

COMMISSARIAT
A L'ENERGIE
ATOMIQUE

CENTRE D'ÉTUDES NUCLÉAIRES
DE GRENOBLE

LABORATOIRE
D'ELECTRONIQUE
ET DE
TECHNOLOGIE
DE L'INFORMATIQUE

C.E.A. - C.E.N. - G

LABORATOIRE D'ELECTRONIQUE ET
DE TECHNOLOGIE DE L'INFORMATIQUE

1er Septembre 1975

Laboratoire Mesure, Contrôle et
Traitement Electronique

Division Traitement du Signal

~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~
Journées d'Information
Electronique

Saclay, 15-17 Avril 1975

CEA-CONF--3349
FR360.14.16
Note Technique ~~XXXXXXXXXXXX~~
CEA-LTI-MTE--1109
OPERATEURS RAPIDES POUR
LE TRAITEMENT DU SIGNAL

par

B. CHABERT
D. BERTHIER (Hewlett-Packard)
P. DUTANG
P. GARDERET

1. INTRODUCTION

Nous allons décrire deux opérateurs câblés pouvant réaliser rapidement des fonctions bien définies. Ces appareils, utilisés comme périphériques de calculateurs, sont :

- une Unité Rapide de Transformée de Fourier (URTF)
- un Corrélateur Multibit à Large Bande (COMULAB 16)

2. UNITE RAPIDE DE TRANSFORMEE DE FOURIER-URTF

C'est un appareil câblé réalisant les opérations suivantes :

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k w^{nk} \quad (\text{T.F. discrète directe})$$

ou

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n w^{-nk} \quad (\text{T.F. discrète Inverse})$$

où :

$$w = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$$

Les opérations sont effectuées en utilisant un des algorithmes de calcul rapide de la T.F. (FFT : Fast Fourier Transform). L'algorithme utilisé est donné figure 1 dans le cas particulier où $N = 16$. Si le nombre de points est $N = 2^p$, le calcul s'effectue en p "passes T.F.". Si p est l'ordre de chaque "passe T.F.", nous effectuons alors 2^{p-1} T.F. élémentaires comportant chacune $\frac{N}{2^p}$ "papillons". Le calcul d'un "papillon" avec les formules utilisées est donné figure 2.

Après P "passes T,F," nous avons tous les résultats X_n (ou x_k) mais les N résultats ne sont pas ordonnés et il est nécessaire de faire une "passe rangement" qui met les résultats dans l'ordre. Au cours de cette passe, aucun calcul n'est effectué. Chaque résultat provenant d'une adresse $n = n_p, n_{p-1}, \dots, n_p, \dots, n_1, n_0$ (où n_p sont les digits de n représenté en binaire) est placé, après rangement, à l'adresse $n' = n_0, n_1, \dots, n_p, \dots, n_{p-1}, n_p$.

Dans le cas où l'on veut réaliser une T,F, sur un signal temporel réel de $2N$ échantillons, au lieu de réaliser une F.F.T. sur $2N$ points complexes en mettant des zéros dans la partie imaginaire, on peut réaliser une F,F.T. sur N points en remplissant successivement la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des mots complexes d'entrée. Mais le résultat obtenu, après P "passes T,F," et la "passe de rangement", n'est pas celui recherché. Il faut effectuer une "passe supplémentaire" afin d'obtenir les N points du spectre du signal temporel réel, dans la bande 0-B. Les détails des calculs effectués dans cette passe sont donnés figure 3. Il est possible de revenir aux échantillons du signal temporel placés comme au départ en effectuant d'abord une "passe supplémentaire inverse" et ensuite une F.F.T. Inverse.

La figure 4 donne le schéma synoptique de l'appareil. Il est couplé à un ordinateur et dialogue avec lui car l'URTF ne possède pas de mémoire de masse. Il réalise le calcul d'un "papillon" de la façon suivante : après avoir déterminé les adresses r et $(\frac{N}{2^p} + r)$ des mots complexes du papillon, l'URTF procède à l'acquisition de ces deux mots complexes. Ensuite il effectue les différents calculs de la figure 2 et les résultats sont écrits dans le calculateur aux mêmes adresses.

