CEA-R-4714

CEA-R-4714

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

E.11

ETUDE THEORIQUE DE L'ECOULEMENT DANS UNE CENTRIFUGEUSE A CONTRE COURANT THERMIQUE

par

Jean DURIVAULT, Pierre LOUVET

DIVISION DE CHIMIE

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA-R-4714

PLAN DE CLASSIFICATION DES RAPPORTS ET BIBLIOGRAPHIES CEA

(Classification du système international de documentation nucléaire SIDON/INIS)

A 11	Physique théorique
A 12	Physique atomique et moléculaire
A 13	Physique de l'état condensé
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires
A 15	Astrophysique, cosmologie et rayonnements cosmiques
A 16	Conversion directe d'énergie
A 17	Physique des basses températures
A 20	Physique des hautes énergies
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire
B 11	Analyse chimique et isotopique
B 12	Chimie minérale, chimie organique et physico-chimie
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire
B 14	Chimie sous rayonnement
B 15	Corrosion
B 16	Traitement du combustible
B 21	Métaux et alliages (production et fabrication)
B 22	Métaux et alliages (structure et propriétés physiques)
B 23	Céramiques et cermets
B 24	Matières plastiques et autres matériaux
B 25	Effets des rayonnements sur les propriétés physiques des matériaux
B 30	Sciences de la terre
C 10	Action de l'irradiation externe en biologie
C 20	Action des radioisotopes et leur cinétique
C 30	Utilisation des traceurs dans les sciences de la vie
C 40	Sciences de la vie : autres études
C 50	Radioprotection et environnement
D 10	Isotopes et sources de rayonnements
D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
E 11	Thermodynamique et mécanique des fluides
E 12	Cryogénie
E 13	Installations pilotes et laboratoires
E 14	Explosions nucléaires
E 15	Installations pour manipulation de matériaux radioactifs
E 16	Accélérateurs
E 17	Essais des matériaux
E 20	Réacteurs nucléaires (en général)
E 30	Réacteurs nucléaires (types)
E 40	Instrumentation
E 50	Effluents et déchets radioactifs
F 10	Economie
F 20	Législation nucléaire
F 30	Documentation nucléaire
F 40	Sauvegarde et contrôle
F 50	Méthodes mathématiques et codes de calcul
F 60	Divers

Rapport CEA-R-4714

Cote-matière de ce rapport : E.11

DESCRIPTION-MATIERE *(mots clefs extraits du thesaurus SIDON/INIS)*

en français	*en anglais*
CENTRIFUGEUSES	CENTRIFUGES
AERODYNAMIQUE	AERODYNAMICS
ECOULEMENT DES GAZ	GAS FLOW

- Rapport CEA-R-4714 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Division de Chimie
Département de Génie Isotopique
Service d'Etude de Technologie

Service de Chimie-Physique

ETUDE THEORIQUE DE L'ECOULEMENT DANS UNE CENTRIFUGEUSE A CONTRE COURANT THERMIQUE

par

Jean DURIVAULT, Pierre LOUVET

- Mars 1976 -

CEA-R-4714 - DURIVAULT Jean, LOUVET Pierre

ETUDE THEORIQUE DE L'ECOULEMENT DANS UNE CENTRIFUGEUSE A CONTRE COURANT THERMIQUE

Sommaire.- Dans cette étude, nous calculons l'écoulement dans une centrifugeuse à contre-courant thermique pur et à rejet nul. La méthode appliquée est celle des développements asymptotiques raccordés, les équations de Navier-Stokes étant supposées valables dans l'ensemble de l'écoulement. Si la convection et la dissipation visqueuse disparaissent dans la linéarisation des équations, par contre les effets de compressibilité sont pris en compte. Désignant par ε le nombre d'Ekman, nous avons calculé les grandeurs caractéristiques de l'écoulement dans le cœur, dans la couche d'Ekman d'épaisseur $\varepsilon^{1/2}$ sur les plateaux de la centrifugeuse et dans la couche de Stewartson d'épaisseur $\varepsilon^{1/3}$ le long des parois. En l'absence de convection la couche pariétale d'épaisseur $\varepsilon^{1/4}$ disparaît. Les résultats obtenus montrent l'importance du flux de recirculation d'ordre $\varepsilon^{1/3}$ par rapport au flux de contre-courant d'ordre $\varepsilon^{1/2}$ créé par les couches d'Ekman dans la couche pariétale. Le profil axial de température agit quantitativement et qualitativement sur la recirculation pariétale.

1976 - Commissariat à l'Energie Atomique - France 40 p.

CEA-R-4714 - DURIVAULT Jean, LOUVET Pierre

THEORETICAL STUDY OF FLOW IN A THERMAL COUNTERCURRENT CENTRIFUGE

Summary.- This paper deals with the flow calculation in a thermal countercurrent centrifuge at total reflux. Matched asymptotic expansions are used to find approximate solutions of Navier-Stokes equations which are assumed to be valid in the whole domain. Convection and viscous dissipation dissapear because of linearization, but compressibility is taken into account. Let ε be the Ekman number; we solve the equations in the inviscid core, in the horizontal Ekman layers of thickness O $(\varepsilon^{1/2})$ and in the Stewartson layer of thickness O $(\varepsilon^{1/3})$, parallel to the axis. As we neglect thermal convection, the Stewartson layer of thickness $O(\varepsilon^{1/4})$ does not occur. The results show the importance of the recirculating mass-flow rate of order $O(\varepsilon^{1/3})$ in front of the countercurrent mass-flow rate of order $O(\varepsilon^{1/2})$. The temperature profile rules the pattern and the intensity of the recirculating flow.

1976

Commissariat à l'Energie Atomique - France 40 p.

TABLE DES MATIERES

ETUDE THEORIQUE DE L'ECOULEMENT DANS UNE CENTRIFUGEUSE A CONTRE COURANT THERMIQUE

I - INTRODUCTION.

[illegible] de l'aérodynamique interne des centrifugeuses [illegible] important car il est très difficile de mesurer expérimentalement [illegible] caractéristiques de l'écoulement. Nous nous limitons essentiellement [illegible] à l'aérodynamique des centrifugeuses à contre-courant thermique [illegible]

Dans le cas, l'écoulement est dominé par une stratification [illegible] à cause de la force centrifuge qui impose en l'absence de contre-courant [illegible] tribution de pression de la forme :

$$p_0(r) = p(0) \exp\left(\frac{M}{2} \ldots r^2\right) \qquad [illegible]$$

L'autre influence importante est celle des couches limites des [illegible] (couches d'Ekman /1/) et à un degré moindre celles des parois cylindriques [illegible] de Stewartson /2/. Dans ces conditions, les approximations faites antér[illegible] (pour une bibliographie complète consulter OLANDER /3/) qui consistaient [illegible] la centrifugeuse infinie, à negliger les couches limites ne peuvent [illegible] /2/ que des solutions incorrectes.

La mise sans dimensions des équations de Navier-Stokes fait apparaître le nombre d'Ekman $E = \frac{\mu}{2\rho_0 \Omega R^2}$, très inférieur à 1. Ce paramètre [illegible] singulière dans les équations de Navier-Stokes. Il convient donc d'appliquer [illegible] thode des développements asymptotiques raccordés pour obtenir une solution [illegible] dans toute la centrifugeuse.

Les couches d'Ekman sont bien connues ; [illegible] /1/ [illegible] correcte dans le cas d'un écoulement tournant à masse volumique variable. [illegible] prenons ces résultats dans ce travail. Rappelons ici que ces couches imposent [illegible] passage d'un débit-masse entre les plateaux d'ordre $E^{1/2}$.

Les couches de Stewartson sont des couches de paroi d'ordre [illegible] emboîtées l'une dans l'autre. La couche d'ordre 1/3 permet d'annuler les [illegible] santes tangentielles des vitesses à la paroi. La couche d'ordre [illegible] raccorder la vitesse azimutale V_3 dans la couche 1/3 et dans le [illegible]

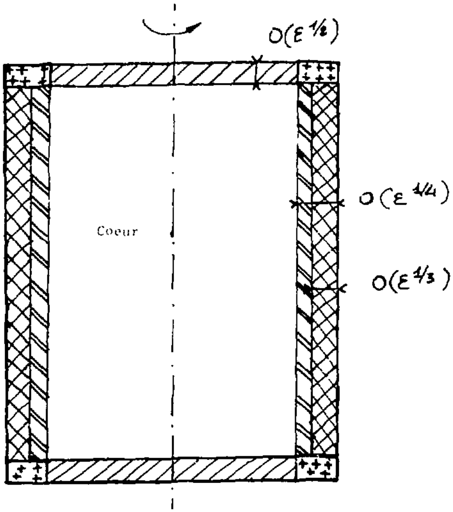


Fig. 1 - Schéma de l'écoulement

Couche d'Ekman

Couche de Stewartson 1/3

Couche de Stewartson 1/4

Extensions d'Ekman

Nous ferons ici comme HUNTER /4/ deux remarques très importantes.

1° Seule la couche 1/3 permet le passage d'un débit masse d'ordre $\varepsilon^{1/2}$

2° Lorsque le problème est dit symétrique ($\psi(z) = \psi(-z)$, ψ désignant la fonction de courant et z l'axe vertical), la couche 1/4 n'existe pas.

Ceci est notre cas en négligeant la convection thermique.

Dans le cas où il y a convection, il existe un débit de recirculation de la couche 1/4 dans la couche 1/3.

Les travaux de HUNTER /4/, dans l'hypothèse d'un écoulement tournant incompressible linéarisé ont été complétés par les travaux de HOMSY et HUDSON /5,6/, qui se sont particulièrement intéressés à la convection et à certains problèmes de stabilité de couche limite.

