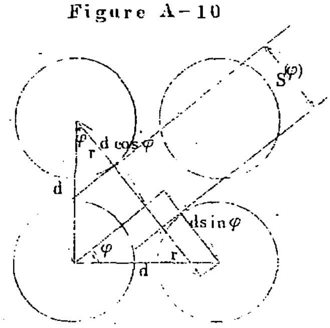

Figure A－11

積分計算

$$f_{1,1} = \frac{1}{2\pi r}\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(2r + d\sin\varphi - d\cos\varphi)\,dr + \int_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{4}}(d\sin\varphi + d\cos\varphi - 2r)\,dr\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left\{\left[2r\varphi - d\cos\varphi - d\sin\varphi\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \left[-d\cos\varphi + d\sin\varphi - 2r\varphi\right]_{\varphi_2}^{\frac{\pi}{4}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left\{2r\left(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) + d\left(\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\xi}\left(\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\right)\right\}$$

〔 $f_{2,1}$ の計算 〕

I $\frac{\sqrt{5}}{10} \leqq \xi \leqq \frac{\sqrt{2}}{4}$ の場合

場合分け

Figure A-12 のように $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ を定めると，

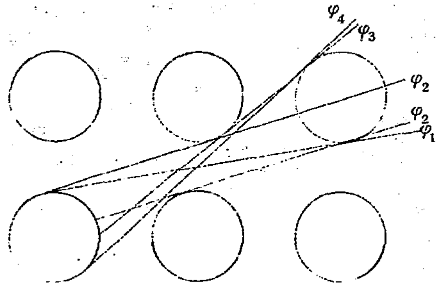

Figure A-12

$$f_{2,1} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi r} \times \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S^{(\varphi)} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} S^{(\varphi)} d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} S^{(\varphi)} d\varphi \right\}$$

積分範囲計算

後に $f_{k,1}$ ($k \geqq 3$) の計算で述べるように，

$$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\xi\right)$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1}(1) - \sin^{-1}(\sqrt{2}\,\xi) = \frac{\pi}{4} - \sin^{-1}\sqrt{2}\,\xi$$

前に $f_{1,0}$ の計算で見たように (Figure A-4)，

$$\varphi_3 = \sin^{-1} 2\xi$$

後に $f_{k,k-1}$ ($k \geqq 3$) の計算で述べるように

$$\varphi_4 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\xi\right)$$

射影面積計算

$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ のとき，後に $f_{k,1}$ ($k \geqq 3$) の計算に見られるように

$$S^{(\varphi)} = 2d\sin\varphi + 2r - d\cos\varphi$$

$\varphi_2 \leqq \varphi \leqq \varphi_3$ のとき，後に $f_{k,1}$ ($k \geqq 3$) もしくは $f_{k,k-1}$ ($k \geqq 3$) の計算に出てくるように，

$$S^{(\varphi)} = d\cos\varphi - 2r$$

$\varphi_3 \leqq \varphi \leqq \varphi_4$ のとき，後に $f_{k,k-1}$ ($k \geqq 3$) の計算に出てくるように

$$S^{(\varphi)} = d\cos\varphi - 2r - 2d\sin\varphi$$

積分計算

$$f_{2,1} = \frac{1}{4\pi r}\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(2r + 2d\sin\varphi - d\cos\varphi)dr\right.$$

$$\left. + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3}(d\cos\varphi - 2r)dr + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4}(2r + d\cos\varphi - 2d\sin\varphi)dr\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\left\{\left[2r\varphi - 2d\cos\varphi - d\sin\varphi\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right.$$

$$\left. + \left[d\sin\varphi - 2r\varphi\right]_{\varphi_2}^{\varphi_3} + \left[2r\varphi + d\sin\varphi + 2d\cos\varphi\right]_{\varphi_3}^{\varphi_4}\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi r}\left\{2r(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4)\right.$$

$$\left. + d(\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2 + \sin\varphi_4 + 2\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_2 - 2\cos\varphi_3 + 2\cos\varphi_4)\right\}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{2(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_4)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\xi}(\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2 + \sin\varphi_4 + 2\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi_2 - 2\cos\varphi_3 + 2\cos\varphi_4)\right\}$$

