

F Y S I S K I N S T I T U T T

Universitetet i Oslo

DEFORMASJONS- OG POLARISASJONSEFFEKTER I LETTE ATOMKJERNER .

STUDERT VED HJELP AV

ELEKTRONSPREDNING OG TONØYTRONOVERFØRINGS-REAKSJONER

av

Vidar Horsfjord

1975

Forord

Det foreliggende arbeidet er et teoretisk studium av egenskaper ved atomkjerner i oksygenområdet og i kalsiumområdet. Arbeidet er bygget opp omkring fem tidsskriftartikler. Fire av disse er allerede publisert i Nuclear Physics og Physics Letters, mens den femte skal publiseres.

De første kapitlene utgjør en innledning til tidsskriftartiklene, der vi mer nøyaktig definerer formålet med studiet og der vi gir endel bakgrunnsstoff. Etter at artiklene er presentert, gir vi i siste kapittel en diskusjon der vi søker å se resultatene fra de enkelte artiklene i sammenheng.

Hoveddelen av arbeidet ble utført mens jeg var knyttet til Fysisk institutt, Universitetet i Oslo og Nordisk institut for teoretisk atomfysik (Nordita), København. De avsluttende deler av arbeidet er gjort parallelt med mitt arbeid ved Trondheim lærerskole og Sverreborg skole, Trondheim. Finansiell støtte er mottatt på flere stadier av arbeidet fra Norges almenvitenskapelige forskningsråd.

Det er en stor glede å takke førstelektor T. Engeland og de øvrige medlemmer av kjernefysikkgruppen i Oslo for hjelp, råd og enestående imøtekommenhet også etter at min tilknytning til gruppen formelt var avsluttet. Videre vil jeg takke professor G.E. Brown ved Nordita for inspirasjon, for at han foreslo de arbeidsoppgavene som er behandlet i de to siste artiklene og for at han samtidig førte meg til et nært samarbeide med Dr. T. Erikson og Dr. B.S. Nilsson, som er medforfattere til en av artiklene. Jeg skylder også skolestyrer K.B. Ekornes og skolemyndighetene i Trondheim takk for villig behandling av en permisjonssøknad i forbindelse med avslutningen av dette arbeidet. Og endelig vil jeg rette en varm takk til min kone Kirsten, som i flere år har akseptert et tradisjonelt kjønnsrollemønster for at arbeidet skulle kunne gjennomføres.

INNHOLDSFORTEGNELSE

	side
Kapittel 1	7
INNLEDNING	7
1.1 Skallmodell uten coreeksitasjoner	7
1.2 Skallmodell med coreeksitasjoner	9
1.3 Nye problemer	9
1.4 Deformasjons- og polarisasjonseffekter	10
Kapittel 2	12
BEHANDLING AV COREEKSITASJONER	12
2.1 Noen presiseringer	12
2.2 Deformert enpartikkelpotensial	13
2.3 SU_3 funksjoner	17
2.4 Sterk og svak kobling. Romlig deformasjon	19
Kapittel 3	23
ELEKTRONSPREDNING	23
3.1 Formfaktorene	24
3.2 Rekkeutvikling av formfaktorene	26
3.3 Polarisasjonsladninger	27
Kapittel 4	29
TONOTRONOVERFØRING	29
4.1 DWBA-teorien	29
4.2 Koblede kanaler	32
Kapittel 5	34
FEM TIDSSKRIFTARTIKLER	34
5.1 Konkret bakgrunn for hver av artiklene	34
5.2 Rettelser	38
5.3 Inelastic Electron Scattering and the Weak Coupling Model for ^{16}O and ^{18}O	39
5.4 Momentum Dependence of Polarization Charges in Electron Excitation of Nuclei in the Oxygen Region	69
5.5 Charge Radii and Polarization Effects in the Oxygen Region	95
5.6 On the Predictions of the Coexistence Model for the Reaction $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$	101
5.7 On the Importance of Multi-Step Processes in the Reaction $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$	107

