88.

INIS-mf--1961

85
N.1.

N.1.2.

ANALITIČKI MODEL ZA OPTIMALNU KONTROLU PRELAZNIH KONCENTRACIJA XE^{135} REAKTORA U RADU

Mr. Danica Vuković, dipl. ing.
Energoprojekt, Beograd

SADRŽAJ

Problem kontrole prelaznih koncentracija Xe^{135} kod termalnih reaktora u radu je izložen i rešen primenom Pontrijaginove teoreme optimalnih procesa. Kao kriterijum za optimizaciju usvojeno je minimalno vreme prelaska sa jednog na drugi energetski nivo (metod optimalnog vremena). Rezultat ovog rada je analitički model za definisanje strategije kontrolnih šipki, a prikazana je i njegova primena na trodimenzionalnom modelu reaktora.

UVOD

Prelazna stanja se u reaktorima snage mogu pojaviti iz više razloga: pojava fisionih otrova I^{135} i Xe^{135}, nagomilavanje Xe^{135} pri zaustavljanju reaktora ili pri prelasku sa jednog nivoa snage na drugi. Nagli porast koncentracije Xe^{135} izaziva gubitak fleksibilnosti kontrole snage reaktora.

Osnovni problem je u principu rešen primenom teorije optimalne kontrole (1) i (2), s tim što postoji veći broj radova u kojima su problemi koji nastaju usled porasta koncentracije Xe^{135} pri zaustavljanju reaktora rešavani na tačkastom modelu reaktora bilo primenom Minimax ili metode optimalnog vremena. Roberts i Smith (5) i (6) su dali poredjenje izmedju ove dve metode i pokazali da je rešenje koje daje metoda optimalnog vremena istovremeno i rešenje koje se može dobiti primenom Minimax metode. Treba, ipak, naglasiti da ako se primeni Minimax kriterijum za vreme i posle zaustavljanja reaktora dobijeno rešenje ne mora da bude optimalno.

Primenom tehnike dinamičkog programiranja a za slučaj trodimenzionalnog modela reaktora je Stacey (7) dao analitički model za optimalno kretanje šipki u cilju kontrole prelaznih koncentracija Xe^{135} pri zaustavljanju reaktora.

Jedan od problema od praktičnog značaja je kontrola prelaznih koncentracija Xe^{135} ne samo pri zaustavljanju reaktora već i pri promenama nivoa snage. U ovom radu je dat analitički model za odredjivanje minimalnog vremena prelaska sa jednog nivoa snage na drugi, na bazi Pontrjaginovog principa a za slučaj trodimenzionalnog modela reaktora.

POSTAVKA PROBLEMA

Promene izotopnog sastava goriva kao i raspodela temperatura izazivaju promene reaktivnosti, s tim što su zavisne od nivoa snage te su nelinearne.

Trodimenzionalne dvo-grupne difuzione jednačine za jezgro reaktora koje je, u prisustvu Xe^{135} i kontrolnih šipki, kritično su:

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r},t) - \varkappa_1^2 \Psi(\vec{r},t) + \frac{k}{p_c}\frac{\Sigma_2}{D_1}\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{D_1}\sum_{n=1}^{N}\gamma_{1n}(z)\Psi_n(z,t)\,\delta(|\vec{r}-\vec{r}_n|) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r},t) - \varkappa_2^2 \Phi(\vec{r},t) + \frac{\Sigma_1}{D_2} p_c \Psi(\vec{r},t) - \frac{\Sigma_{2s}}{D_2}\Phi(\vec{r},t) - \frac{1}{D_2}\sum_{n=1}^{N}\gamma_{2n}(z)\Phi_n(z,t)\,\delta(|\vec{r}-\vec{r}_n|) = 0 \quad (2)$$

gde su: $k = \frac{k_\infty}{k_{eff}}$; $\varkappa_1^2 = \frac{\Sigma_1}{D_1}$; $\varkappa_2^2 = \frac{\Sigma_2}{D_2}$; γ_{1n} i γ_{2n} – epitermalna i termalna konstanta šipke n, a N-broj kontrolnih šipki.

