

И Ф В Э

ОП 72-94

Д.Г.Баратов, В.М.Валов, Р.А.Рзаев, В.Л.Рыков,
И.М.Шалашов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЛИНЗ,
ОБТЕКАЕМЫХ СИЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ

Баратов Д.Г., Валов В.М., Рзаев Р.А., Рыков В.Л., Шалашов И.М.

Напряженное состояние параболических линз, обтекаемых сильным электрическим током. Серпухов, 1972.

32 стр. с рис. (ИФВЭ ОП 72-94).

Библиогр. 15.

В работе исследуется статическое напряженно-деформированное состояние осесимметрично нагруженных параболических токовых линз, являющихся элементами фокусирующего устройства для нейтринного канала. Анализ проводится на основе приближенного аналитического решения и численного интегрирования на ЭВМ полных уравнений теории оболочек методом двухсторонней матричной прогонки. Применяемый при этом алгоритм может быть использован для расчёта произвольной оболочки вращения переменной толщины. На основе зависимостей максимальных эквивалентных напряжений от геометрии оболочки и величины тока определены параметры линз, имеющих запас по прочности при оптической силе линз, соответствующей оптимальному варианту фокусирующего устройства.

Препринт Института физики высоких энергий.
Серпухов, 1972.

Baratov D.G., Valov V.M., Rzaev R.A., Rykov V.L., Shalashov I.M.
Tension State of Parabolic Lenses, Circulated by Strong
Electric Current. Serpukhov, 1972.

32 p. (IHEP 72-94).

Ref. 15.

The statistical tension-deformed state of axially symmetric loaded parabolic current lenses, which are the elements of a focusing device for neutrino channel, is investigated. The analysis is carried out on the basis of approximate analytical solution and digital integrating of the full equations of shell theory on computer with the method of two-side matrix run. Algorithm used here may be applied for calculating arbitrary rotation shell of variable thickness. The lense parameters are defined on the basis of dependences of maximum equivalent stress, on shell geometry and current magnitude. They have strength margin by optical lense force corresponding to optical version of focusing device.

Preprint. Institute of High Energy Physics.
Serpukhov, 1972.

**Д.Г.Баратов, В.М.Валов, Р.А.Рзаев, В.Л.Рыков,
И.М.Шалашов**

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЛИНЗ,
ОБТЕКАЕМЫХ СИЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ**

M-24

.

1. Введение

Важным элементом нейтринных экспериментов является устройство для фокусировки нейтринных родителей (НР) — π - и K - мезонов. Магнитооптическая система подобных устройств обычно представляет собой набор оболочек вращения, обтекаемых импульсным электрическим током масштаба сотен килоампер^{/1-6/}.

В работе^{/5/} предложена система, состоящая из токовых параболических линз^{/7,8/}. Применительно к протонному синхротрону ИФВЭ эта система должна фокусировать мезоны с импульсом в диапазоне (5–50) Гэв/с, угловым полураствором до 60 мрад в пучок, близкий к параллельному. В качестве оптимального, с точки зрения фокусировки НР, варианта выбрана система из трёх линз.

Спектр нейтрино, наряду с фокусировкой, определяется также отношением длины системы к длине распадной базы и потерями НР в веществе линз. Уменьшение этих величин, возможное при увеличении тока и уменьшении толщины линз, ведет, однако, к увеличению механических

напряжений в теле линзы. Так, для параметров фокусирующего устройства, приведенных в ^{/5/}, магнитное давление в области шейки достигает значительной величины – порядка 400 кг/см^2 , и при малой толщине линзы напряжения могут превысить пределы прочности и устойчивости. Если учесть, что в нейтринных экспериментах линзы должны выдерживать до 10^6 периодических нагружений сильным импульсным током в условиях больших тепловыделений и доз облучения, то в целом проблема прочности линз приобретает значительную актуальность.

Прочностные оценки для параболических линз были получены в работе ^{/8/} для случая, когда длительность импульса тока существенно меньше характерного времени собственных колебаний линзы. В наших условиях такое рассмотрение неприемлемо.

2. Постановка задачи

В общем случае параболическая линза представляет собой тело вращения с переменной толщиной стенок (рис. 1), нагруженное осесимметричным переменным во времени и неоднородным в пространстве магнитным давлением и температурным полем. Последовательный и полный анализ работоспособности линзы состоит в исследовании её прочности, упругой устойчивости и усталостной прочности с учетом динамичности нагрузки, а также неравномерного и нестационарного температурного поля. Цель анализа состоит в нахождении приемлемого компромисса между характеристиками фокусирующего устройства и его надежностью.

Картину напряженно-деформированного состояния линз можно получить из решения задачи о статическом нагружении линз током, равным его максимальному значению в импульсе. При этом появляется возможность наиболее просто анализировать влияние геометрических параметров и условий закрепления линзы на её напряженное состояние. Кроме того, статический расчёт служит основой при исследованиях устойчивости и

влияния динамичности нагрузки. Наконец, поскольку для этих исследований предполагается использовать применяемый здесь численный метод матричной прогонки, статический расчёт имеет большое значение для отладки программы вследствие простоты контроля счёта и проверки решения по приближенным аналитическим формулам.

В случае, когда частоты собственных колебаний линзы значительно превышают частоту изменения тока, задача о напряженно-деформированном состоянии сводится к решению статических уравнений для симметричных тензоров напряжений и деформаций^{/9/}.

Переменная вдоль линзы толщина её стенок h , как правило, значительно меньше характерного радиуса кривизны поверхности R . В связи с этим для описания напряженно-деформированного состояния воспользуемся системой уравнений теории оболочек вращения без учёта температурных деформаций^{/10/}:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{R_1} \frac{dT_1}{d\theta} + (T_1 - T_2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} - \frac{Q_1}{R_1} = 0, \\
 & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{dQ_1}{d\theta} + Q_1 \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} = p_n, \\
 & \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\theta} + (M_1 - M_2) \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} = Q_1, \\
 & T_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{R_1} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right) + \frac{\mu}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w) \right], \\
 & T_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w) + \frac{\mu}{R_1} \left(\frac{du}{d\theta} + w \right) \right], \\
 & M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{d}{R_1 d\theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta} - \frac{u}{R_1} \right) + \frac{\mu \operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right) \right], \\
 & M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \left[\frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \left(\frac{dw}{d\theta} - u \right) + \frac{\mu}{R_1} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{R_1} \frac{dw}{d\theta} - \frac{u}{R_1} \right) \right].
 \end{aligned} \right\} (1)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона; T_1, T_2, M_1, M_2 – погонные усилия и моменты

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 d\zeta, \quad T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 d\zeta, \quad M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 \zeta d\zeta, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 \zeta d\zeta;$$

σ_1 и σ_2 – меридиональное и кольцевое напряжения; ζ – координата по толщине оболочки от её срединной поверхности ($\zeta = \frac{h}{2}$ соответствует внутренней поверхности оболочки, $\zeta = -\frac{h}{2}$ – её внешней поверхности); u и w – смещения точек срединной поверхности по направлениям меридиана и нормали; Q_1 – погонное перерезывающее усилие; p_n – интенсивность нормальной нагрузки; R_1 и R_2 – радиусы кривизны срединной поверхности; θ – угловая координата по меридиану. Положительные направления усилий, моментов и смещений показаны на рис. 2.

Таким образом, задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка с переменными коэффициентами при двухточечных граничных условиях – по три на каждом краю параболоидальной части линзы. Точное аналитическое решение системы (1) известно лишь для некоторых частных типов оболочек^{/11,12/} (например, конических) и в данной постановке для параболоидальных оболочек отсутствует. Поэтому для решения задачи ниже использованы два метода:

- 1) приближенное аналитическое решение, состоящее в разделении напряженного состояния на безмоментное и краевой эффект, и 2) численное решение полной системы уравнений (1).

3. Приближенное аналитическое решение

Следуя методике, изложенной в^{/10/}, ниже приводится приближенное решение задачи.

Образующие внутренней и внешней поверхностей линзы описываются зависимостями

$$\begin{aligned}
 |z|_1 &= ar^2 + h_0, \\
 |z|_2 &= ar^2 \quad (r > r_0),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где a — постоянная параболы; $h_0 \equiv |z|_1 - |z|_2$ — толщина параболической части линзы вдоль линий постоянных радиусов r (или вдоль меридиональной траектории при движении частицы с $\frac{dr}{dz} \ll 1$); r_0 — радиус шейки.

Если толщина скин-слоя δ меньше толщины оболочки h , максимальное значение нормального к внешней поверхности оболочки давления магнитного поля с точностью до членов $\sim \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$ определяется выражением

$$p_n = \frac{10^4 I_0^2}{2\pi r'^2} \left(1 + \frac{\delta}{2R'_2} - \frac{\delta}{2R'_1} \right), \tag{3}$$

где I_0 — амплитудное значение тока в мегаамперах; r' — текущий радиус внешней поверхности оболочки в см; $R'_1 = \frac{1}{2a \cos^3 \theta'}$, $R'_2 = \frac{1}{2a \cos \theta'}$ — радиусы кривизны внешней поверхности; $\operatorname{tg} \theta' = 2ar'$.

В реальных условиях, как правило, $\delta \ll h \ll R$, поэтому с хорошей степенью точности в (3) можно пренебречь членами порядка $\frac{\delta}{R}$.

Определим безмоментное напряженное состояние. Полагая в (1)

$M_1 = M_2 = Q_1 = 0$ и учитывая (3), из первых двух уравнений системы (1) получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_{T1}^0 &= \frac{10^4 I_0^2 a}{\pi h_0} \left(1 + \frac{1}{4a^2 r^2} \right) \left(\ln \frac{r_k}{r} + \frac{C}{10^4 I_0^2} \right), \\
 \sigma_{T2}^0 &= \frac{10^4 I_0^2 a}{\pi h_0} \left(1 + \frac{\ln \frac{r_k}{r} + \frac{C}{10^4 I_0^2}}{4a^2 r^2} \right),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где $\sigma_{r_1}^o = \frac{T_1}{h}$, $\sigma_{r_2}^o = \frac{T_2}{h}$ - напряжения в кг/см²; r_k - конечный радиус линзы; C - постоянная интегрирования, имеющая размерность силы.