Dans ce travail, nous supposons les équations linéarisées, nous négligeons les termes de convection thermique mais nous tenons compte de la variation de masse volumique. Notre calcul s'applique donc au cas des centrifugeuses à contre-courant thermique à rejet nul.

Les deux étapes ultérieures consisteront d'une part à calculer l'influence des injections et des soutirages, d'autre part à étudier l'influence des termes de convection.

Remarque - Toutes les études précédentes ont été faites dans le cadre des équations de Navier-Stokes. Nous avons négligé les effets de raréfaction qui apparaissent dans la région centrale pour les vitesses de rotation élevées. Ces effets ne peuvent être décrits correctement que dans le cadre de la théorie cinétique, ce qui serait trop compliqué.

II - EQUATIONS DU PROBLEME.

a) Nous nous plaçons ici dans un système de coordonnées cylindriques z, r, θ dont les axes *sont fixes* (Fig. 2), V_r, V_θ, V_z désignent les différentes vitesses.

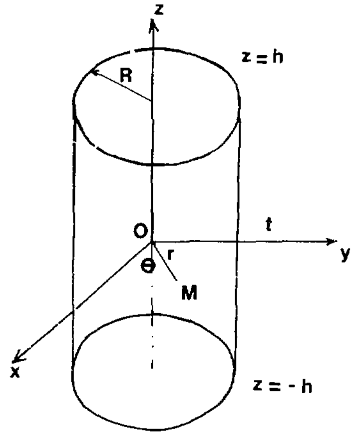


Fig. 2 - Coordonnées cylindriques.

Nous supposons également la symétrie cylindrique ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$).

Dans l'hypothèse où le libre parcours moyen du gaz est très inférieur à 1 dans la totalité de l'enceinte, les équations de Navier-Stokes sont applicables :

- Conservation de la masse

$$\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho V r)}{\partial r} = 0 \qquad (2)$$

- équation de la quantité de mouvement axiale *

$$\rho\left(V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left\{\frac{\partial^2 V z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V z}{\partial r}\right\} + \frac{\mu}{3}\left\{\frac{\partial^2 V z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial V r}{\partial z}\right\} - \rho g \qquad (3)$$

* Axe Oz dirigé vers le haut.

- Equation de la quantité de mouvement radiale

$$\rho\,(V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\theta^2}{r}) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\,\{\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\}$$
$$+ \frac{\mu}{3}\,\{\frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\}$$

- Conservation de la quantité de mouvement azimutale

$$\rho\,(V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r V_\theta}{r}) = \mu\,(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2})$$

- Conservation de l'énergie :

$$\rho\, C_p\,(V_z \frac{\partial T}{\partial z} + V_r \frac{\partial T}{\partial r}) = V_z \frac{\partial p}{\partial z} + V_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}(\kappa \frac{\partial T}{\partial z})$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\kappa \frac{\partial T}{\partial r}) + \phi$$

où ϕ désigne la dissipation visqueuse

$$\phi = \mu\,\{2\,[(\frac{\partial V_z}{\partial z})^2 + (\frac{\partial V_r}{\partial r})^2 + \frac{V_r^2}{r^2}] + (\frac{\partial V_\theta}{\partial z})^2 + (\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r})^2$$
$$+ (\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r})^2 - \frac{2}{3}\,(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r})^2\}$$

- Equation d'état

Nous supposons que l'UF_6 se comporte comme un gaz parfait.

$$p = \rho \frac{\mathcal{R} T}{M}$$

N.B. - Nous nous limitons ici à l'aérodynamique d'un gaz simple en rotation. Nous ne traitons pas ici les équations de la diffusion et de la conservation de l'élément léger, qui, dans le cas d'un mélange $_{235}UF_6$ - $_{238}UF_6$, peuvent s'intégrer séparément connaissant l'écoulement moyen.

b) Mise sous forme adimensionnelle.

On pose, en supposant tous les coefficients thermodynamiques ou de transports constants :

$$\bar{z} = \frac{z}{R}\ ;\ \bar{r} = \frac{r}{R}\ ;\ \bar{V} = \frac{V}{\omega R}\ ;\ \frac{1}{\beta} = \frac{R}{h}\ ;\ A = \frac{g}{\omega R}\ ;$$
$$\bar{T} = \frac{T}{T_o}\ \text{où}\ T_o = \frac{T(+h) + T(-h)}{2}\ ;\ \bar{p} = \frac{p}{p_o}\ \text{où}\ p_o = \rho_o \frac{\mathcal{R} T_o}{M}\ ;$$

$$S = \frac{\omega R}{\sqrt{2 \cdot \frac{\mathcal{R} T_o}{M}}}\ ;\ P_r = \frac{\mu C_p}{\kappa} \qquad (8)$$

ρ_o désigne la masse volumique à l'abscisse r.

On obtient alors les équations suivantes :

- conservation de la masse.

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\ \bar{V}_z)}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\bar{\rho}\ \bar{V}_r\ \bar{r}) + 2S^2\ \bar{V}_r\ \bar{r}\ \bar{\rho} = o \qquad (9)$$

- conservation de la quantité de mouvement axiale

$$\bar{\rho}\ (\bar{V}_z \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{z}} + \bar{V}_r \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{r}}) = -\frac{1}{2S^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\quad 2\varepsilon\ \{\frac{4}{3}\frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial \bar{r}^2}$$
$$+ \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \bar{r}\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \bar{z}^2}\} - \bar{\rho}\ A \qquad (10)$$

- *Conservation de la quantité de mouvement radiale*

$$\bar\rho\left(\bar V_z \frac{\partial \bar V_r}{\partial \bar z} + \bar V_r \frac{\partial \bar V_r}{\partial \bar r} - \frac{\bar V_\theta^2}{\bar r}\right) = -\bar\rho\, r - \frac{1}{2S^2}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar r} + 2\varepsilon\left(\frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2 \bar V_r}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar V_r}{\partial \bar r} - \frac{\bar V_r}{\bar r^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \bar V_z}{\partial \bar r\partial \bar z} + \frac{\partial^2 \bar V_r}{\partial \bar z^2}\right) \tag{11}$$

- Conservation de la quantité de mouvement tangentielle

$$\bar\rho\left(\bar V_z \frac{\partial \bar V_\theta}{\partial \bar z} + \bar V_r \frac{\partial \bar V_\theta}{\partial \bar r} + \frac{\bar V_\theta \bar V_r}{\bar r}\right) = 2\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \bar V_\theta}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \bar V_\theta}{\partial \bar r} + \frac{\partial^2 \bar V_\theta}{\partial \bar z^2} - \frac{\bar V_\theta}{\bar r^2}\right) \tag{12}$$

- Conservation de l'énergie

$$\frac{\bar\rho}{4S^2}\frac{1}{\gamma-1}\left(\bar V_z \frac{\partial \bar T}{\partial \bar z} + \bar V_r \frac{\partial \bar T}{\partial \bar r}\right) = \frac{1}{4S^2}\left(\bar V_z \frac{\partial \bar p}{\partial \bar z} + \bar V_r \frac{\partial \bar p}{\partial \bar r} + 2S^2\, \bar V_r\, \bar r\, \bar p\right) + \varepsilon\,\bar\Phi + \frac{\varepsilon}{P_r}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{2S^2}\left(\frac{\partial^2 \bar T}{\partial \bar z^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\bar r\frac{\partial \bar T}{\partial \bar r}\right)\right) \tag{13}$$

où

$$\bar\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial \bar V_z}{\partial \bar z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar V_r}{\partial \bar r}\right)^2 + \frac{\bar V_r^2}{\bar r^2}\right] + \left(\frac{\partial \bar V_\theta}{\partial \bar z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar V_r}{\partial \bar z} + \frac{\partial \bar V_z}{\partial \bar r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar V_\theta}{\partial \bar r} - \frac{\bar V_\theta}{\bar r}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \bar V_z}{\partial \bar z} + \frac{\partial \bar V_r}{\partial \bar r} + \frac{\bar V_\theta}{\bar r}\right)^2 \tag{14}$$

- Equation d'état

$$\bar p = \bar\rho\, \bar T \tag{15}$$

Dans la suite, nous retirons les - qui alourdiraient inutilement l'écriture.

La vitesse de rotation étant très grande, nous retirons la solution en équilibre correspondant à la rotation en bloc. Ceci revient à se placer dans le référentiel *tournant. Posons :*

$$\begin{aligned} V_z &= V_z' & \qquad p &= 1 + p' \\ V_r &= V_r' & \qquad T &= 1 + T' \\ V_\theta &= r + V_\theta' & \qquad \rho &= 1 + \rho' \end{aligned} \tag{16}$$

