

Ордена Ленина

ИАЭ-23 08

Институт атомной энергии

им. И. В. Курчатова

В. И. Носов, Г. В. Компаниец

**Метод расчета альбедной матрицы
многозонного цилиндрического блока**

E₂₁

Москва 1973

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И. В. КУРЧАТОВА

В. И. Носов, Г. Б. Компанец

МЕТОД РАСЧЕТА АЛЬБЕДНОЙ МАТРИЦЫ МНОГОЗОННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БЛОКА

М о с к в а

1973

Ключевые слова: реактор, расчет, нейтрон, альбедная матрица, многорегионный неразмножающий блок, метод столкновений, две группы.

Key words: calculation, neutron, albedo matrix, multiregion nonmultiplication block, collision method, two groups.

А Н Н О Т А Ц И Я

В рамках метода вероятностей первого столкновения рассмотрены альбедные характеристики многослойного цилиндрического блока, состоящего из произвольного числа неразмножающих зон. Предлагается методика расчета альбедной матрицы $\hat{\beta}$ такого блока в двухгрупповом приближении.

Альбедная матрица такого типа часто используется в нейтронной физике и, в частности, в теории ядерных реакторов для постановки эффективных граничных условий.

А Б С Т Р А К Т

The albedo characteristics of the multiregion cylindrical block consisting of an arbitrary number of non-multiplication regions have been treated in terms of the first collision probability method. The method for calculation of the $\hat{\beta}$ albedo matrix of such a block in the two-group approximation is proposed.

The albedo matrix of such a type is often used in neutron physics and, in particular, in the nuclear reactor theory for the determination of the effective boundary conditions.

Технич. редактор Е.Д.Маркова

Корректор В.П.Горячева

Т-10178. 28,06,73 г. Формат 60 x 90 1/8

Уч.-изд. л. 1,37. Тираж 150. Зак. 12499

ОНТИ. ИАЭ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

При проведении вариантных расчетов различного рода гетерогенных систем довольно часто используется малогрупповое диффузионное приближение [1-4]. При таком подходе в реакторе выделяются области (регулирующие стержни, например), в которых применение диффузионного приближения является неоправданным. На границах таких областей задаются соответствующие эффективные граничные условия, в частности, связывающие односторонние токи нейтронов на границах раздела областей [6]. Как правило, расчет эффективных граничных условий ведется в более высоком, чем диффузионное, приближении. Могут быть применены метод Монте-Карло, альбедный метод, P_n -приближения высокого порядка и т.д. [5-10].

Известно, что применение вероятностного метода Амуаяля, Бенуа и Горовица для расчета характеристик отдельной ячейки эквивалентно по точности ее расчету в P_3 -приближении, что является вполне приемлемым при проведении вариантных расчетов [2]. Дальнейшее уточнение (например, расчет методом Монте-Карло), по-видимому, не имеет смысла, т.к. основная погрешность будет здесь обусловлена уже малогрупповым приближением. В то же время вероятностный метод наименее трудоемок и, давая результаты в аналитической форме, позволяет более точно рассчитывать разностные эффекты. Все сказанное сделало этот метод достаточно привлекательным и послужило стимулом к проведению данной работы. В ней в рамках теории вероятностей первого столкновения в двухгрупповом приближении рассчитывается альбедная матрица $\hat{\beta}$ многослойного цилиндрического блока, состоящего из произвольного числа неразмножающих зон.

§ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сложный цилиндрический блок, состоящий из концентрических зон (см. рисунок). При решении задачи о распространении нейтронов во внешней по отношению к блоку области обычно имеется возможность исключить блок из рассмотрения, используя граничные условия в виде логарифмической производной или альбедного типа (оба вида граничных условий легко преобразуются один в другой).

Если обозначить через $\bar{I}^{\pm}(R_n)$ полное число нейтронов, пересекающих поверхность, ограниченную радиусом R_n (индекс "+" означает направление от центра, а "-" - направление к центру), то альбедные условия на поверхности блока записываются следующим образом:

$$\vec{I}^+(R_N) = \hat{\beta} \vec{I}^-(R_N). \quad (1)$$

Здесь в общем случае для размножающих, поглощающих и рассеивающих зон в двухгрупповом приближении имеем

$$\vec{I}^\pm(R_N) = \begin{vmatrix} I_1^\pm(R_N) \\ I_2^\pm(R_N) \end{vmatrix}; \quad \hat{\beta} = \begin{vmatrix} \beta_{11}(R_N, 0) & \beta_{21}(R_N, 0) \\ \beta_{12}(R_N, 0) & \beta_{22}(R_N, 0) \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где
$$\beta_{ij} = \frac{I_j^\pm(R_N)}{I_i^\pm(R_N)}$$

(i, j - группа: 1 - быстрая, 2 - тепловая).

Здесь и в последующих определениях полагается, что все выходящие из блока нейтроны обусловлены входящим током нейтронов.

Процесс получения граничных условий альбедного типа для многозонного блока состоит из двух частей: расчет элементов альбедной матрицы всего многозонного блока по известным альбедо и функциям пропускания отдельных зон и вычисление этих характеристик для каждой зоны. Определим альбедо и функции пропускания следующим образом для отдельной зоны, ограниченной радиусами R_{n-1} и R_n (для нейтронов, падающих на внешнюю поверхность зоны R_n):

$$\beta_{ij}^-(n) = \frac{I_j^-(R_n)}{I_i^-(R_n)}$$
 - вероятность нейтрону i -й энергетической группы, падающему на внешнюю поверхность зоны "n", покинуть зону через ту же (внешнюю) поверхность в j -й энергетической группе (альбедо). Следует отметить, что в данной работе будут рассматриваться только неразмножающиеся зоны, для которых

$\beta_{21}^-(n) = 0$ (для размножающих зон потребуется обобщить введенные определения);

$$t_{ij}^-(n) = \frac{I_j^-(R_{n-1})}{I_i^-(R_n)}$$
 - функция пропускания, т.е. вероятность нейтрону i -й энергетической группы, падающему на внешнюю поверхность зоны "n", покинуть зону через противоположную (внутреннюю) поверхность в j -й энергетической группе (для неразмножающихся зон $t_{21}^-(n) = 0$).