Она определяется из граничных условий для T_1 или же для перемещения u при интегрировании четвёртого и пятого уравнений системы (1) с учётом (4). В случае закрепления оболочки на обоих концах (случай, близкий к реальному) в качестве безмоментного решения нужно взять решение при граничных условиях $u = 0$ на обоих краях. Это решение имеет вид

$$\sigma_{r_1}^o = \frac{10^4 I_o^2 a}{\pi h_o} \left(1 + \frac{1}{4 a^2 r^2} \right) \left(\ln \frac{r_k}{r} - \Phi \right), \quad (5)$$

$$\sigma_{r_2}^o = - \frac{10^4 I_o^2 a}{\pi h_o} \left(1 + \frac{\ln \frac{r_k}{r} - \Phi}{4 a^2 r^2} \right),$$

где

$$\Phi = \frac{\frac{1+2\mu}{2} (a^2 r_k^2 - a^2 r_o^2 + \ln \frac{r_k}{r_o}) + \frac{1+\mu}{2} \ln \frac{2 r_k}{r_o} + \left(\frac{1+\mu}{8 a^2 r_o^2} - a^2 r_o^2 \right) \ln \frac{r_k}{r_o}}{a^2 r_k^2 - a^2 r_o^2 + (1+\mu) \ln \frac{r_k}{r_o} + \frac{1+\mu}{8 a^2 r_o^2} - \frac{1+\mu}{8 a^2 r_k^2}}.$$

Уравнение краевого эффекта $\frac{d^4 w}{d \theta^4} + k^4 w = 0$ получается из однородных уравнений системы (1) ($p_n = 0$) при пренебрежении членами порядка $\sqrt{\frac{h}{R}}$. Затухающая часть решения этого уравнения имеет вид

$$w = e^{-k\theta} (C_1 \sin k \theta + C_2 \cos k \theta), \quad (6)$$

где $k = \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{R_1}{\sqrt{R_2 h}}$. При этом моменты и перерезывающее усилие связаны с перемещением w следующими приближенными равенствами:

$$M_1 = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \frac{d^2 w}{R_1^2 d \theta^2}, \quad (7)$$

$$M_2 = \mu M_1,$$

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d \theta}.$$

Максимальные изгибные напряжения σ_{M_1} на краях, связанные с моментом M_1 соотношением $M_1 = \frac{\sigma_{M_1} h^2}{6}$, будут равны

$$\sigma_{M_1} = \sqrt{\frac{3}{1-\mu^2}} (\sigma_{T_2}^0 - \mu \sigma_{T_1}^0) . \quad (8)$$

Здесь $\sigma_{T_1}^0$ и $\sigma_{T_2}^0$ берутся из безмоментного решения (5) для соответствующих краев параболоидальной части линзы ($r = r_0$ у шейки или $r = r_k$ у фланца).

Поскольку в этом рассмотрении результирующая сила, действующая на оболочку со стороны закрепления, может иметь лишь радиальную составляющую (продольная составляющая учитывается в безмоментном решении), то

$$Q_1 \cos \theta + T_1^k \sin \theta = 0 \quad (9)$$

и в области краёв необходимо учитывать дополнительное к безмоментному усилие T_1^k . Соответствующее ему напряжение непосредственно на краю есть

$$\sigma_{T_1}^k = \frac{1}{3} \sqrt{2 a h_0 \sqrt{3(1-\mu^2)}} \sigma_{M_1} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} , \quad (10)$$

где σ_{M_1} и угол θ берутся на краях оболочки.

Таким образом, полные напряжения на краях оболочки равны

$$\sigma_1 = \pm \sigma_{M_1} + \sigma_{T_1}^0 + \sigma_{T_1}^k , \quad (11)$$

$$\sigma_2 = \mu \sigma_1 ,$$

где верхний знак соответствует внешней поверхности оболочки, нижний - внутренней.

Из анализа пределов применимости приближенного решения ^{/10/} для рассматриваемых параболических линз можно получить следующий критерий:

$$\frac{1}{\cos^3 \theta} > \frac{1}{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}} \sqrt{\frac{h_0}{2 a r^2}} . \quad (12)$$

Этот критерий позволяет сделать практически важный вывод: минимальный угол θ , при котором ещё можно пользоваться приближенной теорией краевого эффекта, зависит от толщины оболочки h_0 и параметра параболы a . Чем меньше величина h_0 и больше a , тем точнее расчёт по приближенной теории с разделением напряженного состояния на безмоментное и краевой эффект. Для линз, удовлетворяющих критерию (12), приближенное аналитическое решение должно быть вполне приемлемым и надежным. Это подтверждается сравнением с результатами численного решения полной моментной системы уравнений (1) (см. рис. 3 и 9).

4. Численное решение задачи методом двухсторонней матричной прогонки

Для численного решения краевых задач обычным является применение метода начальных параметров. При всей своей принципиальной простоте он имеет существенный недостаток, не позволяющий применять этот метод для задач теории оболочек, в которых однородные уравнения наряду с убывающими имеют и быстро возрастающие решения. При численном решении задачи Коши возрастающие решения полностью "забывают" убывающие, и необходимая точность расчёта не достигается. Для преодоления этих трудностей разработан ряд методов. Наиболее общим и эффективным среди них является метод прогонки. Один из возможных вариантов его – метод двухсторонней матричной прогонки – был применен для численного решения системы (1).

Суть метода состоит в следующем. Все $2n$ искомым функций делятся на две группы (X_1, X_2) по n функций в каждой. Так как система дифференциальных уравнений линейна, то в каждой точке интервала интегрирования $0 \leq z \leq l$ между X_1 и X_2 может быть найдено линейное соотношение

$$X_1(z) = L_1(z) X_2(z) + R_1(z), \quad (13)$$

где $L_1(z)$ – квадратная ($n \times n$) матрица коэффициентов; $R_1(z)$ – вектор из n коэффициентов.

Физический смысл L_1 и R_1 зависит от выбора векторов X_1 и X_2 . Если X_1 есть вектор перемещений, а X_2 – вектор внутренних силовых факторов, то L_1 есть матрица податливостей части системы от 0 до z , а R_1 есть перемещения сечения z , вызываемые нагрузкой, приложенной слева от него. Наоборот, если X_1 – вектор силовых факторов, а X_2 – вектор перемещений, то L_1 – матрица жесткостей, а R_1 – силовые факторы в сечении z , вызываемые нагрузкой, приложенной слева от z .

В^{/13/} приведены дифференциальные уравнения для $L_1(z)$ и $R_1(z)$, позволяющие определить их путем интегрирования от 0 до z по условиям закрепления только левого края, из которых следуют начальные условия интегрирования. Выбор векторов X_1 и X_2 обусловлен при этом граничными условиями на левом краю^{/13/}. Так, если при $z = 0$ заданы условия на перемещения, что и имеет место в рассматриваемой нами задаче, то X_1 должен быть вектором перемещений.

Уравнение, аналогичное (13), получается таким же образом для части системы, расположенной справа от сечения z :

$$x_1(z) = L_2(z) X_2(z) + R_2(z). \quad (14)$$

Интегрирование уравнений для L_2 и R_2 ведется при этом от ℓ до 0 при $dz < 0$. Векторы X_1 и X_2 в (14) при любых граничных условиях на правом краю могут быть оставлены теми же, что и в (13), так как после интегрирования уравнений для $L_1(z)$ и $R_1(z)$ от 0 до ℓ и решения уравнения (13) вместе с граничными условиями на правом краю становятся известными все $2n$ искомых величин. Поэтому ограничения на выбор векторов в (14) снимаются. Совместное решение (13) и (14) в любой точке z интервала интегрирования $(0, \ell)$ дает искомые значения $X_1(z)$ и $X_2(z)$.

Таким образом, в методе двухсторонней прогонки решение исходной краевой задачи сводится к решению четырех задач Коши, решаемых по

две слева и справа интервала $(0, \ell)$ с соответствующими начальными условиями. При этом быстро возрастающие функции ни в одной из них не возникают.

Главное достоинство метода двухсторонней прогонки по сравнению с методом простой прогонки состоит в том, что дифференциальные уравнения для L_i и R_i ($i = 1, 2$) интегрируются слева и справа независимо, поэтому матрицы коэффициентов L_i и R_i запоминаются не на каждом шаге интегрирования, а лишь в точках, где мы хотим получить решение X_1, X_2 . В результате этого весьма существенно сокращается объём используемой памяти ЭВМ.

Для реализации описанного метода была составлена программа, пригодная для расчёта произвольной оболочки вращения переменной толщины (см. рис. 11). Дифференциальные матричные уравнения для L_i и R_i интегрировались методом Рунге-Кутты. Исходная система уравнений (1) была преобразована к основной разрешающей системе шести дифференциальных уравнений, записанных относительно первых производных искомых функций в смешанной форме, и некоторым дополнительным алгебраическим соотношениям. В безразмерной форме эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\bar{s}} &= \bar{T}_1 \frac{h_0}{h} - \bar{u} \mu \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta - \bar{w} \left(\mu \frac{R_0}{R_2} + \frac{R_0}{R_1} \right), \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{s}} &= \Theta_1 + \bar{u} \frac{R_0}{R_1}, \quad \frac{d\Theta_1}{d\bar{s}} = \bar{M}_1 \left(\frac{h_0}{h} \right)^3 - \Theta_1 \mu \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta, \\ \frac{d\bar{T}_1}{d\bar{s}} &= -\bar{T}_1 (1 - \mu) \frac{R_0 \operatorname{ctg} \theta}{R_2} + \bar{Q}_1 \frac{R_0}{R_1} + \bar{u} (1 - \mu^2) \frac{h}{h_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + \\ &+ \bar{w} (1 - \mu^2) \frac{h}{h_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{d\bar{Q}_1}{d\bar{s}} = -\bar{Q}_1 \frac{R_0}{R_1} \operatorname{ctg} \theta - \bar{T}_1 \left(\mu \frac{R_0}{R_2} + \frac{R_0}{R_1} \right) - \bar{u} (1 - \mu^2) \frac{h}{h_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg} \theta - w (1 - \mu^2) \frac{h}{h_0} \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \cdot p_n,$$

$$\frac{d\bar{M}_1}{d\bar{s}} = -\bar{M}_1 (1 - \mu) \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + \bar{Q}_1 \frac{12 R_0^2}{h_0^2} + \Theta_1 (1 - \mu^2) \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \left(\frac{R_0}{R_2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta$$

или в матричной форме

$$X' = F X + G, \quad (16)$$

где X – полный вектор искомых функций; F – матрица переменных коэффициентов; G – вектор функций нагрузки (в нашем случае это \bar{p}_n).