Trodimenzionalne dvo-grupne jednačine reflektora moguće je napisati u obliku:

$$D_{1R}\nabla^2\Psi_R(\vec{r},t) - \Sigma_{1R}\Psi_R(\vec{r},t) = 0 \quad (3)$$

$$D_{2R}\nabla^2\Phi_R(\vec{r},t) - \Sigma_{2R}\Phi_R(\vec{r},t) + \Sigma_{1R}\Psi_R(\vec{r},t) = 0 \quad (4)$$

Uvodjenjem aksijalnih harmonika fluksa i primenom uobičajenih graničnih uslova, uvažavajući činjenicu da se kontrolne šipke nalaze u svojim kanalima, moguće je napisati sledeće izraze za epitermalni i termalni neutronski fluks koji predstavljaju rešenja gornjih jednačina (8):

$$\Psi(\vec{r},t) = \sum_{p=1}^{\infty}\sin\left(p\frac{\pi}{H}z\right)\left\{\sum_{n=1}^{N}\mathcal{F}_{1n}^{p}\left[F_1^p(\rho_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}G_{1k}^{p}(r)\cos k(\theta-\theta_n)\right] + \sum_{n=1}^{N}\mathcal{F}_{2n}^{p}\left[F_2^p(\rho_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}G_{2k}^{p}(r)\cos k(\theta-\theta_n)\right]\right\} \quad (5)$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \sum_{p=1}^{\infty}\sin\left(p\frac{\pi}{H}z\right)\left\{\sum_{n=1}^{N}\mathcal{F}_{1n}^{p}\left[F_3^p(\rho_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}G_{3k}^{p}(r)\cos k(\theta-\theta_n)\right] + \sum_{n=1}^{N}\mathcal{F}_{2n}^{p}\left[F_4^p(\rho_n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty}G_{4k}^{p}(r)\cos k(\theta-\theta_n)\right]\right\} \quad (6)$$

Promene koncentracija joda, I, i ksenona, X, moguće je opisati relacijama:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\gamma_I \Sigma_f \Phi(\vec{r},t) - \lambda_I I(\vec{r},t) - \sigma_I I(\vec{r},t)\Phi(\vec{r},t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \gamma_X \Sigma_f \Phi(\vec{r},t) + \lambda_I I(\vec{r},t) - \left[\lambda_X + \sigma_X \Phi(\vec{r},t)\right] X(\vec{r},t) \quad (8)$$

Pod predpostavkom da je apsorpcioni presek I^{135} dovoljno mali, član $\sigma_I I(\vec{r},t)\Phi(\vec{r},t)$ iz jednacine (7) je zanemarljiv za flukseve ispod $10^6 n/cm^2 sec$.

Reaktor je bio u stacionarnom stanju za $t < 0$ sa termalnim fluksom $\Phi(\vec{r},t)$. Traži se takav režim prelaska sa jednog nivoa snage na drugi, tj. sa jednog fluksa na drugi, da kako u procesu prelaska tako i posle njega koncentracija Xe^{135} ne predje veličinu $Xe^{135}_{max} = X$. U matematickoj teoriji optimalnih procesa ovo je problem metode optimalnog vremena.

Za sistem jednačina (7) i (8) hamiltonijan ima oblik:

$$\mathcal{H} = \Psi_1 \frac{\partial I}{\partial t} + \Psi_2 \frac{\partial X}{\partial t} \tag{9}$$

ili:

$$\mathcal{H} = \lambda + \varphi \Phi \tag{10}$$

sa pomoćnim funkcijama:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi_i} \quad ; \quad i = 1,2 \tag{11}$$

i:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\lambda_I I \Psi_1 + (\lambda_I I - \lambda_x X)\Psi_2 \\ \varphi &= \Sigma_f \gamma_I \Psi_1 + (\Sigma_f \gamma_x - \sigma_x X)\Psi_2 \end{aligned} \tag{12}$$

Iz relacije (9) se vidi da je $(\partial \mathcal{H} / \partial \Phi)$ nezavisno od fluksa, odnosno da je hamiltonijan linearna funkcija Φ, što znači da postoje tri moguće vrednosti fluksa za koje hamiltonijan ima maksimum:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{min} \quad \text{za} \quad \varphi < 0 \\ \Phi &= \Phi_{max} \quad \text{za} \quad \varphi > 0 \\ \Phi &= \Phi_0 \quad \text{za} \quad \varphi = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

s tim što treba napomenuti da se vrednosti Φ nalaze u zatvorenom intervalu $[\Phi_{min}, \Phi_{max}]$.

