

UTILISER FACILEMENT LA METHODE GRAPHIQUE

E. ELBAZ

Institut de Physique Nucléaire, Université Claude Bernard Lyon-I  
 43, Bd du 11 novembre 1918, 69621 Villeurbanne, France

La méthode graphique est un outil incomparable pour le traitement de l'algèbre des moments angulaires en mécanique quantique (algèbre de Racah). Un obstacle à son utilisation systématique a été, semble-t-il, la disparité des définitions de base existant entre de nombreux ouvrages (1, 7) et la difficulté qu'il y avait de dégager l'essentiel dans la méthode. Nous avons montré dans un précédent article (8) qu'après avoir défini quelques diagrammes de base il se dégageait trois règles fondamentales permettant de reconstruire toute la méthode graphique. Il est pourtant peu efficace de ne faire appel qu'à ces règles dans des problèmes complexes. L'acquisition de certains mécanismes permet en effet d'utiliser plus facilement la méthode et d'éviter certaines erreurs.

Nous avons donc voulu présenter ici un recueil de règles et d'exemples-type qui permettra de résoudre graphiquement les problèmes les plus difficiles.

Dans une première partie, nous avons fait l'inventaire des diagrammes de base. C'est en quelque sorte la présentation de l'outil. La seconde partie apprendra à se servir de cet outil par une description de toutes les transformations qu'il permet. La troisième partie enfin, a sélectionné quelques exemples-type classiques permettant de vérifier que l'on possède bien l'outil présenté avant de s'en servir soi-même.

Nous espérons que cet article répondra à la plupart des questions, sinon toutes, que l'on peut se poser sur la méthode graphique. Pour comprendre le pourquoi de ces règles d'utilisation, nous renvoyons le lecteur à notre ouvrage : "Graphical Methods of Spin Algebras" (1).

I. RECONNAITRE UN DIAGRAMME

1. Kets

- i)  $|jm\rangle = \begin{array}{c} \text{jm} \\ \leftarrow \end{array}$  et  $|j-m\rangle = \begin{array}{c} \text{jm} \\ \rightarrow \end{array}$
- ii)  $|u\rangle = \begin{array}{c} u \\ \leftarrow \end{array}$

2. Bras

- i)  $\langle jm| = \begin{array}{c} \text{jm} \\ \leftarrow \end{array}$  et  $\langle j-m| = \begin{array}{c} \text{jm} \\ \rightarrow \end{array}$

On notera l'équivalence

- $\langle jm| = \begin{array}{c} \text{jm} \\ \leftarrow \end{array} = (-)^{j-m} \begin{array}{c} \text{jm} \\ \rightarrow \end{array} = (-)^{j-m} |j-m\rangle$
- ii)  $\langle u| = \begin{array}{c} u \\ \leftarrow \end{array}$

---

On posera  $[a] = \sqrt{2a+1}$

3. Produit scalaire

i)  $\langle j_m | j'_m \rangle = \frac{j_m}{j} \frac{j'_m}{j'} = \frac{j_m}{j} \frac{j'_m}{j'} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$

ii)  $\langle u | u' \rangle = \frac{u}{u} + \frac{u'}{u'} = \frac{u}{u} + \frac{u'}{u'} = \delta(u - u')$

4. Harmoniques sphériques et tenseurs irréductibles

i)  $Y_{\ell m}(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega} + \frac{\ell}{\ell}$  et  $Y_{\ell m}^*(\Omega) = \frac{\Omega}{\Omega} + \frac{\ell}{\ell}$

ii)  $T_{kq}(u) = \frac{u}{u} + \frac{k}{k}$  et  $T_{kq}^+(u) = \frac{u}{u} + \frac{k}{k}$

5. Polynôme de Legendre

$\frac{\Omega}{\Omega} + \frac{\ell}{\ell} + \frac{\Omega'}{\Omega'} = \frac{[\ell^2]}{4\pi} P_\ell[\cos(\Omega, \Omega')]$

6. Coefficients de Clebsch-Gordan

$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 m_3 \rangle = \begin{matrix} j_1 & j_2 \\ + & \\ j_2 & \end{matrix} j_3$  et  $\langle j_3 m_3 | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \begin{matrix} j_3 & j_1 \\ + & \\ j_2 & \end{matrix}$