Дополнительные алгебраические соотношения, из которых находятся остальные искомые величины (T_2, M_2), могут быть вычислены после решения основной системы (15). Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \mu \bar{T}_1 + (1 - \mu^2) \frac{h}{h_0} \frac{R_0}{R_2} (\bar{u} \operatorname{ctg} \theta + w), \\ \bar{M}_2 &= \mu \bar{M}_1 + (1 - \mu^2) \Theta_1 \left(\frac{h}{h_0} \right)^3 \frac{R_0}{R_2} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{Здесь } \bar{u} = \frac{u}{R_0}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R_0}, \quad \bar{T}_1 = \frac{T_1}{B_0}, \quad \bar{T}_2 = \frac{T_2}{B_0}, \quad \bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{B_0},$$

$$\bar{M}_1 = \frac{M_1 R_0}{D_0}, \quad \bar{M}_2 = \frac{M_2 R_0}{D_0}, \quad \bar{s} = \frac{s}{R_0}, \quad \bar{p}_n = \frac{p_n \cdot R_0}{B_0},$$

Θ_1 – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;

$$R_0, B_0 = \frac{E h_0}{1 - \mu^2}, \quad D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \mu^2)} - \text{радиус,}$$

жесткости на растяжение и изгиб в точке приведения, соответственно. За точку приведения в параболической линзе удобно взять точку $\theta = 0$,

при этом $R_o = \frac{1}{2a}$, и тогда $\frac{R_o}{R_1} = \cos^3 \theta$; $\frac{R_o}{R_2} = \cos \theta$; $\frac{h}{h_o} = \cos \theta$.

В системе (15) за независимую переменную принята длина дуги меридиана s .

После решения системы (15) и вычисления T_2 и M_2 из (17) максимальные напряжения в сечении определяются из соотношений (10):

$$\sigma_1 = \frac{T_1}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2}, \quad (18)$$

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_1}{h^2},$$

в которых знак минус соответствует напряжениям сжатия, плюс – напряжениям растяжения.

5. Результаты и их обсуждение

При анализе напряженного состояния различных вариантов линз связь напряжений с деформациями при любых сколь угодно больших напряжениях предполагалась подчиняющейся закону Гука. Поэтому полученные результаты, если напряжения превышают предел упругости (или близкий к нему предел текучести, равный, например, 33 кг/мм^2), могут быть использованы только для сравнительной оценки вариантов. Так как в оболочках имеет место сложное напряженное состояние, для его числовой оценки оно приводится к одноосному эквивалентному напряженному состоянию в соответствии с теорией максимальных касательных напряжений по формуле (11)

$$\sigma_e = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}, \quad (19)$$

причем радиальное напряжение, как обычно в теории оболочек, полагается равным нулю. Значения σ_{\max} и σ_{\min} берутся из (18).

Прежде всего отметим, что механические напряжения пропорциональны квадрату тока (см., например, (5)). Поэтому напряжения, полученные при некотором токе, легко могут быть пересчитаны на его другую величину.

Величины напряжений рассчитаны в следующем диапазоне параметров линз, характерном для оптической системы фокусирующего устройства /5/: ток в линзах I_0 порядка 0,5 Ма, длина линз $L = (50-170)$ см, конечный радиус $r_k = (7-25)$ см, радиус шейки $r_0 = (0,8-3)$ см, постоянная параболы $a = (0,05-1,5)$ см⁻¹, толщина оболочки $h_0 = (0,4-2)$ см.

На рис. 3 приведены распределения напряжений по длине для одного из вариантов линз, полученные при численном интегрировании уравнений (15) и из аналитических выражений (5), (11). При этом предполагалось жесткое закрепление концов параболоидальной части у шейки и фланца линзы. Из рис. 3 видно, что имеется удовлетворительное согласие между результатами, полученными двумя способами. Наибольшими во всех вариантах линз являются суммарные (по формулам (18)) напряжения в зонах сопряжений линзы с шейкой и фланцем. У шейки это – напряжения растяжения на внешней поверхности параболоида, у фланца – напряжение сжатия на внутренней поверхности, причём первые всегда значительно больше. При отходе от мест закрепления суммарные напряжения быстро убывают.

В случае линзы с параметрами $a = 0,49$ см⁻¹, $r_k = 6$ см, $r_0 = 1,5$ см, $h_0 = 0,5$ см при $I_0 = 0,6$ Ма численно исследовалось влияние закрепления фланца на напряженное состояние. Рассматривались следующие варианты: А – фланец жестко закреплен; Б – разрешены перемещения только по оси линзы; В – линза имеет предварительное (до подачи тока) поджатие; Г – абсолютно свободный конец.

В качестве граничных условий у шейки здесь взяты $u = w = \theta_1 = 0$. Расчёт показал, что в случае Б напряженное состояние у шейки существенно ухудшается по сравнению с А: напряжения от изгибающего момента возрастают в 1,5 раза, от меридионального растягивающего

усилия T_1 – более, чем в 3 раза. Таким образом, суммарное растягивающее напряжение оказывается равным $67,4 \text{ кг/мм}^2$ против $38,9 \text{ кг/мм}^2$ в случае А. Такими же почти, как и в случае Б, остаются напряжения и в случае Г. Ухудшение напряженного состояния в Б и Г по сравнению с А связано с тем, что при освобождении фланца полная продольная сила магнитного давления $10^4 I_0^2 \ln \frac{r_k}{r_0}$ (кг) (равная для данной линзы 5000 кг) уравновешивается усилиями T_1 , Q_1 и моментом M_1 только у шейки. Радиальная же составляющая силы всегда самоуравновешена. Отсюда следует, что, с точки зрения напряженного состояния линзы, вариант А предпочтителен. Предварительное поджатие линзы (случай В) ослабляет напряженное состояние у шейки. Однако при этом ухудшается устойчивость линзы. Следует отметить, что при других параметрах линзы численные соотношения между вариантами А и Б будут, естественно, другими, однако, в силу сказанного выше, факт ухудшения напряженного состояния в случаях Б и Г будет иметь место всегда.

Приведенные ниже результаты представляют собой полученные численным методом зависимости максимального эквивалентного напряжения $(\sigma_e)_{\max}$ (приходящегося на область шейки) от геометрических параметров a , h_0 , r_0 , r_k в интересующих пределах их изменения. На рис. 4 приведена зависимость максимального напряжения в линзе от конечного радиуса (радиуса апертуры) при фиксированных значениях a , h_0 , r_0 . С точностью $\sim 10\%$ эта зависимость соответствует логарифмическому $(\sim \ln \frac{r_k}{r_0})$ увеличению продольной силы магнитного давления с ростом радиуса r_k .

Для выбранных из оптических соображений апертур линз ($r_k = 7,5 \text{ см; } 9,5 \text{ см; } 24 \text{ см}$) были получены зависимости максимальных напряжений от толщины оболочки h_0 и постоянной параболы a . Как это следует и из аналитических зависимостей, напряжения при неизменном токе и радиусе r_k уменьшаются при уменьшении параметра a и увеличении h_0 (рис. 5, 6, 7). Это связано в основном с увеличением нормальной толщины линзы

в зоне сопряжения с шейкой, которая определяется выражением

$$h = \frac{h_0}{\sqrt{1 + 4 a^2 r_0^2}} . \quad (20)$$

В соответствии с этим выражением следовало бы ожидать увеличения напряжений при увеличении r_0 , так как при этом уменьшается h . Однако с увеличением r_0 падает магнитное давление ($\sim \frac{1}{r_0^2}$), а также уменьшается продольная составляющая силы магнитного давления ($\sim \ln \frac{r_k}{r_0}$), вследствие чего напряжения у шейки при увеличении её радиуса уменьшаются (рис. 8).

Из рис. 5-8 видно, что для уменьшения напряжений следует увеличивать h_0 и r_0 . Однако это ведет к возрастанию потерь частиц в веществе линзы.

На рис. 9 приведены зависимости максимальных напряжений от параметра параболы a , полученные численно (кривая 1) и аналитически (кривая 2). В согласии с критерием (12) при больших значениях a имеется хорошее функциональное соответствие кривых, нарушающееся при малых a . Как видно из рис. 9, зависимость напряжений от a достаточно сильная и близка к линейной.

При неизменном токе напряжение уменьшается при уменьшении параметра параболы a , однако это ведет к уменьшению оптической силы линзы, пропорциональной произведению $a I_0$. На рис. 10 приведена зависимость $(\sigma_e)_{\max} = f(a)$ при фиксированной оптической силе линзы, из которой следует, что предпочтительно делать линзы с большими постоянными параболы.

Применение линз с большими a при $a I_0 = \text{const}$ целесообразно также и из других соображений: запасаемая в линзе энергия $w \sim L I_0^2$, индуктивность линзы L и омическое сопротивление её пропорциональны a . При $a I_0 = \text{const}$ переход к большим a позволяет уменьшить ток, снизить пропорционально току нагрев линз и энергоёмкость системы питания.

Ограничение сверху на величину a и при выбранной апертуре r_k на длину линзы накладывает технологичность её изготовления. Изготовление линз с $r_k \sim 10$ см и длиной $L \sim 150$ см и более ($a > 1 \text{ см}^{-1}$) осложнено тем, что толщина стенки по нормали в районе фланцев при $h_0 \sim 1$ см мала ($h \sim 0,05$ см). При механической обработке линзы возможны вибрации, снижающие точность обработки. Для обработки внутренней поверхности сильно вытянутого параболоида потребуется применение специального станка с программным управлением. Поэтому с точки зрения изготовления линз с $r_k \sim 10$ см разумно ограничиться длиной менее 100 см ($a < 1 \text{ см}^{-1}$).