II $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leqq \xi \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

このときは，$k \geqq 3$ のときの $f_{k,1}$ の計算式に $k = 2$ を代入すればそのまま $f_{2,1}$ が求まる。

ただし，$\varphi_{31} = \dfrac{\pi}{2}$ とする。

〔$f_{k,1}$ の計算〕（$k \geqq 3$）

場合分け

Figure A-13 のように $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ を定めると

$$f_{k,1} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi r}\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S^{(\varphi)}\, d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} S^{(\varphi)}\, d\varphi\right\}$$

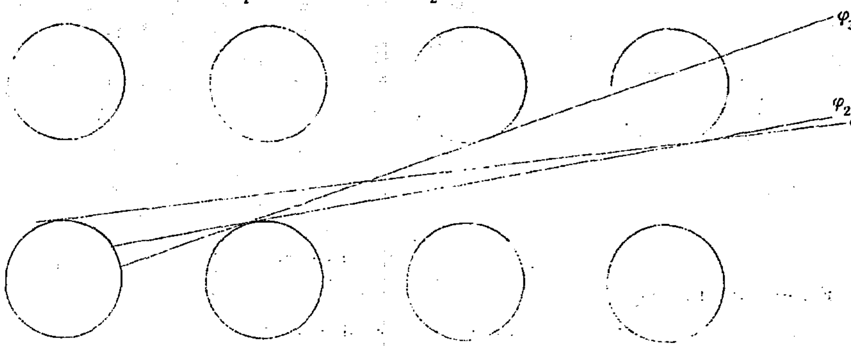

Figure A-13

積分範囲計算

Figure A-14 から，φ_1 は次のように求まる。

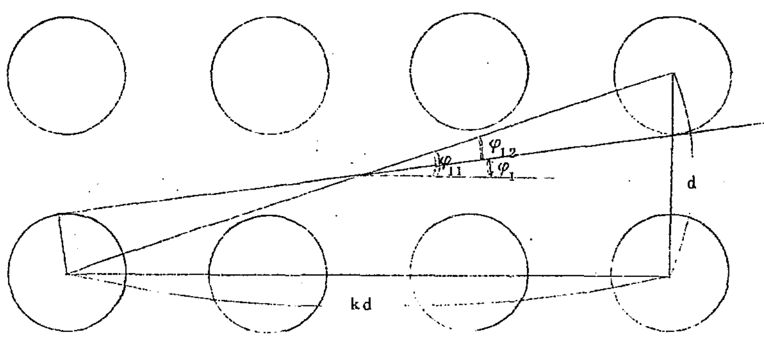

Figure A-14

同様に

$\tan\varphi_{11} = \frac{1}{k}$ $\quad$ $\tan\varphi_{21} = \frac{1}{k-1}$ $\quad$ $\tan\varphi_{31} = \frac{1}{k-2}$

$\sin\varphi_{12} = \frac{2\xi}{\sqrt{k^2+1}}$ $\quad$ $\sin\varphi_{22} = \frac{2\xi}{\sqrt{(k-1)^2+1}}$ $\quad$ $\sin\varphi_{32} = \frac{2\xi}{\sqrt{(k-2)^2+1}}$

$\varphi_1 = \varphi_{11} - \varphi_{12}$ $\quad$ $\varphi_2 = \varphi_{21} - \varphi_{22}$ $\quad$ $\varphi_3 = \varphi_{31} - \varphi_{32}$