Les équations (9) à (15) deviennent :

$$\frac{\partial V_z'}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r')}{\partial r} + 2S^2\, V_r'\, r + \frac{\partial(\rho' V_z')}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho' V_r' r) + 2S^2\, \rho' V_r'\, r = 0 \tag{17}$$

$$(1+\rho')\left(V_z'\frac{\partial V_z'}{\partial z} + V_r'\frac{\partial V_z'}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2S^2}\frac{\partial p'}{\partial z} - A\,(1+\rho') + 2\,\varepsilon\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 V_z'}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z'}{\partial r} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_r'}{\partial r\partial z} + \frac{1}{3r}\frac{\partial V_r'}{\partial z}\right) \tag{18}$$

$$-\frac{\rho' V_\theta'^2}{r} - 2V_\theta' - r\rho' + V_z'\frac{\partial V_r'}{\partial z} + V_r'\frac{\partial V_r'}{\partial r} - \frac{V_\theta'^2}{r} + \rho'\left(V_z'\frac{\partial V_r'}{\partial z} + V_r'\frac{\partial V_r'}{\partial r} - 2V_\theta'\right) + p' r + \frac{1}{2S^2}\frac{\partial p'}{\partial r} = 2\varepsilon\left(\frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2 V_r'}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r'}{\partial r} - \frac{V_r'}{r^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_z'}{\partial r\partial z} + \frac{\partial^2 V_z'}{\partial z^2}\right) \tag{19}$$

$$2 V'_r + 2 \rho' V'_r + (1 + \rho')\,(V'_z \frac{\partial V'_\theta}{\partial z} + \frac{V'_\theta V'_r}{r} + V'_r \frac{\partial V'_\theta}{\partial r})$$

$$= 2\varepsilon \left(\frac{\partial^2 V'_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V'_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V'_\theta}{\partial r} - \frac{V'_\theta}{r^2}\right) \qquad (20)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\,(1 + \rho')\,(V'_z \frac{\partial T'}{\partial z} + V'_r \frac{\partial T'}{\partial r}) = V'_z \frac{\partial p'}{\partial z} + V'_r \frac{\partial p'}{\partial r} + 2 r V'_r S^2 \,(1 + p')$$

$$(21)$$

$$+ 4\,\varepsilon\, S^2\, \Phi' + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{\varepsilon}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T'}{\partial r}\right)\right)$$

$$(22)$$

où $\Phi' = 2\left[\left(\frac{\partial V'_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{V'^2_r}{r^2}\right] + \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'_r}{\partial z} + \frac{\partial V'_z}{\partial r}\right)^2$

$$+ \left(\frac{\partial V'_\theta}{\partial r} - \frac{V'_\theta}{r}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial V'_z}{\partial z} + \frac{\partial V'_r}{\partial r} + \frac{V'_r}{r}\right)^2$$

c) Conditions limites.

Aux parois, nous négligeons les couches de KNUDSEN. Nous ne tenons donc *pas compte des glissements de vitesse et de température.*

- Conditions sur les plateaux

$V'_r = o$

$V'_z = o$ $\qquad z = \pm \beta \qquad \forall r$

$V'_\theta = o$

$T'(\beta) = f_1(r) \quad ; \quad T'(-\beta) = f_2(r)$ $\qquad (23)$

- Conditions sur la paroi cylindrique

$r = 1 \qquad \forall z$

$V'_r = o$

$V'_\theta = o$ $\qquad (24)$

$T' = \ell(z)$

$V'_z = o$

Nous devons assurer la continuité de la condition limite pour la température

$f_1(1) = \ell(\beta)$

$f_2(1) = \ell(-\beta)$ $\qquad (25)$

Sur l'axe, en l'absence de tout organe de prélèvement, nous faisons les hypothèses suivantes :

$r = o \quad ; \quad \forall z$

$$\frac{\partial V'_z}{\partial r} = \frac{\partial T'}{\partial r} = V'_r = V'_\theta = o \qquad (26)$$

Nous supposons également les dérivées finies sur l'axe.

d) Equations linéarisées.

Pour les écrire, nous supposons que les vitesses sont très faibles c'est-à-dire que la solution dans le bol est proche de la solution à l'équilibre. Nous retirons désormais les ' .

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + 2S^2\, r\, V_r = o \qquad (27)$$

$$[illegible] + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{3r}\frac{\partial V_r}{\partial z}) \qquad (28)$$

$$[illegible] \frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 V_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}) \qquad (29)$$

$$[illegible] + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2}) \qquad (30)$$

$$[illegible] = 0 \qquad (31)$$

Nous retenons ici deux remarques importantes :

- La présente linéarisation est équivalente à un développement (/1/) en fonction du nombre de Rossby (proportionnel à $\frac{\Delta T}{T}$) qui caractérise l'intensité du contre-courant thermique. Ce développement est régulier mais supprime la convection forcée qu'il faut introduire par la méthode de HUNTER /4/.

- Il n'est pas équivalent de linéariser les équations dans le référentiel tournant ou de supposer les équations incompressibles dans le référentiel tournant (SANDER /3/).

Les opérations de passage dans le référentiel tournant et de linéarisation ne sont pas permutables.

Dans ce qui suit, nous négligeons la pesanteur.

III - COUCHES D'EKMAN.

a) Nous sommes en présence d'un problème singulier car les termes du second ordre sont en facteur d'un petit paramètre ε. Nous chercherons donc une solution uniformément continue sous la forme d'un développement externe :

$$
\begin{aligned}
V_\theta\ (r,z) &= V_\theta^{(o)}\ (r,z) + \varepsilon^{1/2}\ V_\theta^{(1)}\ (r,z) + \dots\\
V_r\ (r,z) &= V_r^{(o)}\ (r,z) + \varepsilon^{1/2}\ V_r^{(1)}\ (r,z) + \dots\\
V_z\ (r,z) &= V_z^{(o)}\ (r,z) + \varepsilon^{1/2}\ V_z^{(1)}\ (r,z) + \dots\\
p\ (r,z) &= p^{(o)}\ (r,z) + \varepsilon^{1/2}\ p^{(1)}\ (r,z) + \dots
\end{aligned}
\tag{32}
$$

et d'un développement interne correspondant aux couches d'Ekman :

$$
\begin{aligned}
V_\theta\ (r,z) &= \tilde V_\theta^{(o)}\ (r,\zeta) + \varepsilon^{1/2}\ \tilde V_\theta^{(1)}\ (r,\zeta) + \dots\\
V_r\ (r,z) &= \tilde V_r^{(o)}\ (r,\zeta) + \varepsilon^{1/2}\ \tilde V_r^{(1)}\ (r,\zeta) + \dots\\
V_z\ (r,z) &= \varepsilon^{1/2}\ \tilde V_z^{(o)}\ (r,\zeta) + \dots\\
T\ (r,z) &= \tilde T^{(o)}\ (r,\zeta) + \varepsilon^{1/2}\ \tilde T^{(1)}\ (r,\zeta) + \dots\\
p\ (r,z) &= \tilde p^{(o)}\ (r,\zeta) + \varepsilon^{1/2}\ \tilde p^{(1)}\ (r,\zeta) + \dots
\end{aligned}
\tag{33}
$$

où $\zeta = \dfrac{z \mp B}{\varepsilon^{1/2}}$ et où ε dépend de r par l'intermédiaire de $\rho_o(r)$.

En reportant ces développements dans le système d'équations linéarisées, nous obtenons comme solution intérieure d'ordre unité des couches d'Ekman celle qu'a donné LOTZ /1/.

Le système à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde V_z^{(o)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial (r \tilde V_r^{(o)})}{\partial r} + 2\,S^2\, r\, \tilde V_r^{(o)} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial \tilde p^{(o)}}{\partial \zeta} = 0 \tag{35}$$

$$-\,2\,\tilde V_\theta^{(o)} + \tilde T^{(o)}\, r = 2\,\frac{\partial^2 \tilde V_r^{(o)}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{2S^2}\,\frac{\partial \tilde p^{(o)}}{\partial r} \tag{36}$$

$$\tilde V_r^{(o)} = \frac{\partial^2 \tilde V_\theta^{(o)}}{\partial \zeta^2} \tag{37}$$

$$\tilde V_r^{(o)}\ S^2 r + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\,\frac{1}{Pr}\,\left(\frac{\partial^2 \tilde T^{(o)}}{\partial \zeta^2}\right) = 0 \tag{38}$$

avec les conditions limites pour $z = \pm B$, $\forall\ r$:

$$\tilde{v}_z^{(o)} = o$$
$$\tilde{v}_\theta^{(o)} = o$$
$$\tilde{v}_r^{(o)} = o$$
et $\quad \tilde{T}^{(o)}(r) = T_f(r)$
$$\tilde{T}^{(o)}(-\beta) = -T_f(r) \tag{39}$$

et des conditions de raccord avec l'écoulement central dont nous parlerons plus loin. Les fonctions que nous cherchons doivent être également bornées quand $\zeta \to \infty$.

Ce système peut être résolu à r constant (le $\partial p/\partial r$ s'éliminant par dérivation croisée). Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial^4 \tilde{v}_r^{(o)}}{\partial \zeta^4} + 4\, a^4\, \tilde{v}_r^{(o)} = o \tag{40}$$

où $\quad 4a^4 = 1 + Pr\, S^2 \quad \frac{\gamma-1}{2\gamma}\, r^2 \tag{41}$

et $\quad \tilde{v}_\theta^{(o)} = \iint \tilde{v}_r^{(o)} + C_5\, \zeta + C_6 \tag{42}$

Après quelques calculs algébriques, nous obtenons pour le fond $z = \beta$

$$\tilde{v}_r^{(o)} = 2\, a^2\, C_6^+\, e^{a\zeta} \sin (a\zeta) \tag{43}$$

$$\tilde{v}_\theta^{(o)} = C_6^+ \,(1 - e^{a\zeta} \cos (a\zeta)) \tag{44}$$

$$T^{(o)} = T_f - \frac{2}{r}\,(4\, a^4 - 1)\, C_6^+\, (1 - e^{a\zeta} \cos (a\zeta)) \tag{45}$$

$\tilde{v}_r^{(o)} \to o$ lorsque $\zeta \to -\infty$

Pour le fond $z = -\beta$ le système s'écrit :

$$\tilde{v}_r^{(o)} = 2\, a^2\, C_6^-\, e^{-a\zeta} \sin (a\zeta) \tag{46}$$

$$\tilde{v}_\theta^{(o)} = C_6^- \,(1 - \cos (a\,\zeta))\; e^{-a\zeta} \tag{47}$$

$$\tilde{T}^{(o)} = \frac{2}{r}\left[\frac{T_f r}{2} - C_6^-\,(4a^4 - 1)\,(1-e^{-a\zeta}\cos (a\zeta))\right] \tag{48}$$

La relation entre $C_6^-(r)$ et $C_6^+(r)$ s'établit en écrivant la conservation de la masse à l'intérieur du cylindre de rayon r ($V_r = 0$ à l'extérieur des couches d'Ekman).