7. Coefficients "3jm" de Wigner

$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} j_1 & j_2 \\ + & \\ j_2 & \end{matrix} j_3$  et  $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix} = (-)^{j_1 - m_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} j_1 & j_2 \\ + & \\ j_2 & \end{matrix} j_3$

8. Cercles marqueurs

i)  $\begin{matrix} j \\ | \\ \oplus \\ k & j' \end{matrix} = \langle \alpha j || T_k || \alpha' j' \rangle$

$\begin{matrix} \ell_1 \\ | \\ \oplus \\ \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} = \frac{[\ell_1 \ell_2 \ell_3]}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} \ell_1 \\ | \\ \oplus \\ \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} = \frac{[\ell_1 \ell_2 \ell_3]}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. Coefficients "3nj"

$\{ j_1 j_2 j_3 \} = \begin{matrix} j_1 \\ | \\ \oplus \\ j_2 & j_3 \end{matrix}$

$\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \} = \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ | & | & | \\ \oplus & \oplus & \oplus \\ \ell_2 & \ell_1 & \ell_3 \end{matrix}$

$\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix} \} = \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ | & | & | \\ \oplus & \oplus & \oplus \\ \ell_2 & \ell_1 & \ell_3 \\ | & | & | \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}$

## II. TRANSFORMER UN DIAGRAMME

### 1. Transformer un CG en un "3jm"

On notera  $1^-$  la flèche unique de son genre si elle est double et  $1^+$  si elle est simple (quelque soit le sens de ces flèches). En suivant l'ordre de lecture au pôle triangle on rencontrera alors des flèches  $2^+$  ou  $2^-$  puis  $3^+$  ou  $3^-$ . Tout CG est en effet du type  $1^- 2^+ 3^+$  ou  $1^+ 2^- 3^-$ .

Règle de passage :  $CG = [1^{\pm}] (-) 2(2^- \text{ ou } 3^+)$  3jm de signe inversé

Exemple

$$\begin{array}{c} j_1 \quad j_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ + \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array} = [j_3] (-) \begin{array}{c} 2j_1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array} \begin{array}{c} j_1 \quad j_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array}$$

### 2. Changer le signe d'un pôle simple. ( $j_1 j_2 j_3$ )

On multiplie par  $(-)^{j_1 + j_2 + j_3}$  le résultat

Exemple

$$\begin{array}{c} j_1 \quad j_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ + \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array} = (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{array}{c} j_1 \quad j_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ - \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array}$$

### 3. Exprimer qu'un moment $j$ est nul dans un "3jm"

On élimine la ligne  $j$  et on exprime la valeur  $[j^{-1}]$  du pôle.

Exemple

$$\begin{array}{c} j_1 \quad 0 \\ \diagup \quad \diagdown \\ + \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array} = \begin{array}{c} j_1 \\ \diagup \\ + \\ \diagdown \\ j_2 \end{array} = \left. \begin{array}{c} j_1 \\ \diagup \\ \cdot \\ \diagdown \\ j_2 \end{array} \right) = \left. \begin{array}{c} j_1 \\ \diagup \\ \cdot \\ \diagdown \\ j_2 \end{array} \right) [j_1^{-1}] = \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} [j_1^{-1}]$$

d'après I.3 i)

### 4. Sommer sur un moment magnétique

On lie les extrémités libres des flèches cinétiques correspondantes : covariante (flèche double), contravariante (flèche simple) correspondant au même moment cinétique.

$$\sum_m \boxed{\alpha} \begin{array}{c} jm \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ \rightarrow \\ \leftarrow \\ \end{array} = \boxed{\alpha} \begin{array}{c} j \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} \boxed{\beta}$$

