

FR7600881  
CEA-N-1829

- Note CEA-N-1829 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Division d'Etude et de Développement des Réacteurs  
Département des Etudes Mécaniques et Thermiques

**DEPENDANCE VIS A VIS DE LA SURFACE D'INTEGRATION  
DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES  
DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE ( $\dot{J}$ ,  $\dot{L}$ )**

par

**Roland ROCHE**

- Novembre 1975 -

Note CEA-N-1829

**DESCRIPTION-MATIERE** (*mots clefs extraits du thesaurus SUDOC/INIS*)

*en français*

PROPRIETES CONCERNANT LA RUPTURE  
INTEGRALES

*en anglais*

FRACTURE PROPERTIES  
INTEGRALS

- Note CEA-N-1829 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Division d'Etude et de Développement des Réacteurs  
Département des Etudes Mécaniques et Thermiques

DEPENDANCE VIS A VIS DE LA SURFACE D'INTEGRATION  
DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES  
DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE ( $J$ ,  $\dot{L}$ )

par

Roland ROCHE

CEA-N-1829 - ROCHE Roland

DEPENDANCE VIS A VIS DE LA SURFACE D'INTEGRATION DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE ( $J$ ,  $L$ )

Resume. - Le but de cette étude est de définir les conditions nécessaires et suffisantes pour que les intégrales caractéristiques de la mécanique de la rupture soient indépendantes de la surface (ou du contour d'intégration) et ce, sans faire d'hypothèse sur la loi de comportement du matériau. Le principe de la méthode est de comparer la variation spatiale de la densité d'énergie reçue à celle qui résulterait de la seule variation spatiale de la déformation. Il s'introduit ainsi un vecteur défaut  $\vec{W}$  en chaque point du solide. Les résultantes de l'ensemble des vecteurs défauts situés à l'intérieur d'une surface sont les intégrales caractéristiques sur cette surface,  $J$  pour les composantes,  $L$  pour les couples. La condition d'indépendance dans un domaine est donc que le vecteur défaut soit nul en tout point. Cette condition est mise sous différentes formes qui expriment en fait que la densité volumique d'énergie reçue doit avoir la même forme de variation dans l'espace que dans le temps.

1975

31 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

CEA-N-1829 - ROCHE Roland

PATH DEPENDENCE OF FRACTURE MECHANICS INTEGRAL ( $J$ ,  $L$ ) ON THE INTEGRATION AREA OF CHARACTERISTIC INTEGRALS

Summary. - The purpose of this study is to define the necessary and sufficient conditions for characteristic integrals of fracture mechanics to be independent of area (or integration path), without making any assumptions concerning the behavior of the material. The principle of the method involves comparing the spatial variation in energy density received with that which would result from a spatial variation in strain alone. This introduces a defect vector  $\vec{W}$  at each point of the solid. The resultants of the total defect vectors situated within an area are the characteristic integrals of this area,  $J$  for components,  $L$  for torques. The condition governing independence in a region requires that the defect vector be null at any point. This condition is set under different forms which actually state that the energy density per unit volume received must have the same form of variation in space as in time.

1975

31 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

## SOMMAIRE

	Page
AVANT PROPOS	1
<u>PREMIERE PARTIE : LE VECTEUR "DEFAULT" ET LES INTEGRALES CARACTERISTIQUES</u>	3
1.1 - Rappel sommaire de la description de BOUSSINESQ	3
1.2 - Variation locale du travail reçu par unité de volume	4
1.3 - Introduction du tenseur $\sigma$	5
1.4 - Introduction des intégrales caractéristiques	6
1.5 - Influence de la surface d'intégration sur la valeur des intégrales caractéristiques	8
<u>SECONDE PARTIE : UTILISATION DE LA METHODE DES FORCES</u>	10
2.1 - Dualité = la méthode des forces	10
2.2 - Variation locale du travail complémentaire reçu	12
2.3 - Introduction du tenseur $\sigma^c$ complémentaire de $\sigma$	13
2.4 - Introduction des intégrales caractéristiques	15
2.5 - Influence de la surface d'intégration sur la valeur des intégrales caractéristiques	18
<u>TROISIEME PARTIE : CONDITIONS D'INDEPENDANCE DE LA SURFACE D'INTEGRATION (sans forces extérieures de volume)</u>	19
3.1 - Considérations générales	19
3.2 - Conditions dans un état de chargement donné	20
3.3 - Conditions durant toute la mise en charge	22
3.4 - Autres formes des conditions	24
3.5 - Cas du comportement élastique	25
3.6 - A propos du cas élasto plastique parfait	26

## AVANT PROPOS

"Qui a bu, boira"

"Le Prince : Ecris cela, je ne comprends clairement que les écritures moulées en bôtarde".

Cette note se présente comme une suite, un complément ou plutôt un rectificatif à la Note CEA N-1807. Cela est conforme à la nature de ces notes "qui consignent essentiellement des résultats fragmentaires". Par contre une telle suite est contraire à nos premières résolutions qui étaient de ne pas pousser plus loin un travail, qui du fait de son caractère abstrait, s'éloignait de la vocation du DEMA. Cependant la lecture du texte, une fois mis au net et bien frappé, a montré des imperfections qui avaient échappées dans le manuscrit.

Le défaut essentiel de la note CEA N-1807 est de restreindre l'étude aux seuls cas du matériau élastique. Ainsi dans l'expression des intégrales caractéristiques,  $W$  est la densité volumique d'énergie élastique et non la densité volumique de travail reçu (strain energy). Comme il est d'usage de s'intéresser de préférence aux intégrales caractéristiques où  $W$  a cette dernière définition, il était indispensable de revoir ce point. Une conséquence importante était que la condition de non dépendance de la surface d'intégration ( $W$  ne dépendant pas explicitement du point considéré) n'avait plus alors qu'un caractère particulier : c'est une condition suffisante, mais non nécessaire.

La présente étude considère le cas général où  $W$  est la densité de travail reçu et n'est pas forcément intégrable. On voit dans cette étude que l'hypothèse d'élasticité est superflue et que la simple comparaison de la variation spatiale réelle de  $W$  et de celle due aux seules variations de déformation permet d'introduire un vecteur défaut  $\bar{W}^*$

qui n'est évidemment pas toujours un gradient. On peut même remarquer que cette méthode est plus simple que celle utilisée dans la note N 1807. Les intégrales caractéristiques ( $\vec{J}$  et  $\vec{L}$ ) se définissent comme les résultantes (forces et couples) des vecteurs  $\vec{W}^*$ , situés à l'intérieur du contour d'intégration. Elles sont donc indépendantes de la surface d'intégration dans les domaines où  $\vec{W}^* = 0$ .