L'URTF peut réaliser des T,F, sur des signaux de 2^n échantillons complexes ou de 2^{n+1} échantillons réels, ($8 \leq n \leq 13$). Les temps de calcul sont donnés dans le tableau ci-après :

Echantillons N échantillons	Réels	Complexes
	Temps en ms TF + Rangt + P.sup.	
$2^8 = 256$		12
$2^9 = 512$	14	26
$2^{10} = 1024$	30	58
$2^{11} = 2048$	65	125
$2^{12} = 4096$	140	270
$2^{13} = 8192$	300	580
$2^{14} = 16.384$	650	

3. CORRELATEUR MULTIBIT A LARGE BANDE (COMULAB 16)

3.1. Rappel sur les erreurs commises dans le calcul des fonctions de corrélation

Rappelons que par définition, et dans le cas de processus ergodiques, la fonction de corrélation de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est :

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t-\tau) dt$$

En pratique, le temps d'intégration étant fini, nous calculons une estimation de $C(\tau)$. La variance de l'erreur commise sur le premier point de la fonction d'autocorrélation d'un signal gaussien est :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{BT}}$$

où B est la largeur de bande du signal et T le temps d'intégration.

Les corrélateurs numériques travaillent sur des signaux échantillonnés et quantifiés. La quantification apporte une erreur supplémentaire. La figure 5 donne la variance de cette erreur sur le premier point de la fonction d'autocorrélation pour des signaux gaussiens, en fonction du codage utilisé, et pour deux types de corrélateurs :

- le corrélateur numérique sans addition de bruits auxiliaires
- le corrélateur numérique avec addition de bruits auxiliaires

3.2. Optimisation du codage

La figure 6 montre l'évolution en fonction du temps d'intégration, de l'erreur ϵ_1 , de l'erreur ϵ_2 due à la quantification pour un corrélateur numérique codant à 8 bits et de l'erreur ϵ_3 due à la quantification pour un corrélateur avec addition de bruits auxiliaires codant à 2 bits + signe (7 niveaux). Nous voyons que pour ce dernier l'erreur ϵ_3 est toujours inférieure à ϵ_1 . Le codage optimum pour calculer des fonctions de corrélations de signaux gaussiens semble donc être ce dernier.

3.3. COMULAB 16

Un corrélateur fonctionnant sur ce principe a été construit au LETI. La fréquence maximum d'échantillonnage, en temps réel, pour un tel corrélateur est de 16 MHz. Le schéma de principe est donné figure 7 pour un corrélateur 256 points. Nous remarquons en particulier pour chacun des points de corrélation : un multiplieur et un intégrateur 16 bits fonctionnant à 16 MHz, et une post-intégration sur 32 bits s'effectuant séquentiellement sur chacun des 256 points à une fréquence de l'ordre du MHz.

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Algorithme FFT utilisé (cas où $N = 16$)

Figure 2 : Passe T.F. - $N = 2^p$ points

Figure 3 : Passe supplémentaire

Figure 4 : Schéma synoptique de l'URTF

Figure 5 : Erreur relative sur le 1er point de corrélation

Figure 6 : Erreur relative sur la corrélation

Figure 7 : Principe du corrélateur "Cumulab 16"