В выбранной фокусирующей системе^{/5/} оптическая сила линз фиксирована. В частности, при токе 0,5 Ма первая линза должна иметь параметр параболы $a = 1,51 \text{ см}^{-1}$ и длину $L = 170$ см. Как было отмечено, изготовление такой линзы представляется затруднительным, и возникает необходимость её замены эквивалентным объективом, состоящим из более коротких линз (условия замены изложены в^{/5/}). Во избежание возрастания потерь частиц в веществе желательно сохранить суммарную толщину линз в направлении пучка, что требует уменьшения толщины h_0 в число раз, равное количеству более коротких линз. Хотя при этом примерно во столько же раз уменьшается величина a , из рис. 5 видно, что зависимость напряжений от h_0 более сильная, чем от a . Поэтому в данном случае целесообразно разбиение исходной линзы не более, чем на две равных с $a = 0,842 \text{ см}^{-1}$, приемлемое с точки зрения изготовления линзы.

На основании вышеизложенного можно определить геометрию линз, обладающих запасом по прочности в статическом режиме и имеющих оптическую силу, соответствующую оптимальному варианту фокусирующего устройства^{/5/}. В таблице 1 приведены основные геометрические характеристики такой системы линз и максимальные эквивалентные напряжения в каждой из линз вблизи шейки $(\sigma_e)_{ш}$ и фланца $(\sigma_e)_{ф}$.

№ линзы	$a \text{ (см}^{-1}\text{)}$	$L \text{ (см)}$	$h_0 \text{ (см)}$	$r_0 \text{ (см)}$	$r_k \text{ (см)}$	$(\sigma_e)_{\text{ш}} \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$	$(\sigma_e)_\phi \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$
1*)	0,842	94,7	1,5	1,5	7,5	13,6	9,6
2	0,404	72,8	1,0	1,5	9,5	14,5	7,0
3	0,1236	142,8	1,0	3,0	24	8	2,2

При выбранных значениях h_0 толщина по пучку каждой линзы фокусирующей системы соответственно равна 3 см, 3 см, 2 см, 2 см и суммарный путь частиц в веществе линзы составляет около 10 см. Пользуясь измеренными сечениями поглощения π - и K -мезонов в ядрах^{/14/}, можно определить ожидаемые потери частиц. В случае линзы из алюминиевых сплавов потери частиц в диапазоне импульсов (10–50) Гэв/с составляют (15–25)%.

Казалось бы, что потери могут быть уменьшены за счёт уменьшения h_0 , поскольку, как видно из таблицы 1, величина σ_e вблизи шейки находится в пределах (8–14,5) кг/мм² и имеется значительный запас по пределу текучести (33 кг/мм²). Однако при этом, вследствие уменьшения нормальной толщины параболоида в области фланца, он может потерять устойчивость. Оценка устойчивости по отношению к внешнему давлению и осевому сжатию^{/15/} путём замены параболоида с длиной $2 r_k$, радиусом r_k и толщиной стенки $\frac{h_0}{\sqrt{1 + (\frac{L}{r_k})^2}}$ показала, что для выбранной системы линз запас по устойчивости составляет около 1,5.

Возможный путь уменьшения потерь частиц состоит в переходе к линзам с осевым отверстием в шейке. Помимо снижения потерь, введение осевого отверстия упрощает технологию изготовления линзы (в случае

*) Первый объектив состоит из 2 состыкованных линз № 1.

сварки её из двух параболоидов), а также, как показал численный расчёт, снижает максимальные напряжения в зоне сопряжения параболоидов с шейкой (см. таблицу II). Расчётной схемой для такого случая является схема сопряжения параболической оболочки с короткой цилиндрической оболочкой. Граничными условиями при этом являются $u = \Theta_1 = Q_1 = 0$ в середине цилиндрической оболочки и $u = w = \Theta_1 = 0$ у фланца. Толщина цилиндрической оболочки $h_{\text{цил}}$ или же радиус отверстия $r_{\text{отв}}$ в шейке при заданном внешнем радиусе шейки, выбирались такими, чтобы параболическая и цилиндрические части линзы в зоне их сопряжения были бы равнонапряженными. Результаты расчёта приведены в таблице II.

$$I_0 = 0,5 \text{ Ма}$$

Т а б л и ц а II

№ линзы	$(\sigma_e)_{\text{max}}$ кг/мм ²		Геометрия отверстия	
	без отверстия	с отверстием	h цили(см)	r отв(см)
1	13,6	8,6	0,62	0,875
2	14,5	10,0	0,7	0,8
3	8,0	5,9	0,83	2,125

В заключение отметим, что данная работа является первым этапом изучения прочности параболических линз. В дальнейшем авторы намерены исследовать напряженное состояние, устойчивость и усталостную прочность с учётом динамичности нагружения линзы током и её нагрева. Решение этих вопросов совместно с экспериментальными исследованиями прочности и долговечности линз позволит получить достаточно полную информацию для создания фокусирующих систем подобного типа.

Авторы благодарны профессору Л.И.Балабуху за ценные консультации, А.В.Самойлову за полезные обсуждения и поддержку данной работы и В.И.Котову за замечания при чтении рукописи.

Л и т е р а т у р а

1. S. Van der Meer. CERN 61-7, 1961.
2. A. Asner, Ch. Iselin. CERN, 65-17, 1965.
3. B. Langeseth, F. Völker. CERN. NPA/Int 68-25, 1968.
4. G. C. Sacerdati, E. Fiorini et al. High Energy Neutrino Beams for the Serpukhov Accelerator. Milano, 1969.
5. В.И. Воронов, И.А. Данильченко, Р.А. Рзаев, А.В. Самойлов. Препринт ИФВЭ 70-93, Серпухов, 1970.
6. H. Faissner, F. J. Nasert, J. Von Krogh, W. Thome, GITNA - 59, 1972.
7. В.Л. Ауслендер, В.Н. Байер и др. Труды 1У Международной конференции по ускорителям. М., 1964, стр. 282.
8. Л.Л. Данилов, С.Н. Родионов, Г.И. Сильвестров. ЖТФ, 37, 914, 1967.
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. М., Изд-во "Наука", 1965.
10. Л.И. Балабух и др. Основы строительной механики ракет. М., Изд-во "Высшая школа", 1969.
11. С.Д. Пономарев и др. Расчёты на прочность в машиностроении. М., Изд-во "Машиностроение", т.2, 1959.
12. В. Флюгге. Статика и динамика оболочек. М., "Стройиздат", 1961.
13. В.Л. Бидерман. Изв. АН СССР, МТТ, № 5, 1967.
14. Дж.В. Аллаби, Ю.Б. Бушнин и др. ЯФ, 12, 538, 1970.
15. Сб. "Прочность. Устойчивость. Колебания". т. 3. Под общ. ред. А.И. Биргера и Я.Г. Пановко. М., Изд-во "Машиностроение", 1968, стр. 142.

Рукопись поступила в издательскую группу
13 ноября 1972 года.

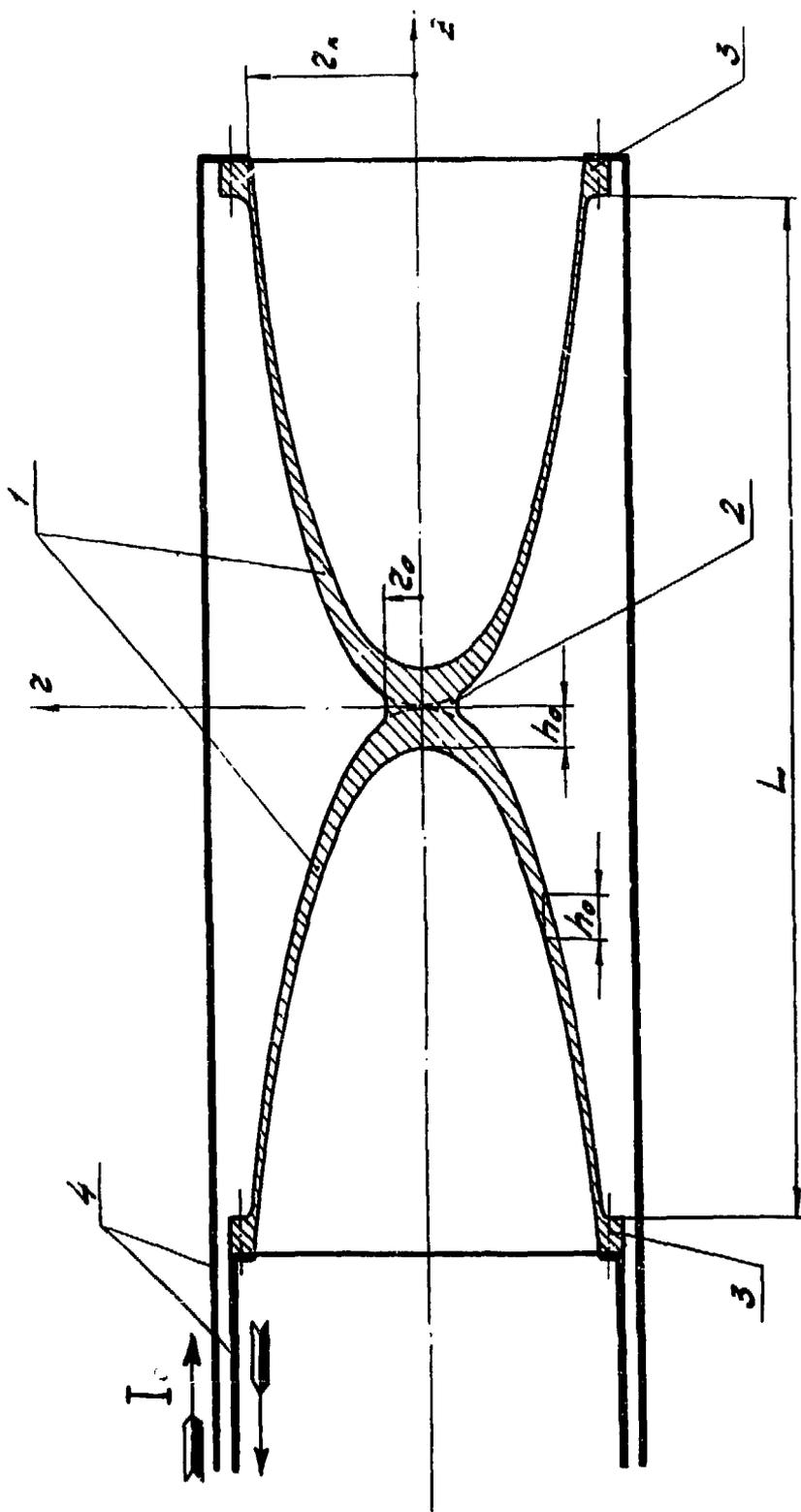


Рис. 1. Параболическая линза: 1 - параболоиды вращения; 2 - шейка; 3 - фланцы; 4 - коаксиальный токоподвод.