Soit $\int_0^{+\infty} 2\,\pi\, r\, \tilde{v}_r^{(o)}\, \rho\, d\zeta + \int_{-\infty}^{o} 2\pi\, r\, \tilde{v}_r^{(o)}\, \rho\, d\zeta = o \tag{49}$

D'où l'on tire en reportant les expressions de $\tilde{v}_r^{(o)}$

$$C_6^-\,(r) = -\,C_6^+\,(r) \tag{50}$$

Comme de plus :

$$-\frac{1}{4S^2}\,\frac{\partial \tilde{p}^{(o)}}{\partial r} = \pm\,\frac{\tilde{T}_f^{(o)}}{2} - 4\, a^4\, C_6^\pm\,(r) \tag{51}$$

est indépendant de ζ nous avons toujours automatiquement $\frac{\partial \tilde{p}^{(o)}}{\partial r} = o$ et $C_6 = \cdot T_f^{(o)} r / 8a^4$. La pression est donc constante dans les couches d'Ekman.

<u>Remarque</u> - s'il y avait prélèvement sur l'un des fonds

$$C_6^- \neq - C_6^+ \quad \text{et } \partial p/\partial r \text{ ne serait plus nul.}$$

Le calcul de V_z est laborieux mais facile. Nous récapitulons ci-dessous les résultats, T_f étant ici la température du fond $z = \beta$

Pour le fond $z = - \beta$

$$\tilde{v}_r^{(o)} = \frac{rT_f}{4a^2} \; e^{-a\zeta} \sin (a\zeta) \tag{52}$$

$$\tilde{v}_\theta^{(o)} = - \frac{rT_f}{8a^4} \left(1 - \cos (a\zeta) \; e^{-a\zeta}\right) \tag{53}$$

$$\tilde{T}^{(o)} = - \frac{T_f}{4a^4} \left(1 + (4a^4 - 1) \; e^{-a\zeta} \cos (a\zeta)\right) \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_z^{(o)} = - \frac{T_f}{8a^3} \Big\{ & e^{-a\zeta} \Big[\frac{4a^4-1}{4a^4} \; a\zeta \sin (a\zeta) - \left(2S^2 r^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8a^4} + \frac{r}{T_f} \frac{dT_f}{dr}\right) \\ & (\sin(a\zeta) + \cos (a\zeta))\Big] + 2S^2 r^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8a^4} + \frac{r}{T_f} \frac{dT_f}{dr} \Big\} \end{aligned} \tag{55}$$

<u>Fond</u> $z = \beta$ $\qquad \tilde{v}_\theta^{(o)} = \frac{rT_f}{8a^4} \left(1 - e^{a\zeta} \cos a\zeta\right)$ (55 bis)

$$\tilde{v}_r^{(o)} = \frac{rT_f}{4a^2} \; e^{a\zeta} \sin (a\zeta) \tag{56}$$

$$\tilde{T}^{(o)} = \frac{T_f}{4a^4} \left(1 + \cos (a\zeta) \; e^{a\zeta} \; (4a^4 - 1)\right) \tag{57}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_z^{(o)} = - \frac{T_f}{8a^3} \Big\{ & e^{a\zeta} \Big[\frac{4a^4-1}{4a^4} \; a\zeta \sin (a\zeta) - \left(2S^2 r^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8a^4} + \frac{r}{T_f} \frac{dT_f}{dr}\right) \\ & (\cos(a\zeta) - \sin(a\zeta))\Big] + 2S^2 r^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8a^4} + \frac{r}{T_f} \frac{dT_f}{dr} \Big\} \end{aligned} \tag{58}$$

Il est possible d'introduire une fonction de courant d'ordre $\varepsilon^{1/2}$ telle que

$$\tilde{v}_r^{(o)} = \frac{1}{r\rho_o} \frac{\partial \tilde{\psi}^{(o)}}{\partial \zeta} \; ; \; \tilde{v}_z^{(o)} = - \frac{1}{r\rho_o} \frac{\partial \tilde{\psi}^{(o)}}{\partial r} \tag{59}$$

$\tilde{\psi}^{(o)}$ a comme expression

Fond $z = - \beta$

$$\tilde{\psi}^{(o)} (r, \zeta) = + \frac{r^2 T_f \rho_o(r)}{8a^3} \left[1 - e^{-a\zeta} \left(\cos (a\zeta) + \sin (a\zeta)\right)\right] \tag{60}$$

Fond $z = \beta$

$$\tilde{\psi}^{(o)} (r, \zeta) = \frac{r^2 T_f \rho_o(r)}{8a^3} \left[1 - e^{a\zeta} \left(\cos(a\zeta) - \sin(a\zeta)\right)\right] \tag{61}$$

IV - COUCHE DE STEWARTSON EN $\varepsilon^{1/3}$

a) <u>Nous cherchons des solutions internes sous la forme</u>

$$\hat{V}_r(\xi, z, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3}\,\hat{V}_r^{(0)} + \varepsilon^{1/2}\,\hat{V}_r^{(1)} + \varepsilon^{2/3}\,\hat{V}_r^{(2)} + \dots\dots$$

$$\hat{V}_\theta(\xi, z, \varepsilon) = \hat{V}_\theta^{(0)} + \varepsilon^{1/6}\,\hat{V}_\theta^{(1)} + \varepsilon^{1/3}\,\hat{V}_\theta^{(2)} + \dots\dots$$

$$\hat{V}_z(\xi, z, \varepsilon) = \hat{V}_z^{(0)} + \varepsilon^{1/6}\,\hat{V}_z^{(1)} + \varepsilon^{1/3}\,\hat{V}_z^{(2)} + \dots\dots$$

$$\hat{T}(\xi, z, \varepsilon) = \hat{T}^{(0)} + \varepsilon^{1/6}\,\hat{T}^{(1)} + \varepsilon^{1/3}\,\hat{T}^{(2)} + \dots\dots$$

$$\hat{p}(\xi, z, \varepsilon) = \varepsilon^{1/3}\,\hat{p}^{(0)} + \varepsilon^{1/2}\,\hat{p}^{(1)} + \varepsilon^{2/3}\,\hat{p}^{(2)} + \dots\dots \qquad (62)$$

où $\xi = \frac{(r-1)}{\varepsilon^{1/3}}$ est la variable intérieure au voisinage de la paroi.

Le nombre d'Ekman est pris ici à la paroi : $\varepsilon = \frac{\mu}{2\rho_o(R)\omega R^2}$

b) <u>Ecoulement de recirculation</u>

Le système correspondant à cette recirculation est celui obtenu en identifiant les termes d'ordre unité :

$$\frac{\partial \hat{V}_z^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{V}_r^{(0)}}{\partial \xi} = 0 \qquad (63)$$

$$-2\,\hat{V}_\theta^{(0)} + \hat{T}^{(0)} = -\frac{1}{2S^2}\frac{\partial \hat{p}^{(0)}}{\partial \xi} \qquad (64)$$

$$\frac{1}{2S^2}\frac{\partial \hat{p}^{(0)}}{\partial z} = 2\,\frac{\partial^2 \hat{V}_z^{(0)}}{\partial \xi^2} \qquad (65)$$

$$\hat{V}_r^{(0)} = \frac{\partial^2 \hat{V}_\theta^{(0)}}{\partial \xi^2} \qquad (66)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{T}^{(0)}}{\partial \xi^2} = -\,S^2\,P_r\,\frac{\gamma-1}{\gamma}\,\hat{V}_r^{(0)} \qquad (67)$$

En introduisant la fonction de courant $\hat{\psi}(o)$ *telle que* $\hat{V}_r^{(o)} = \frac{\partial \hat{\psi}(o)}{\partial z}$, $\hat{V}_z(o) = -\frac{\partial \hat{\psi}(o)}{\partial \xi}$, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^6 \hat{\psi}(o)}{\partial \xi^6} + 4a_1^4\,\frac{\partial^2 \hat{\psi}(o)}{\partial z^2} = 0 \qquad (68)$$

où $4a_1^4 = 4a^4(1) = 1 + S^2\,\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,Pr \qquad (69)$

Les conditions limites sont les suivantes

$$\xi = 0,\ \frac{\partial \hat{\psi}(o)}{\partial \xi} = 0,\ \frac{\partial \hat{T}(o)}{\partial z} = 2\,\frac{\partial^4 \hat{\psi}(o)}{\partial \xi^4} \qquad (70)$$

La toute dernière condition s'écrit à partir des équations de conservation de la quantité de mouvement axiale et azimutale. *Elle est nécessaire car la dérivation* croisée des termes de pression a élevé l'ordre des équations à résoudre.

Nous prendrons $\hat{\psi}^{(o)}(o,z) = o$ et $\hat{\psi}^{(o)}$ bornée lorsque $\xi \to -\infty$.