Exemples

i) Fermeture

$$\sum_{jm} |jm\rangle \langle jm| = \sum_j \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} = 1$$

$$\sum_{\ell m} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega) = \sum_{\ell} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} = \frac{\Omega}{\Omega} + \frac{\Omega'}{\Omega'} = \delta(\Omega - \Omega')$$

ii) Découplage  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$

$$|jm\rangle = \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} = \begin{array}{c} j_1 \quad j \\ \diagup \quad \diagdown \\ + \\ \diagdown \quad \diagup \\ j_2 \end{array} = \sum_{m_1 m_2} \begin{array}{c} j_1 \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} \begin{array}{c} j \\ \leftarrow \\ \rightarrow \\ \end{array} = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm\rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

iii) Couplage  $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{j}$

$$\left| j_1 m_1 \right\rangle \left| j_2 m_2 \right\rangle = \sum_i \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \end{array} \begin{array}{c} j \\ | \\ j_2 \end{array} = \sum_{jm} \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \end{array} \begin{array}{c} j \\ | \\ j_2 \end{array} = \langle jm | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle | jm \rangle$$

iv) Boucle  $\begin{array}{c} j \\ \circ \end{array} = [j^2]$  d'après I.3) et II.4)

5. Intégrer sur deux lignes d'angle

On lie les flèches correspondantes

$$\int du \begin{array}{c} \alpha \\ \dashrightarrow u \\ \dashrightarrow u \\ \beta \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ \dashrightarrow u \\ \beta \end{array}$$

Exemples

$$\int |\Omega\rangle d\Omega \langle \Omega| = \int \begin{array}{c} \Omega \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \Omega \end{array} = \int \begin{array}{c} \Omega \\ \dashrightarrow \\ \Omega \end{array} = 1$$

$$\int Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell' m'}(\Omega) d\Omega = \int \begin{array}{c} \ell \\ \dashrightarrow \\ \dashrightarrow \\ \ell' \end{array} = \begin{array}{c} \ell \\ \dashrightarrow \\ \ell' \end{array} = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$$

6. Changer le sens d'une ligne j liée

On multiplie par  $(-)^{2j}$  le résultat

Exemple

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ | \\ \xrightarrow{j} \end{array} = (-)^{2j} \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ | \\ \xrightarrow{j} \end{array}$$

7. Transposer un diagramme

On change le sens et la nature de toutes les flèches

Exemple

$$\left[ \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ | \\ \xrightarrow{j} \\ \dashrightarrow \ell \\ \dashrightarrow \ell' \end{array} \right]^+ = \begin{array}{c} \xrightarrow{j} \\ | \\ \xrightarrow{j} \\ \dashrightarrow \ell \\ \dashrightarrow \ell' \end{array}$$

8. Sommer sur un moment cinétique j

On élimine la ligne j et on lie entre elles les extrémités libres correspondantes

dantes

$$\sum_j \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \xrightarrow{j_1} \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \end{array} \begin{array}{c} j \\ | \\ \xrightarrow{j} \\ | \\ \xrightarrow{j} \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \\ | \\ \xrightarrow{j_1} \end{array} \equiv \sum_j [j^2] \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \xrightarrow{j_1} \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \\ | \\ \xrightarrow{j_1} \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ | \\ \xrightarrow{j_1} \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \end{array} \begin{array}{c} \beta \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \\ | \\ \xrightarrow{j_1} \end{array}$$

Exemples

$$1) \sum_j [j^2] \left\{ \begin{array}{c} j_1 \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \\ | \\ \xrightarrow{j} \end{array} \right\} = \sum_j [j^2] \begin{array}{c} j_1 \\ | \\ \xrightarrow{j_2} \\ | \\ \xrightarrow{j} \end{array} \begin{array}{c} j \\ \circ \\ j \end{array} = \begin{array}{c} j_1 \\ \circ \\ j_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} j_2 \\ \circ \\ j_2 \end{array} = [j_1^2 j_2^2]$$

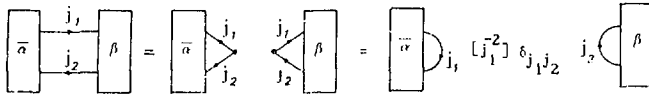
d'après II.4. iv).

ii)

$$\sum_j (-)^j [j^2] \{j_1 j_1 j\} = \sum_j (-)^j [j^2] j_1 \left( \begin{array}{c} + \\ j_1 \\ - \end{array} \right) j = (-)^{2j_1} \sum_j [j^2] j_1 \left( \begin{array}{c} + \\ j_1 \\ + \end{array} \right) j = (-)^{2j_1} j_1 \left( \begin{array}{c} \cup \\ j_1 \\ \cup \end{array} \right) = (-)^{2j_1} [j_1^2]$$

d'après II.2) et II.4. iv)