Cet examen est fait par la méthode des déplacements, aussi est-il intéressant (surtout lorsque le comportement du matériau est quelconque) de considérer la méthode des forces. Le même procédé conduit à introduire le même vecteur défaut  $W^*$ , mais permet de donner une expression différente des intégrales caractéristiques qui est en quelque sorte complémentaire de la première, mais qui ne conduit pas à des valeurs différentes, bien entendu.

Enfin une dernière partie examine les différentes formes de la condition d'indépendance des intégrales caractéristiques vis à vis de la surface d'intégration. Sans les exprimer ici, on doit constater qu'elles expriment toutes que la densité volumique de travail reçu (dans chaque cas précis) doit avoir la même différentielle dans l'espace que dans le temps. Sous une autre forme cela revient à dire que la différentielle de cette densité de travail est égale à  $\theta_{ij}$  du  $_{ij}$  dans l'espace-temps.

PREMIERE PARTIE

LE VECTEUR "DEFAULT" ET LES INTEGRALES CARACTERISTIQUES

1.1 - RAPPEL SOMMAIRE DE LA DESCRIPTION DE BOUSSINESQ

On se reportera pour toute explication plus détaillée à la note CEA-N-1807.

Les évènements seront décrits dans un référentiel fixé à l'état initial, c'est à dire avant tout déplacement ou déformation. Par commodité, on choisit un système d'axes cartesiens  $x_i$ .

Dans ce système le déplacement est  $u_i$  et on écrit par définition que le travail reçu par unité de volume initial lors d'une faible variation des déplacements  $\delta u_i$  est :

$$\delta W = \theta_{ij} \delta u_{i,j} \quad (1)$$

Le tenseur  $\theta_{ij}$  est le tenseur de contrainte de Boussinesq.

Le principe des travaux virtuels conduit aux équations :

$$\begin{array}{l} \theta_{i,j,i} + X_i = 0 \quad (\text{volume}) \\ \theta_{i,j} n_j = \bar{X}_i \quad (\text{surface}) \end{array} \quad (2)$$

où  $X_i$  est la force extérieure appliquée par unité de volume initial (sur le corps déformé)\*.

$\bar{X}_i$  la force extérieure appliquée par unité de surface initiale (sur le corps déformé)\*

$n_j$  la normale extérieure à la surface limitant le volume considéré.

---

\* C'est à dire  $\bar{X}_i + \bar{X}_{i,j} u_j$  sur le corps initial



## 1.2 - VARIATION LOCALE DU TRAVAIL RECU PAR UNITE DE VOLUME

Il convient de bien remarquer que le travail par unité de volume initial  $\delta W$  (appelé souvent énergie de déformation) n'est pas une différentielle totale, c'est à dire que W ne dépend pas que de l'état final, mais également du chemin parcouru pour y parvenir.

En chaque point, il existe un chemin et on peut donc intégrer, depuis l'état initial (déplacement nul) pour déterminer le travail total reçu par unité de volume au point M.

$$W(M) = \int_{\text{initial}}^{\text{final}} \delta W$$

intégré suivant le chemin en M

(3)

Il est intéressant de comparer le résultat ainsi obtenu avec celui qui correspondrait à la seule variation de la déformation repérée par  $u_i, j$ .

Les différentielles n'étant pas intégrables, la comparaison ne peut être que locale. On va donc comparer entre elles :

- la variation réelle de W
- celle uniquement due à la variation de déformation

$M(x_k)$ $u_i$ $u_{i,j}$ $W$	$\swarrow$ Variation réelle de W $\searrow$	$M + dM(x_k + dx_k)$ $u_i + u_{i,k} dx_k$ $u_{i,j} + u_{i,jk} dx_k$ $W + W_{,k} dx_k$
---------------------------------------	---	--

La variation réelle de W est :

$$dW \text{ réelle} = W_{,k} dx_k$$

La variation de déformation est :

$$du_{i,j} = u_{i,jk} dx_k$$

elle entraîne une variation de W égale à  $dW_{\text{déformation}} = \theta_{ij} du_{i,j} = \theta_{ij} u_{i,jk} dx_k$

Ces deux variations ne sont pas forcément égales, leur différence est :

$$dW_{\text{réelle}} - dW_{\text{déformation}} = \left\{ W_{,k} - \theta_{ij} u_{i,jk} \right\} dx_k$$

Ce qui conduit à introduire le vecteur  $W_k^{\ominus}$  caractérisant un défaut.

$$dW (\text{réel}) - dW (\text{déform.}) = W_k^{\ominus} dx_k \quad (4)$$

$$W_k^{\ominus} = W_{,k} - \theta_{ij} u_{i,jk} \quad (4')$$

Ce vecteur de défaut est destiné à rattraper la différence locale entre l'évolution réelle de  $W$  et celle qui résulterait de l'évolution des déformations. Nos grandeurs n'étant pas des différentielles totales, ce vecteur n'est pas nécessairement le gradient d'une singularité d'énergie.

### 1.3 - INTRODUCTION DU TENSEUR $\ominus$

On peut transformer l'expression précédente de la façon suivante :

$$\theta_{ij} u_{i,jk} = (\theta_{ij} u_{i,k})_{,j} - \theta_{ij,i} u_{i,k}$$

or  $\theta_{ij,i} = -X_i$

d'où  $W_k^{\ominus} = W_{,k} - (\theta_{ij} u_{i,k})_{,j} - X_i u_{i,k}$

$$W_k^{\ominus} + X_i u_{i,k} = W_{,k} - (\theta_{ij} u_{i,k})_{,j}$$

or  $W_{,k} = \delta_{kj} W_{,j} = (\delta_{kj} W)_{,j}$

ce qui conduit à :

$$W_k^{\ominus} + X_i u_{i,k} = \ominus_{kj,j}$$

$$\text{avec } \ominus_{kj} = W \delta_{kj} - \theta_{ij} u_{i,k}$$

Ce qui introduit, sans hypothèse de comportement élastique (intégrabilité de W) le tenseur  $\Theta$

$$\Theta_{ij} = W \delta_{ij} - u_{k,i} \theta_{kj} \quad (5)$$

Ce tenseur satisfait aux équations suivantes, analogues aux équations d'équilibre concernant le tenseur de contraintes de BOUSSINESQ.

$$\begin{aligned} \Theta_{ij,i} + Y_i &= 0 \\ \Theta_{ij} n_j &= \bar{Y}_i \end{aligned} \quad (6)$$

où

$$\begin{aligned} Y_i &= -W_{,i} - X_j u_{j,i} \\ \bar{Y}_i &= W n_i - \bar{T}_k u_{k,i} \end{aligned}$$

avec la notation  $\bar{T}_k = \theta_{ki} n_i$  qui est la force extérieure sur la surface considérée et qui devient égale à  $\bar{X}_k$  lorsque cette surface est la même que celle qui limite le corps.