La résolution de (68) se fait par séparation de variables, nous trouvons :

$$\hat{\psi}^{(o)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, g_n^{(o)}(z) \, \hat{f}_n^{(o)}(\xi) \qquad (71)$$

où $$g_n^{(o)}(z) = \sin \frac{n\Pi}{2\beta}(z - \beta) \qquad (72)$$

$$\hat{f}_n^{(o)}(\xi) = \exp \frac{(b_n\xi)}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_n \xi + \frac{\Pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \exp(b_n \xi) \qquad (73)$$

avec $$b_n = a_1^{2/3} \left(\frac{n\Pi}{\beta}\right)^{1/3} \qquad (74)$$

$$A_n = \frac{1}{4\sqrt{3}\, a_1^{4/3} \left(\frac{n\Pi}{\beta}\right)^{1/3}} \int_{-1}^{+1} Tp \cos\left[\frac{n\Pi}{2}\left(\frac{z}{\beta} - 1\right)\right] d\,\frac{z}{\beta} \qquad (75)$$

La vitesse azimutale $\hat{V}_\theta^{(o)}$ se calcule par

$$\frac{\partial \hat{\psi}^{(o)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \hat{V}_\theta^{(o)}}{\partial \zeta^2} \qquad (76)$$

avec $\hat{V}_\theta^{(o)}$ borné quand $\zeta \to -\infty$

$$\hat{V}_\theta^{(o)}(0,z) = 0 \qquad \forall z \qquad (77)$$

La solution s'écrit

$$\hat{V}_\theta^{(o)}(z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, g'_n(z) \, \hat{f}_{nv}^{(o)}(\xi) \qquad (78)$$

où

$$\hat{f}_{nv}^{(o)}(\xi) = \hat{f}_{ns2}^{(o)}(\xi) + \frac{\sqrt{3}}{b_n^2} \qquad (80)$$

$$\hat{f}_{ns2}^{(o)}(\xi) = \iint \hat{f}_n^{(o)}(\xi)\, d^2\xi = \frac{1}{b_n^2} \left\{\exp \frac{(b_n\xi)}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} b_n \xi - \frac{\Pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \exp(b_n \xi)\right\} \qquad (81)$$

La température $\hat{T}^{(o)}$ se calcule à partir de l'équation

$$\frac{\partial^2 \hat{T}^{(o)}}{\partial \xi^2} = -2\,(4\,a_1^4 - 1)\, \frac{\partial \hat{\psi}^{(o)}}{\partial z} \qquad (83)$$

On a $$\hat{T}^{(o)} = \sum_{n=1}^{\infty} -2C\, A_n g'_n(z)\, \hat{f}_{nt}^{(o)}(\xi) \qquad (84)$$

où $$\hat{f}_{nt}^{(o)}(\zeta) = \hat{f}_{ns2}^{(o)}(\xi) - \frac{\sqrt{3}}{C b_n^4} \qquad (85)$$

avec $$C = 4a_1^4 - 1 \qquad (86)$$

. Passage du débit d'ordre $\varepsilon^{1/2}$ imposé par les couches d'Ekman. Solution d'ordre $\varepsilon^{1/6}$.

Le système à résoudre s'obtient en identifiant les termes d'ordre $\varepsilon^{1/6}$

Le système ainsi obtenu est identique au système (63) à (67) en y remplaçant l'indice $^{(0)}$ par l'indice $^{(1)}$. L'équation aux dérivées partielles à résoudre s'écrit :

$$\frac{\partial^6 \hat\psi^{(1)}}{\partial \xi^6} + 4a_1^2 \frac{\partial^2 \hat\psi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 \qquad (87)$$

avec les conditions limites

$$\hat\psi^{(1)}(\xi, \pm \beta) = - E(\xi) \qquad (88)$$

$$[illegible] = 0, \quad \frac{\partial \hat\psi^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \hat\psi^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^4 \hat\psi^{(1)}}{\partial \xi^4} = \frac{1}{2}\frac{\partial \hat T^{(1)}}{\partial z} = 0 \qquad (89)$$

L'expression de $E(\xi)$ s'écrit

$$E(\xi) = - a_1 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{2\beta}\right) \hat f^{(o)}_{nv}(\xi) \qquad (90)$$

Elle sera justifiée au paragraphe V. Comme précédemment $\hat\psi^{(1)}$ doit rester bornée lorsque $\xi \to -\infty$.

La solution de (87) est recherchée sous la forme

$$\hat\psi^{(1)} = - E(\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\hat I_m^{(1)}(\xi) \sin (k_m z + h_m)\right) \qquad (91)$$

La vérification de la condition (88) impose

$$\sin (k_m \beta + h_m) = \sin (-k_m \beta + h_m) = 0 \qquad (92)$$

De plus, la fonction $\hat\psi^{(1)}$ doit être symétrique :

$$\hat\psi^{(1)} = - E(\xi) - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{\hat I_m^{(1)}(\xi) \sin \left[\frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{\beta} (z - \beta)\right]\right\} \qquad (93)$$

En reportant cette expression dans l'équation aux dérivées partielles (87), en multipliant par $\sin \left[\frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{\beta} (z - \beta)\right]$ et en intégrant de $-\beta$ à $+\beta$, nous obtenons le terme de rang m :

$$\frac{d^6 \hat I_m^{(1)}(\xi)}{d\xi^6} - b_{2m+1}^6 \hat I_m^{(1)}(\xi) = \frac{2}{d_m^3 \beta} \frac{d^6 E(\xi)}{d\xi^6} \qquad (94)$$

où

$$d_m^3 = \frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{\beta} \qquad (95)$$

L'équation se résoud en cherchant une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$\hat f_m^{(1)}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \left(\frac{n\pi}{2\beta}\right) B_{n,m} \hat f^{(o)}_{ns2}(\xi) \qquad (96)$$

$$\ldots = \mathrm{Arc\ tg}\,(\ldots) \quad \text{[illegible]} \tag{104}$$

$$\text{[illegible]} \tag{105}$$

$$D_1 = - \frac{\ldots}{\sin D_1} \quad \text{[illegible]} \tag{106}$$

avec

$$\text{[illegible]} \tag{107}$$

$$\text{[illegible]} \ldots - \ldots\, L^{(IV)}(o) \tag{108}$$

En résumé, la solution $\bar{\ }^{(1)}$ s'écrit :

$$\text{[illegible]} = - I(\xi) - \sum_{m=1}^{\infty} (\bar{f}_m^{(1)} + \bar{g}_m^{(1)}) \sin \left[\frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{B} (r - R)\right] \text{[illegible]} \tag{109}$$

c) Écoulement à l'ordre 2/3 (Remarques)

A cet ordre, il est possible de tenir compte d'un nouveau terme de compressibilité $2S^2\, r\, V_1$ dans l'équation de continuité. Il faudrait alors également tenir compte de ce terme dans les extensions d'Ekman, zone où ni la solution de la couche d'Ekman, ni la solution de la couche de Stewartson ne sont valables.

Il faut noter que la densité $\rho_0(r)$ variant rapidement avec r, cette correction risque de ne pas être négligeable malgré la faible épaisseur de la couche de Stewartson 1/3.

Cette solution de l'écoulement n'a pas encore été déterminée.

VI - ECOULEMENT DANS LE COEUR

Cet écoulement est assez simple :

Le système d'équations s'écrit après avoir reporté les développements (32)

A l'ordre unité, nous avons :

$$\frac{\partial V_z^{(o)}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r^{(o)})}{\partial r} + 2 S^2 V_r^{(o)} r = o \tag{119}$$

$$\frac{1}{2S^2}\frac{\partial p^{(o)}}{\partial z} = o \tag{120}$$

$$2 V_\theta^{(o)} = \frac{1}{2S^2}\frac{\partial p^{(o)}}{\partial r} + T^{(o)} r \tag{121}$$

$$2 V_r^{(o)} = o \tag{122}$$

Dans ce système, l'équation de conduction disparait. Il n'est pas possible de calculer la température à cet ordre.

A l'ordre $\varepsilon^{1/2}$, nous avons :

$$\frac{\partial V_z^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r^{(1)})}{\partial r} + 2 S^2 r V_r^{(1)} = o \tag{123}$$

$$\frac{1}{2S^2}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial z} = o \tag{124}$$

$$2 V_\theta^{(1)} = \frac{1}{2S^2}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} + T^{(1)} r \tag{125}$$

$$2 V_r^{(1)} = o \tag{126}$$

A l'ordre ε

$$\frac{\partial V_z^{(2)}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r^{(2)})}{\partial r} + 2 S^2 r V_r^{(2)} = o \tag{127}$$

$$\frac{1}{2S^2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} = o \tag{128}$$

$$- 2 V_\theta^{(2)} = - T^{(2)} r - \frac{1}{2S^2}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial r} \tag{129}$$

$$V_r^{(2)} = \frac{\partial^2 V_\theta^{(o)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_\theta^{(o)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^{(o)}}{\partial r} - \frac{V_\theta^{(o)}}{r^2} \tag{130}$$

$$\frac{1}{Pr}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\frac{\partial^2 T^{(o)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T^{(o)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{(o)}}{\partial r}\right] + S^2 r V_r^{(2)} = o \tag{131}$$

L'élimination de $V_r^{(2)}$ entre (130) et (131) permet le calcul de $V_\theta^{(o)}$ et $T^{(o)}$.

Ce système possède des solutions qui doivent se raccorder d'une part avec les couches d'Ekman et d'autre part avec les couches de Stewartson.