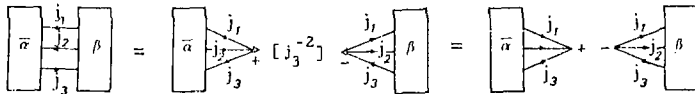
9. Séparer un diagramme sur deux lignes cinétiques



d'après I.3 et II.3

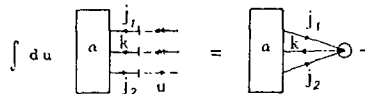
Avant de séparer un diagramme sur un nombre quelconque de lignes il est nécessaire de grouper toutes les lignes libres existantes dans un bloc  $\beta$  tandis que le bloc  $\bar{\alpha}$  ne contiendra que des lignes liées.

10. Séparer un diagramme sur trois lignes cinétiques



11. Intégrer sur trois lignes d'angles

On relie les trois lignes cinétiques par un pôle affecté d'un cercle marqueur dont la valeur est donnée par I.8



12. Intégrer sur plus de trois lignes d'angles

On utilise la relation de fermeture II.4 i) autant de fois que nécessaire pour se ramener à l'intégration de trois lignes d'angle.

Exemples

$$i) I_4 = \int d\Omega Y_{\ell_1 m_1}^* Y_{\ell_2 m_2} Y_{\ell_3 m_3} Y_{\ell_4 m_4}(\Omega) = \int \frac{\ell_1 - \Omega}{\ell_2 - \Omega} d\Omega \frac{\Omega - \ell_3}{\ell_4 - \Omega}$$

$$= \sum_L \int d\Omega d\Omega' \frac{\ell_1 - \Omega}{\ell_2 - \Omega} \frac{\Omega - L + \Omega'}{\ell_4 - \Omega'} = \sum_L \left( \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \ell_3 \\ \ell_4 \end{array} \right)$$

ii)

$$\left( \begin{array}{c} \ell_1 - \Omega \\ \ell_2 - \Omega \end{array} \right) = \sum_L \int \left( \begin{array}{c} \ell_1 \Omega' \\ \ell_2 \Omega' \end{array} \right) d\Omega' \frac{\Omega' - L + \Omega}{\ell_4 - \Omega} = \sum_L \left( \begin{array}{c} \ell_1 \\ \ell_2 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \ell_3 \\ \ell_4 \end{array} \right)$$

13. Exprimer analytiquement un diagramme donné

Pour éviter toute erreur de phase, on effectue dans l'ordre, les opérations ci-après :

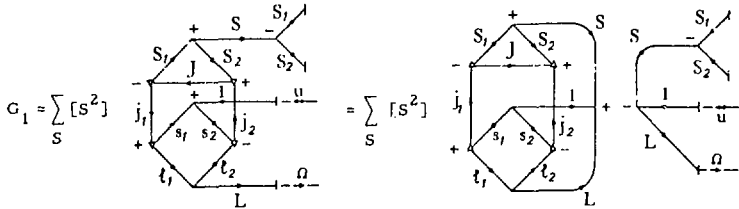
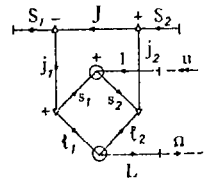
- i) On explicite tous les cercles marqueurs avec I.8.
- ii) On sépare en une partie contenant toutes les lignes libres, et une partie complètement liée, avec II.10, en rajoutant éventuellement avec II.8 autant de moments intermédiaires qu'il est nécessaire.
- iii) On transforme les pôles triangles en pôles simples avec II.1
- iv) On explicite le diagramme ouvert comme somme de produits de diagrammes simples définis en I avec II.4.
- v) On sépare le diagramme fermé en parties simples du type I.9 en rajoutant éventuellement des moments intermédiaires avec II.8 et en se ramenant à II.10.
- vi) On met sous forme standard II.9 les diagrammes restants en changeant si nécessaire le signe de certains pôles avec II.2 et le sens de certaines flèches avec II.6.
- vii) On simplifie au mieux la phase restante en remarquant que dans un couplage  $(j_1 j_2 j_3)$  on a la relation  $(-)^{2(j_1+j_2+j_3)} = 1$  tandis que dans un cercle marqueur  $(l_1 l_2 l_3)$  on a  $(-)^{l_1+l_2+l_3} = 1$ .