射影面積計算

$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ のとき

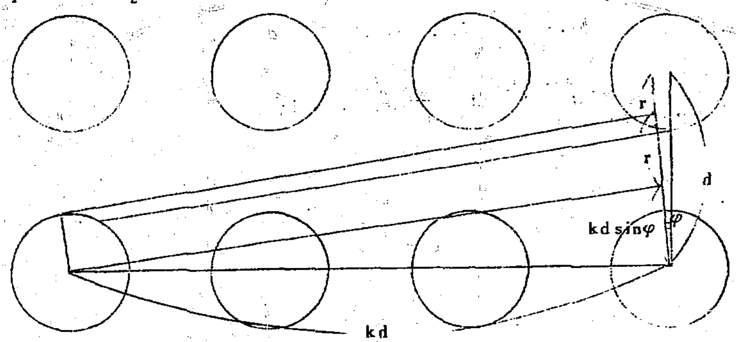

Figure A−15

Figure A−15 から

$$S_{12}^{(\varphi)} = kd\sin\varphi + 2r - d\cos\varphi$$

$\varphi_2 \leqq \varphi \leqq \varphi_3$ のとき

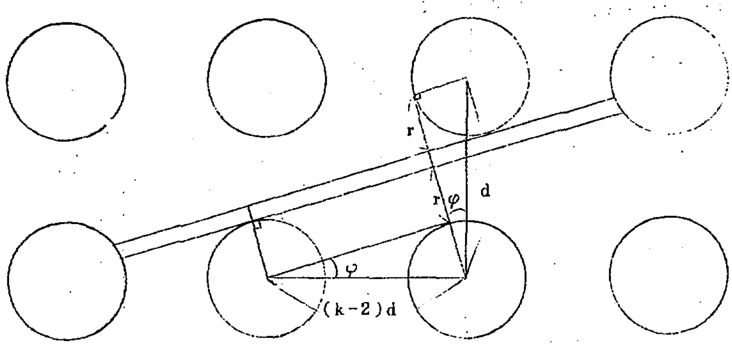

Figure A−16

Figure A−16 から

$$S_{12}^{(\varphi)} = d\cos\varphi - 2r - (k-2)d\sin\varphi$$

積分結果

$$f_{k,1}=\frac{1}{4\pi r}\Big[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{kd\sin\varphi+2r-d\cos\varphi\}d\varphi$$

$$+\int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\{d\cos\varphi-2r-(k-2)d\sin\varphi\}d\varphi\Big]$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\Big\{\Big[-kd\cos\varphi+2r\varphi-d\sin\varphi\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$+\Big[d\sin\varphi-2r\varphi+(k-2)d\cos\varphi\Big]_{\varphi_2}^{\varphi_3}\Big\}$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\{kd\cos\varphi_1-kd\cos\varphi_2+d\sin\varphi_1-d\sin\varphi_2+d\sin\varphi_3-d\sin\varphi_2$$

$$+(k-2)d\cos\varphi_3-(k-2)d\cos\varphi_2+2r(\varphi_2-\varphi_1)-2r(\varphi_3-\varphi_2)\}$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\{kd\cos\varphi_1-2(k-1)d\cos\varphi_2+(k-2)d\cos\varphi_3+d\sin\varphi_1$$

$$-2d\sin\varphi_2+d\sin\varphi_3-2r(\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3)\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{\xi}\{k\cos\varphi_1-2(k-1)\cos\varphi_2+(k-2)\cos\varphi_3+\sin\varphi_1-2\sin\varphi_2$$

$$+\sin\varphi_3\}-2(\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3)\Big]$$

〔 $f_{k,k-1}$ の計算 〕 ($k \geqq 3$)

<u>場合分け</u>

Figure A-17 のように $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ を定めると

$$f_{k,k-1} = \frac{1}{2 \cdot 2\pi r}\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} S(\varphi)\, d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} S(\varphi)\, d\varphi\right\}$$