	Side	
Kapittel 6	KONKLUSJONER. DISKUSJON	113
	6.1 Generelle trekk	113
	6.2 Romlig deformasjon	114
	6.3 Polarisasjonseffekter	117
	6.4 Monopolverganger i ^{18}O	121
	6.5 Indirekte overganger i (p,t)-reaksjonene	121
	6.6 Høyere eksiterte tilstander i ^{16}O	124
	6.7 Avsluttende bemerkninger	125
Appendiks A	UTREGNING AV FORMEL (3) I KAPITTEL 5.5	126
Appendiks B	BEREGNING AV STØRRELSENE $\beta(j_a j_b L)$ FOR BROWN-GREEN-GERACE MODELLEN	129
	B.1 Indre bølgefunksjoner	129
	B.2 Utprojeksjon av god J og M	129
	B.3 Uttrykk for $\beta(j_a j_b L)$	131
	B.4 Triaksialt deformerte hulltilstander	132
Appendiks C	BEHANDLING AV ROMLIG DEFORMASJON FOR VALENS- PARTIKLENE I KAPITTEL 5.7	135
Referanser		138

1. INNLEDNING

Utviklingen av skallmodellen for atomkjernen har gjennomløpt to hovedfaser. Vi snakker om skallmodell med og uten coreeksitasjoner.

1.1. Skallmodell uten coreeksitasjoner

Opprinnelig forsøkte man å beskrive de laveste nivåene i kjerner nær lukkede skall med de strukturene et lite antall valensnukleoner (eller hull) med gjensidig vekselvirkning, utenfor en lukket core, gir opphav til (fig. 1a). I mange tilfeller fant man god overensstemmelse mellom teori og eksperiment. Dette gjaldt ikke bare posisjoner for energinivåer, eller spinn og paritet for disse. Det gjaldt også egenskaper som styrken for $M 1$ og $E 2$ γ -decay, ft-verdier for β -decay, virkningstverrsnitt for enpartikkeloverføringsreaksjoner o.l. Alt dette er tydelige indikasjoner på at grunnidéene bak modellen er sunne.

Her skal vi feste oppmerksomheten ved to problemer som likevel ikke kan løses innen denne modellen, men som krever at en tar i betraktning konfigurasjoner der coren er brutt opp.

1) For å få styrkene for $E 2$ γ -decay til å stemme, må en tillegge valensnukleonene (eller hullene) en polarisasjonsladning e_{pol} i tillegg til nukleonens egentlige ladning. I oksygenområdet er $e_{pol} \approx 0.5 e$ og i kalsiumområdet noe større. Denne eksperimentelle kjensgjerning forklares i prinsipp ved at hvert valensnukleon vekselvirker med nukleonene i coren (fig. 1 b), og på den måten polariserer coren.

2) I mange av de aktuelle kjernene finnes lavtliggende nivåer som ikke kan forklares ut fra de konfigurasjoner den enkle modellen foran gir opphav til. Disse konfigurasjonene må nødvendigvis være slike der coren er brutt opp. Videre ble det i 1964 godtgjort eksperimentelt [1] at lavtliggende nivåer kan bestå av en sterk blanding av valens-konfigurasjoner og coreeksitasjonskonfigurasjoner. For en tilfredsstillende beskrivelse av slike nivåer kreves det derfor at begge typer konfigurasjoner tas med i beregningene.