Exemple

Soit à expliciter analytiquement le diagramme  $G =$

$$i) G = \langle s_j \parallel T_1 \parallel s_2 \rangle \frac{[l_1 l_2 L]}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 & l_2 & L \\ l_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_1$$

ii) On introduit le moment intermédiaire  $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$  avec II.8 et on sépare sur les lignes  $(S \mid L)$  avec II.10



iii) On transforme les pôles triangles en pôles simples avec II.1

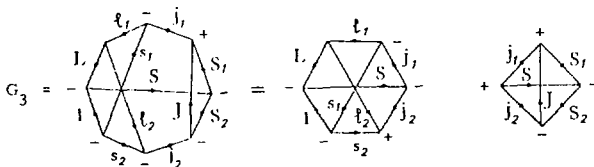
$$G_1 = \sum_S [S^2] [J^2 j_1 j_2] (-)^{2S_1 + 2s_1 + 2j_2} \dots = \sum_S [S^2 J^2 j_1 j_2] (-)^{2S_1 + 2s_1 + 2j_2} G_3 G_2$$

The diagram shows the final simplified expression for  $G_1$ . It consists of a sum over  $S$  of a product of a phase factor  $(-)^{2S_1 + 2s_1 + 2j_2}$  and two diagrams  $G_3$  and  $G_2$ . The diagrams  $G_3$  and  $G_2$  are similar to the ones shown in the previous steps.

iv) On explicite le diagramme ouvert  $G_2$  avec II.4

$$G_2 = \sum_{\substack{M\sigma\sigma_1 \\ \sigma_2\mu}} \left[ \begin{array}{c} S \\ \swarrow \quad \searrow \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ L \end{array} \right] = \sum_{\substack{M\sigma\mu_1 \\ \sigma_1\sigma_2}} \left( \begin{array}{c} S \quad \mu \quad L \\ \sigma \quad 1 \quad M \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \sigma \quad S_1 \quad \sigma_2 \\ S \quad \sigma_1 \quad \sigma_2 \end{array} \right) T_{1\mu} Y_{LM}^*(\hat{n}) |S_2\sigma_2\rangle \langle S_1\sigma_1|$$

v) On sépare  $G_3$  sur les lignes  $j_1 j_2 S$  avec II.10. Pour simplifier cette opération, on redessine  $G_3$  en plaçant tous ses pôles sur un cercle.



vi) On change le signe des pôles  $(j_1 J S_1) (S_1 S S_2)$  dans le "6j" et des pôles  $(L S I) (l_1 s_1 j_1)$  dans le "9j" et le sens des lignes S et J dans le "6j" et  $s_1 S$  et  $j_2$  dans le "9j" introduisant ainsi

$$G_3 = (-)^{j_1+J+S_1+S_1+S_2+L+S_2+L+l_1+s_1+j_1} \frac{2S+2J+2s_1+2S+2j_2}{(-)} \left\{ \begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \quad S \\ S_2 \quad S_1 \quad J \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \quad S \\ l_1 \quad l_2 \quad L \\ s_1 \quad s_2 \quad I \end{array} \right\}$$

vii) On regroupe les résultats obtenus et on simplifie la phase restante

$$G = \sum_S \langle s_1 || T_{1\mu} || s_2 \rangle \frac{[\ell_1 \ell_2 L]}{\sqrt{4\pi}} [S^2 L^2 j_1 j_2] \left( \begin{array}{c} \ell_1 \quad \ell_2 \quad L \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \quad S \\ S_2 \quad S_1 \quad J \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \quad S \\ \ell_1 \quad \ell_2 \quad L \\ s_1 \quad s_2 \quad I \end{array} \right\} \times$$

$$(-)^{J+L+S+s_1} \sum_{M\sigma\sigma_1\sigma_2\mu} T_{1\mu} Y_{LM}^*(\hat{n}) |S_2\sigma_2\rangle \langle S_1\sigma_1| \left( \begin{array}{c} S \quad 1 \quad L \\ \sigma \quad -\mu \quad M \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} S \quad S_1 \quad S_2 \\ -\sigma \quad \sigma_1 \quad -\sigma_2 \end{array} \right) (-)^{\sigma_2+M}$$