Для нейтронов, падающих на внутреннюю поверхность зоны "n", альбедо $\beta_{ij}^+(n)$ и функции пропускания $t_{ij}^+(n)$ определяются аналогичным образом. Как следует из определений, центральная цилиндрическая зона в связи с отсутствием внутренней поверхности характеризуется лишь вероятностями типа β_{ij}^- .

В следующем параграфе будут получены формулы для определения элементов альбедной матрицы $\hat{\beta}$ всего рассматриваемого многозонного блока через альбедо и функции пропускания отдельных цилиндрических зон. Соотношения для вычисления альбедо $\beta_{ii}^\pm(n)$ и функции пропускания $t_{ii}^\pm(n)$ для отдельных зон будут приведены в последующих параграфах - 4 и 5. И, наконец, в параграфе 6 будут получены расчетные формулы для вероятностей $\beta_{12}^\pm(n)$ и $t_{12}^\pm(n)$.

Все зоны предполагаются бесконечными по высоте (торцевые утечки отсутствуют), характеризуются соответствующими радиусами R_{n-1} , R_n и значениями макроскопических сечений $\Sigma_{tot,i}^\pm(n)$, $\Sigma_{a,i}^\pm(n)$, $\Sigma_{sc}^\pm(n)$, $\Sigma_{пер}^\pm(n)$.

В соответствии с методикой, изложенной в работах [7,8], можно получить альbedo блока, состоящего из N поглощающих и рассеивающих зон, если известны альbedo и функции пропускания для каждой зоны. Рассмотрим вначале двухзонную область, состоящую из центрального блока (I) и окружающей его зоны (II). Альbedo $\beta_{ii}(R_{II}, 0)$ такой области имеет следующий вид ($i = 1, 2$):

$$\beta_{ii}(R_{II}, 0) = \beta_{ii}^-(II) + \frac{t_{ii}^-(II) \cdot \beta_{ii}(R_I, 0) \cdot t_{ii}^+(II)}{1 - \beta_{ii}(R_I, 0) \cdot \beta_{ii}^+(II)}. \quad (3)$$

Здесь $\beta_{ii}^{\pm}(II)$ и $t_{ii}^{\pm}(II)$ - альbedo и функции пропускания цилиндрической зоны (II); $\beta_{ii}(R_I, 0)$ - альbedo центрального блока.

Первое слагаемое в соотношении (3) $\beta_{ii}^-(II)$ дает вклад в альbedo нейтронов, ни разу не пересекавших границу раздела между блоком (I) и зоной (II). Второе слагаемое - вклад нейтронов, которые с вероятностью $t_{ii}^-(II)$ пересекают границу раздела между зонами, выходят затем из блока (альbedo $\beta_{ii}(R_I, 0)$) и с вероятностью $t_{ii}^+(II)$ пересекают внешнюю поверхность зоны (II); множитель $1/[1 - \beta_{ii}(R_I, 0) \cdot \beta_{ii}^+(II)]$ учитывает многократные переходы нейтронов из одной зоны в другую.

Таким же образом рассчитывается альbedo $\beta_{ii}(R_{III}, 0)$ области, состоящей из центрального блока (I), зоны (II) и окружающей их зоны (III). В этом случае в соотношении (3) вместо вероятностей $\beta_{ii}(R_I, 0)$, $\beta_{ii}^{\pm}(II)$, $t_{ii}^{\pm}(II)$ используются соответственно вычисленное альbedo $\beta_{ii}(R_{II}, 0)$ двухзонной области и вероятности $\beta_{ii}^{\pm}(III)$, $t_{ii}^{\pm}(III)$ зоны (III).

В соответствии с вышеизложенной схемой последовательно определяются элементы альбедной матрицы для всего многозонного блока - $\beta_{11}(R_N, 0)$ и $\beta_{22}(R_N, 0)$. При расчете вероятностей $\beta_{ii}(R_N, 0)$ рассматриваемого многозонного блока предполагается, что угловое распределение нейтронов, падающих на поверхность раздела между зонами, не изменяется при многократном переходе нейтронов из одной зоны в другую [7,8] (альbedo и функции пропускания принимаются одинаковыми при многократных переходах).

При таких же предположениях далее последовательно вычисляются вероятности $\beta_{12}(R_{II}, 0)$, $\beta_{12}(R_{III}, 0), \dots, \beta_{12}(R_N, 0)$. Формула для расчета альbedo $\beta_{12}(R_{II}, 0)$ двухзонной области, состоящей из центрального блока (I) и окружающей его зоны (II), имеет следующий вид:

$$\beta_{12}(R_{II}, 0) = \beta_{12}^-(II) + t_{12}^-(II) \times \frac{\beta_{22}(R_I, 0) \cdot t_{22}^+(II)}{1 - \beta_{22}(R_I, 0) \cdot \beta_{22}^+(II)} + \frac{t_{11}^-(II) \cdot \beta_{11}(R_I, 0) \cdot t_{12}^+(II)}{1 - \beta_{11}(R_I, 0) \cdot \beta_{11}^+(II)} +$$

$$+ \frac{t_{11}^-(II)}{1 - \beta_{11}(R_I, 0) \cdot \beta_{11}^+(II)} \cdot \left\{ \beta_{12}(R_I, 0) + \beta_{11}(R_I, 0) \cdot \beta_{12}^+(II) \cdot \beta_{22}(R_I, 0) \right\} \frac{t_{22}^+(II)}{1 - \beta_{22}(R_I, 0) \cdot \beta_{22}^+(II)}. \quad (4)$$

Здесь $\beta_{ii}^{\pm}(\bar{II})$, $\beta_{12}^{\pm}(\bar{II})$ и $t_{ii}^{\pm}(\bar{II})$, $t_{12}^{\pm}(\bar{II})$ - альbedo и функции пропускания цилиндрической зоны (\bar{II}); $\beta_{ii}(R_I, 0)$, $\beta_{12}(R_I, 0)$ - альbedo центрального блока.