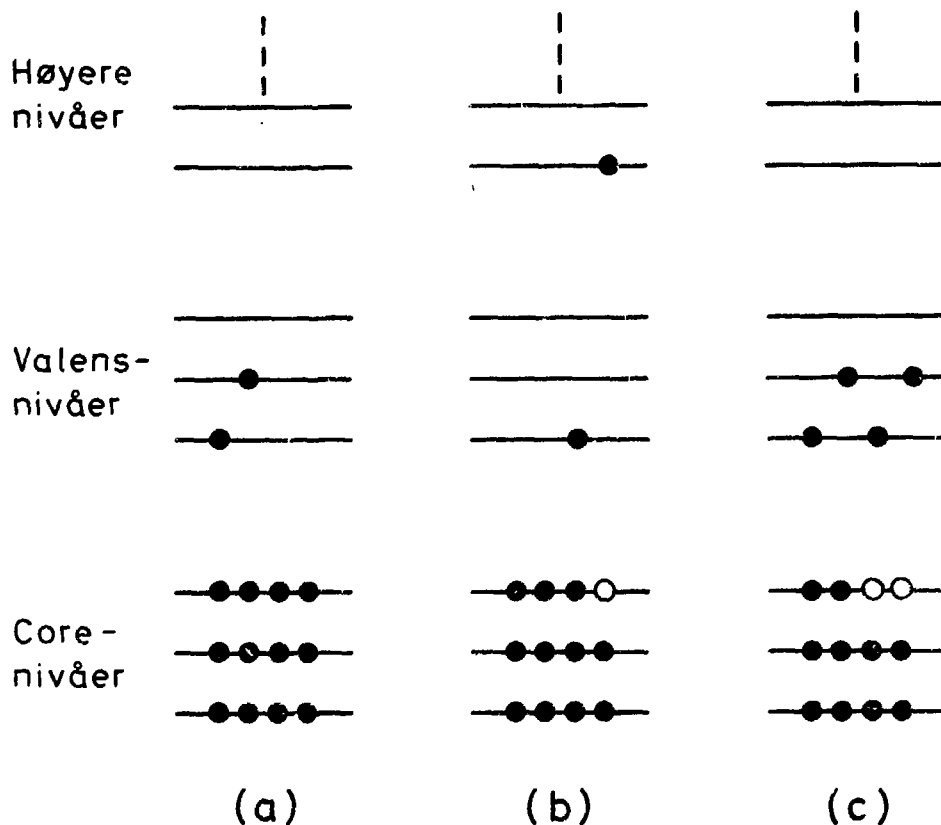


Fig. 1

Ulike konfigurasjonstyper i den sfæriske skallmodellen. Fylte sirkler representerer partikler, åpne sirkler huller, i de respektive enpartikkel-nivåer.

I fig. 1a har vi en lukket core med to valenspartikler utenfor. I fig. 1b er det én valenspartikkel som polariserer coren ved at den forårsaker en 1 partikkel-1 hull (1p1h) eksitasjon av coren.

Endelig har vi i fig. 1c et eksempel på en deformert tilstand av den typen Engeland [2] og Brown [3] innførte som et tillegg til konfigurasjoner av typen vist i fig. 1a.

1.2. Skallmodell med coreeksitasjoner

I 1964 innførte Engeland [2] og Brown [3] på nokså forskjellig måte en skallmodell der man i tillegg til valens-konfigurasjonene tok hensyn til n partikkel - n hull eksitasjoner av coren i hovedskall opp (fig. 1c). På den måten kunne de møte utfordringen fra pkt. 2) foran. De nye coreeksitasjonene gir opphav til tilstander som ofte kalles "deformerte", siden partiklene og hullene gjerne er sterkt korrelerte i rommet.

Av fig. 1 ser en at de coreeksitasjonene som gir deformerte tilstander og de som gir opphav til polarisasjonseffekter, er av helt ulik karakter. Dette manifesterer seg i at en også for de deformerte tilstandene må regne med polarisasjonsladninger av samme størrelse som nevnt i pkt. 1) foran.

I dag står en så med ulike versjoner av en modell der én type eksitasjoner av coren tas eksplisitt med (deformerte tilstander) og der virkningen av en annen type tas implisitt hensyn til, i de situasjoner der de kan bety noe, ved at en innfører polarisasjonsladninger.

1.3. Nye problemer

For å finne modellens begrensning og for å forbedre detaljene, er det viktig at en konfronterer modellen med så mange forskjelligartede eksperimenter som mulig. I det foreliggende arbeidet skal vi studere to reaksjonstyper, nemlig elektronspredning, og tonøytronoverførings-reaksjonen (p,t). For begge disse reaksjonstypene har man i den senere tid funnet eksperimentelle resultater som synes å stå i klar motstrid til modellen.

a) Det har vært vanskelig - enkelte har påstått umulig [4] - innen den sferiske skallmodellen å redegjøre for den eksperimentelle styrken for elektron-eksitasjonen av første eksiterte nivå $O_2^+(6.05 \text{ MeV})$ i ^{16}O .