D'après la conservation de la quantité de mouvement axiale nous avons

$$V_r^{(o)}\ (r,z) = o$$
$$V_r^{(1)}\ (r,z) = o \qquad (132)$$
$$V_r^{(2)}\ (r,z) = o$$

La condition de raccordement avec les couches d'Ekman est identiquement vérifiée. Il en est de même de la condition limite $V_r(1,z) = o$

En reportant dans l'équation de continuité, nous obtenons :

$$\frac{\partial V_z{}^{(o)}}{\partial z} = o \qquad (133)$$

Soit

$$V_z{}^{(o)}\ (r,z) = f\ (r) \qquad (134)$$

Or, la condition limite de fluide parfait $V_z{}^{(o)}\ (r, \pm \beta) = o$ entraîne

$$V_z{}^{(o)}\ (r,z) = o \qquad (135)$$

Le premier terme non nul de V_z est $V_z{}^{(1)}$; il vérifie également

$$\frac{\partial V_z{}^{(1)}}{\partial z} = o \qquad (136)$$

Soit

$$V_z{}^{(1)}\ (r,z) = f(r) \qquad (137)$$

Comme V_z doit se raccorder avec la solution $\tilde{V}_z{}^{(o)}$ dans les deux couches d'Ekman, nous pouvons écrire :

$$V_z{}^{(1)}\ (r, \pm \beta) = \underset{\substack{\xi\to-\infty \\ \text{fond froid}}}{\lim} \tilde{V}_z{}^{(o)} = \underset{\substack{\xi\to-\infty \\ \text{fond chaud}}}{\lim} \tilde{V}_z{}^{(o)} \qquad (138)$$

Dans le coeur, il peut donc passer un flux de masse d'ordre $\varepsilon^{1/2}$. D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial p^{(o)}}{\partial z} = o \qquad (139)$$

Soit

$$p^{(o)} = f(r)$$

La pression dans le coeur doit se raccorder avec la pression dans les deux couches d'Ekman. Ceci implique :

$$p^{(o)}\ (r,z) = o \qquad (140)$$

Dans le coeur, nous avons la relation suivante

$$2\,V_\theta^{(o)} = T^{(o)}\,r \qquad (141)$$

entre la vitesse azimutale et la température (cet effet est connu sous le nom de vent thermique). Nous sommes donc amenés à résoudre l'équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant $v_r^{(2)}$ entre (130) et (131). L'équation ainsi obtenue s'écrit :

$$-\left(\frac{\partial^2 V_\theta^{(o)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_\theta^{(o)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta^{(o)}}{\partial r} - \frac{V_\theta^{(o)}}{r^2}\right) = \frac{1}{P_r}\,\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\partial^2 T^{(o)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T^{(o)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T^{(o)}}{\partial r}\right)\frac{1}{S^2 r}$$

(142)

En utilisant la relation (141), l'équation (142) devient :

$$4\,a^4\left(\frac{\partial^2 T^{(o)}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T^{(o)}}{\partial r^2}\right) + \frac{3\,(4\,a^4\,(1) - 3)\,r^2 + 1}{r}\,\frac{\partial T^{(o)}}{\partial r} = 0 \qquad (143)$$

Les conditions limites sont obtenues en écrivant la valeur de la température à la sortie des couches d'Ekman et de Stewartson :

$$T^{(o)}\,(z = \pm\,\beta) = \pm\,T_o\,/\,4\,a^4 \qquad (144)$$

$$T^{(o)}\,(r = 1, z) = T_f\,/\,4\,a_1^4 \qquad (145)$$

Cette dernière condition se réduit à

$$T^{(o)}\,(r = 1) = T_o\,z\,/\,4\,a_1^4\,\beta$$

dans le cas d'un profil de température linéaire.

Dans ce dernier cas, il est possible de trouver une solution comme l'ont montré SAKURAI et MATSUDA /7/. En effet, on peut chercher la solution sous la forme :

$$T^{(o)} = \frac{T_f\,z}{\beta}\,\frac{1}{4\,a_1^4} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n\,(r)\,\frac{\mathrm{Sh}\,(\lambda_n z)}{\mathrm{Sh}\,(\lambda_n \beta)} \qquad (147)$$

où les fonctions $T_n\,(r)$ vérifient l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_n}{dr} + \lambda_n^2\,T_n = -\,\frac{2}{a_1^4 r^2}\,(4\,a_1^4 - 1)\,\frac{dT_n}{dr} \qquad (148)$$

avec les conditions limites :

$$T_n\,(1) = 0 \qquad (149)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n\,(r) = T_f\left[\frac{1}{4a^4} - \frac{1}{4\,a_1^4}\right] \qquad (150)$$

Nous sommes en présence d'un problème classique ou les fonctions $T_n(r)$ forment une base orthogonale. Comme la solution de (148) n'est pas calculable analytiquement, nous chercherons une solution approchée sous forme de développement en puissances de $(4\,a_1^4 - 1) = k$. En eflet, avec nos valeurs, k est de l'ordre de 0,2. Nous développons donc T_n et λ_n

$$T_n\,(r) = T_{no}\,(r) + k\,T_{n1}(r) + k^2\,T_{n2}\,(r) + \ldots \qquad (151)$$

$$\lambda_n = \lambda_{n_o} + k\,\lambda_{n_1} + k^2\,\lambda_{n_2} + \ldots \qquad (152)$$

VII - RÉSULTATS.

a) Raccordements des développements.

Nous avons obtenu des solutions dans les différentes couches à des ordres de grandeurs qui ont été portés sur la figure 3. Les difficultés mathématiques, ainsi que le temps calcul nous ont fait arrêter les développements au premier ordre de chaque grandeur.

Dans ces conditions, nous donnons les solutions raccordées pour les vitesses axiales et radiales. Cependant des résultats partiels peuvent être établis dans les cas intéressants pour chaque grandeur V_θ, V_z, V_r, T.

b) Résultats.

Nous avons fait le calcul à rejet nul pour toutes ces grandeurs dans le cas d'une centrifugeuse à contrecourant thermique pur dans les conditions de fonctionnement suivantes :

Couches d'Ekman

$\psi = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_r = 0\ (\ 1\ )$
$V_z = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_\theta = 0\ (\ 1\ )$
$P = 0\ (\ 1\ )$
$T = 0\ (\ 1\ )$

Extensions d'Ekman

$\psi = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_r = 0\ (\ 1\ )$
$V_z = 0\ (\varepsilon^{1/6})$
$V_\theta = 0\ (\ 1\ )$
$P = 0\ (\varepsilon^{1/3})$
$T = 0\ (\ 1\ )$

Coeur

$\psi = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_r = 0\ (\varepsilon\ \ )$
$V_z = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_\theta = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$P = 0\ \ \ 1\ )$
$T = 0\ (\ 1\ )$

Couches de Stewartson

recirculation	passage de débit
$\psi = 0\ (\varepsilon^{1/3})$	$\psi = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_r = 0\ (\varepsilon^{1/3})$	$V_r = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$V_z = 0\ (\ 1\ )$	$V_z = 0\ (\varepsilon^{1/6})$
$V_\theta = 0\ (\ 1\ )$	$V_\theta = 0\ (\varepsilon^{1/6})$
$P = 0\ (\varepsilon^{1/3})$	$P = 0\ (\varepsilon^{1/2})$
$T = 0\ (\ 1\ )$	$T = 0\ (\varepsilon^{1/6})$

Fig. 3 - Schéma des raccordements.

<u>Grandeurs utilisées dans les applications numériques</u> :
Hauteur = 606 mm
Rayon = 73.5 mm
Pression périphérique : 100 Torr
Vitesse périphérique : 400 m/s
Vitesse de rotation : 52500 trs/mn
Température du fond froid : 25°C
Température du fond chaud : 45°C

Ce qui nous donne comme paramètres :

ρ paroi = 1,807 kg/m^3

$S^2 = 11,21$

$\varepsilon = 1,72.10^{-7}$

$\varepsilon^{1/2} = 4.25.10^{-4}$

$\varepsilon^{1/3} = 5.56.10^{-3}$

$\varepsilon^{1/6} = 7.45.10^{-2}$

Le calcul traité et commenté dans ce qui suit a été effectué à $T_f(r)$ = $c^{\underline{te}}$ -

Sur le tableau I la distribution de pression à l'équilibre (i.e en rotation en bloc) montre à quel point l'utilisation des équations de Navier-Stokes peut être mise en doute dans le centre de la centrifugeuse.

La planche 1 nous montre l'évolution de la vitesse radiale dans les couches d'Ekman et à leur sortie vers le coeur (les z sont comptés à partir du fond supérieur). On remarquera l'importance du maximum (1,6 m/s) ce qui implique un débit de l'ordre de 120 g/heure. Ce maximum est directement proportionnel au rayon.

La planche 2 représente la vitesse axiale à l'extérieur de la zone de couche limite des fonds ; nous y distinguons deux zones distinctes : le coeur, où la vitesse est toujours positive et où passe le débit de contre-courant dans le sens ascendant ; la couche de paroi où le changement de signe de Vz met en évidence la recirculation. Son débit est de 1500 g/h. La partie gauche de la courbe (R < 17,5 mm) n'a pas été tracée pour les raisons indiquées ci-dessus. Son absence ne gêne en rien les conclusion de l'étude puisque le débit qui passe dans cette zone est infime. Ce problème ne se posera que si une introduction de gaz près de l'axe est envisagée.

La planche 3 montre l'écoulement dans le quart supérieur de la centrifugeuse. Elle met en évidence l'importance du débit de contrecourant (lignes de courant très rapprochées les unes des autres à la paroi).

La planche 4 est un agrandissement du coin supérieur de la centrifugeuse, où les extensions d'Ekman raccordent la couche d'Ekman à la couche de Stewartson.

Sur la planche 5 est représenté le profil de la vitesse partielle du flux de contre-courant dans la couche de la paroi verticale. C'est le profil qui subsisterait en l'absence de gradient de température pariétale.

Planches 6 et 7 : profils de température et de vitesse azimutale dans les deux couches.

. Influence des paramètres principaux.

Température.

Nous distinguerons deux manières de modifier la température :

- Soit faire varier l'écart entre les températures des deux fonds.
- Soit modifier la forme du gradient thermique de paroi.

La première action envisagée n'a qu'un rôle quantitatif : toutes les grandeurs, comme il est facile de la vérifier, sont proportionnelles à $\Delta T/T$ moyen, toutes choses restant égales par ailleurs. Toute modification de ΔT a donc des conséquences aisément prévisibles.

La deuxième action qui consiste à modifier le profil de température pariétale change l'expression des coefficients *An*. La zone *pariétale* doit donc être entièrement recalculée, mais comme les couches d'Ekman sont inchangées, seules des considérations de séparation isotopique peuvent dicter le choix du profil optimum.

Influence du remplissage de la centrifugeuse.