Первое слагаемое в соотношении (4) $\beta_{12}^-(\bar{II})$ дает вклад в альbedo нейтронов, которые стали тепловыми, ни разу не пересекая границу раздела между блоком и зоной (\bar{II}). Второе слагаемое - вклад в альbedo нейтронов, которые с вероятностью $t_{12}^-(\bar{II})$ стали тепловыми при первом пересечении границы раздела между зоной (\bar{II}) и блоком. При этом часть образовавшихся тепловых нейтронов выходит из блока (альbedo $\beta_{12}(R_I, 0)$) и с вероятностью $t_{22}^+(\bar{II})$ пересекает внешнюю поверхность зоны (\bar{II}); множитель $1/[1-\beta_{22}(R_I, 0)\beta_{22}^+(\bar{II})]$ учитывает многократные переходы тепловых нейтронов между блоком и зоной. Третье слагаемое - вклад нейтронов, которые с вероятностью $t_{11}^-(\bar{II})$ пересекают внутреннюю поверхность зоны (\bar{II}), выходят из блока ($\beta_{11}^-(R_I, 0)$) и затем становятся тепловыми при пересечении зоны (\bar{II}) слева направо с вероятностью $t_{12}^+(\bar{II})$; множитель $1/[1-\beta_{11}(R_I, 0)\beta_{11}^+(\bar{II})]$ учитывает многократные переходы быстрых нейтронов через границу раздела между блоком и зоной. Четвертое и пятое слагаемые дают вклад в альbedo нейтронов, которые с вероятностью $t_{11}^-(\bar{II})$ пересекают поверхность раздела между зонами и затем становятся тепловыми либо при "отражении" от блока (альbedo $\beta_{12}(R_I, 0)$) или от внутренней поверхности зоны (\bar{II}) (альbedo $\beta_{12}^+(\bar{II})$); множители $1/[1-\beta_{11}(R_I, 0)\beta_{11}^+(\bar{II})]$ и $1/[1-\beta_{22}(R_I, 0)\beta_{22}^+(\bar{II})]$ учитывают соответственно многократные переходы через границу раздела между зонами как быстрых, так и образовавшихся тепловых нейтронов.

Таким же образом далее рассчитывается альbedo $\beta_{12}(R_{II}, 0)$ области, состоящей из центрального блока, зоны (\bar{II}) и окружающей их зоны (\bar{III}). В этом случае в соотношении (4) вместо вероятностей $\beta_{ii}(R_I, 0)$, $\beta_{12}(R_I, 0)$, $\beta_{ij}^{\pm}(\bar{II})$, $t_{ij}^{\pm}(\bar{II})$ используются соответственно вычисленные раньше альbedo $\beta_{ii}(R_{II}, 0)$, $\beta_{12}(R_{II}, 0)$ двухзонной области и вероятности $\beta_{ij}^{\pm}(\bar{III})$, $t_{ij}^{\pm}(\bar{III})$ цилиндрической зоны (\bar{III}); в соответствии с изложенной схемой определяется альbedo $\beta_{12}(R_{N3}, 0)$ для всего многозонного блока.

§ 4. АЛЬБЕДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БЛОКА

Альbedo $\beta_{11}(R_I, 0)$ и $\beta_{22}(R_I, 0)$ центрального цилиндрического блока (зона "I") можно определить, зная для нейтрона, падающего на блок, вероятность ухода из первой группы $\Gamma_1(I)$ и вероятность поглощения во второй (тепловой) группе $\Gamma_2(I)$. Тогда

$$\beta_{11}(R_I, 0) = 1 - \Gamma_1(I); \quad \beta_{22}(R_I, 0) = 1 - \Gamma_2(I). \quad (5)$$

Здесь

$$\Gamma_i(I) = \frac{I_{\text{вх},i}(I) - I_{\text{вых},i}(I)}{I_{\text{вх},i}(I)} \quad ; \quad \text{— вероятность ухода нейтрона или вероятность того, что нейтрон}$$

i -й группы, падающий на поверхность блока, поглощается в нем или переходит в нижнюю группу ($i = 1, 2$);

$I_{\text{вх},i}(I)$, $I_{\text{вых},i}(I)$ - полное число входящих и выходящих нейтронов соответственно (интегральный ток); индекс (I) для краткости записи далее в промежуточных выкладках будет опущен.

При расчете Γ_i делаются следующие предположения:

- Поток падающих нейтронов распределен равномерно по поверхности цилиндрического блока.
- Рассеяние нейтронов внутри цилиндрического блока изотропно в лабораторной системе координат.

С учетом этих предположений можно записать следующее соотношение для расчета вероятности Γ_1 (или Γ_2) [6]:

$$\Gamma_1 = \frac{\sum_{yb.1}}{\sum_{tot.1}} P_1^{(0)} + \left(\frac{\sum_{s1}}{\sum_{tot.1}} P_1^{(0)} \right) \times \frac{\sum_{yb.1}}{\sum_{tot.1}} P_{c1}^{(1)} + \dots = \frac{\sum_{yb.1}}{\sum_{tot.1}} P_1^{(0)} \left\{ 1 + \frac{\sum_{s1}}{\sum_{tot.1}} P_{c1}^{(1)} + \dots \right\} = \frac{P_1^{(0)} \cdot \sum_{yb.1} / \sum_{tot.1}}{1 - P_{ci} \sum_{s1} / \sum_{tot.1}} \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$P_1^{(0)}$ - вероятность того, что нейтрон первой группы, падающий на цилиндрическую зону, испытает в ней первое столкновение;

$P_{c1}^{(k)}$ - вероятность того, что нейтрон первой группы, испытавший k -е столкновение в рассматриваемой зоне, не покидая ее, испытает в ней последующее столкновение.