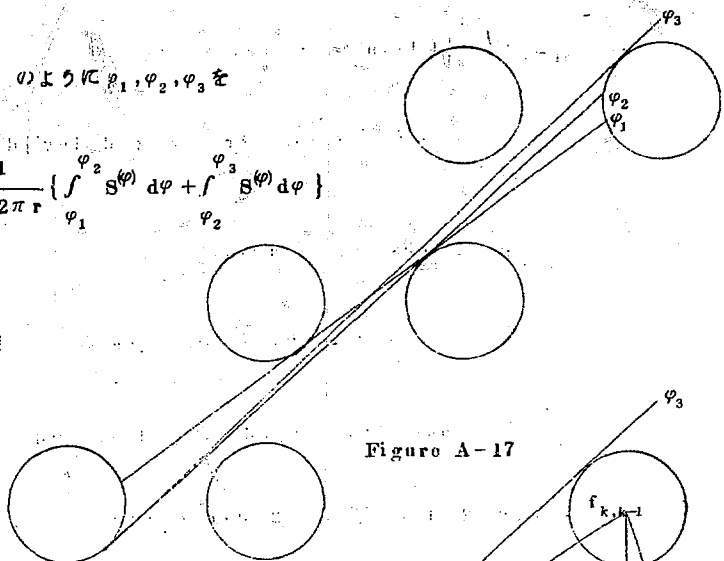

Figure A-17

積分範囲計算

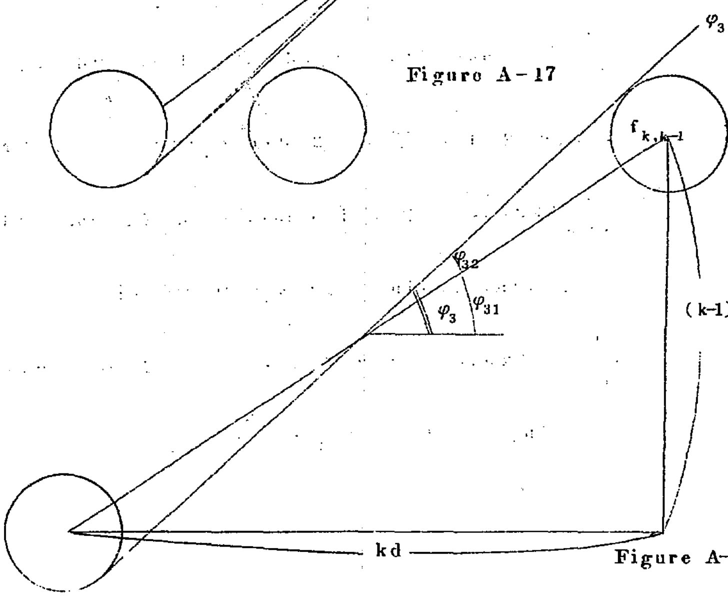

Figure A-18

Figure A-18 から　　　　同様に

$$\tan\varphi_{31} = \frac{k-1}{k} \qquad \tan\varphi_{21} = \frac{k-2}{k-1} \qquad \tan\varphi_{11} = \frac{k-3}{k-2}$$

$$\sin\varphi_{32} = \frac{2\xi}{\sqrt{(k-1)^2+k^2}} \qquad \sin\varphi_{22} = \frac{2\xi}{\sqrt{(k-2)^2+(k-1)^2}} \qquad \sin\varphi_{12} = \frac{2\xi}{\sqrt{(k-3)^2+(k-2)^2}}$$

$$\varphi_3 = \varphi_{31} + \varphi_{32} \qquad \varphi_2 = \varphi_{21} + \varphi_{22} \qquad \varphi_1 = \varphi_{11} + \varphi_{12}$$