Il intervient par l'intermédiaire de la masse volumique introduite dans le nombre d'Ekman et n'a qu'un rôle quantitatif. Il est facile de constater que les débits vont être modifiés puisqu'ils sont proportionnels l'un à $\varepsilon^{1/2}$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ et l'autre à $\varepsilon^{1/3}$ c'est-à-dire $1/\rho^{1/3}$.

Une multiplication par k de la masse contenue dans la centrifugeuse va diminuer le débit de contre courant dans le rapport $\sqrt{k}$ et le débit de recirculation par rapport à $k^{1/3}$. Si on veut diminuer l'importance du débit de recirculation en regard du débit de contre-courant, il faut donc diminuer le remplissage.

Influence de la vitesse de rotation :

Les vitesses du gaz sont proportionnelles à la vitesse linéaire périphérique ωR quant aux épaisseurs de couche limite. Elles varient dans le rapport $(\omega R)^{-1/2}$ ou $(\omega R)^{-1/3}$.

Une augmentation de ω fait donc croître plus rapidement le débit de recirculation de la couche de Stewartson que le débit de contre-courant.

Influence du rayon R et de la hauteur h

Elles sont beaucoup plus complexes à analyser puisqu'elles apparaissent sous forme de leur rapport β, dans les expressions de toutes les grandeurs hydrodynamiques calculées. On peut remarquer néanmoins que β restant constant, toute variation de R a le même effet qu'une variation de ω sur les vitesses de circulation, mais un effet plus important sur les épaisseurs de couches de paroi. Il en résulte que les débits seront moins affectés (débit de recirculation) ou même inchangés (débit de contre-courant).

VIII - CONCLUSION.

Au terme de cette étude, peuvent être dégagés quelques résultats tant du point de vue qualitatif que quantitatif.

On notera tout d'abord l'importance des vitesses qui atteignent en particulier plus d'un mètre par seconde dans les couches d'Ekman et dans le coeur et jusqu'à 5 m/s en ce qui concerne la vitesse azimutale. Néanmoins la pression est très peu différente de la pression d'équilibre.

Il en résulte que dans certaines zone. à fort gradient de vitesse, les *termes de dissipation visqueuses atteignent 10 % des termes de conduction. Par contre*, c'est dans le coeur que la convection semble devoir être introduite.

L'étude de ces deux points et de l'équation de la diffusion, ainsi que l'étude de l'influence des introductions et des prélèvements du gaz seront les prolongements de ce travail.

NOTATIONS

a	tel que $4a^4 = 1 + PrS^2r^2 \frac{\gamma-1}{\gamma}$
a_1	$= a(1)$
Cp	= chaleur spécifique à pression constante
b_n	$= a_1^{1/2} \left(\frac{n\pi}{\varepsilon}\right)^{1/3}$
I	= fonction définie en (90)

$\hat{f}_n^{(o)}(\xi)$, $\hat{f}_{nv}^{(o)}(\xi)$, $\hat{f}_{nt}^{(o)}(\xi)$, $\hat{f}_{nS_1}^{(o)}(\xi)$ et $\hat{f}_{nS_2}^{(o)}(\xi)$ fonctions définies respectivement en (73), (80), (85), (99) et (81).

g	= intensité de la pesanteur
$g_n^{(N)}(z)$	$= \sin\left[\frac{n\pi}{2\beta}(z-\beta)\right]$
h	= hauteur de la centrifugeuse
M	= masse molaire du mélange
p	= pression
Pr	$= \frac{\mu C_p}{\kappa}$ Nombre de Prandtl
r	= rayon vecteur
R	= rayon de la centrifugeuse
$\mathcal{R}$	= constante des gaz parfaits
S	= rapport des vitesses : $S = \frac{\omega R}{\sqrt{\frac{2\mathcal{R}T}{M}}}$
T	= température
T_f	= température du fond $z = \beta$
V_r	= composante radiale de la vitesse
V_z	= composante axiale de la vitesse
V_θ	= composante azimutale de la vitesse
z	= hauteur.
β	$= h/R$
γ	= rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant
ε	= nombre d'Ekman $\left(\frac{\mu}{2\rho_0\omega R^2} = \varepsilon\right)$
ζ	$= \frac{z \pm \beta}{\varepsilon^{1/2}}$ coordonnée réduite dans la couche d'Ekman
θ	= angle polaire
κ	= conductibilité thermique

λ_{no}	=	zéros de la fonction de Bessel J_o (r)
μ	=	viscosité
ξ	=	$\frac{-1+r}{\varepsilon(1)^{1/3}}$ coordonnée réduite dans le couche de Stewartson
ρ		masse volumique
$\emptyset$		dissipation visqueuse
ψ		fonction de courant
ω		vitesse angulaire

Indices.

P	désigne la paroi
o	désigne la solution à l'équilibre (sans contre-courant)
$\sim$	désigne une fonction dans la couche d'Ekman.
$\hat{}$	désigne une fonction dans la couche de Stewartson.
(i)	désigne le ième terme d'un développement en ε^n.

REFERENCES

[1] LOTZ - Kompressible Ekman - Grenzschichten in rotierenden Zylindern - Atomkernenergie (1973).

[2] K. STEWARTSON - On almost rigid rotations - J. of Fluid Mechanics (1957), vol. 3, page 17 - 26.

[3] OLANDER - Technical Basis of the Gas centrifuge, Advances in Nuclear Science and Technology 4, p. 105 (1972).

[4] C. HUNTER - The axisymetric flow in a rotating annulus due to a horizontally applied temperature gradient. J. Fluid. Mechanics (1967), vol 27, p. 753 - 778.

[5] HOMSY et HUDSON - Centrifugally driven convection in a rotating cylinder. J. of Fluid Mechanics (1969), vol 35, pp 32 - 52.

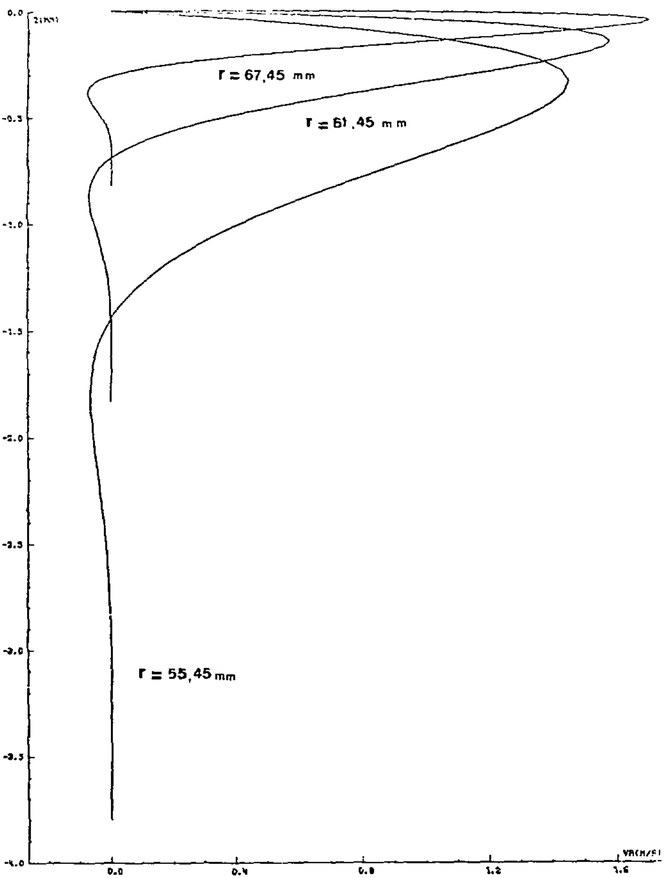
[6] HOMSY et HUDSON - Centrifugal convection and its effect on the asymptotic stability of a bounded rotating fluid heated from below, J. of Fluid Mechanics, vol 48, (1971) pp 605-624.

[7] I. SAKURAI et T. MATSUDA - Gas dynamics of a centrifugal machine, J. of Fluid Mech. (1974), vol 62, pp 727-736.

Manuscrit reçu le 6 octobre 1975

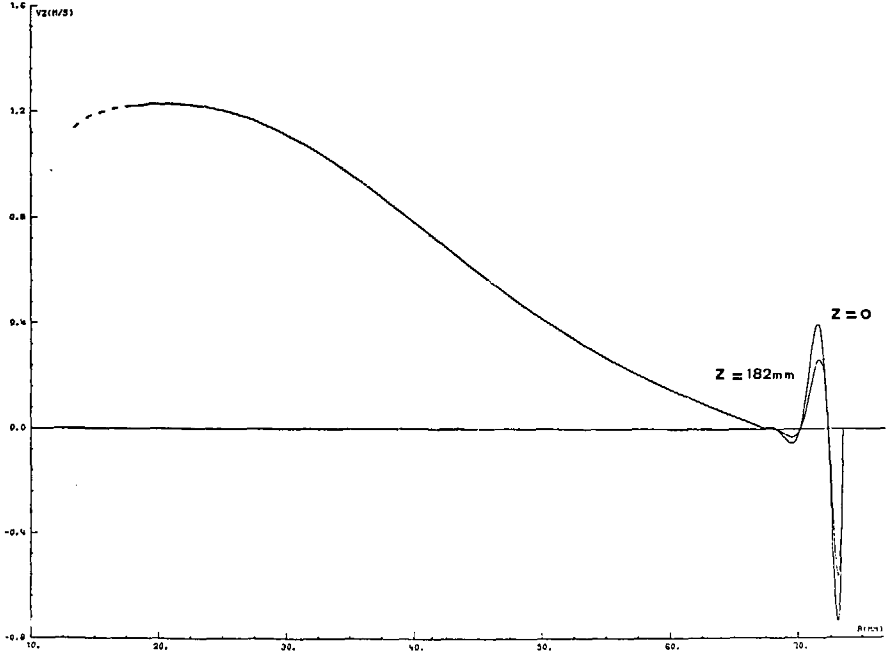
R	P
MM	TORR
0.00	0.00134
3.67	0.00138
7.35	0.00150
11.02	0.00175
14.70	0.00211
18.37	0.00271
22.05	0.00369
25.72	0.00552
29.40	0,00810
33.07	0,01305
36.75	0,02223
40.42	0,04007
44.10	0,07636
47.77	0,15391
51.45	0,32812
55.12	0,73986
58.80	1,76447
62.47	4,45075
66.15	11,87414
69.82	33,50617
73.50	99,99975

Tableau 1 - Distribution de pression à l'équilibre.