#### 1.4 - INTRODUCTION DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES

Comme dans la note CEA 1807, cette analogie formelle avec les équations d'équilibre permet d'introduire aisément les intégrales caractéristiques usuelles, c'est à dire les intégrales J et L. Pour ceu il suffit de calculer les résultantes des  $Y_i$  dans un volume V de surface S.



Pour les résultantes de forces on a:

$$J_i = - \int_v Y_i dv = \int_v (W_i + X_i u_{i,i}) dv \quad (8)$$

c'est à dire :

$$J_i = \int_v \ominus_{ij,i} dv = \int_s \ominus_{ij} n_i ds$$

$$J_i = \int_s \bar{Y}_i ds$$

ce qui n'est pas surprenant car les forces extérieures de surface doivent équilibrer les forces extérieures de volume :

$$J_i = \int_s (W n_i - \bar{T}_i u_{i,i}) ds \quad (9)$$

Pour les résultantes en moment à l'origine, on a:

$$L_i = \int_v \epsilon_{ijk} x_j Y_k dv \quad (10)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le vecteur complètement antisymétrique, c'est à dire que :

$$L_i = - \int_v (x_j X_k - x_k X_j) dv$$

$ijk$  étant dans l'ordre des permutations paires de 1, 2, 3.

Le calcul a été fait dans la note CEA-N-1807 et on trouve :

$$L_i = \int_s \epsilon_{ijk} x_j \bar{Y}_k ds - \int_v \epsilon_{ijk} \ominus_{kj} dv$$

comme la seconde intégrale peut se transformer en

$$- \int_s \epsilon_{ijk} u_j \bar{T}_k ds + \int_v \epsilon_{ijk} u_j X_k dv$$

si  $X_K = 0$ , on est conduit à :

$$L_i = \int_s \epsilon_{ijk} \left\{ x_j (W n_k - T_l u_{l,k}) + u_j \bar{T}_K \right\} ds \quad (11)$$

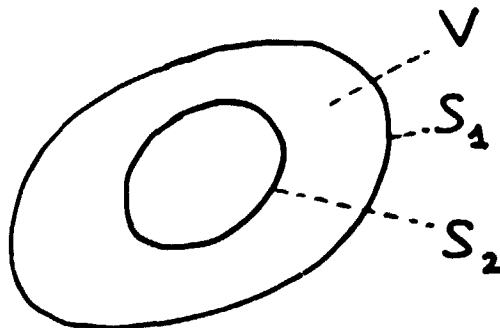
Il est opportun de remarquer que  $L_i$  n'est pas la résultante des "forces" extérieures de surface  $\bar{Y}_i$ . Ceci est dû au fait que dans les forces extérieures de volume nous avons négligé les couples de volume (type moment magnétique) dus à la non symétrie du tenseur  $\ominus_{ij}$ .

### 1.5 - INFLUENCE DE LA SURFACE D'INTEGRATION SUR LA VALEUR DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES

L'intérêt de ces intégrales caractéristiques tient à ce qu'elles sont des intégrales de surface et non des intégrales de volume. Ceci se transpose dans le cas plan, en ce qu'elles sont alors des intégrales curvilignes et non des intégrales de surface.

L'origine du présent travail, et ce qui demeure son but essentiel, est d'étudier les conditions dans lesquelles ces intégrales sont indépendantes du contour d'intégration (dans le plan) et plus généralement (dans l'espace) de la surface d'intégration.

Si l'on considère deux surfaces d'intégrations  $S_1$  et  $S_2$  imbriquées l'une dans l'autre et entourant ainsi un volume  $V$ , on peut considérer leur ensemble comme



la surface extérieure  $S$  de  $V$  en les mesurant d'une normale extérieure à  $V$ . On a alors :

$$J_i = \int_s (Wn_i - \bar{X}_i u_{i,r}) ds = - \int_v Y_i dv$$

or

$$\int_s = \int_{s_1} - \int_{s_2}$$

si l'on muni les 2 surfaces de normales extérieures au volume qu'elles définissent :

d'où

$$\begin{aligned} J_i(S_1) - J_i(S_2) &= - \int_V Y_i \, dv \\ L_i(S_1) - L_i(S_2) &= - \int_V \epsilon_{ijk} x_j Y_k \, dv \end{aligned} \quad (12)$$

C'est à dire que l'on peut évaluer la différence entre les intégrales prises sur 2 surfaces concentriques à l'aide d'une intégrale portant sur le volume compris entre les 2 surfaces.

Pour que dans un domaine  $D$ , les valeurs ne dépendent pas de la surface d'intégration, il faut que la quantité sous le signe somme de l'intégrale de volume soit nulle.

Pour que, dans un domaine  $D$ , les intégrales caractéristiques  $\vec{J}$  et  $\vec{L}$  ne dépendent pas de la surface d'intégration, il faut et il suffit que dans ce domaine :

$$Y_i = 0$$

c'est à dire :

$$W_i^{*} + X_j u_{j,i} = 0$$

## SECONDE PARTIE

### UTILISATION DE LA METHODE DES FORCES

#### 2.1 - DUALITE = LA METHODE DES FORCES

Précédemment nous avons défini un champ de déformation admissible par les dérivées  $u_{i,j}$  des composantes du déplacement  $u_i$ , c'est à dire que les 9 termes  $u_{i,j}$  n'étaient pas indépendants. En considérant une déformation virtuelle qui était cinématiquement admissible, c'est à dire qui respectait ces conditions, il a été possible d'écrire l'expression du travail reçu par unité de volume initial :

$$\delta W = \theta_{ij} \delta u_{i,j}$$

ce qui définissait le tenseur de contrainte de Broussinesq  $\theta_{ij}$ . Le principe des travaux virtuel a permis de montrer que ce tenseur doit satisfaire aux équations d'équilibre (loi de la statique) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{ij,j} + X_i = 0 \\ \theta_{ij,n} = \bar{X}_i \end{array} \right.$$

Cette formulation est très utile lorsque les forces extérieures appliquées sont connues, elle est moins adaptée lorsque le chargement est défini par des déplacements imposés.