射影面積計算

$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ のとき

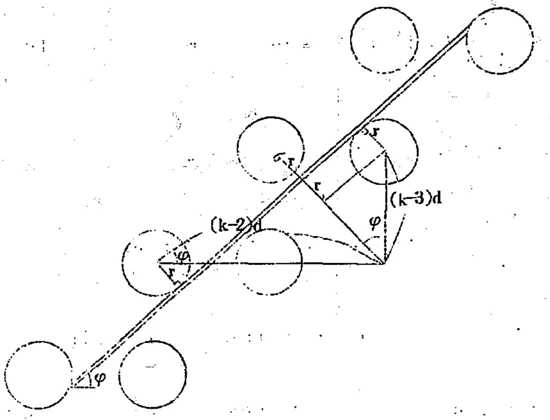

Figure A-19

Figure A-19から

$$S^{(\varphi)} = (k-2)d\sin\varphi - (k-3)d\cos\varphi - 2r$$

$\varphi_2 \leqq \varphi \leqq \varphi_3$ のとき

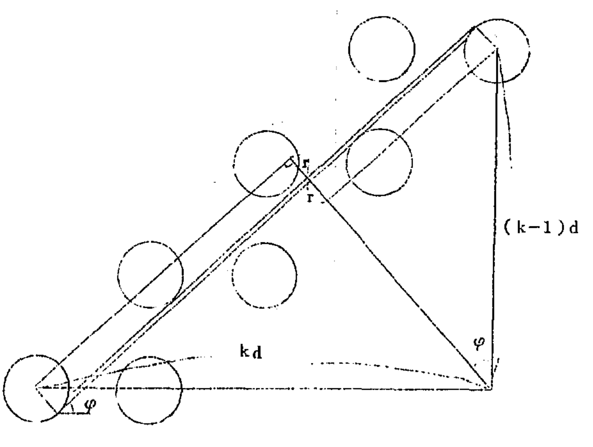

Figure A-20

Figure A-20から $S^{(\varphi)} = (k-1)d\cos\varphi + 2r - kd\sin\varphi$

積分結果

$$f_{k,k-1}=\frac{1}{4\pi r}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\{(k-2)d\sin\varphi-(k-3)d\cos\varphi-2r\}d\varphi$$

$$+\frac{1}{4\pi r}\int_{\varphi_2}^{\varphi_3}\{(k-1)d\cos\varphi+2r-kd\sin\varphi\}d\varphi$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\Big[-(k-2)d\cos\varphi-(k-3)d\sin\varphi-2r\varphi\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$$

$$+\frac{1}{4\pi r}\Big[(k-1)d\sin\varphi+2r\varphi+kd\cos\varphi\Big]_{\varphi_2}^{\varphi_3}$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\{(k-3)d\sin\varphi_1-(k-3)d\sin\varphi_2(k-1)d\sin\varphi_2+(k-1)d\sin\varphi_3$$

$$+(k-2)d\cos\varphi_1-(k-2)d\cos\varphi_2-kd\cos\varphi_2+kd\cos\varphi_3$$

$$+2r\varphi_1-2r\varphi_2-2r\varphi_2+2r\varphi_3\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{\xi}\{(k-3)\sin\varphi_1-2(k-2)\sin\varphi_2+(k-1)\sin\varphi_3$$

$$+(k-2)\cos\varphi_1-2(k-1)\cos\varphi_2+k\cos\varphi_3\}$$

$$+2\varphi_1-4\varphi_2+2\varphi_3\Big]$$

〔まとめ〕

以上の結果をまとめると，以下のようになる。

$f_{1,0}$ の計算

$\dfrac{\sqrt{5}}{10} \leqq \xi \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$\varphi_1 = \sin^{-1} 2\xi$ として

$$f_{1,0} = \frac{1}{\pi}\left\{ \varphi_1 + \frac{1}{2\xi}(\cos\varphi_1 - 1)\right\}$$

$f_{1,1}$ の計算

I $\dfrac{\sqrt{5}}{10} \leqq \xi \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

$\varphi_1 = \sin^{-1}\sqrt{2}\,\xi$ として

$$f_{1,1} = \frac{1}{\pi}\left\{ \varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2\xi}(\cos\varphi_1 - 1)\right\}$$

II $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leqq \xi \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4} - \sin^{-1}\sqrt{2}\,\xi$

$\varphi_2 = \cos^{-1} 2\xi$ として

$$f_{1,1} = \frac{1}{\pi}\left\{ \left(-\varphi_1 + 2\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\xi}(\sin\varphi_1 - 2\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1)\right\}$$

$f_{2,1}$ の計算

I $\dfrac{\sqrt{5}}{10} \leqq \xi \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\xi\right)$

$\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4} - \sin^{-1}\sqrt{2}\,\xi$

$\varphi_3 = \sin^{-1} 2\xi$

$\varphi_4 = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ として

$$f_{2,1}=\frac{1}{4\pi}\{2(-\varphi_1+2\varphi_2-2\varphi_3+\varphi_4)$$

$$+\frac{1}{\xi}(\sin\varphi_1-2\sin\varphi_2+\sin\varphi_4+2\cos\varphi_1-2\cos\varphi_2-2\cos\varphi_3+2\cos\varphi_4)\}$$

II $\frac{\sqrt{2}}{4}\leqq\xi\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$f_{k,1}$（$k\geqq3$）の式の k に 2 を入れればそのまま求まる。ただし，$\varphi_{31}=\frac{\pi}{2}$ とする。