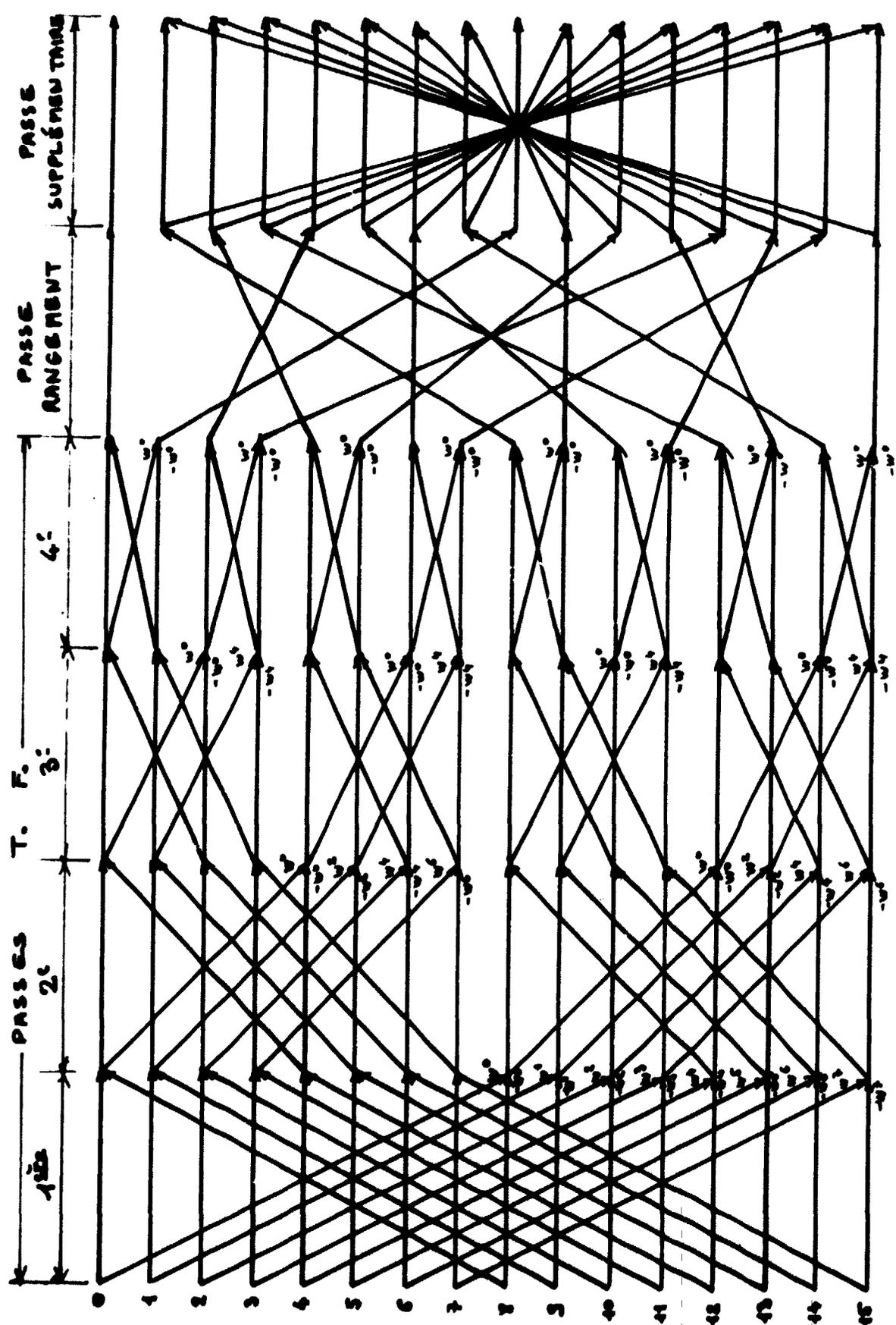


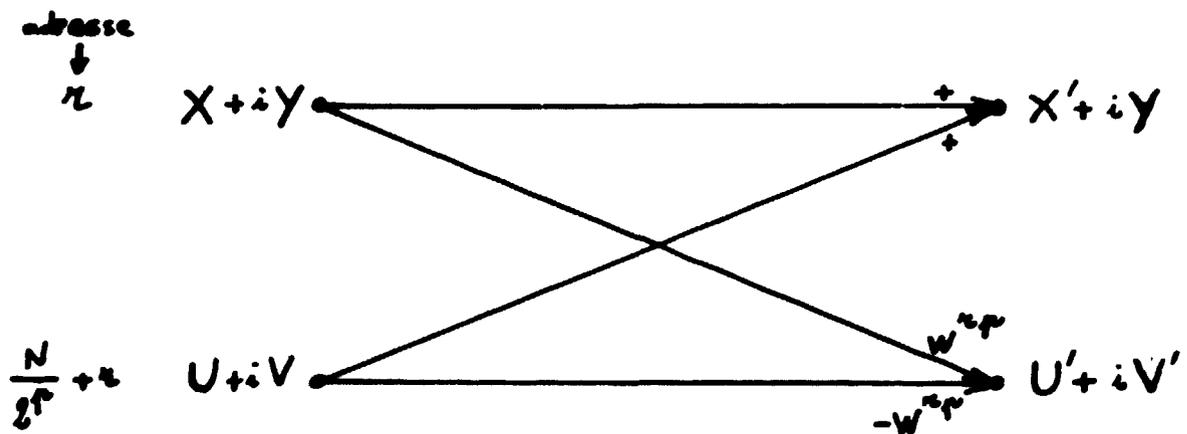
Fig. 1 - ALGORITHME FFT UTILISÉ (cas où $N=16$)