### III. EXEMPLES COURANTS D'UTILISATION DE LA METHODE

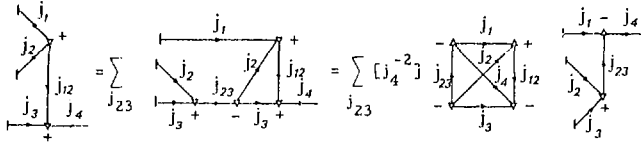
#### 1. Décrire un mode de couplage

On peut exprimer le ket  $|j_4 m_4\rangle$  dans lequel  $\vec{j}_4 = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 + \vec{j}_3$  en fonction des kets  $|j_1 m_1\rangle$ ,  $|j_2 m_2\rangle$  et  $|j_3 m_3\rangle$  lorsque le mode de couplage est fixé; par exemple  $\vec{j}_{12} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$ . Il vient immédiatement avec II.4

$$|j_4 m_4\rangle = \sum_{j_{12}} \left[ \begin{array}{c} j_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ j_2 \quad j_3 \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ j_{12} \end{array} \right] = \sum_{\substack{j_{12} \quad m_1 m_2 \\ m_3 m_{12}}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_{12} m_{12} \rangle \langle j_{12} m_{12} j_3 m_3 | j_4 m_4 \rangle |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle$$

2. Changer de mode de couplage

On passe du mode précédent à un autre mode, par exemple  $\vec{j}_{23} = \vec{j}_2 + \vec{j}_3$  en introduisant le moment  $j_{23}$  avec II.8 et en coupant avec II.10 sur les lignes  $j_1, j_4, j_{23}$



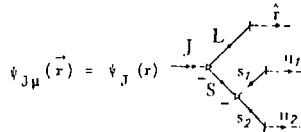
soit analytiquement avec II.13 :

$$|(j_1 j_2) j_{12} j_3; j_4^m_4\rangle = \sum_{j_{23}} [j_{12} j_{23}] (-)^{2j_4 + j_2 - j_3 - j_{23}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_{23} & j_4 \\ j_3 & j_{12} & j_2 \end{matrix} \right\} |(j_2 j_3) j_{23} j_1; j_4^m_4\rangle$$

3. Ecrire graphiquement une fonction d'onde

Quelle est la représentation graphique de la fonction d'onde  $\psi_{J\mu}(\vec{r})$  sachant que  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  et  $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$  ?

On introduit des variables  $u_1$  et  $u_2$  dans l'espace du spin et avec I.1 et II.4. ii) il vient facilement



4. Développer un opérateur en ondes partielles

Pour développer en ondes partielles l'élément de matrice  $\langle \vec{q}_1 | T | \vec{q}_2 \rangle$

on utilisera

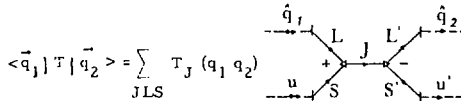
i) une base complète d'harmoniques sphériques si l'opérateur T ne dépend

pas du spin

$$\langle \vec{q}_1 | T | \vec{q}_2 \rangle = \sum_L T_L(q_1 q_2) \frac{\hat{q}_1}{L} \frac{\hat{q}_2}{L}$$

ii) une base complète d'harmoniques sphériques couplées si l'opérateur T

dépend du spin



5. Exprimer le fait qu'un moment cinétique est nul

Quelle est la valeur du "6j"  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{matrix} \right\}$  ? On obtient immédiatement avec

II.3 et I.3

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & l_2 \\ j_2 & l_1 & j_1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} j_1 & l_2 & j_2 \\ j_2 & j_1 & l_1 \end{matrix} \right\} = (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{matrix} \right\} [i_1^{-1} i_2^{-1}]$$

$$6_{j_1 l_2} 6_{j_2 l_1}$$



6. Sommer une expression sur un moment cinétique

Soit à évaluer

$$E = \sum_X [X^2] \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & X \\ \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & X \\ k_1 & k_2 & \ell_1 \\ k_3 & k_4 & \ell_2 \end{matrix} \right\}$$