$f_{k,1}$（$k\geqq3$）の計算

$\frac{\sqrt{5}}{10}\leqq\xi\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$\varphi_1=\tan^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{k^2+1}}\right),$$

$$\varphi_2=\tan^{-1}\left(\frac{1}{k-1}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{(k-1)^2+1}}\right)$$

$$\varphi_3=\tan^{-1}\left(\frac{1}{k-2}\right)-\sin^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{(k-2)^2+1}}\right)$$ として

$$f_{k,1}=\frac{1}{4\pi}[-2(\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3)$$

$$+\frac{1}{\xi}\{\sin\varphi_1-2\sin\varphi_2+\sin\varphi_3+k\cos\varphi_1-2(k-1)\cos\varphi_2$$

$$+(k-2)\cos\varphi_3\}]$$

$f_{k,k-1}$（$k\geqq$ ）の計算

$\frac{\sqrt{5}}{10}\leqq\xi\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$\varphi_3=\tan^{-1}\left(\frac{k-1}{k}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{(k-1)^2+k^2}}\right)$$

$$\varphi_2=\tan^{-1}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{(k-2)^2+(k-1)^2}}\right)$$

$$\varphi_1=\tan^{-1}\left(\frac{k-3}{k-2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{(k-3)^2+(k-2)^2}}\right)$$ として，

$$f_{k,k-1} = \frac{1}{4\pi}\Big[\xi(\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3) + \frac{1}{\xi}\big\{(k-3)\sin\varphi_1 - 2(k-2)\sin\varphi_2 + (k-1)\sin\varphi_3 + (k-2)\cos\varphi_1 - 2(k-1)\cos\varphi_2 + k\cos\varphi_3\big\}\Big]$$

ξをパラメーターとし，各角度因子を図示すると，Figure A-21 のようになる。

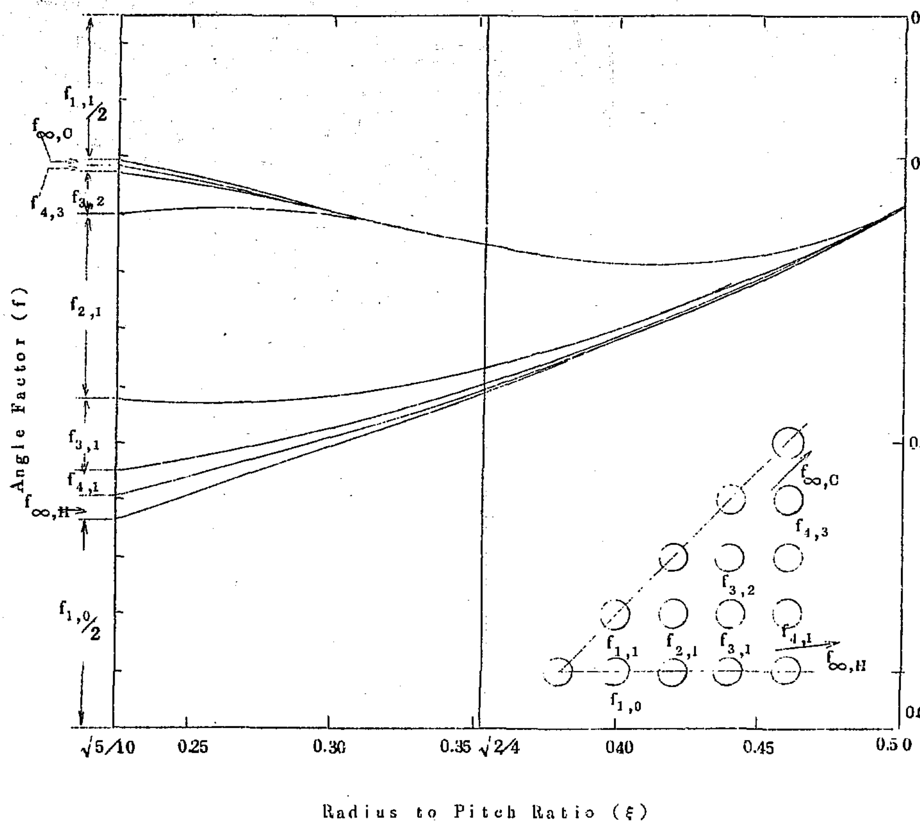

Figure A-21 Radius to Pitch Ratio vs. Angle Factor