b) Ladningsradiene for ^{16}O , ^{17}O , og ^{18}O målt ved hjelp av elastisk elektronspredning viser en systematikk [5] som ikke kan forstås ut fra enkle polarisasjoner av typen vist i fig. 1b.

c) Eksitasjonsstyrkene for lavtliggende nivåer i ^{16}O og ^{40}Ca målt med (p,t)-reaksjoner [6, 7,8] synes å være uforenlige med coreeksitasjonsmodellen, slik

den er utformet av Brown, Green og Gerace [9, 10]. Vi skal se at dette også er tilfelle, om enn ikke i like stor grad, hvis Ellis og Englands coreeksitasjonsmodell [11] brukes - under forutsetning av at tilsvarende analysemetode anvendes.

I tillegg til å undersøke nøyere disse problemene, er det naturlig samtidig å studere følgende spørsmål, som henger sammen med problem a):

d) Det er vel kjent, at gjøres uelastisk elektronsprednings-eksperimenter ved meget lave impulsiveoverføringer, får en ikke andre opplysninger om skallmodellfunksjonene enn dem en får fra andre eksperimenter (γ -decay og par-decay). Problemet er da i hvilken grad eksperimenter ved høyere impulsiveoverføringer kan gi flere opplysninger av verdi om skallmodellfunksjonene (med deformerte komponenter).

1.4. Deformasjons- og polarisasjonseffekter

Problemene a) til d) henger nøye sammen med hvorledes en behandler deformasjonene og polarisasjonene. I forbindelse med pkt. d), og delvis med pkt. a), får en det problem at polarisasjonsladningene i prinsipp kan avhenge av impulsiveoverføringen. Denne avhengigheten har en visst lite om. Studiet av deformasjonseffektene ved hjelp av uelastisk elektronspredning forstyrres derfor av usikkerhet angående polarisasjonseffektene - og omvendt. En del av dette arbeidet er et forsøk på, innen et avgrenset område, å klare opp i disse problemene.

Vi skal videre vise at de tilsynelatende urimelige eksperimentelle resultatene i pkt. b) også kan forstås hvis vi tar i betraktning samspillet mellom deformasjons- og polarisasjonseffektene.

I forbindelse med pkt. c) skal vi vise at problemene henger sammen med forhold som direkte har å gjøre med selve de deformerte tilstandene. For det første er de teoretiske (p,t)-resultatene i enkelte tilfeller meget følsomme for hvorledes de deformerte tilstandene formuleres. Dessuten fører selve det faktum at deformerte tilstander er innblandet, til at den vanlige reaksjonsmekanismen svikter. Det viser seg nødvendig å behandle reaksjonen i en koblet kanal formalisme.

Hovedstikkordene for dette arbeidet blir dermed: Samspillet mellom deforma-
sjoner og polarisasjoner, dvs. mellom de to typer coreeksitasjoner vist i
fig. 1. Og: Beskrivelsen av de deformerte tilstandene.

Tidsskriftartiklene i kapittel 5 utgjør hoveddelen av arbeidet. I kapittel
5 har vi også gitt den mer konkrete bakgrunn for hver av artiklene. Da noen
av artiklene inneholder svært knappe formuleringer, har vi utarbeidet enkelte
sentrale poenger av matematisk art mer i detalj i appendiks A, B og C. Hoved-
konklusjonene er gitt i kapittel 6.

I kapittel 2, 3 og 4 gir vi en del bakgrunnsstoff for de siste kapitlene.
Dette har vi dels behov for å vise til i diskusjonen av resultatene, og dels
ønsker vi å understreke de poenger vi anser som sentrale for diskusjonen.
Vi tilstreber derfor ingen fullstendighet i fremstillingen.