N 7 n° 1105

PASSE T. F. - $N = 2^P$ points

Calcul d'un "papillon" correspondant à :

$$\begin{cases} p^{\text{ème}} \text{ passe} & 1 \leq p \leq P \\ R^{\text{ème}} \text{ T.F. élémentaire} & 1 \leq R \leq 2^{p-1} \\ r = \text{adresse des points} & 0 \leq r \leq \frac{N}{2^p} - 1 \end{cases}$$



$$\text{avec } W = e^{-\frac{\varepsilon 2\pi i}{N}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{T.F. directe} \\ \varepsilon = -1 \Rightarrow \text{T.F. inverse} \end{array} \right.$$

$$X' = X + U$$

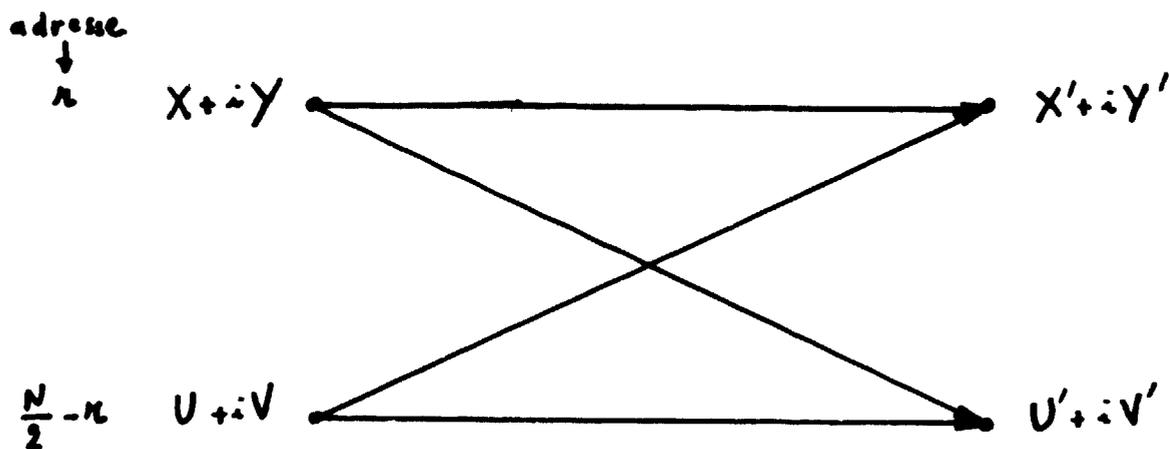
$$Y' = Y + V$$

$$U' = (X - U) \cos \frac{2\pi}{N} r p + \varepsilon (Y - V) \sin \frac{2\pi}{N} r p$$

$$V' = (Y - V) \cos \frac{2\pi}{N} r p - \varepsilon (X - U) \sin \frac{2\pi}{N} r p$$

Fig. 2 - Formules du calcul d'un "papillon"

PASSE SUPPLÉMENTAIRE



$$2X' = (X + U) + E(Y + V) \cos \frac{\pi}{N} n - (X - U) \sin \frac{\pi}{N} n$$

$$2Y' = (Y - V) - E(X - U) \cos \frac{\pi}{N} n - (Y + V) \sin \frac{\pi}{N} n$$

$$2U' = (X + U) - E(Y + V) \cos \frac{\pi}{N} n + (X - U) \sin \frac{\pi}{N} n$$

$$2V' = -(Y - V) - E(X - U) \cos \frac{\pi}{N} n - (Y + V) \sin \frac{\pi}{N} n$$