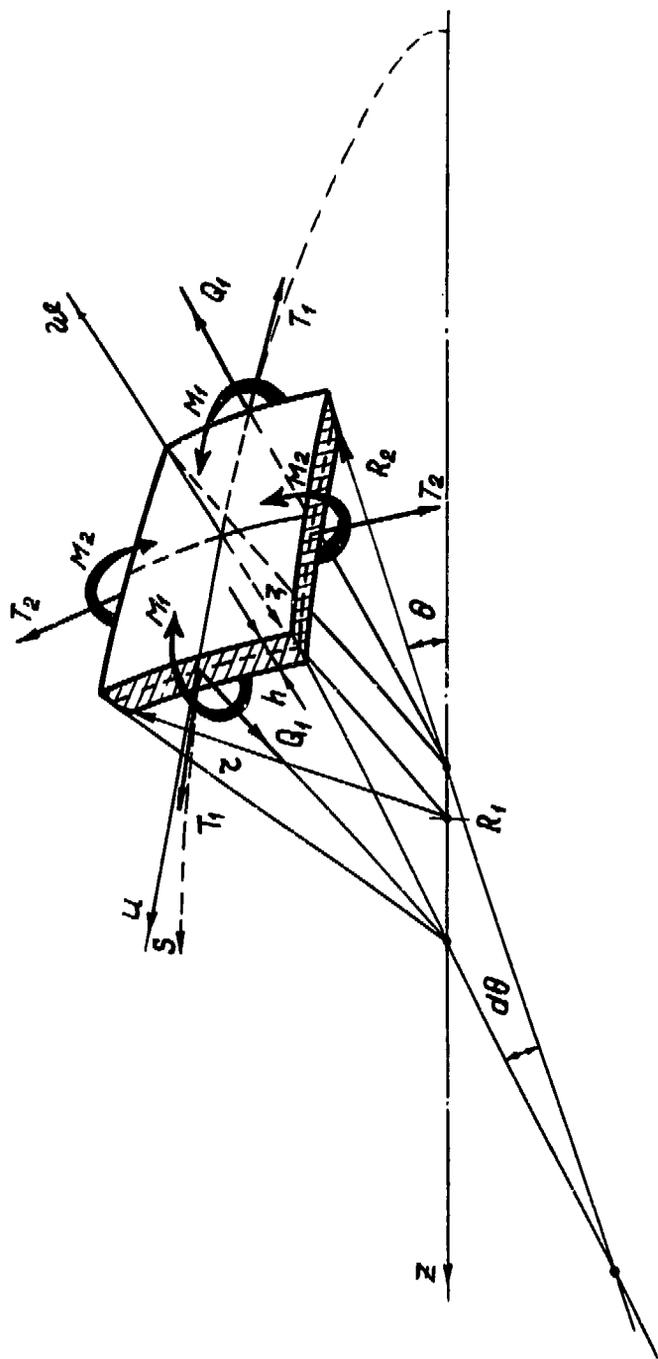


Рис. 2. Элемент оболочки.

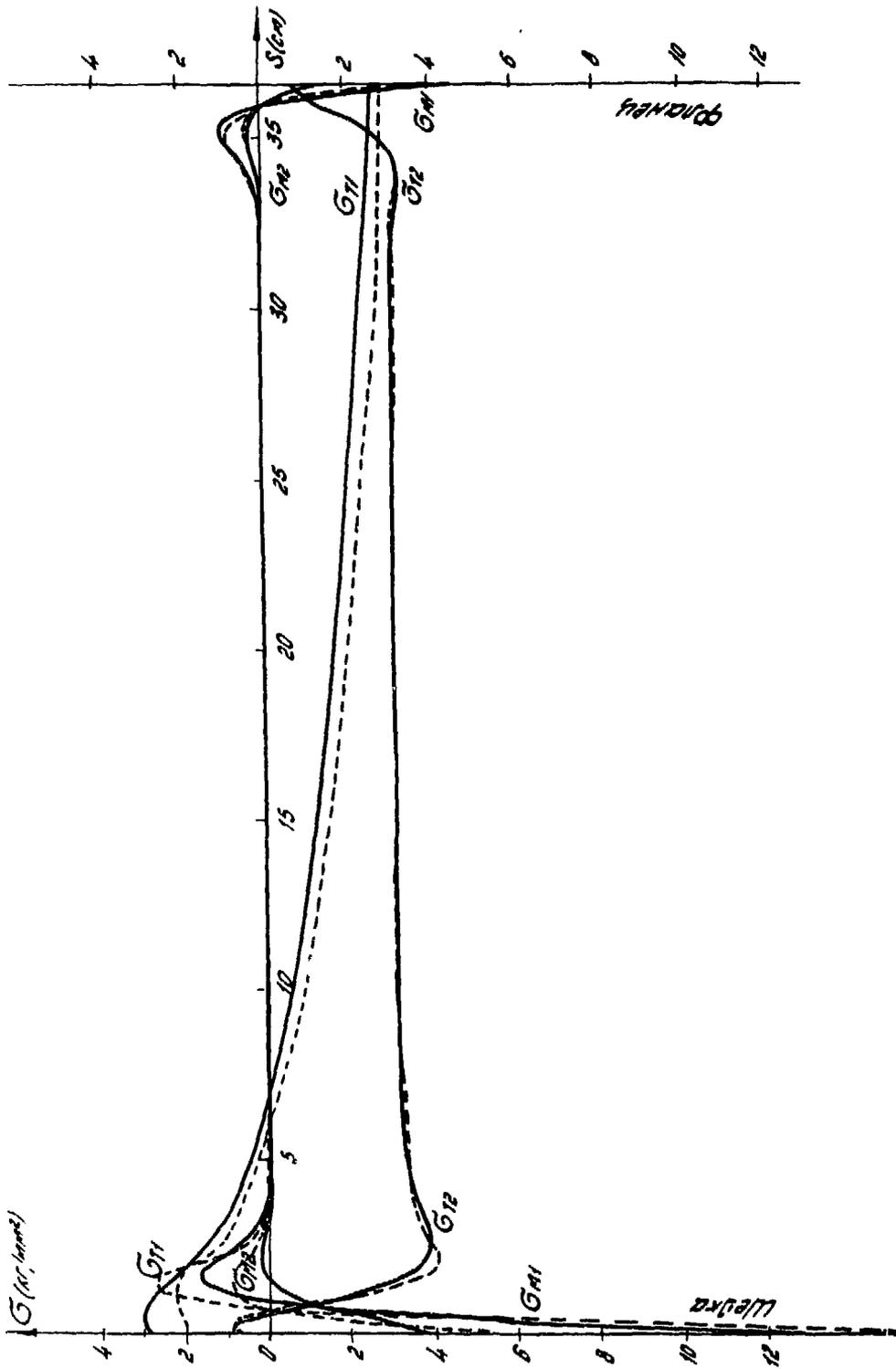


Рис. 3. Распределение напряжений вдоль меридиана. Сплошные кривые - результат численного счёта; пунктирные - результат приближенного аналитического решения. $\Gamma_0 = 0,5$ Ма; $\Gamma_k = 9,5$ см; $\Gamma_0 = 1,5$ см; $h_0 = 1$ см; $L = 72,8$ см; $a = 0,4044$ см.