Comme Janus, la mécanique des milieux continus a deux faces, à la méthode précédente dite des déplacements correspond une méthode duale dite des forces qu'il est intéressant de considérer maintenant car elle fournit une variante de la forme des intégrales caractéristiques.

Au lieu de définir la déformation, nous définissons un champ de contraintes  $\theta_{ij}$  devant satisfaire aux équations d'équilibre\*. Pour équations d'équilibre nous prenons les précédentes, c'est à dire que notre tenseur  $\theta_{ij}$  sera celui de BOUSSINESQ.

---

\* Ces équations sont quelque peu arbitraires

On considère alors une variation de contrainte virtuelle  $\delta \theta_{ij}$  statiquement admissible, c'est à dire satisfaisant aux équations de la statique que nous venons de choisir :

$$\begin{cases} \delta \theta_{ij,i} + \delta X_i = 0 \\ \delta \theta_{ij} n_i = \delta \bar{X}_i \end{cases}$$

et nous écrivons l'expression du travail complémentaire reçu par unité de volume initial.

$$\delta W^c = u_{ij} \delta \theta_{ij}$$

ce qui définit la déformation  $u_{ij}$  associée à  $\theta_{ij}$ .

Appliquons maintenant le principe des travaux virtuels (sur ce travail complémentaire). Il s'écrit :

$$-\int_V \delta W^c dv + \int_V u_i \delta X_i dv + \int_S u_i \delta \bar{X}_i ds = 0$$

comme  $\delta X_i = -\delta \theta_{ij,i}$  la seconde intégrale s'écrit :

$$\int_V u_i \delta X_i dv = \int_V -u_i \delta \theta_{ij,i} dv = -\int_V (u_i \delta \theta_{ij})_{,i} dv - \int_V u_{i,i} \delta \theta_{ij} dv$$

comme  $\delta \bar{X}_i = \delta \theta_{ij} n_i$  la troisième s'écrit :

$$\int_S u_i \delta \bar{X}_i ds = \int_S u_i \delta \theta_{ij} n_i ds = \int_V (n_i \delta \theta_{ij})_{,i} dv$$

la somme des 3 intégrales se réduit donc à l'intégrale de volume suivante :

$$\int_V (u_{ij} - u_{i,j}) \delta \theta_{ij} dv = 0$$

comme  $\delta \theta_{ij}$  est quelconque ceci impose :

$$u_{ij} = u_{i,j}$$



nous retrouvons bien la définition adoptée précédemment, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \delta W^C &= u_{i,j} \delta \theta_{ij} \\ \delta W + \delta W^C &= \delta (u_{i,j} \theta_{ij}) \end{aligned} \quad (13)$$

## 2.2 - VARIATION LOCALE DU TRAVAIL COMPLEMENTAIRE RECU

Nous allons reprendre la même étude que pour le travail reçu :

$\delta W^C$  n'est pas plus intégrable que  $\delta W$  dans l'état actuel de nos hypothèses, c'est à dire que  $W^C$  n'est pas connu à partir de l'état final, car il dépend du chemin parcouru pour y arriver. Pour un point donné, ce chemin est défini, on peut donc définir la valeur de  $W^C$  en chaque point.

$$W^C(M) = \int_{\text{initial}}^{\text{final}} W^C \quad (14)$$

suivant le chemin en M

d'où  $W(M) + W^C(M) = u_{ij} \theta_{ij}$  (indépendante du chemin).

Il convient maintenant de comparer autour d'un point M, c'est à dire localement, la variation de  $W^C$  ainsi défini avec celle qui résulterait de la variation de la contrainte.

La variation réelle est :

$$dW^C(\text{réel}) = W_{,k}^C dx_k$$

La variation due aux variations de contrainte serait :

$$dW^C(\text{contrainte}) = u_{i,j} \theta_{ij,k} dx_k$$

Ces deux variations ne sont pas forcément égales, ce qui contraint à introduire un vecteur  $W_k^{C\theta}$  tel que :

$$dW^C(\text{réel}) - dW^C(\text{contrainte}) = -W_k^{C\theta} dx_k$$

sa valeur est :  $W_k^{C\theta} = u_{i,j} \theta_{ij,k} - W_{,k}^C$

si l'on tient compte que :

$$W_{,k}^c = (\theta_{ij} u_{i,j})_{,k} - W_{,k}$$

on a :

$$\begin{aligned} W_k^{c*} &= W_{,k} + u_{i,j} \theta_{ij,k} - (\theta_{ij} u_{ij})_{,k} \\ &= W_{,k} - u_{i,jk} \theta_{ij} \end{aligned}$$

c'est à dire  $W_k^{c*} = W_k^*$

$$\boxed{dW^c \text{ (réel)} - dW^c \text{ (contrainte)} = -W_k^* dx_k} \quad (15)$$

ce calcul n'introduit pas un autre vecteur défaut, mais nous donne une nouvelle expression de ce dernier :

$$\boxed{\begin{aligned} W_k^* &= W_{,k} - \theta_{ij} u_{i,jk} \\ \text{ou } W_k^* &= -W_{,k}^c + u_{i,j} \theta_{ij,k} \end{aligned}} \quad (16)$$

Remarque : Nous avons fait tout le parcours nécessaire en ne considérant que la méthode des forces. Cependant le résultat obtenu est une simple transposition des résultats précédents puisque :

$$\begin{aligned} dW^c \text{ (réel)} - dW^c \text{ (contrainte)} &= d(\theta_{ij} u_{ij}) - dW \text{ (réel)} \dots \\ \dots - d(\theta_{ij} u_{ij}) + dW \text{ (déform.)} &= -W_k^* dx_k \end{aligned}$$