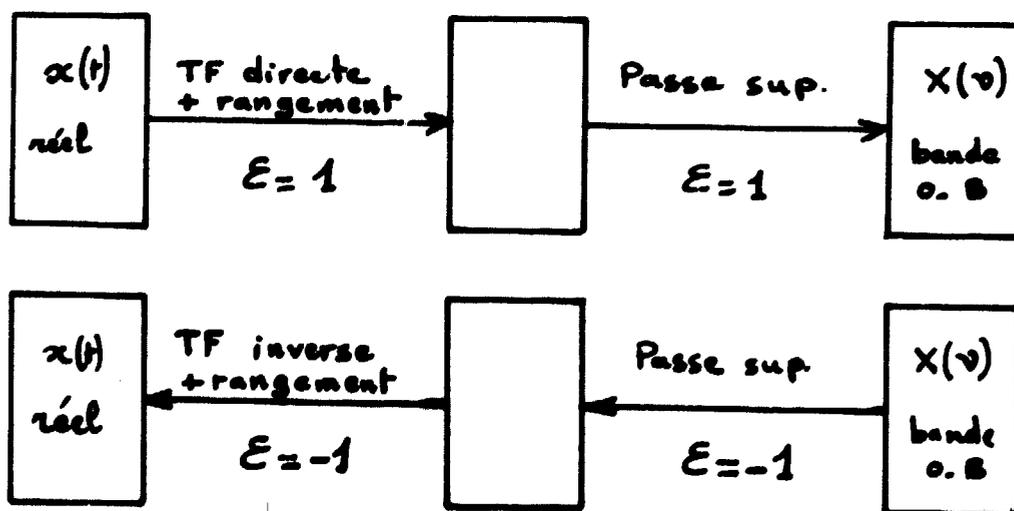


Fig. 3. Formules du calcul de la passe supplémentaire.