Считается, что плотность столкновений постоянна по всему объему зоны и $P_{c1}^{(1)} = P_{c1}^{(2)} = P_{c1}^{(3)} = \dots = P_{c1}$, где P_{c1} - вероятность первого столкновения нейтрона в зоне при равномерном распределении изотропных источников (предположение справедливо для оптически тонких зон); $\sum_{yb.1} = \sum_{1 \rightarrow 2}^{1 \rightarrow 2} + \sum_{o1}$;

$\sum_{tot.1} = \sum_{yb.1} + \sum_{s1}$; \sum_{o1} - макроскопическое сечение поглощения в быстрой (первой) группе; \sum_{s1} - макроскопическое сечение рассеяния; $\sum_{1 \rightarrow 2}$ - макроскопическое сечение перехода из первой во вторую группу нейтронов.

В соотношении (6) первый член ряда $P_1^{(0)} \sum_{yb.1} / \sum_{tot.1}$ выражает вероятность того, что нейтрон быстрой группы, падающий на цилиндр, в результате первого столкновения поглощается в нем или переходит в тепловую группу. Второй член ряда - вероятность того, что нейтрон быстрой группы, уже испытавший первый акт рассеяния $P_1^{(0)} \sum_{s1} / \sum_{tot.1}$, поглотится в цилиндре или перейдет в тепловую группу в результате второго столкновения. Окончательное выражение для Γ_1 было получено в предположении, что все последовательные столкновения нейтронов характеризуются равномерным распределением по объему цилиндра.

Для вероятности поглощения во второй группе Γ_2 можно вывести аналогичную формулу

$$\Gamma_2 = \frac{P_2^{(0)} \cdot \sum_{o2} / \sum_{tot.2}}{1 - P_{c2} \cdot \sum_{s2} / \sum_{tot.2}} \quad (7)$$

Соотношение, которое связывает вероятность первого столкновения в блоке $P_i^{(0)}$ нейтронов, падающих извне, с вероятностью столкновения в блоке P_{ci} нейтронов, обусловленных внутренним источником, может быть получено при весьма общих предположениях относительно геометрии блока [5] и имеет вид

$$P_i^{(0)} = \frac{4V}{S} \sum_{tot.i} \cdot (1 - P_{ci}) \quad (8)$$

Соотношение (8) содержит только физические свойства блока и справедливо как для цилиндров, так и для кольцевых зон.

Применительно к рассматриваемому случаю цилиндрического блока это соотношение принимает вид

$$P_i^{(0)} = 2R_I \sum_{tot.i} \cdot (1 - P_{ci}), \quad (8a)$$

где R_I - радиус цилиндра.

Итак, с учетом соотношения (8a) приходим к следующим выражениям для $\Gamma_1(\bar{I})$ и $\Gamma_2(\bar{I})$:

$$\Gamma_1(\bar{I}) = \frac{[1 - P_{c1}(\bar{I})] 2R_I \sum_{s1} \beta_{s1}(\bar{I})}{1 - P_{c1}(\bar{I}) \sum_{s1}(\bar{I}) / \sum_{tot.1}(\bar{I})}, \quad (9)$$

$$\Gamma_2(\bar{I}) = \frac{[1 - P_{c2}(\bar{I})] 2R_I \sum_{s2}(\bar{I})}{1 - P_{c2}(\bar{I}) \sum_{s2}(\bar{I}) / \sum_{tot.2}(\bar{I})}. \quad (10)$$

Таким образом, если определены вероятности $P_{c1}(\bar{I})$ и $P_{c2}(\bar{I})$, то по формулам (9) и (10) рассчитываются $\Gamma_1(\bar{I})$ и $\Gamma_2(\bar{I})$, а затем $\beta_{n1}(R_I, 0)$, $\beta_{n2}(R_I, 0)$.

Далее приводятся распространенные в литературе формулы для расчета вероятностей P_{ci} и $P_i^{(0)}$ в сплошном цилиндрическом блоке.

В работе [11] вероятность P_{ci} вычисляется по следующей формуле (приближение Вигнера):

$$P_{ci}(\bar{I}) = 1 - \frac{1}{y} \left\{ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{n+1}\right)^{n+1}} \right\}. \quad (11)$$

Здесь и далее $y = 2R_I \sum_{tot.i}(\bar{I})$.

В работе [12] используется следующее соотношение для расчета P_{ci} :

$$P_{ci}(\bar{I}) = 1 - \frac{1}{1 + y - \frac{y \cdot C(y)}{1 + y \cdot C(y)}}, \quad (12)$$

где $C(y) = \frac{4}{3} - e^{-0,15y}$.

В работах [3, 13] получена точная формула для расчета вероятности первого столкновения $P_i^{(0)}$ в случае экспоненциального закона ослабления потока нейтронов, не испытавших столкновений:

$$P_i^{(0)} = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 K i_3(y \sqrt{1-u^2}) du, \quad (13)$$

где

$$K_{i3}(y\sqrt{1-u^2}) = \int_1^{\infty} \frac{\exp[-zy\sqrt{1-u^2}] dz}{z^3 \sqrt{z^2-1}}.$$

С учетом соотношения (8а) приходим тогда к следующему выражению для P_{ci} :

$$P_{ci}(I) = 1 - \frac{1}{y} \left[1 - \frac{4}{9i} \int_0^1 K_{i3}(y\sqrt{1-u^2}) du \right] = 1 - P_e(x),$$

где $x = \frac{4}{9} = \sum_{tot. i} (I) \cdot R_I$.