### 2.3 - INTRODUCTION DE $\ominus^c$ COMPLEMENTAIRE DE $\ominus$

La seconde expression de  $W_k^*$  est du type force, elle peut être transposée :

$$u_{i,j} \theta_{ij,k} = (u_i \theta_{ij,k})_{,j} - u_i \theta_{ij,jk}$$

or  $\theta_{ij,j} = -X_i$

d'où

$$W_k^* = -W_{,k}^c + (u_i \theta_{ij,k})_{,i} + X_{i,k} u_i$$

c'est à dire :

$$W_k^* - u_i X_{i,k} = -W_{,k}^c + (u_i \theta_{ij,k})_{,i}$$

comme

$$W_{,k}^c = \delta_{kj} W_{,j}^c = (\delta_{kj} W^c)_{,j}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} -W_k + u_i X_{i,k} &= \ominus_{kj,i}^c \\ \text{avec } \ominus_{kj}^c &= +W^c \delta_{kj} - u_i \theta_{ij,k} \end{aligned}$$

Ce qui introduit, sans hypothèse de comportement un tenseur complémentaire du tenseur  $\ominus$

$$\ominus_{ij}^c = W^c \delta_{ij} - u_k \theta_{kj,i} \quad (17)$$

qui satisfait aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \ominus_{ij,i}^c + Y_i^c &= 0 \\ \ominus_{ij}^c n_j &= \bar{Y}_i^c \end{aligned} \quad (18)$$

avec :

$$\begin{aligned} Y_i^c &= +W_i^* - u_j X_{j,i} \\ \bar{Y}_i^c &= +W^c n_i - u_k \theta_{kj,i} n_j \end{aligned} \quad (19)$$

Expressions correspondantes à :

$$\begin{cases} Y_i = -W_i - X_i u_{i,i} \\ \bar{Y}_i = W n_i - \theta_{k,i} u_{k,i} n_i \end{cases}$$

de la méthode des déplacements

On remarquera que :

$$\ominus_{ij} + \ominus_{ij}^c = (W + W^c) \delta_{ij} - \left\{ u_{k,i} \theta_{k,i} + u_k \theta_{k,i} \right\}$$

$$\boxed{\ominus_{ij} + \ominus_{ij}^c = (u_{k,l} \theta_{kl}) \delta_{ij} - (u_k \theta_{k,i})_{,i}}$$

$$Y_i + Y_i^c = (u_i X_i)_{,i}$$

## 2.4 - INTRODUCTION DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES

L'analogie formelle avec les équations d'équilibre va nous permettre d'introduire les intégrales caractéristiques complémentaires  $\bar{J}^c$  et  $\bar{L}^c$ . Pour cela il suffit de calculer les résultantes des  $Y_i^c$  dans un volume  $V$  limité par une surface  $S$ .

Résultante des forces

$$\boxed{J_i^c = - \int_V Y_i^c dv = - \int_V (W_i^c - u_i X_{i,i}) dv} \quad (20)$$

c'est à dire :

$$J_i^c = + \int_V \ominus_{ij,i}^c dv = + \int_S \ominus_{ij}^c n_j ds$$

$$\boxed{J_i^c = + \int_S \bar{Y}_i^c ds}$$

Simple résultat de l'équilibre :

$$\boxed{J_i^c = \int_s (+W^c n_i - u_k \theta_{k,i} n_i) ds} \quad (21)$$

Notons que :

$$J_i + J_i^c = \int_v (X_i u_i)_{,i} dv$$

$$\boxed{J_i + J_i^c = \int_s X_i u_i n_i ds} \quad (22)$$

ce que l'on peut vérifier directement d'ailleurs.

$$J_i + J_i^c = \underbrace{\int_s (W + W^c) n_i ds}_{(u_{k,i} \theta_{k,i}) n_i ds} - \underbrace{(\theta_{k,i} u_{k,i} + \theta_{k,i} u_k) n_i}_{(\theta_{k,i} u_k)_{,i} n_i ds} dv$$

le second terme peut s'écrire :

$$\int_s (\theta_{k,i} u_k)_{,i} n_i ds = \int_s (\theta_{k,i} u_k)_{,i} n_i ds$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } J_i + J_i^c &= \int_s \left\{ u_{k,i} \theta_{k,i} - (\theta_{k,i} u_k)_{,i} \right\} n_i ds \\ &= \int_s -u_k \theta_{k,i} n_i ds \\ &= \int_s u_k X_k n_i ds \end{aligned}$$

On remarque ainsi le faible apport de cette intégrale complémentaire, nul si les forces de volume sont négligeables sur la surface d'intégration.

Résultante des moments (par rapport à l'origine)

$$\boxed{L_i^c = - \int_v \epsilon_{ijk} x_i Y_k^c dv} \quad (23)$$

c'est à dire :

$$L_i^c = + \int_V \epsilon_{ijk} x_i \ominus_{kl,l}^c dv$$

donc l'intégration par parties donne :

$$L_i^c = \int_V (\epsilon_{ijk} x_i \ominus_{kl,l}^c)'_l dv - \int_V \epsilon_{ijk} \delta_{jl} \ominus_{kl}^c dv$$

soit :

$$L_i^c = \int_S \epsilon_{ijk} x_j \bar{Y}_k^c ds - \int_V \epsilon_{ijk} \ominus_{ki}^c dv$$

$$\int_V \epsilon_{ijk} \ominus_{ki}^c dv = - \int_V \epsilon_{ijk} n_l \theta_{l,j,k} dv$$

$$= - \int_S \epsilon_{ijk} u_l \theta_{lj} n_k ds + \int_V \epsilon_{ijk} u_{lk} \theta_{lj} dv$$

comme  $u_{l,k} \theta_{lj} = u_{k,l} \theta_{jl}$  la seconde intégrale devient :

$$\int_V \epsilon_{ijk} u_{k,l} \theta_{jl} dv = \int_S \epsilon_{ijk} u_k \theta_{jl} n_l ds - \int_V \epsilon_{ijk} u_k \theta_{il,l} ds$$

$$= \int_S \epsilon_{ijk} u_k \bar{T}_i ds + \int_V \epsilon_{ijk} u_k X_i dv$$

soit :

$$\int_V \epsilon_{ijk} \ominus_{ki}^c dv = + \int_S \epsilon_{ijk} \left\{ u_k \theta_{il} n_l - u_l \theta_{lj} n_k \right\} ds$$

$$+ \int_V \epsilon_{ijk} u_k X_i dv$$

si  $X_i = 0$  on est conduit à :

$$L_i^c = \int_S \epsilon_{ijk} \left\{ x_j (W^c n_k - u_l \theta_{lm,k} n_m) + (u_k \theta_{il} n_l - u_l \theta_{lj} n_k) \right\} ds$$