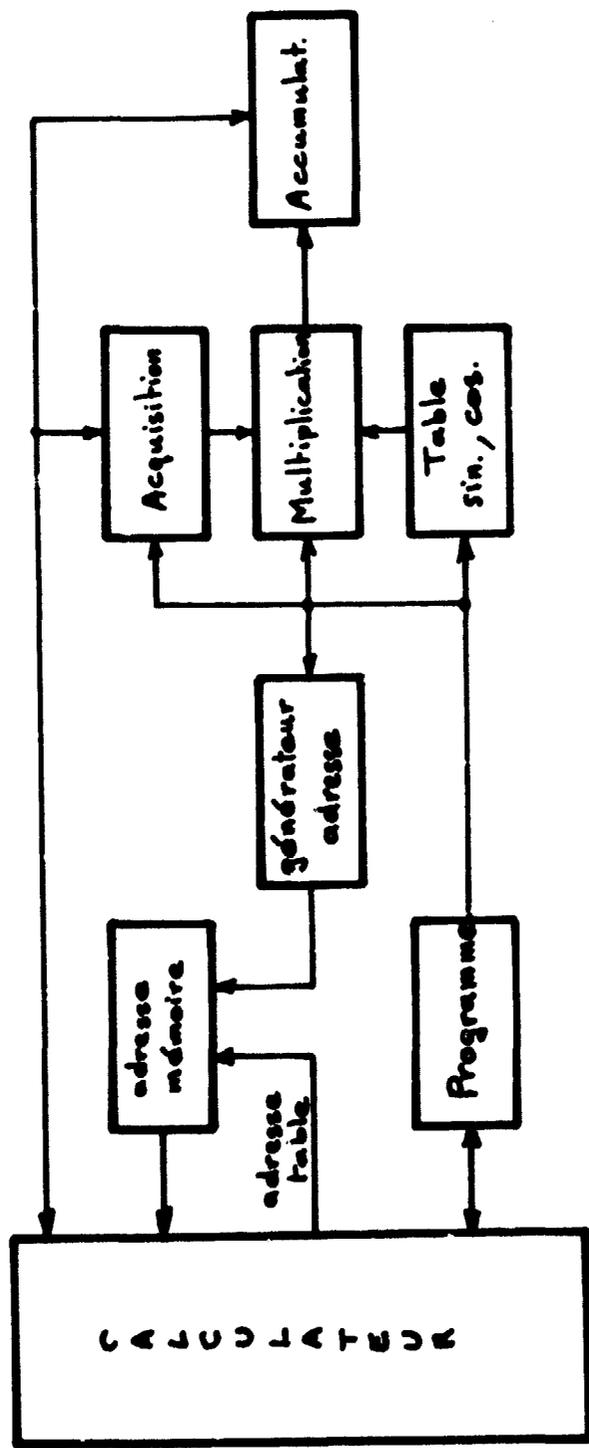


Fig.4- SCHEMA SYNOPTIQUE DE L'URTf

N T 2° 1109

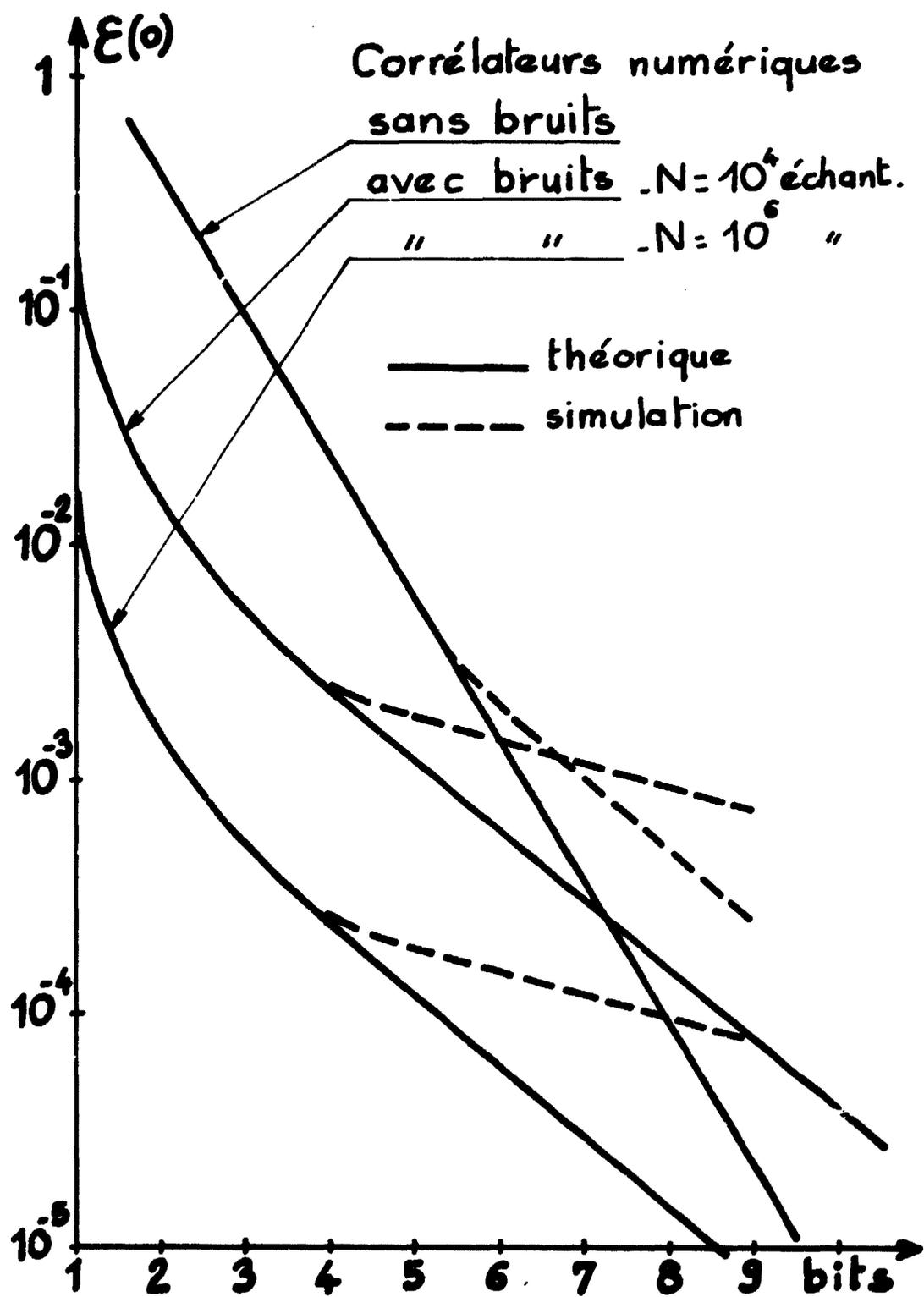