В работе [14] подробно излагается методика расчета вероятности $P_e(x)$ (вначале производится интегрирование по частям, а затем полученный интеграл вычисляется точно с помощью рядов). Окончательная расчетная формула для $P_e(x)$ записывается следующим образом:

$$P_e(x) = 1 - \frac{4x}{3} + F(x), \quad (15)$$

где

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+2} (\ln 2 - \gamma + d_n - \ln x); \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n+2) [(n+1)! n!]^2},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n + \frac{1}{2}}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad d_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2k} - \frac{1}{2k-1} \right) \text{ при } n > 0,$$

$$d_0 = \frac{5}{4}; \quad d_{n+1} - d_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) - \frac{1}{2n+1}; \quad \gamma = 0.5772156.$$

При больших значениях аргумента ($x \geq 5$) предлагается [14] асимптотическое разложение для расчета $P_e(x)$

$$P_e(x) \approx \frac{1}{2x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{x^{2n+1}}, \quad (16)$$

где

$$A_n = \frac{(2n+1)! (2n)! (2n-2)!}{(n+1)! (n!)^2 (n-1)! 2^{2n}}; \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{8(n+2)}; \quad A_1 = \frac{3}{32}.$$

§ 5. АЛЬБЕДНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗОНЫ

Для вычисления альbedo $\beta_{ii}^{\pm}(n)$ и функции пропускания $t_{ii}^{\pm}(n)$ отдельной кольцевой зоны потребует-ся более детальное рассмотрение всех возможных процессов, в которых с той или иной вероятностью может участвовать нейтрон. В связи с этим дальше будет определено несколько новых вероятностей.

Для нейтронов i -й энергетической группы, падающих на внешнюю поверхность кольцевой зоны "n":

$\tilde{\beta}_{ii}^{-}(n)$ - вероятность покинуть зону через ту же (внешнюю) поверхность, не испытав в зоне ни одного столкновения и не пересекая внутреннюю область ("косые прострелы");

$\tilde{t}_{ii}^{-}(n)$ - вероятность покинуть зону через противоположную (внутреннюю) поверхность, не испытав в зоне ни одного столкновения ("прямые прострелы").

Для нейтронов, падающих на внутреннюю поверхность кольцевой зоны, существует лишь одна аналогично определяемая вероятность прострела - $\tilde{t}_{ii}^{+}(n)$.

Нейтроны, испытавшие соударения, с вероятностью $\Sigma_{sc}/\Sigma_{tot,i}$ становятся источниками при рассмотре-нии последующих соударений и имеют три возможности, определяемые следующими вероятностями:

$[\tilde{V}_i^{\pm}(n)]^{(k)}$ - вероятность нейтрону после k -го соударения в зоне покинуть ее через внутреннюю ("+") или внешнюю ("-") поверхность;

$P_{ci}^{(k)}$ - вероятность нейтрону после k -го соударения в зоне испытать в ней, не покидая зоны, сле-дующее столкновение.

Как и в случае расчета альbedo сплошного блока, предполагается, что поток падающих нейтронов распре-делен равномерно по внутренней или внешней поверхности зоны (рассеяние нейтронов в зоне изотропно в лабо-раторной системе координат). С учетом этих предположений можно записать следующее соотношение для аль-bedo $\beta_{ii}^{-}(n)$ [8] (индекс "n" для краткости записи опускается в промежуточных выкладках):

$$\beta_{ii}^{-}(n) = \tilde{\beta}_{ii}^{-} + (1 - \tilde{\beta}_{ii}^{-} - \tilde{t}_{ii}^{-}) \frac{\Sigma_{sc}}{\Sigma_{tot,i}} [\tilde{V}_i^{-}]^{(1)} + (1 - \tilde{\beta}_{ii}^{-} - \tilde{t}_{ii}^{-}) \frac{\Sigma_{sc}}{\Sigma_{tot,i}} \cdot P_{ci}^{(1)} \frac{\Sigma_{sc}}{\Sigma_{tot,i}} \cdot [\tilde{V}_i^{-}]^{(2)} =$$

(17)

$$= \tilde{\beta}_{ii}^{-}(n) + [1 - \tilde{\beta}_{ii}^{-}(n) - \tilde{t}_{ii}^{-}(n)] \frac{\Sigma_{sc}(n)}{\Sigma_{tot,i}(n)} V_i^{-}(n),$$

где

$$V_i^{-}(n) = \frac{\tilde{V}_i^{-}(n)}{1 - \frac{\Sigma_{sc}(n)}{\Sigma_{tot,i}(n)} P_{ci}(n)}$$

Здесь и далее $[\tilde{V}_i^{\pm}(n)]^{(1)} = [\tilde{V}_i^{\pm}(n)]^{(2)} = \dots = \tilde{V}_i^{\pm}(n)$ - вероятность нейтрону покинуть зону через внутреннюю (индекс "+") или внешнюю (индекс "-") поверхности без соударений при равномерном распреде-нии изотропных источников по ее объему (вероятности $P_{ci}(n) = P_{ci}^{(1)}(n) = \dots$ определены в предыдущем параграфе).

В соотношении (17) первый член $\tilde{\beta}_{ii}^{-}(n)$ дает вклад в альбедо нейтронов, которые вылетают через внешнюю границу кольцевой зоны, не испытывая столкновений в зоне и не пересекая ее внутреннюю поверхность. Второе слагаемое – вклад нейтронов, которые с вероятностью $[1 - \tilde{\beta}_{ii}^{-}(n) - \tilde{t}_{ii}^{-}(n)]$ испытывают первое столкновение в зоне и затем с вероятностью $[V_i^{-}(n)]^2$ вылетают через ее внешнюю поверхность. Третий член – вклад в альбедо нейтронов, которые после второго столкновения с вероятностью $[\tilde{V}_i^{-}(n)]^{(2)}$ вылетают через внешнюю границу зоны и т.д. Следует отметить, что окончательное выражение для $\beta_{ii}^{-}(n)$ было получено в предположении, что все последовательные столкновения нейтронов характеризуются равномерным распределением по объему зоны (равномерные изотропные источники), что, как уже отмечалось ранее, справедливо для оптически тонких зон.