On utilise I.9 puis II.10 pour avoir le diagramme représentant E

$$E = (-)^{2\ell_1} \sum_X [X^2] + \begin{array}{c} \begin{array}{c} \ell_2 + k_4 - \\ j_1 \quad \quad \quad j_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad X \quad k_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 \quad \quad \quad j_1 \\ \ell_1 + k_1 - \end{array} \end{array}$$

On somme sur X en éliminant la ligne X et en joignant les extrémités libres correspondantes par application de II.8

$$E = (-)^{2\ell_1} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \ell_3 - \\ j_1 \quad \quad \quad \ell_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ k_3 \quad \ell_2 \quad j_2 \quad k_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \ell_1 + k_1 - \end{array} \end{array}$$

On sépare avec II.10 sur les lignes  $\ell_3, k_1, k_4$  ce qui laisse, tous calculs

faits

$$E = (-)^{2\ell_3} \left\{ \begin{matrix} \ell_3 & j_1 & \ell_2 \\ k_3 & k_4 & k_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k_2 & \ell_1 & k_1 \\ \ell_3 & k_4 & j_2 \end{matrix} \right\}$$

7. Exprimer en "6j" et "9j" un coefficient 3nj

Nous allons illustrer dans cet exemple le point II.13.v) en séparant un diagramme D, coefficient "12j" du 1er genre, en somme de produit de coefficients "6j". On introduit pour ce faire une ligne intermédiaire X avec II.8

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{c} -k_3 - \\ k_2 \quad \quad \quad k_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad \quad \quad \ell_4 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 \quad \quad \quad j_1 \\ \ell_2 \quad \ell_3 \end{array} \end{array} = \sum_X [X^2] \begin{array}{c} \begin{array}{c} k_2 - k_3 - k_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad \quad \quad \ell_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 + j_3 + j_4 \end{array} \end{array}$$

On sépare avec II.10 sur les lignes cinétiques  $(k_2 \times j_2)$  puis  $(k_3 \times j_3)$  puis  $(k_4 \times j_4)$  obtenant

$$D = \sum_X [X^2] \begin{array}{c} \begin{array}{c} + \\ k_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad \quad \quad \ell_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} - \\ k_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad \quad \quad \ell_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} - \\ k_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad \quad \quad \ell_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{c} + \\ k_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \ell_1 \quad \quad \quad \ell_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ j_2 \end{array} \end{array}$$

$$D = \sum_X [X^2] (-)^{R_4 + 2j_1 + X} \left\{ \begin{matrix} j_1 & X & k_1 \\ k_2 & \ell_1 & j_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k_2 & j_2 & X \\ j_3 & k_3 & \ell_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k_4 & k_3 & \ell_3 \\ j_3 & j_4 & X \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & X & k_1 \\ j_4 & \ell_4 & k_4 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{avec } R_4 = \sum_{i=1}^4 (j_i + \ell_i + k_i)$$

REFERENCES

- (1) E. ELBAZ et B. CASTEL  
Graphical Methods of spin Algebras (Marcel Dekker Inc.), New-York (1972)
- (2) A.P. YUTSIS, I. LEVINSON and V. VANAGAS  
Mathematical Apparatus of the Theory of angular Momentum (Israel program for Scientific Translation), Jerusalem (1962).
- (3) B. JUDD  
Second quantization and Atomic Spectroscopy (John Hopkins Press), Baltimore (1967).
- (4) D.M. BRINK and G.R. SATCHLER  
Angular Momentum (Oxford University Press), 2nd Edition, London (1968).
- (5) M.A. RABITZ and R. GORDON  
Journal of Mathematical Physics 11 (1970) 3329
- (6) J.S. BRIGGS  
Review of Modern Physics, 43 (1971) 189
- (7) M. DANOS  
Annals of Physics "De Shalit Memorial"
- (8) E. ELBAZ et B. CASTEL  
American Journal of Physics 39 (1971) 868