(24)

Notons que :

$$\begin{aligned}
 L_i + L_i^c &= \int_V \epsilon_{ijk} x_j \left\{ + W_k^m + X_l u_{l,k} - W_k^m + u_l X_{l;k} \right\} ds \\
 &= \int_V \epsilon_{ijk} x_j (X_l n_l)_{,k} dv \\
 &= \int_V \epsilon_{ijk} x_j (x_j X_l n_l)_{,k} dv - \int_V \epsilon_{ijk} X_l n_l \delta_{jk} dv \\
 &= \int_S \epsilon_{ijk} x_j X_l n_l n_k ds
 \end{aligned}$$

$$\boxed{L_i + L_i^c = \int_S \epsilon_{ijk} x_j X_l n_l n_k ds} \quad (25)$$

ce qui permet de renouveler la remarque déjà faite à propos de  $J$  : L'utilisation des formes duales  $\vec{J}_c$  et  $\vec{L}_c$  des intégrales caractéristiques  $\vec{J}$  et  $\vec{L}$  n'apporte que peu de chose = les valeurs numériques de ces intégrales étant les mêmes (au signe près) pour autant que les forces extérieures de volume soient nulles au voisinage de la surface d'intégration.

## 2.5 - INFLUENCE DE LA SURFACE D'INTEGRATION SUR LA VALEUR DES INTEGRALES CARACTERISTIQUES

Elle est strictement identique à celle sur les intégrales  $\vec{J}$  et  $\vec{L}$ . Par exemple, pour que dans un domaine  $D$ , les intégrales  $\vec{J}^c$  et  $\vec{L}^c$  ne dépendent pas de la surface d'intégration il faut et il suffit que  $Y_i^c = 0$ .

### TROISIEME PARTIE

#### CONDITIONS D'INDEPENDANCE DE LA SURFACE D'INTEGRATION

(sans forces extérieures de volume)

#### 3.1 - CONSIDERATIONS GENERALES

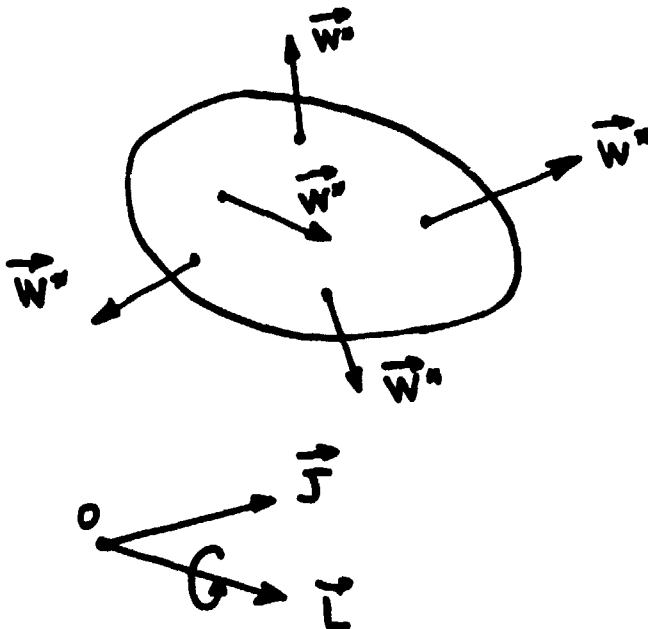
Il suffit de reprendre les résultats déjà obtenus quant aux intégrales caractéristiques :

$$J_i = - \int_V Y_i \, dv \qquad L_i = - \int_V \epsilon_{ijk} x_j Y_k \, dv$$

Lorsqu'on se limite au cas où les forces extérieures de volume sont nulles, ces équations (8) et (10) s'écrivent :

$$\begin{cases} J_i = \int_V W_i^* \, dv \\ L_i = \int_V \epsilon_{ijk} x_j W_k^* \, dv \end{cases}$$

ce qui signifie, comme il a déjà été dit, que les intégrales  $\vec{J}$  et  $\vec{L}$  sont les résultantes (vecteur, et couple) du système de vecteurs défauts  $\vec{W}^*$  situés dans le volume  $V$  situé à l'intérieur de la surface d'intégration  $S$ .





Donc, pour que sur deux surfaces d'intégration  $S_1$  et  $S_2$ , les valeurs des intégrales caractéristiques soient les mêmes, il faut et il suffit que la résultante des vecteurs-défaut  $\vec{W}^*$  compris dans le volume compris entre les 2 surfaces soit nulle. Ainsi les intégrales ne dépendront pas de la surface d'intégration dans un domaine  $D$  où il n'y a pas de vecteur défaut. Cette condition suffisante est également nécessaire si l'on désire cette propriété pour toutes les surfaces comprises dans  $D$ .

Remarquons que l'on peut quelquefois être moins exigeant et se contenter de n'avoir qu'une composante constante des intégrales caractéristiques, par exemple la composante  $J_1$ . Pour cela il faut et il suffit que la composante  $W_{,1}$  soit nulle dans le domaine considéré.

Enfin il faut souligner que l'on n'est pas toujours aussi exigeant au sujet du domaine dans lequel les intégrales sont indépendantes de la surface d'intégration : on peut très bien ne considérer que les surfaces englobant un noyau donné, ce qui est le cas classique du front de fissure.

Quoiqu'il en soit, on ne considèrera par la suite que le cas où il faut que le vecteur défaut soit nul dans le domaine considéré.

### 3.2 - CONDITIONS DANS UN ETAT DE CHARGEMENT DONNE

La condition\*

$$\vec{W}^* = 0 \quad (C1)$$

peut s'écrire :

$$W_{,k} = \theta_{ij} u_{i,jk} \quad (C2)$$

ou en utilisant  $dF$  pour désigner la différentielle de  $F$  dans l'espace  $dF = F'_{,k} dx_k$

$$dF = \theta_{ij} du_{i,j} \quad (C3)$$

---

\* Les conditions d'indépendance par rapport à la surface d'intégration seront repérées par (C1) pour les distinguer

Rappelons l'expression de la densité de travail reçu, en notant  $t$  le temps et  $\delta F$  la variation d'une fonction  $F$  durant l'intervalle de temps  $dt$  :

$$W = \int_{\text{en } M} \theta_{ij} \delta u_{i,j} = \int_{\text{en } M}^T \theta_{ij} u_{i,j,t} dt \quad (26)$$

expression dans laquelle le "temps" a le caractère d'un paramètre de chargement et où le "chemin d'intégration", c'est à dire les valeurs prises par  $u_{i,j}$  et  $\theta_{ij}$ , au cours de ce chargement dépendent du point considéré  $M$ .