2. BEHANDLING AV COREEKSITASJONER

Når en skal ta med deformerte tilstander i skallmodellen, møter en den hindring at antallet tilstander som prinsipielt kunne komme på tale, er meget stort [12, 13]. En sørger derfor for først å skille ut et lite antall komponenter som kommer lavest i energi. Disse diagonaliseres så sammen med eventuelle sfæriske komponenter (av typen diskutert i kap. 1.1). På den måten blir de endelige bølgefunksjonene en lineærkombinasjon av sfæriske og deformerte komponenter. Et hovedproblem er hvordan de fysikalsk viktigste deformerte komponentene skal skilles ut. I hovedsak har to metoder vært brukt: Brown, Green og Gerace [9, 10] utnytter Nilssonmodellen [14], mens Ellis og Engeland [11] benytter SU_3 -funksjoner. Vi skal i dette kapitlet se på disse to metodene og forsøke å sammenlikne dem.

2.1. Noen presiseringer

Det har i denne sammenheng utviklet seg en noe forvirrende terminologi. Som allerede nevnt kalles coreeksitasjons-tilstandene for deformerte tilstander da korrelasjonene mellom partiklene forårsaker en ikkesfærisk massefordeling. I motsetning til disse, kaller en de tilstandene der coren ikke er brutt opp (fig. 1 a) for sfæriske tilstander eller sfæriske komponenter (selv om det også her kan være ikke uvesentlige korrelasjoner mellom valenspartiklene).

De deformerte tilstandene kan bygges opp av enpartikkelfunksjoner fra et sfærisk eller fra et deformert enpartikkelpotensial. Vi kan dermed i enkelte modeller ha deformerte tilstander formulert i en sfærisk basis, mens vi i andre modeller har deformerte tilstander formulert i en deformert basis. I første tilfelle har vi å gjøre med en variant av den sfæriske skallmodellen. Når de deformerte tilstandene er formulert i en deformert basis, sier vi at tilstandene, evt. enpartikkelfunksjonene har romlig deformasjon.

Da deformerte og sfæriske komponenter, som har nokså ulik karakter, eksisterer side om side i coreeksitasjonsmodellen, kalles den av og til for koeksistensmodellen. Dette navnet har særlig vært brukt om den versjonen Brown, Green og Gerace [9, 10] har utarbeidet.

2.2. Deformert enpartikkelpotensial

Brown, Green og Gerace [9, 10] regner med at de deformerte tilstandene av interesse er de lavest liggende Hartree-Fock tilstandene som fås når en foretar partikkel-hull eksitasjoner av coren. Nå er det vel kjent at Hartree-Fock potensialet i slike tilfeller er deformert, og at det forøvrig har en komplisert struktur. For å lette beregningene antar derfor Brown, Green og Gerace at en med god nok tilnærming kan bygge opp de deformerte tilstandene av Nilsson-funksjoner med passende deformasjon.

I Nilsson-modellen løser en egenverdi-problemet for én partikkel i et aksialt deformert harmonisk oscillatorpotensial, med spinn-bane og l^2 ledd inkludert. Egenfunksjonene $\alpha_k^+ |0\rangle$ har av symmetrigrunner godt angulært moment k om z -aksen. De kan derfor utvikles over settet $a_{jm=k}^+ |0\rangle$ av egenfunksjoner for den tilsvarende sfæriske oscillator. Hvis deformasjonen ikke er for stor, kan settet a_{jk}^+ med god nøyaktighet begrenses til ett hovedskall. Vi har da

$$\alpha_k^+ |0\rangle = \sum_j X(jk) a_{jk}^+ |0\rangle . \quad (1)$$

For enkelhets skyld har vi utelatt alle kvantetall som ikke er strengt nødvendige i vår sammenheng. Tilstandene $\alpha_k^+ |0\rangle$ og $\alpha_{-k}^+ |0\rangle$ er tidsreverserte og har samme energi. Nilsson-koeffisientene for disse tilstandene er nært beslektet:

$$X(j-k) = (-)^{j-k} X(jk) \quad (k > 0) . \quad (2)$$

I tabeller angis derfor bare $X(j, k > 0)$.