Аналогично могут быть получены формулы для вычисления вероятностей $t_{ii}^{-}(n), t_{ii}^{+}(n), \beta_{ii}^{+}(n)$:

$$\begin{aligned} t_{ii}^{-}(n) &= \tilde{t}_{ii}^{-}(n) + [1 - \tilde{\beta}_{ii}^{-}(n) - \tilde{t}_{ii}^{-}(n)] \frac{\Sigma_{sc}(n)}{\Sigma_{tot,i}(n)} V_i^{+}(n); \\ \beta_{ii}^{+}(n) &= [1 - \tilde{t}_{ii}^{+}(n)] \frac{\Sigma_{sc}(n)}{\Sigma_{tot,i}(n)} V_i^{+}(n); \\ t_{ii}^{+}(n) &= \tilde{t}_{ii}^{+}(n) + [1 - \tilde{t}_{ii}^{+}(n)] \frac{\Sigma_{sc}(n)}{\Sigma_{tot,i}(n)} V_i^{-}(n), \end{aligned} \quad (17a)$$

где
$$V_i^{\pm}(n) = \frac{\tilde{V}_i^{\pm}(n)}{1 - \frac{\Sigma_{sc}(n)}{\Sigma_{tot,i}(n)} P_{ii}(n)}$$

Комплексы $V_i^{\pm}(n)$, входящие в соотношения (17), (17a), имеют следующий физический смысл. Они представляют полную вероятность нейтрону i -й энергетической группы покинуть зону "n" через внутреннюю или внешнюю поверхность. Здесь же можно отметить, что для зон, у которых сечение увода велико по сравнению с сечением рассеяния ($\Sigma_{tot,i} \gg \Sigma_{sc}$), вклад в альбедо и функцию пропускания нейтронов, претерпевших соударения, пренебрежимо мал и $\beta_{ii}^{-}(n) \approx \tilde{\beta}_{ii}^{-}(n)$, $\tilde{t}_{ii}^{-}(n) = \tilde{t}_{ii}^{-}(n)$, $\beta_{ii}^{+}(n) \approx 0$, $t_{ii}^{+}(n) \approx \tilde{t}_{ii}^{+}(n)$, т.е. в этом случае можно учитывать лишь нейтроны, не испытавшие соударений.

Итак, характеристики кольцевой зоны $\beta_{ii}^{\pm}(n)$ и $t_{ii}^{\pm}(n)$ могут быть вычислены по формулам (17), (17a), если известны вероятности $\tilde{\beta}_{ii}^{-}(n)$, $\tilde{t}_{ii}^{\pm}(n)$, $V_i^{\pm}(n)$ и $P_{ii}(n)$. Как будет показано дальше, расчет этих вероятностей сводится к определению $\tilde{t}_{ii}^{\pm}(n)$ и $P_{ii}(n)$, которые вычисляются одним из известных методов.

Функция пропускания $\tilde{t}_{ii}^{-}(n)$ вычисляется следующим образом [17]:

$$\tilde{t}_{ii}^{-}(n) = \tilde{t}_{ii}^{+}(n) \frac{S_{n-1}^{+}}{S_n^{+}} = \tilde{t}_{ii}^{+}(n) \frac{R_{n-1}}{R_n}, \quad (18)$$

где S_n^{-} , S_n^{+} – внешняя и внутренняя поверхности кольцевой зоны "n".

Вероятность $V_i^{+}(n)$ определяется в соответствии с формулой (8) из следующего соотношения [8, 15]:

$$[1 - \tilde{t}_{ii}^+(n)] = \frac{4V_n}{S_{n-1}} \sum_{tot.i} (n) \tilde{V}_i^+(n). \quad (19)$$

Здесь $[1 - \tilde{t}_{ii}^+(n)]$ есть вероятность первого столкновения в кольцевой зоне "n" для нейтронов i -й энергетической группы, падающих равномерно на внутреннюю поверхность зоны с изотропным распределением; V_n - объем кольцевой зоны.

Откуда следует

$$\tilde{V}_i^+(n) = [1 - \tilde{t}_{ii}^+(n)] \frac{R_{n-1}}{2 \sum_{tot.i} (n) (R_n^2 - R_{n-1}^2)}. \quad (19a)$$

Величину $\tilde{V}_i^-(n)$ можно найти из баланса вероятностей в кольцевой зоне при равномерном распределении изотропных источников нейтронов

$$\tilde{V}_i^-(n) + \tilde{V}_i^+(n) + P_{ii}(n) = 1. \quad (20)$$

Альbedo $\tilde{\beta}_{ii}^-(n)$ определяется в соответствии с формулой (8) из следующего соотношения [8,15]:

$$[1 - \tilde{\beta}_{ii}^-(n) - \tilde{t}_{ii}^-(n)] = \frac{4V_n}{S_n} \sum_{tot.i} (n) \tilde{V}_i^-(n). \quad (21)$$

Здесь $[1 - \tilde{\beta}_{ii}^-(n) - \tilde{t}_{ii}^-(n)]$ - вероятность первого столкновения в кольцевой зоне "n" нейтронов i -й энергетической группы, падающих на внешнюю поверхность зоны с изотропным распределением. Из (21) получаем

$$\tilde{\beta}_{ii}^-(n) = 1 - \tilde{t}_{ii}^-(n) - \tilde{V}_i^-(n) \left[1 - \left(\frac{R_{n-1}}{R_n} \right)^2 \right] 2 \sum_{tot.i} (n) R_n. \quad (22)$$

Таким образом, определение альbedo $\tilde{\beta}_{ii}^{\pm}(n)$ и функций пропускания $\tilde{t}_{ii}^{\pm}(n)$ кольцевой зоны, как уже отмечалось, свелось к нахождению вероятностей $\tilde{t}_{ii}^+(n)$ и $P_{ii}(n)$.