#### Origine de la condition

Ainsi qu'on peut le voir à la lecture du texte précédent, la condition signifie que l'on peut déterminer à l'instant  $T$  la valeur de  $W$  en tout point  $M$  par une intégrale curviligne dans l'espace depuis un point d'origine  $O$ .

$$W(M,T) = W_o(T) + \int_o^M \theta_{ij} du_{ij}$$

$$W(M,T) = W_o(T) + \int_o^M \theta_{ij} u_{i,j,k} dx_k$$

ce qui est simplement l'intégration de la condition (C2).

Compte tenu de (26) ceci conduit à écrire :

$$\int_o^M \theta_{ij} du_{ij} \text{ au temps } T - \int_o^T \theta_{ij} \delta u_{ij} \text{ au point } M = \text{cte} \quad (C4)$$

$$\int_o^M \theta_{ij} u_{i,j,k} dx_k \text{ au temps } T - \int_o^T \theta_{ij} u_{i,j,t} dt \text{ au point } M = \text{cte} \quad (C4')$$

la constante est égale à  $W$  au point  $O$ .

Il est d'ailleurs possible de donner une autre forme à cette condition, en la dérivant par rapport à une coordonnée  $x_k$ .

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \int_0^M \theta_{ij} u_{i,j,k} dx_k \right\} = \theta_{ij} u_{i,j,k}$$

$$= \int_0^T (\theta_{ij} u_{i,jk})_{,t} dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \int_0^M \theta_{ij} u_{i,j,t} dt \right\} = \int_0^T (\theta_{ij} u_{i,jt})_{,k} dt$$

$$\int_0^T \left\{ (\theta_{ij} u_{i,jt})_{,k} - (\theta_{ij} u_{i,jk})_{,t} \right\} dt = 0 \quad (C5)$$

Remarquons que le premier terme correspond à  $W_{,k}$  et le second à  $\theta_{ij} u_{i,jk}$  ce qui nous reconduit à (C2).

### 3.3 - CONDITIONS DURANT TOUTE LA MISE EN CHARGE

Jusqu'ici il n'a été considéré que les conditions d'indépendance pour un état de chargement donné, mais on peut rechercher les conditions pour que les intégrales caractéristiques ne dépendent pas de la surface d'intégration durant toute la mise en charge. Autrement dit, on peut écrire les conditions pour que cette propriété soit, non seulement vraie au temps T, mais à tout instant t compris entre l'état non chargé (temps 0) et le chargement final (temps T).

Pour cela il faut que la condition (C5) soit vérifiée quelque soit T, donc que l'expression sous le signe somme soit toujours nul :

$$(\theta_{ij} u_{i,jt})_{,k} = (\theta_{ij} u_{i,jk})_{,t} \quad (C6)$$

ce qui peut être également

$$d(\theta_{ij} \delta u_{i,j}) = \delta(\theta_{ij} du_{i,j}) \quad (C6')$$

Comme  $\theta_{ij} u_{i,jtk} = \theta_{ij} u_{i,jkt}$

On obtient :

$$\theta_{ij,k} u_{i,jt} = \theta_{ij,t} u_{i,jk} \quad (C7)$$

ou

$$d\theta_{ij} \delta u_{i,j} = \delta\theta_{ij} du_{ij} \quad (C7')$$

$dF$  étant la différentielle spociale de  $F$  ( $dF = F_{,k} dx$ ) et  $\delta F$  la différentielle temporelle ( $\delta F = \frac{\partial F}{\partial t} \delta t$ )

Cette dernière condition est extrêmement intéressante, car elle indique la condition de variation de la contrainte et de la déformation lors d'un accroissement de chargement pour que les intégrales restent indépendantes de la surface d'intégration.

Remarque sur une symétrie

Remarquons que  $W$  est nécessairement intégrable dans l'espace (valeur unique de  $W$  en chaque point) c'est à dire que  $W_{,kl} = W_{,lk}$  ce qui compte tenu de la condition (C2) entraîne :

ou

$$(\theta_{ij} u_{i,jk})_{,l} = (\theta_{ij} u_{i,jl})_{,k} \quad (C2')$$

$$\theta_{ij,l} u_{i,jk} = \theta_{ij,k} u_{i,jl} \quad (C2'')$$

Expressions spociales tout à fait identiques aux expressions spacio-temporelles (C6) et (C7). Il est alors possible de donner une autre forme aux conditions (C6) et (C7) en adoptant un espace temps défini par les 4 coordonnées  $y_\alpha$

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	-
$t$	-	-		$t$
$y_\alpha$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$t$

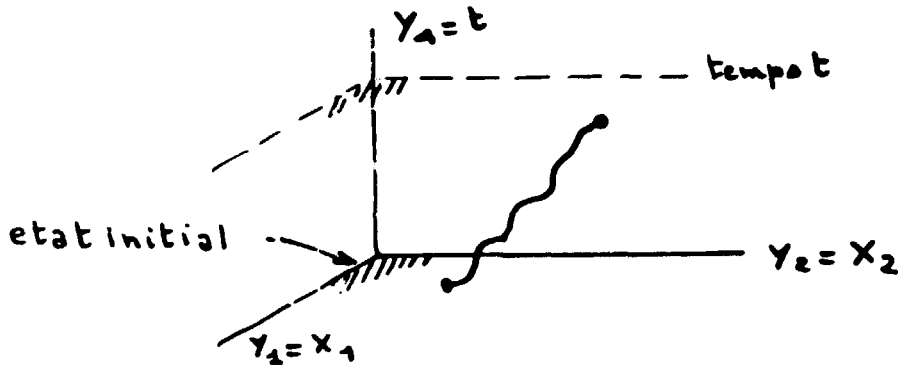
On a :

$$\begin{aligned} dW + \delta W &= W_{,k} dx_k + W_{,t} dx_t \\ &= \theta_{ij} u_{ij,k} dx_k + \theta_{ij} u_{ij,t} dt \end{aligned}$$

que l'on peut écrire :