Da bi se rešio ovaj problem treba definisati oblast dozvoljenih stanja. Ova oblast definisana je sa $X \leq Xe_{max}$ a granica joj je linija $X = Xe_{max}$. Putanja koja prati granicu $X = Xe_{max}$ zadovoljava jednacinu $\partial X / \partial t = 0$, te je kontrolna promenljiva zadovoljena u svakoj tački granice i svaka putanja na granici je vremenski optimalna.

POSTUPAK REŠAVANJA

Postoje dve mogućnosti za rešavanje problema prelaznih koncentracija Xe^{135}. Prva je odredjivanje vremenski optimalne trajektorije bez primene bilo kakvih ograničenja, tj. zanemaruje se uslov $X \leq Xe_{max}$. Tada su moguća samo dva tipa upravljanja:

$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi_{min} \quad za \quad \varphi < 0 \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} < 0\right) \tag{14}$$

$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi_{max} \quad za \quad \varphi > 0 \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} > 0\right) \tag{15}$$

Ako se uvede nova vremenska promenljiva $T = t_1 - t$, gde je t_1 krajnji trenutak vremena, moguće je sistem jednačina (7) i (8), i adjungovanih jednačina napisati u zavisnosti od nove promenljive T u obliku:

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \lambda_I I - \gamma_I \Sigma_f \Phi \tag{16}$$

$$\frac{\partial X}{\partial T} = \lambda_x X + \sigma_x X \Phi - \lambda_I I - \gamma_x \Sigma_f \Phi \tag{17}$$

i

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial T} = -\lambda_I \Psi_1 + \lambda_I \Psi_2 \tag{18}$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial T} = -\Psi_2 \left\{\lambda_x + \sigma_x \Phi\right\} \tag{19}$$

Jednačine (16) do (19) su linearne diferencijalne jednačine prvog reda i njihova rešenja za konstantnu vrednost fluksa su:

$$\begin{aligned} I &= \left\{ I_0 - \frac{\gamma_I \Sigma_f}{\lambda_I} \Phi \right\} e^{\lambda_I T} + \frac{\gamma_I \Sigma_f}{\lambda_I} \Phi \\ X &= \left\{ X_0 - \frac{\lambda_I I_0 - \gamma_I \Sigma_f \Phi}{\sigma_x \Phi + \lambda_x - \lambda_I} - \frac{(\gamma_I + \gamma_x) \Sigma_f \Phi}{\sigma_x \Phi + \lambda_x} \right\} e^{(\sigma_x \Phi + \lambda_x) T} \\ &\quad + \frac{\lambda_I I_0 - \gamma_I \Sigma_f \Phi}{\sigma_x \Phi + \lambda_x - \lambda_I} e^{\lambda_I T} + \frac{(\gamma_I + \gamma_x) \Sigma_f \Phi}{\sigma_x \Phi + \lambda_x} \end{aligned} \tag{20}$$

i

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \left\{ \Psi_{10} + \frac{\lambda_I \Psi_{20}}{\sigma_x \Phi + \lambda_x - \lambda_I} \right\} e^{-\lambda_I T} - \frac{\lambda_I \Psi_{20}}{\sigma_x \Phi + \lambda_x - \lambda_I} e^{-(\lambda_x + \sigma_x \Phi)} \\ \Psi_2 &= \Psi_{20} e^{-(\sigma_x \Phi + \lambda_I) T} \end{aligned} \tag{21}$$

gde su: I_0, X_0, Ψ_{10} i Ψ_{20}-početne vrednosti.

Iz uslova $\Phi_1 = \Phi_{min}$ odredjuje se izraz za vreme T:

$$T = \frac{1}{\lambda_I} \ln \frac{\lambda_I I - \gamma_I \Sigma_f \Phi_1}{\lambda_I I_0 - \gamma_I \Sigma_f \Phi_1} \tag{22}$$

Uz uvodjenje skraćenog obeležavanja:

$$\delta = \frac{\sigma_x \Phi_1 + \lambda_x}{\lambda_I}$$

$$a = \frac{\gamma_I \Sigma_f}{\lambda_I} \Phi_1$$

$$b = (\gamma_I + \gamma_x) \frac{\Sigma_f}{\lambda_I} \Phi_1$$

i primenu relacije (22) dobija se sledeći izraz za koncentraciju ksenona:

$$X = \frac{I-a}{(I_o-a)^{\delta}} \left\{ X_o + \frac{I_o-a}{1-\delta} - \frac{b}{\delta} \right\} (I-a)^{\delta-1} - \frac{I-a}{1-\delta} - \frac{b}{\delta} \qquad (23)$$