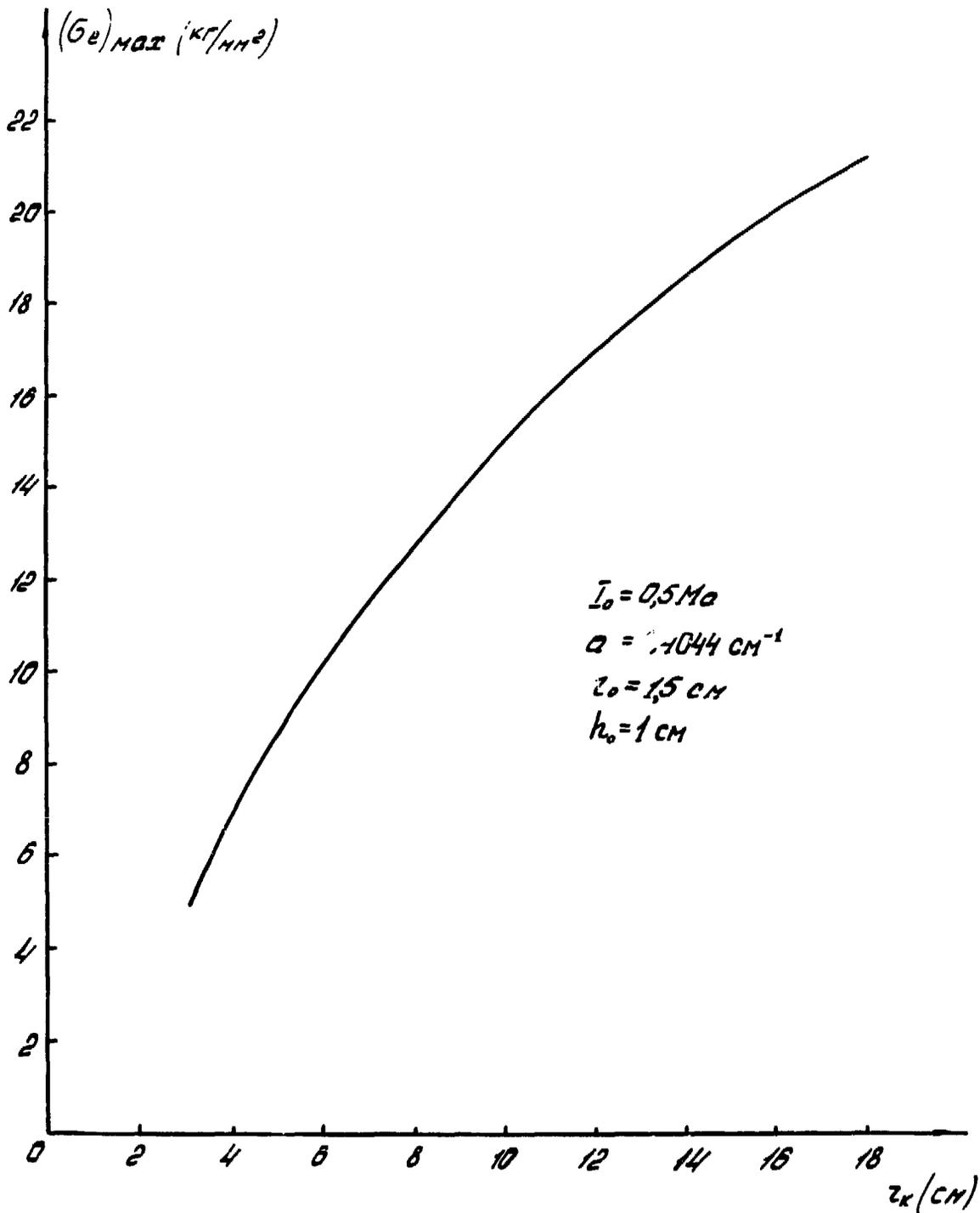


Рис. 4. Зависимость максимального напряжения от конечного радиуса (апертуры) линзы.

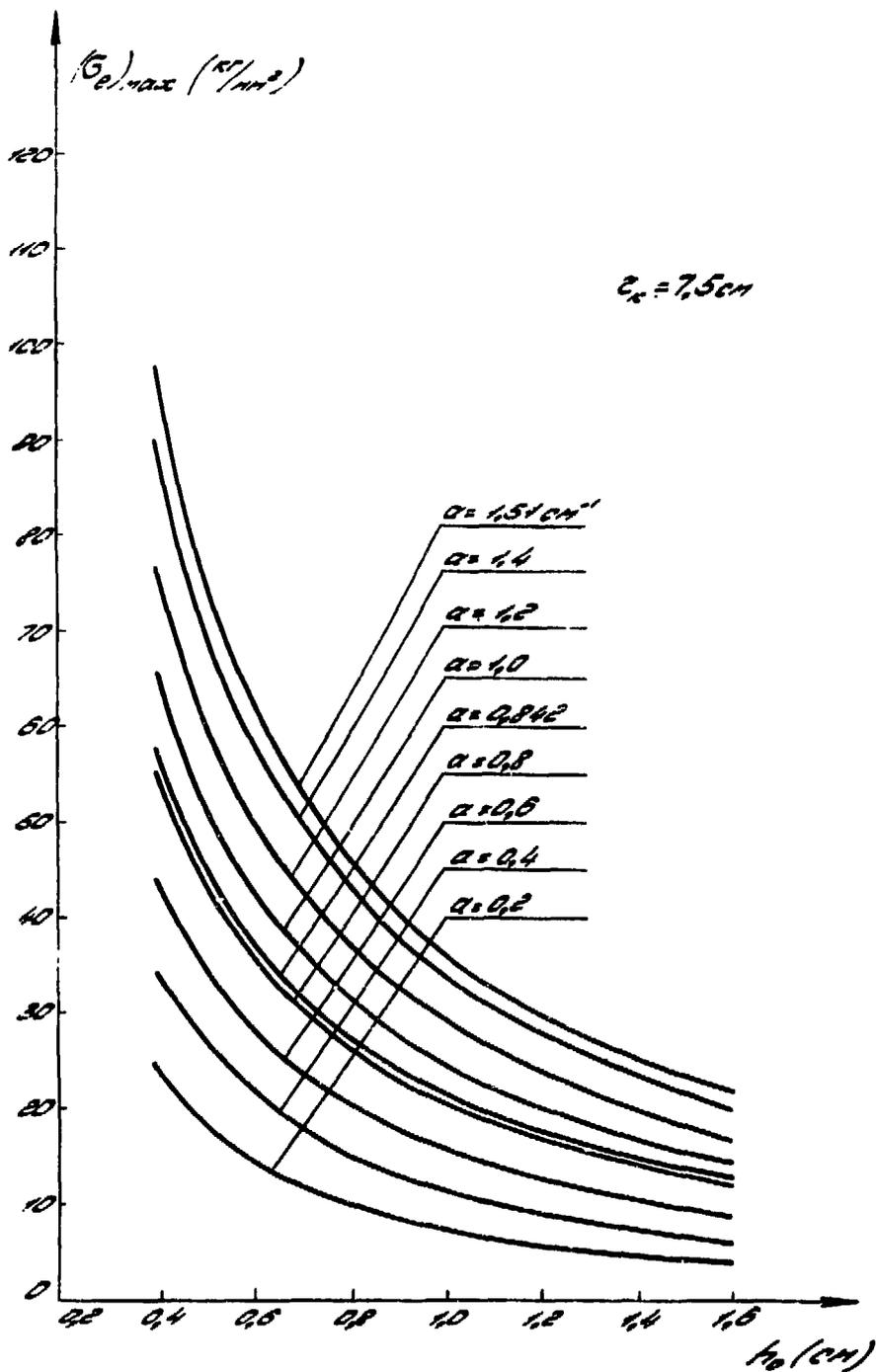


Рис. 5. Зависимость максимальных напряжений от толщины оболочки. Апертура соответствует линзе № 1. $I_0 = 0,5 Ma$; $r_0 = 1,5 cm$.

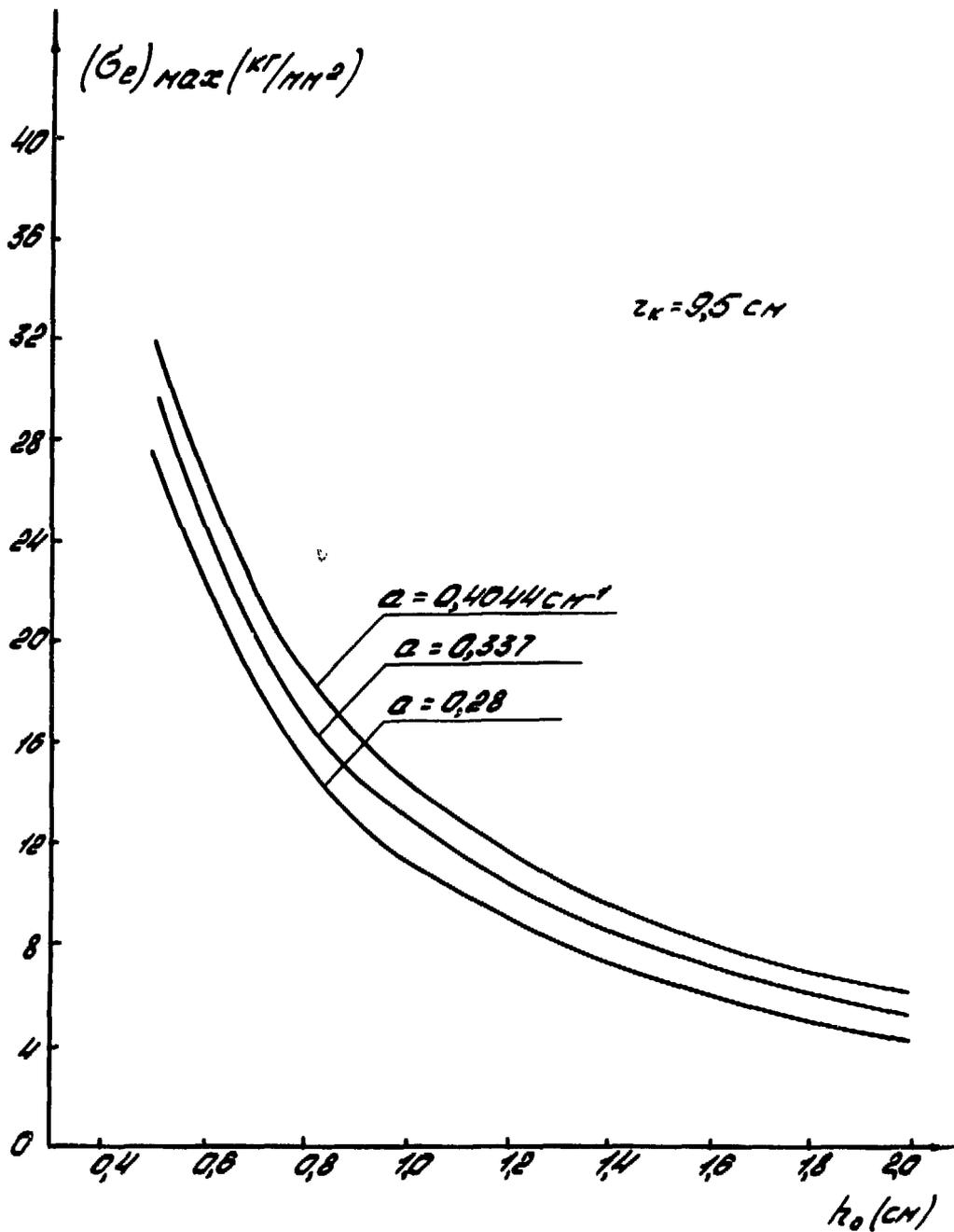


Рис. 6. Зависимость максимальных напряжений от толщины оболочки. Апертура соответствует линзе № 2. $I_0 = 0,5 \text{ Ма}$; $r_0 = 1,5 \text{ см}$.