Точное выражение для вероятности $\tilde{t}_{ii}^+(n)$ имеет следующий вид [15,16] (при экспоненциальном законе ослабления потока нейтронов, не испытавших столкновений):

$$\tilde{t}_{ii}^+(n) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \psi K_{i3} [Z(\psi)] d\psi, \quad (23)$$

где $Z(\psi) = \sum_{tot.i} (n) R_n [\sqrt{1 - d_n^2 \sin^2 \psi} - d_n \cos \psi]$; $d_n = R_{n-1}/R_n$.

Прямое интегрирование соотношения (23) связано с большими вычислительными трудностями, поэтому в работе [16] для расчета $\tilde{t}_{ii}^+(n)$ была предложена псевдолинейная аппроксимация (разложение подынтегральной функции в ряд).

В этом случае получаем

$$\tilde{t}_{ii}^+(n) = \frac{4}{\pi} K i_3(\bar{z}), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \sum_{tot.i}^{(n)} R_n \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{2}{\pi} \left[\frac{a z c \sin d_n}{d_n} + \sqrt{1 - d_n^2} \right] - d_n \right\} \approx \\ &\approx \sum_{tot.i}^{(n)} R_n [1 - d_n^2 + 0,1704 d_n (1 - d_n^2)]. \end{aligned}$$

Значения $K i_3(x)$ можно вычислить по аппроксимационным формулам, приведенным в литературе [17,18]. Для расчетов удобным является разложение для $K i_3(x)$, полученное в работе [13]:

$$K i_3(x) = \frac{\pi e^{-x}}{4 \sqrt{1 + (\pi/8)x}} \frac{x^2 + 6,399407x + 5,066719}{x^2 + 6,766116x + 5,066719}. \quad (25)$$

Расчет вероятности первого столкновения в цилиндрической зоне $P_{ci}^{(n)}$ с равномерным распределением изотропных источников по ее объему может быть сделан по следующей формуле [19] (по определению вероятность $P_{ci}^{(n)}$ рассчитывается для нейтронов, ни разу не пересекающих внутреннюю поверхность кольцевой зоны "n"):

$$P_{ci}^{(n)} = P_{ci}^{(0)}(n) - \tilde{V}_i^+(n) [1 - \tilde{t}_{ii}^+(n)], \quad (26)$$

где $P_{ci}^{(0)}(n)$ - вероятность нейтрону i -й энергетической группы, возникшему в кольцевой зоне "n" при равномерном распределении изотропных источников по ее объему, испытать первое столкновение в той же зоне, когда в центральной области пустота (т.е. допускается пересечение центральной области);

$\tilde{V}_i^+(n) [1 - \tilde{t}_{ii}^+(n)]$ - вероятность первого столкновения нейтрона в кольцевой зоне, который предварительно пересекает внутреннюю область зоны "n" (в данном случае пустоту).

Формула для расчета $P_{ci}^{(0)}(n)$ получена в работах [16,19] и имеет следующий вид:

$$P_{ci}^{(0)}(n) = \frac{P_{ci}(\sum_{tot.i}^{(n)} R_n) - F_i^1(n) (R_{n-1}/R_n)^2}{1 - (R_{n-1}/R_n)^2}, \quad (27)$$

где

$$F_i^1(n) = P_{ci}(\sum_{tot.i}^{(n)} R_{n-1}) + [1 - P_{ci}(\sum_{tot.i}^{(n)} R_{n-1})] [1 - (\tilde{t}_{ii}^+(n))^2].$$

Здесь $P_{ci}(\sum_{tot,i}^{(n)} R_{n-1})$ и $P_{ci}(\sum_{tot,i}^{(n)} R_n)$ - вероятности первого столкновения нейтронов i -й энергетической группы в сплошных цилиндрических блоках с радиусами R_{n-1} и R_n соответственно при равномерном распределении изотропных источников по их объему (материал этих блоков тот же, что и в кольцевой зоне "n").

Расчет $P_{ci}(\sum_{tot,i}^{(n)} R_{n-1})$ и $P_{ci}(\sum_{tot,i}^{(n)} R_n)$ производится по формулам (11) - (16).

§ 6. РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ $\beta_{12}^{\pm}(n), t_{12}^{\pm}(n)$

После того как определены вероятности вылета $V_i^{\pm}(n)$ в зоне "n", можно рассчитать альбедо $\beta_{12}^{\pm}(n)$ и функции пропускания $t_{12}^{\pm}(n)$ для этой же зоны.

Определим число нейтронов, поглощенных в кольцевой зоне "n" при падении на ее внешнюю поверхность интегрального тока быстрых нейтронов $I_1^-(R_n)$ (полное число входящих нейтронов):

$$Q_2^-(n) = I_1^-(R_n) \Gamma_{11}^-(n), \quad (28)$$

где $\Gamma_{11}^-(n) = \frac{4v_n}{S_n} \sum_{c1}^{(n)} V_1^-(n)$ - вероятность нейтрону первой группы, падающему на внешнюю поверхность зоны "n", поглотиться в ней ($I_1^+(R_{n-1}) = 0$) [15].