Fig. 5. ERREUR RELATIVE SUR LE 1^{er} POINT DE CORRÉLATION

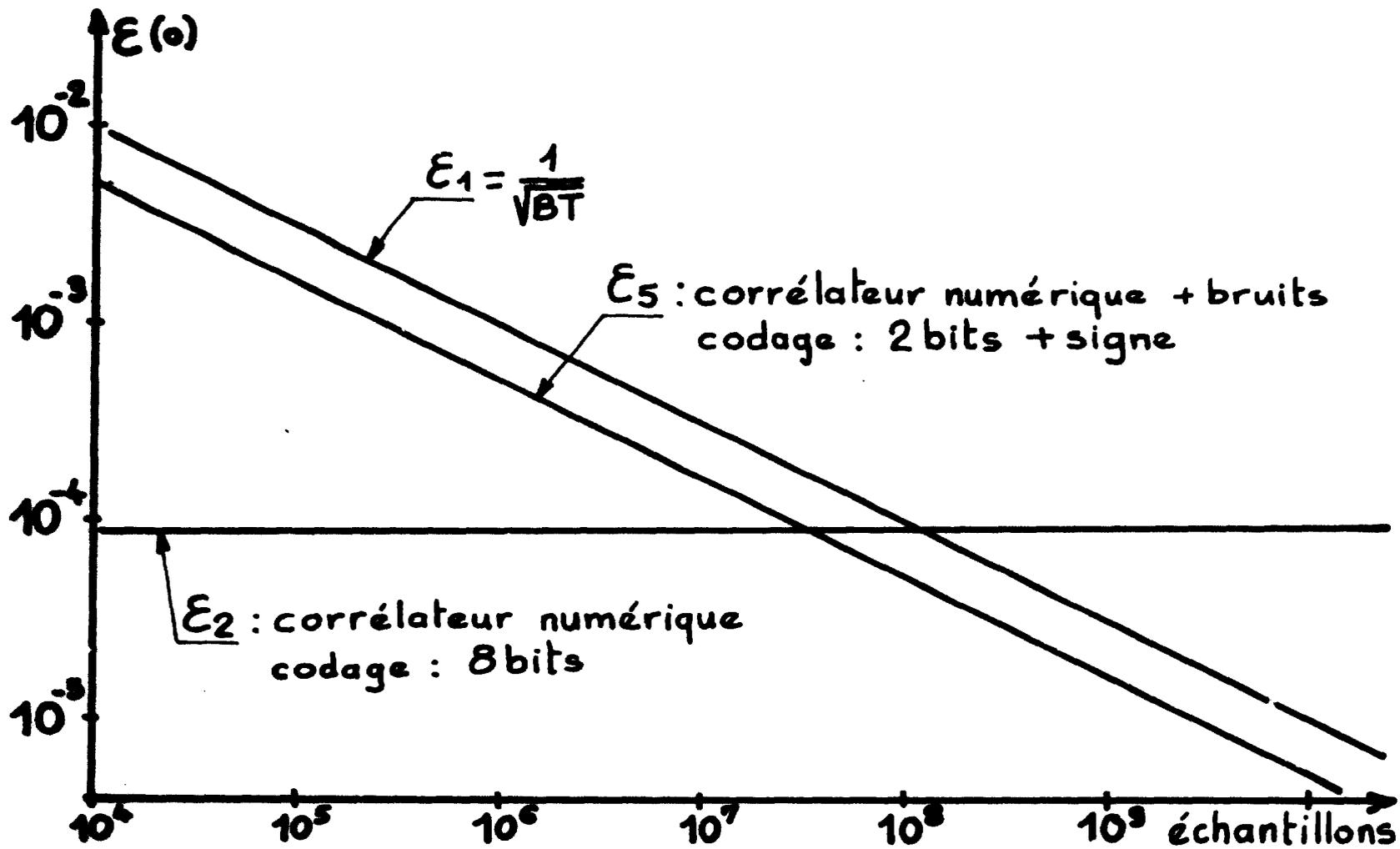