Iz uslova $\partial X/\partial I=0$ moguće je odrediti maksimalnu vrednost koncentracije ksenona u zavisnosti od koncentracije joda-135, a relaciju (23) napisati u obliku:

$$X(I) = g(I) = (I-a) \left\{ \frac{1}{\delta^{\delta}} \left(X_{max} + \frac{b}{\delta}\right)^{1-\delta} \frac{(I-a)^{\delta-1}}{1-\delta} - \frac{1}{1-\delta} \right\} - \frac{b}{\delta} \qquad (24)$$

sto predstavlja izraz za krivu Ω.

Za potpuno odredjivanje graničnih uslova potrebno je da bude ispunjen i uslov trasferzalnosti na krivoj Ω :

$$\Psi_1(\vec{r},T) + \Psi_2(\vec{r},T) \frac{dg(I)}{dI} = 0 \qquad (25)$$

gde je :

$$\frac{dg(I)}{dI} = \delta \left\{ \frac{1}{\delta^{\delta}} \left(X_{max} + \frac{b}{\delta}\right)^{1-\delta} \frac{(I(\vec{r},T)-a)^{\delta-1}}{1-\delta} \right\} - \frac{1}{1-\delta} \qquad (26)$$

U ravni Xe-I treba odrediti oblast u kojoj su u funkciji vremena moguća prebacivanja sa upravljanja $\Phi(\vec{r},t) = \Phi_{max}$ na upravljanje $\Phi(\vec{r},t) = \Phi_{min}$. U tački prebacivanja je $\Psi=0$ ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi}=0$), u zoni do te tačke je $\Psi > 0$ ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} > 0$), a posle nje je $\Psi < 0$ ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} < 0$). Otuda proizilazi da je u tački prebacivanja:

$$\frac{d\Psi}{dT} \leq 0 \qquad \left(\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi}\right) \leq 0\right)$$

kao i:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} = 0$$

$$-\gamma_I \Sigma_f \Psi_1 + (\sigma_x X - \gamma_x \Sigma_f) \Psi_2 = 0 \qquad (27)$$

i:

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi}\right) \leq 0$$

$$\gamma_I \lambda_I \Sigma_f \Psi_2 \left\{ \frac{\Psi_1}{\Psi_2} - 1 - \frac{\sigma_x I}{\gamma_I \Sigma_f} + \frac{\gamma_x \lambda_x}{\gamma_I \lambda_I} \right\} \leq 0 \qquad (28)$$

Unošenjem izraza (26) u nejednakost (28) definiše se deo Xe-I ravni u kome su dozvoljene promene fluksa (snage):

$$X(\vec{r},T) \leq I(\vec{r},T) + \left\{ \frac{(\gamma_x + \gamma_I)\Sigma_f}{\sigma_x} - \frac{\gamma_x \lambda_x \Sigma_f}{\lambda_I \sigma_x} \right\} \qquad (29)$$

s tim sto jednačina:

$$X(\vec{r},T) = I(\vec{r},T) + \left\{ \frac{(\gamma_x + \gamma_I)\Sigma_f}{\sigma_x} - \frac{\gamma_x \lambda_x \Sigma_f}{\lambda_I \sigma_x} \right\}$$

jednačina krive koja odgovara uslovima $\varphi = 0$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0$.

Trajektorije koje su vremenski optimalne u neograničenom prostoru a ne presecaju granicu $Xe = X_{max}$, vremenski su optimalne i u ograničenom prostoru. Trajektorije koje presecaju granicu ostaju vremenski optimalne i u ograničenom prostoru kretanjem duž granice $Xe = X_{max}$.

KONTROLA PRELAZNIH KONCENTRACIJA Xe^{135} PRI ZAUSTAVLJANJU REAKTORA

Kao poseban slučaj razmatranog problema javlja se problem kontrole prelaznih koncentracija Xe^{135} pri zaustavljanju reaktora. U tom slučaju tipovi mogućih upravljanja su oblika:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r},T) &= 0 \qquad za \quad \varphi < 0 \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} < 0\right) \\ \Phi(\vec{r},T) &= \Phi_{max} \qquad za \quad \varphi > 0 \quad \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} > 0\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Relacije kojima se odredjuju koncentracije I^{135} i Xe^{135} i rešenja adjungovanih jednačina ostaju ista kao i u osnovnom slučaju. Na osnovu ovoga se može zaključiti da se ni izraz za hamiltonijan ne menja.