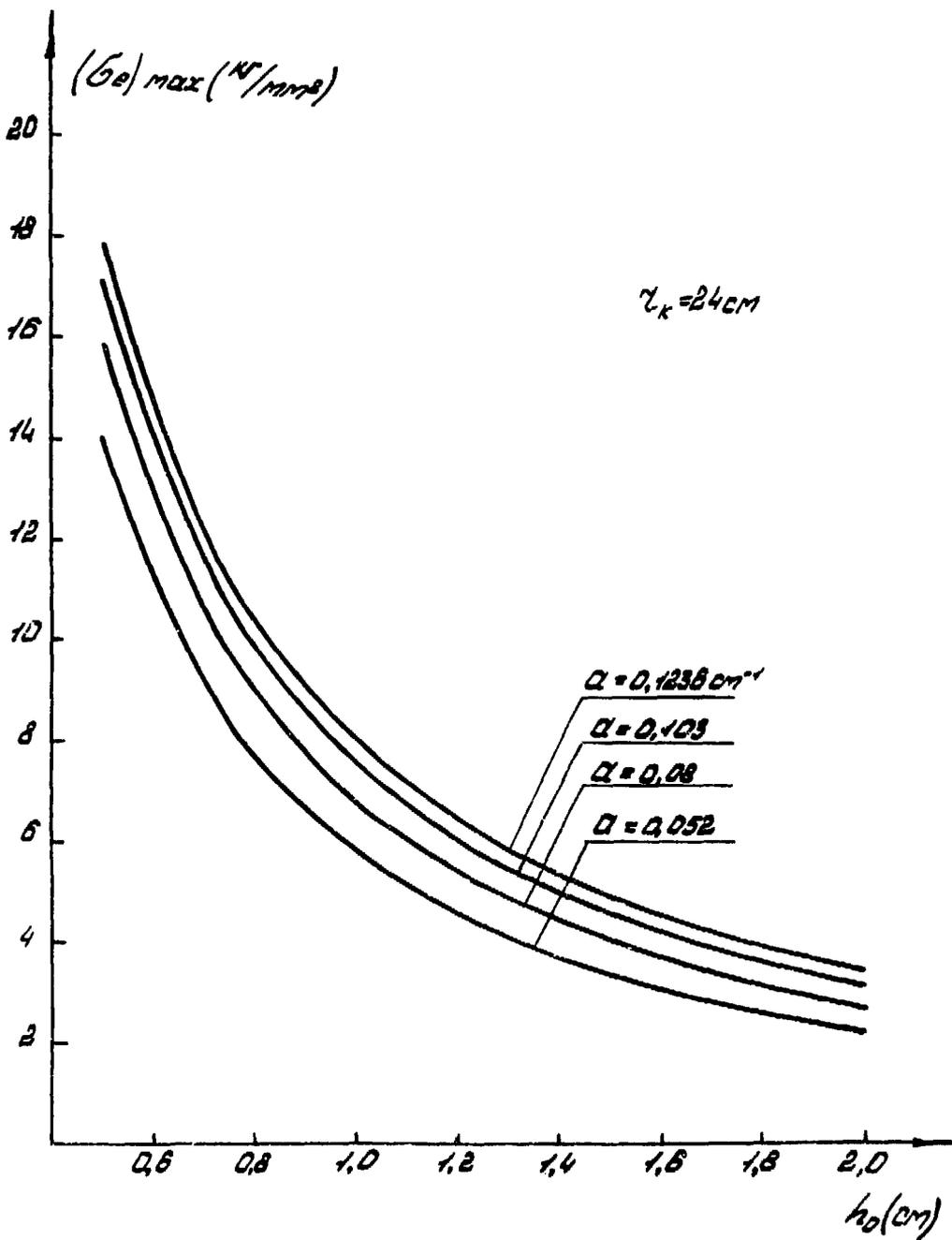


Рис. 7. Зависимость максимальных напряжений от толщины оболочки.
 Апертура соответствует линзе № 3. $I_0 = 0,5 Ma$; $r_0 = 3 cm$.

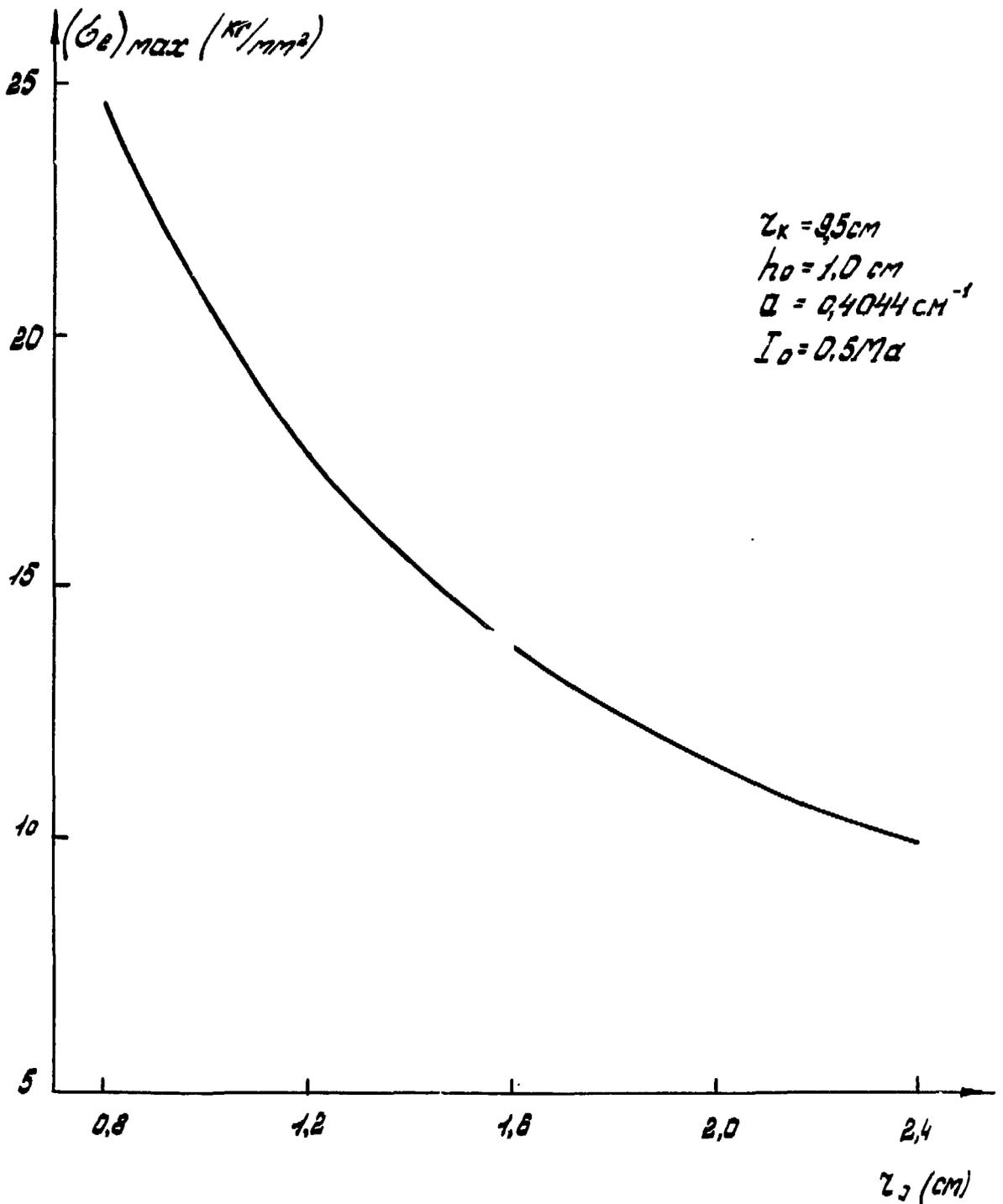


Рис. 8. Зависимость максимального напряжения от радиуса шейки линзы.