$$\overline{dW} = \theta_{ij} u_{ij,\alpha} dy_\alpha \quad (C8)$$

ou  $\overline{dW}$  est la différentielle dans l'espace  $y_\alpha$



### 3.4 - AUTRES FORMES DES CONDITIONS

#### Choix de la déformation et de la contrainte

Si l'on revient à l'origine de la condition, à savoir que  $W$  peut être déterminé en tout point par une intégrale curviligne dans l'espace, on est amené à constater que l'on peut exprimer les conditions à l'aide de déformations et de contraintes généralisées telles que le travail reçu par unité de volume s'exprime par :

$$\delta W = \sigma_\alpha \delta \epsilon_\alpha$$

( $\alpha$  étant un indice muet correspondant à une mise en forme vectorielle des composantes de  $\sigma$  et  $\epsilon$ , par exemple par simple correspondance entre  $ij$  et  $\alpha$ ). Ceci permet d'écrire les conditions sous les formes suivantes :

$$W_{,k} = \sigma_\alpha \epsilon_{\alpha,k} \quad (C'2)$$

$$dW = \sigma_\alpha d\epsilon_\alpha \quad (C'3)$$

$$\int_0^M \sigma_a \varepsilon_{a,k} dx_k - \int_0^T \sigma_a \varepsilon_{a,t} dt = 0 \quad (C'4')$$

(temps T)                      (point M)

$$(\sigma_a \varepsilon_{a,t})_{,k} = (\sigma_a \varepsilon_{a,k})_{,t} \quad (C'6')$$

$$d \sigma_a \delta \varepsilon_a = d \varepsilon_a \delta \sigma_a \quad (C'7')$$

qui sont plus familières

#### Utilisation du travail complémentaire

Si l'on note que :

$$\delta W + \delta W^c = \delta (\sigma_a \varepsilon_a)$$

où  $\sigma_a \varepsilon_a$  est intégrable et ne dépend pas de

l'histoire locale du chargement, il est convenable d'utiliser  $W^c$  dans l'expression des conditions précédentes :

$$W^c_{,k} = \sigma_{a,k} \varepsilon_a \quad (C''2)$$

$$dW^c = \varepsilon_a d \varepsilon_a$$

$$\int_0^M \varepsilon_a \sigma_{a,k} dx_k \underset{\text{en T}}{=} \int_0^T \varepsilon_a \sigma_{a,t} dt \underset{\text{en M}}{\quad} \quad (C''4')$$

$$(\sigma_{a,t} \varepsilon_a)_{,k} = (\sigma_{a,k} \varepsilon_a)_{,t} \quad (C''6')$$

$$d \varepsilon_a \delta \sigma_a = d \sigma_a \delta \varepsilon_a \quad (\text{même})$$

### 3.5 - CAS DU COMPORTEMENT ELASTIQUE

Par comportement élastique, il ne faut pas entendre un comportement linéaire ( $\sigma_a$  fonction linéaire de  $\varepsilon_a$ ), mais l'existence en chaque point d'un potentiel élastique, c'est à dire de l'intégrabilité de  $\delta W$  qui est une fonction :

- de la déformation,
- d'autres quantités  $z$  telles que les coordonnées.

On a alors :

$$\sigma_a = \frac{\partial W(\epsilon_a, z)}{\partial \epsilon_a}$$

et la condition (C'2) s'écrit :

$$W_{,k} = \frac{\partial W(\epsilon_a, z)}{\partial \epsilon_a} \epsilon_{a,k}$$

comme :

$$W_{,k} = \frac{\partial W(\epsilon_a, z)}{\partial \sigma_a} \epsilon_{a,k} + \frac{\partial W}{\partial z} z_{,k}$$

il faut que  $\frac{\partial W}{\partial z} z_{,k} = 0$ , c'est à dire que la densité d'énergie élastique ne dépende pas du point considéré autrement que par l'intermédiaire de la déformation (qui peut dépendre du point).

### 3.6 - A PROPOS DU CAS ELASTO-PLASTIQUE PARFAIT

Nous caractériserons le corps élasto plastique parfait par :

- une élasticité régie par un potentiel élastique  $W^E$  ne dépendant pas du point considéré :

$$\sigma_a = \frac{\partial W^E}{\partial \epsilon_a^E}$$

c'est à dire que la déformation élastique  $\epsilon_a^E$  est donnée par :

$$\epsilon_a^E = \frac{\partial W^{EC}}{\partial \sigma_a}$$

- une surface d'écoulement  $F(\sigma_a) = \sigma_y$  où  $\sigma_y$  (limite d'élasticité) est constante (pas de consolidation par écrouissage) et où  $F$  est homogène du 1er degré par rapport à  $\sigma_a$ .

- le respect du principe de Hill, c'est à dire que l'incrément de déformation plastique est donné par :

$$\delta \epsilon_a^P = \frac{\partial F}{\partial \sigma_a} \delta \sigma_a$$

c'est à dire l'énergie plastique par  $W^P = \sigma_y \epsilon^P$

La condition (C'2) s'écrit ici :

$$W_{,k}^E + W_{,k}^P = \sigma_a \epsilon_{a,k}^E + \sigma_a \epsilon_{a,k}^P$$

comme  $W_{,k}^E = \sigma_a \epsilon_{a,k}^E$

on a  $W_{,k}^P = \sigma_a \epsilon_{a,k}^P$

soit :  $\sigma_y \epsilon_{,k}^P = \sigma_a \epsilon_{a,k}^P$

ou

$$\sigma_y d\epsilon^P = \sigma_a d\epsilon_a^P$$

expression spatiale identique à l'expression temporelle :

$$\sigma_y \xi \epsilon^P = \sigma_a \delta \epsilon_a^P$$

comme déjà précédemment constaté.

### Cas particulier

Si la plastification, après avoir débuté se poursuit en chaque point, on a :

$$\sigma_a = \frac{\partial(\delta \epsilon^P)}{\partial(\delta \epsilon_a^P)}$$

de plus, dans le cas où la déformation est radiale, c'est à dire où  $\delta \epsilon_a^P$  reste proportionnelle (en chaque point plastifié) à  $\delta \epsilon^P$  on peut écrire :

$$\sigma_a = \frac{\partial \epsilon^P}{\partial \epsilon_a}$$

qui entraîne la réalisation de la condition, pour autant que le corps soit homogène ( $\sigma_y$  constant).





*Edité par*

*le Service de Documentation*

*Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay*

*Boîte Postale n° 2*

*91190 - Gif-sur-YVETTE (France)*