Kriva Ω u ovom slučaju predstavlja krivu zaustavljanja reaktora te njena jednačina sada ima drugačiji oblik. Pri odredjivanju jednačine ove krive polazi se od rešenja za koncentracije I^{135} i Xe^{135}, za slučaj kada je reaktor ugašen, tj. fluks je jednak nuli:

$$\begin{aligned} I(\vec{r},T) &= I_0 e^{\lambda_I T} \\ X(\vec{r},T) &= X_0 e^{\lambda_x T} + \frac{\lambda_I}{\lambda_I - \lambda_x} I_0 e^{\lambda_x T} - \frac{\lambda_I}{\lambda_I - \lambda_x} I_0 e^{\lambda_I T} \end{aligned} \tag{31}$$

Iz relacije za koncentraciju I^{135} odredjuje se izraz za vreme T, unosi u relaciju za koncentraciju Xe^{135} i uz skraćeno obeležavanje:

$$\delta = \frac{\lambda_x}{\lambda_I}$$

dobija sledeći izraz za koncentraciju Xe^{135}:

$$X = I \left\{ \frac{X_0 (1-\delta) + I_0 I^{\delta-1}}{I_0^{\delta} (1-\delta)} - \frac{1}{1-\delta} \right\} \tag{32}$$

ili u zavisnosti od maksimalne koncentracije Xe^{135}:

$$X(I) = g(I) = \frac{1}{\delta^{\delta}} \frac{X_{max}^{1-\delta}}{1-\delta} I^{\delta} - \frac{1}{1-\delta} I \tag{33}$$

U relaciji za uslov transferzalnosti izraz $dg(I)/dI$ u ovom slučaju ima oblik:

$$\frac{dg(I)}{dI} = \delta \left\{ \frac{1}{\delta^{\delta}} \, \frac{X_{max}^{1-\delta}}{1-\delta} \, I^{\delta-1} \right\} - \frac{1}{1-\delta} \qquad (34)$$

Relacije (33) i (34) se mogu dobiti i direktno iz relacija (25) i (26) unošenjem u njih jednakosti $\Phi_1 = \Phi_{min} = 0$. Sve ostale relacije imaju isti oblik kao i u osnovnom slučaju.

ZAKLJUČAK

Za rešavanje problema kontrole prelaznih koncentracija Xe^{135} usvojeni kriterijum je minimalno vreme. Problem je formulisan i rešen primenom teorema o optimalnim procesima koje je dao Pontrijagin sa saradnicima. Vremenski optimalna trajektorija izmedju bilo koje tačke iz Xe-I prostora i krive Ω se odredjuje tako da ni kriva cilja ni trajektorija do nje ne dozvole da koncentracija Xe^{135} predje proizvoljno definisan maksimum. Trajektorije koje su vremenski optimalne u neograničenom prostoru a ne presecaju granicu $X=X_{max}$, vremenski su optimalne i u ograničenom prostoru, dok trajektorije koje presecaju ovu granicu ostaju vremenski optimalne kretanjem duž granice $X=X_{max}$.

Kao poseban slučaj razmatran je problem kontrole prelaznih koncentracija Xe^{135} pri zaustavljanju reaktora. Pokazano je da je ovo poseban slučaj analiziranog problema kontrole prelaznih koncentracija Xe^{135} reaktora u radu čija se rešenja dobijaju relativno jednostavno unošenjem u već izvedene relacije jednakosti $\Phi(\bar{r},T) = \Phi_{min} = 0$.

LITERATURA

1. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1957)

2. Pontryagin, et.al., The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience Publishers, New York (1962)

3. Asch, Bellman and Kalaba, Nucl. Sci. Eng., 6, 152 (1959)

4. Rosztoczy and Weaver, Nucl. Sci. Eng., 20, 318 (1964)

5. Roberts and Smith, Nucl. Sci. Eng., 22, 470 (1965)

6. Roberts and Smith, Nucl. Sci. Eng., 22, 597 (1965)

7. Stacey, Nucl. Sci. Eng., 33, 162 (1968)

8. Vuković, Atomkernenergie, Vol 17, No 4 (1971)