Fig. 6. ERREUR RELATIVE SUR LA CORRÉLATION

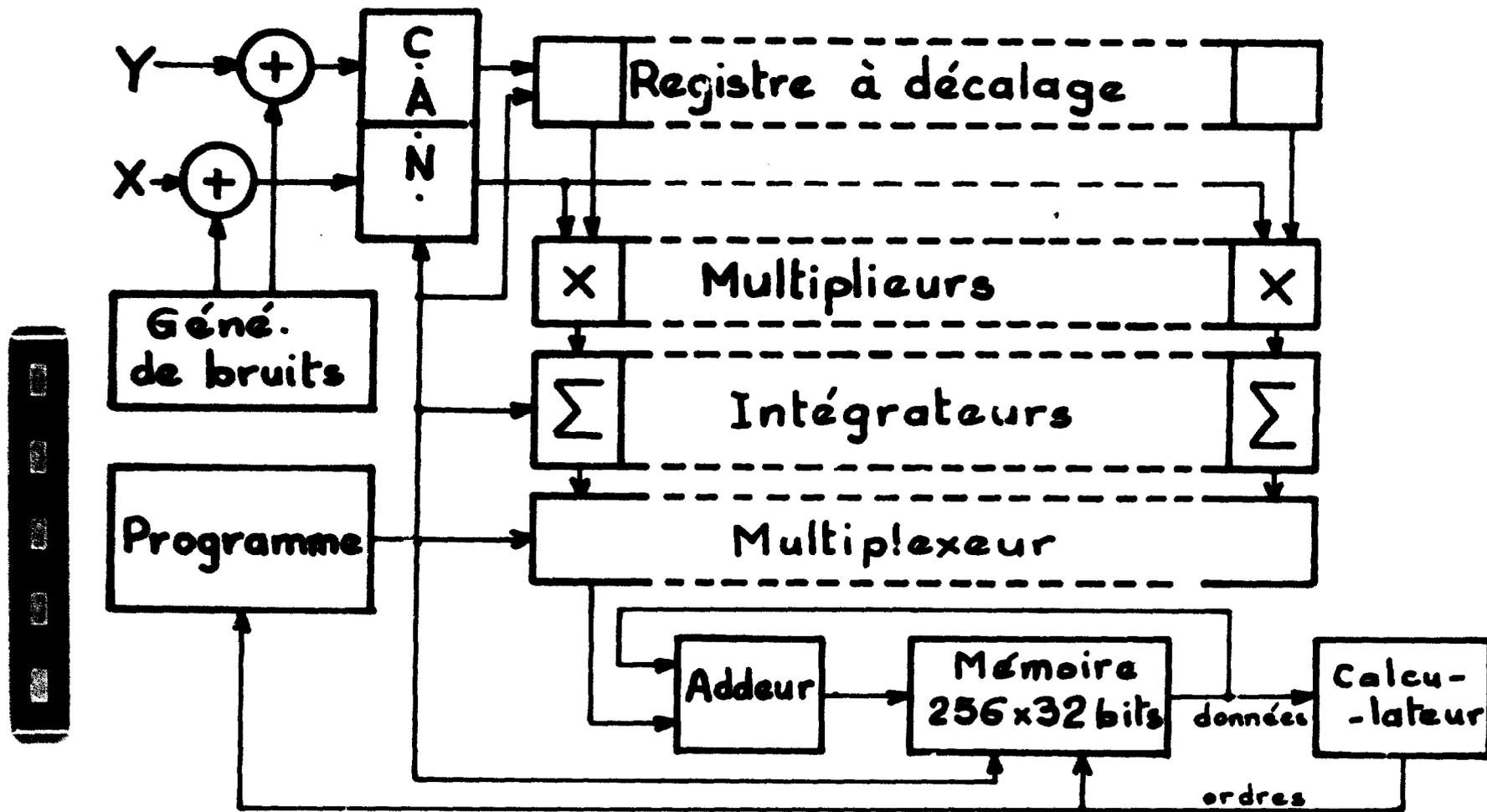


Fig.7. PRINCIPE DU CORRÉLATEUR "COMULAB 16"