Profil de vitesse radiale
TMIN=25 C TMAX=45 C
OMEGA=875 HZ P=100 TORR

Planche 1



PROFIL DE VITESSE AXIALE

TMIN=25 C TMAX=45 C

OMEGA=875 HZ P=100 TORR

Z=0 MM Z=182 MM

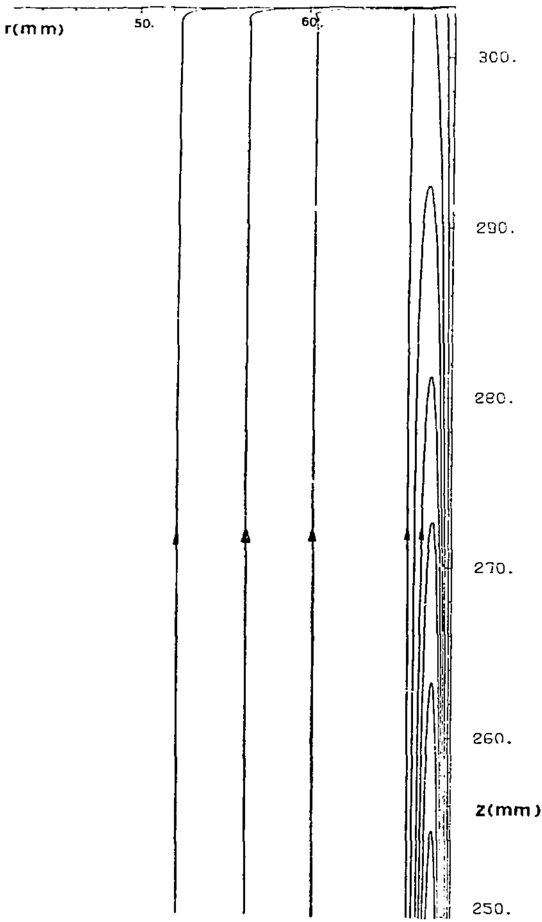


Planche 3 - Lignes de courant.

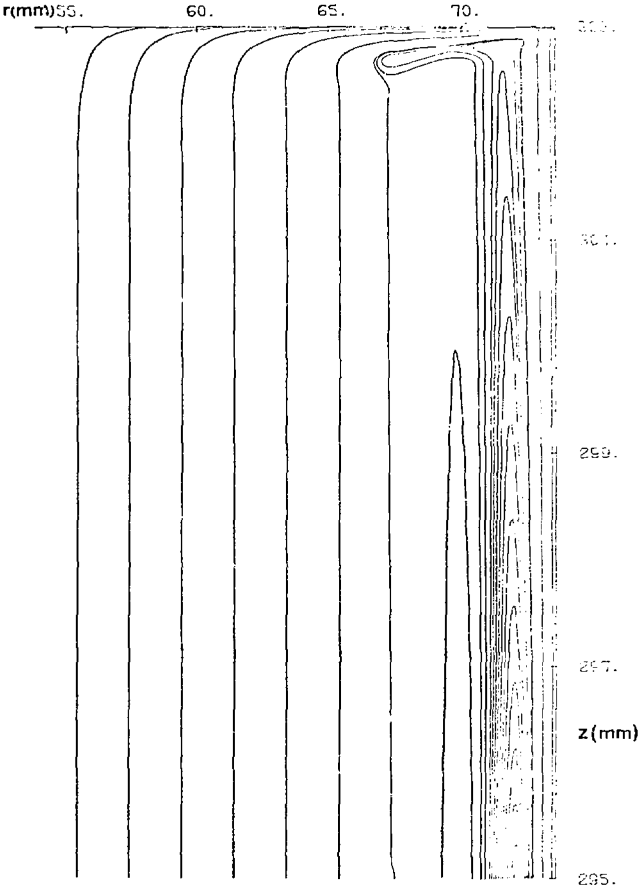


Planche 4 - Lignes de courant dans un coin de la centrifugeuse.

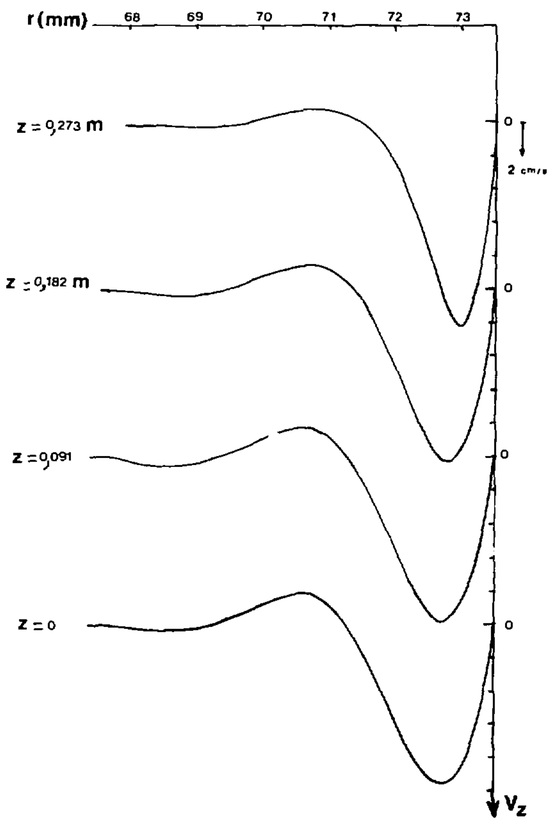


Planche 5 - $\hat{V}z^{(1)}\varepsilon^{1/2}$ fonction de r et z ; passage du débit.

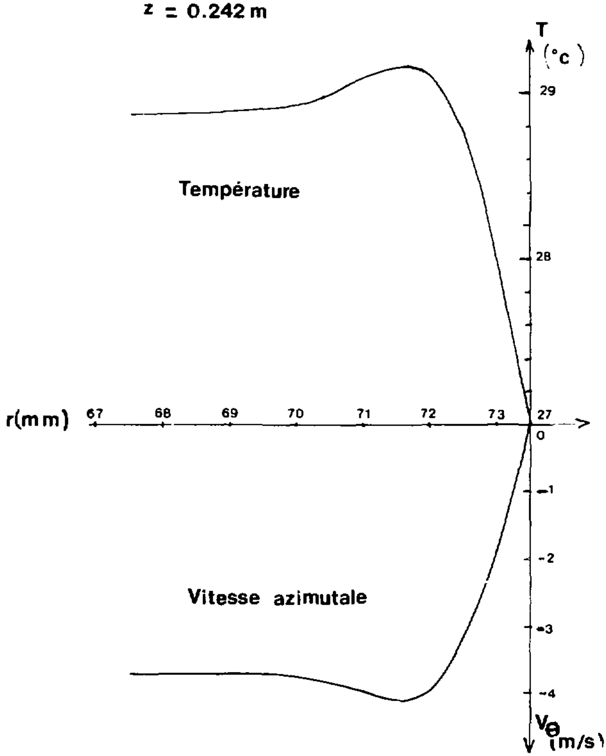


Planche 6 - Vitesse azimutale et température dans la couche de Stewartson.

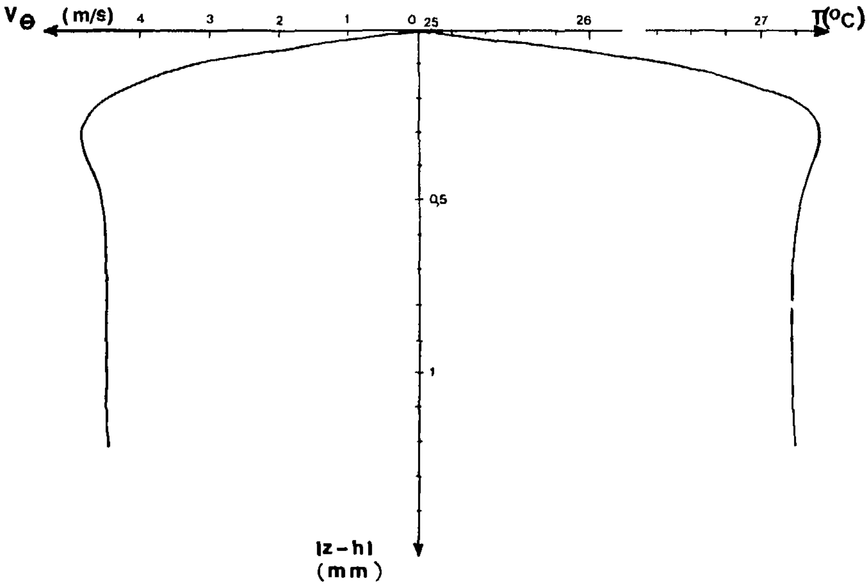


Planche 7 - Vitesse azimutale et température dans la couche d'Ekman.

Achevé d'imprimer
par
le CE   Service de Documentation, Saclay
Mars 1976

DEPOT LEGAL
1er trimestre 1976

Edité par
le Service de Documentation
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Boîte Postale n° 2
91190 - Gif-sur-YVETTE (France)