Тогда средний поток быстрых нейтронов в зоне определится как

$$\bar{\Phi}_2^-(n) = \frac{Q_2^-(n)}{\sum_{c1}^{(n)} v_n}. \quad (29)$$

Для источника тепловых нейтронов $q_2(n)$ получаем следующее соотношение:

$$q_2(n) = \bar{\Phi}_1^-(n) \sum_{nqp}^{1 \rightarrow 2} (n) = \frac{Q_2^-(n)}{\sum_{c1}^{(n)} v_n} \sum_{nqp}^{1 \rightarrow 2} (n). \quad (30)$$

Интегральный ток тепловых нейтронов через внешнюю и внутреннюю поверхности зоны "n", обусловленный источником $q_2(n)$, находится из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} I_2^+(R_n) &= q_2(n) v_n V_2^-(n), \\ I_2^-(R_n) &= q_2(n) v_n V_2^+(n). \end{aligned} \quad (31)$$

Таким образом, для альбедо $\beta_{12}^{\pm}(n)$ и функции пропускания $t_{12}^{\pm}(n)$ получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \beta_{12}^-(n) &= \frac{I_2^+(R_n)}{I_1^-(R_n)} = \Gamma_{12}^-(n) V_2^-(n), \\ t_{12}^-(n) &= \frac{I_2^-(R_{n-1})}{I_1^-(R_n)} = \Gamma_{12}^-(n) V_2^+(n), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\Gamma_{12}^{-}(n) = \Gamma_{11}^{-}(n) \sum_{n \neq 0}^{1 \rightarrow 2} (n) / \Sigma_{c1}(n)$ - вероятность нейтрону первой группы, падающему на внешнюю поверхность зоны, перейти во вторую группу. Аналогично можно получить формулы для расчета вероятностей $\beta_{12}^{+}(n)$ и $t_{12}^{+}(n)$

$$\beta_{12}^{+}(n) = \Gamma_{12}^{+}(n) V_2^{+}(n) ; \quad t_{12}^{+}(n) = \Gamma_{12}^{+}(n) V_2^{-}(n), \quad (33)$$

где $\Gamma_{12}^{+}(n) = \Gamma_{11}^{+}(n) \sum_{n \neq 0}^{1 \rightarrow 2} (n) / \Sigma_{c1}(n)$ - вероятность нейтрону первой группы, падающему на внутреннюю поверхность зоны, перейти во вторую группу; $\Gamma_{11}^{+}(n) = \frac{40n}{S_{n-1}^{+}} \Sigma_{c1}(n) V_1^{+}(n)$.

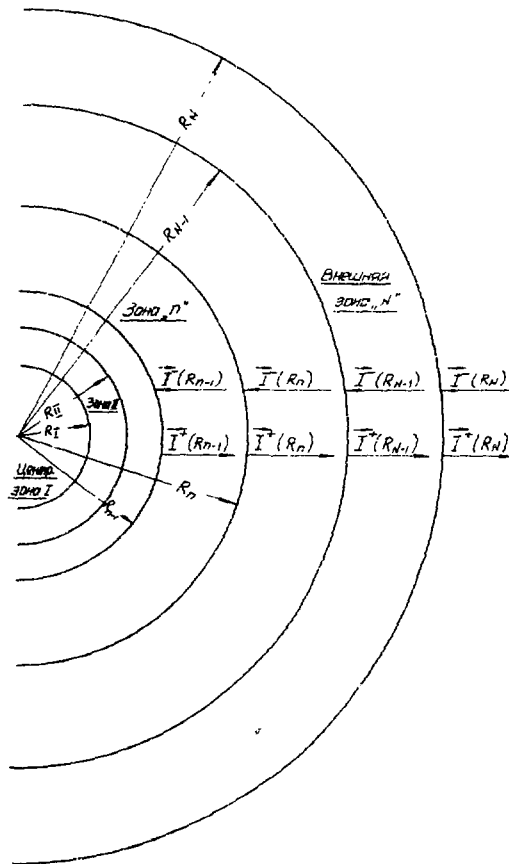


Схема прохождения нейтронов через многозонный цилиндрический блок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена возможность использования метода вероятностей первых столкновений для получения альбедной матрицы многозонного блока.

Рассмотрение неразмножающего блока с произвольным числом зон в двухгрупповом приближении показало, что альбедные характеристики вычисляются этим методом достаточно эффективно. Обсуждение точности данного метода будет сделано в следующей работе. Предлагаемый алгоритм весьма удобен для программирования на ЭЦВМ и в дальнейшем легко может быть распространен на большее число групп.

В следующей работе будет также сделано обобщение предлагаемого метода на случай размножающих блоков.

Авторы выражают благодарность Е.С.Глушкову за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М.Фейнберг. В сб. "Реакторостроение и теория реакторов". Доклад советской делегации на Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955), М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 152.
2. А.Д.Галанин. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах, М., Атомиздат, 1957, 1959.
3. Г.И.Марчук. Методы расчета ядерных реакторов, М., Атомиздат, 1961.
4. В.И.Носов. "Атомная энергия", 23, 25 (1967).
5. Дж.Станье, З.Гелбард. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1972.
6. G.W.Stuart. Nucl.Sci. and Eng., 2, 617 (1957).
7. В.В.Орлов. В сб. статей "Нейтронная физика", М., Атомиздат, 1961, стр. 179.
8. Е.И.Гришанин. "Атомная энергия", 16, 234 (1964).
9. С.Н.Барков. "Атомная энергия", 27, 335 (1969).
10. В.П.Слизов, Б.И.Попов. Известия АН БССР, серия физико-энергетических наук, 1, 9 (1972).
11. von Andrey Sauer. Nucleonik, 9, 37 (1964).
12. W.Rothenstein. Nucl.Sci. and Eng., 2, 162 (1960).
13. K.M.Case, F. de Hoffmann, G.Placzek. Introduction to the theory of neutron diffusion. Vol.I, Los Alamos Scien. Lab. (1953).
14. R.L.Murray. Nucl.Sci. and Eng., 43, 350 (1971).
15. В.П.Слизов. ИФЭ, УП, 80 (1964).
16. R.Bonalumi. Energia nucleare, 12, I (1965).
17. A.J.Clayton. J.Nucl.Energy, AЕ, 18, 62 (1964).
18. J.Schriewer. Atomkernenergie, 17, 185 (1971).
19. R.Bonalumi. Energia nucleare, 8, 326 (1961).