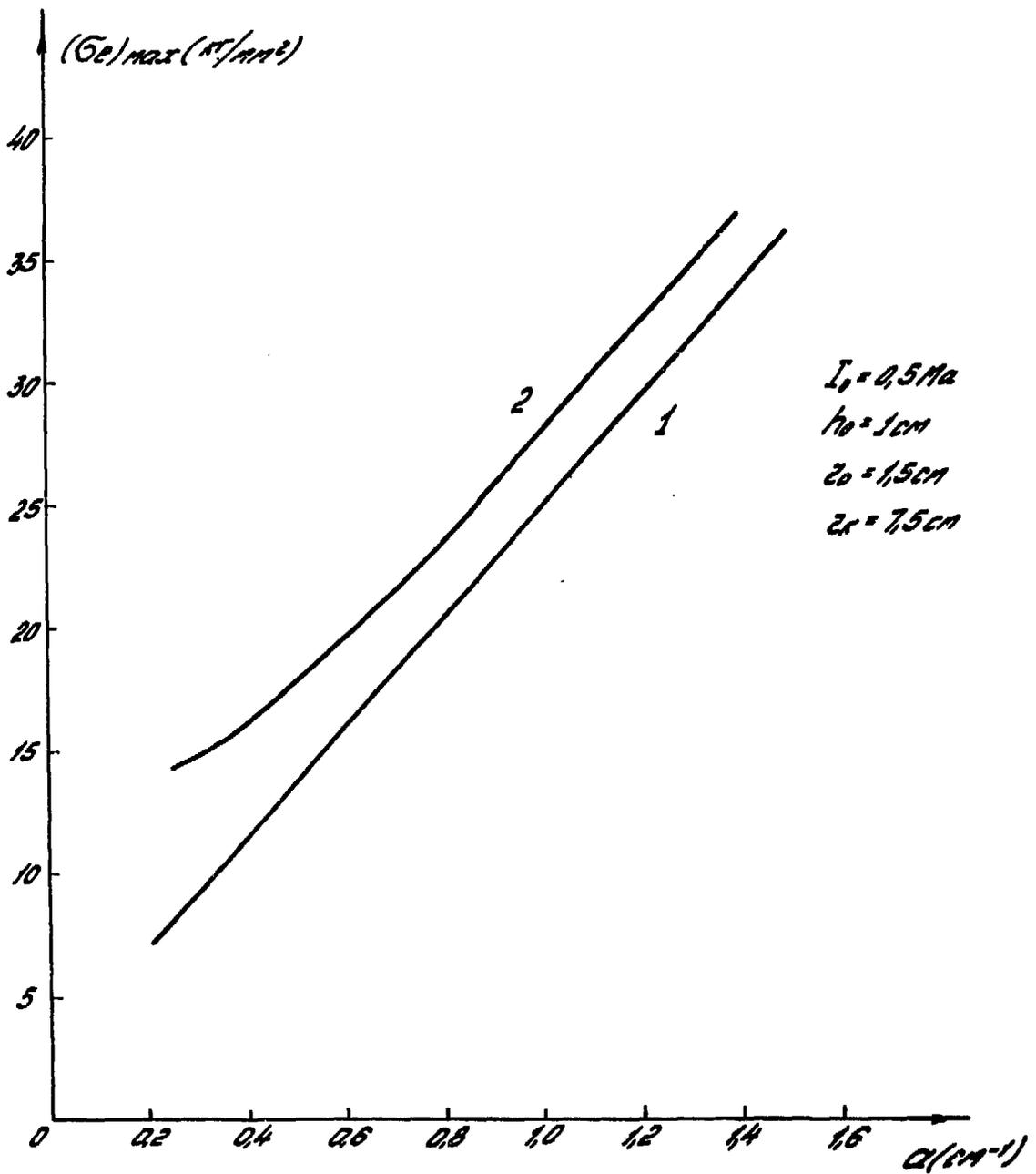


Рис. 9. Зависимость максимального напряжения от постоянной параболы: 1 – результат численного счёта; 2 – результат приближенного аналитического решения.

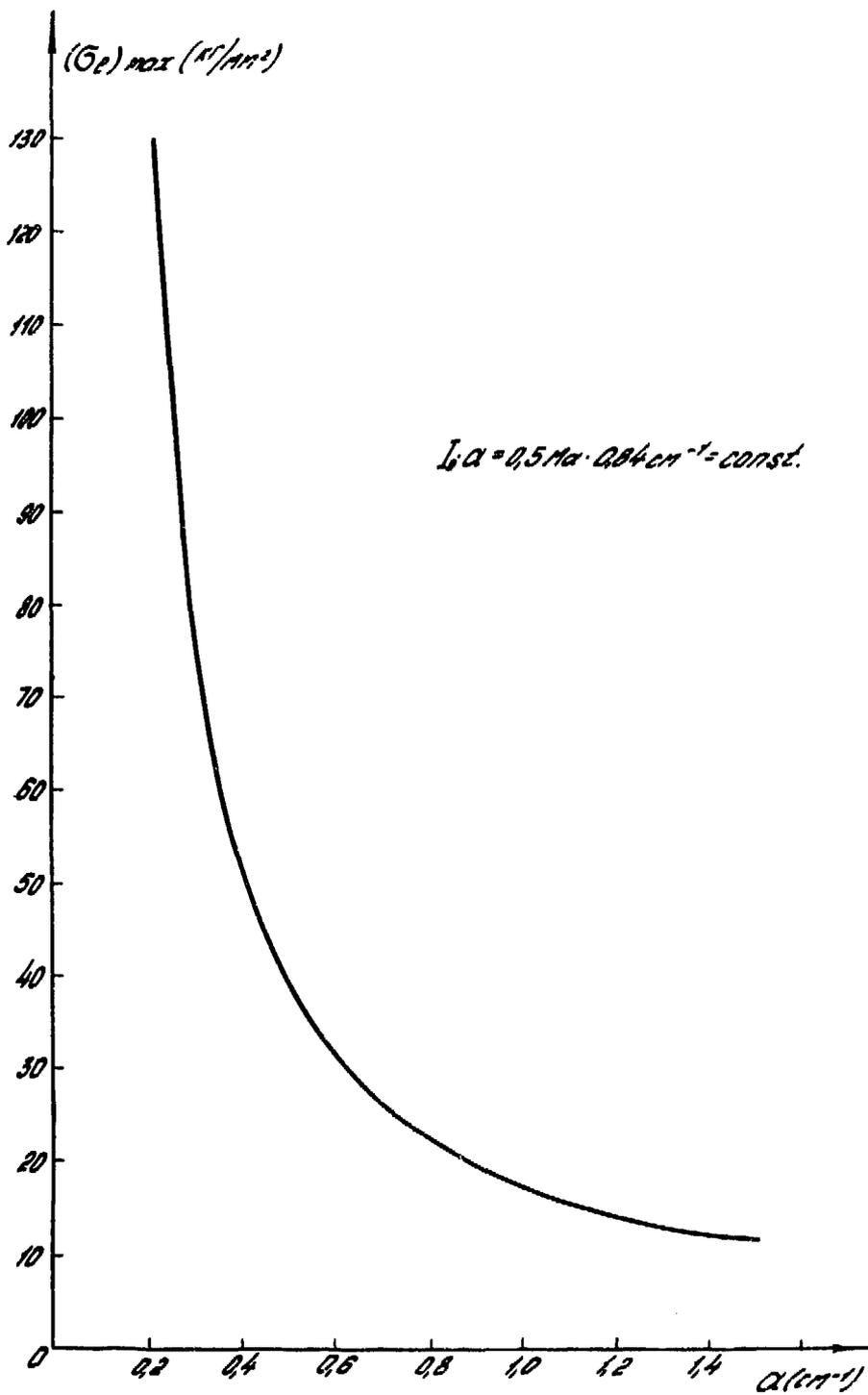


Рис. 10. Зависимость максимального напряжения от постоянной параболы при неизменной оптической силе линзы. $r_k = 7,5$ см; $r_o = 1,5$ см; $h_c = 1,0$ см.

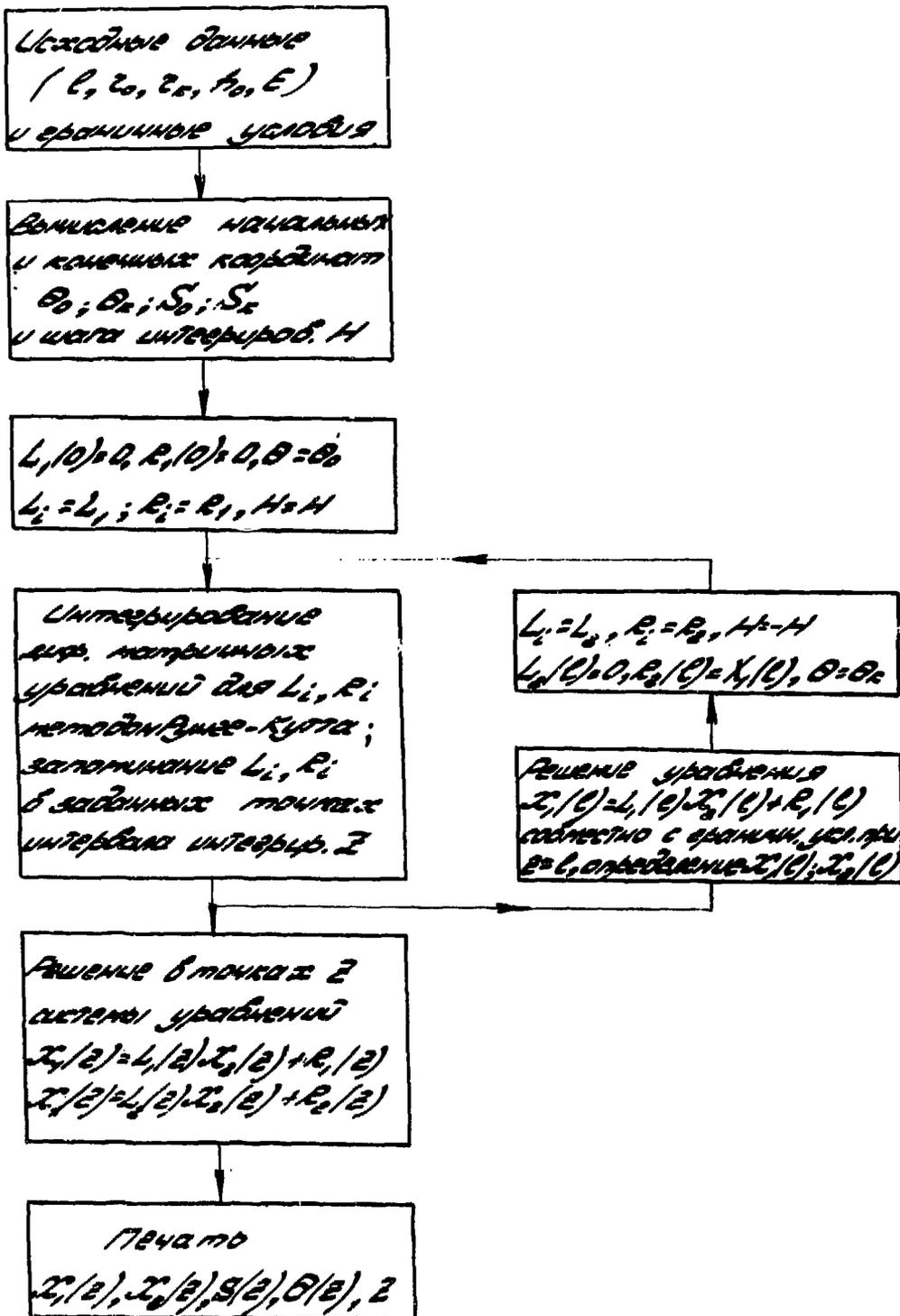


Рис. 11. Структурная схема программы расчета механических напряжений в произвольной оболочке вращения переменной толщины.

Цена 18 коп.

Издательская группа И Ф В Э

Заказ 653 . Тираж 260. 1,5 уч.-изд.л. Т-19960

Декабрь 1972. Редактор М.Л.Фоломешкина