Hulltilstander relativt til et sett fyllte skall defineres ved

$$\beta_k^+ |0\rangle = \sum_j X(jk) b_{jk}^+ |0\rangle \quad (3)$$

der

$$b_{jk}^+ = (-)^{j+k} a_{j-k}^+ .$$

På den annen side kan vi bruke sd-skall uttrykket (17), rekkeutvikle eksponentialfunksjonen og sette inn $x = (b_0/2)^2$. Vi får da

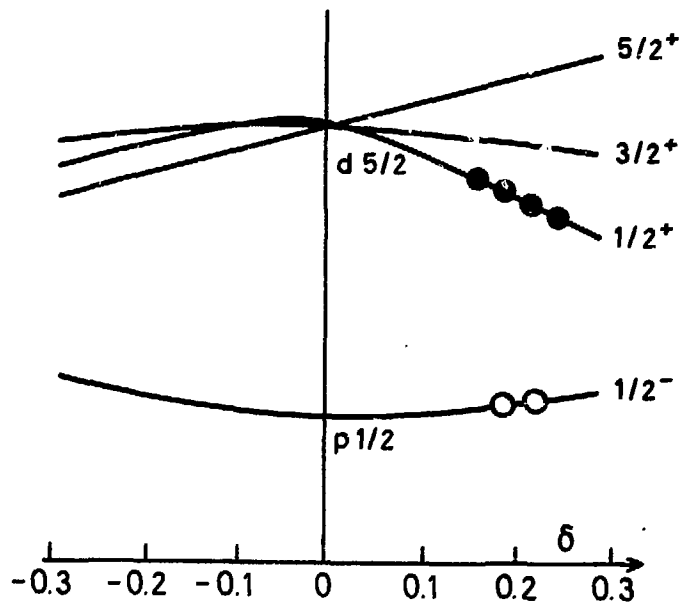


Fig. 2

Nilssonskjema [14] for høyeste p-skallnivå og de laveste sd-skallnivåer. Partikler og huller er plassert slik at vi får den mest lavtliggende indre $4p2h$ tilstand for ^{18}O innen Brown-Green modellen.

vanlig måte i overgangsoperatoren $T_{J=0}(q)$ (jfr. uttrykk (15)), da ellers også koeffisienten A ville påvirkes. Siden polarisasjonsledninger kan brukes for

De deformerte tilstandene fås nå ved å plassere partikler i den laveste Nilsson-banen i partikkelskallet og huller i den høyeste Nilsson-banen i skallet under. Fra disse indre tilstandene projiseres så tilstander med godt totalt angulært moment. Som et eksempel viser vi i fig. 2 hvordan de deformerte 4 partikkel - 2 hull ($4p2h$) tilstandene i ^{16}O konstrueres. Funk-sjonen fra fig. 2 kan skrives (indeks p/n for proton/neutron)

$$|4p2h, indre\rangle = \alpha_{\frac{1}{2}n}^+ \alpha_{-\frac{1}{2}n}^+ \alpha_{\frac{1}{2}p}^+ \alpha_{-\frac{1}{2}p}^+ \beta_{\frac{1}{2}p}^+ \beta_{-\frac{1}{2}p}^+ |^{16}O \text{ core}\rangle \quad (4)$$

$$|4p2h, JM\rangle = \frac{1}{n_J^{4/2}} P_{JM} |4p2h, indre\rangle \quad (5)$$

der P_{JM} er en projeksjonsoperator og $n_J^{4/2}$ er en normaliseringsfaktor for $4p2h$ tilstandene. Hvordan P_{JM} og $n_J^{4/2}$ i praksis kan behandles, kommer vi tilbake til i appendiks B.

Newton [15] har generalisert Nilsson-modellen ved å tillate enpartikkelpotensi-alet å bli triaksialt deformert. Utviklingene (1) og (3) generaliseres da til

$$\alpha_+^+ |0\rangle = \sum_{jk} X_+(jk) a_{jk}^+ |0\rangle \quad (6)$$

og

$$\beta_+^+ |0\rangle = \sum_{jk} \bar{X}_+(jk) b_{jk}^+ |0\rangle \quad (7)$$

De tilhørende tidsreverserte tilstandene $\alpha_-^+ |0\rangle$ og $\beta_-^+ |0\rangle$, som har samme energi som $\alpha_+^+ |0\rangle$ og $\beta_+^+ |0\rangle$ hhv., fås ved analoge utviklinger, der

$$X_-(j-k) = (-)^{j-k} X_+(jk), \quad (8)$$

og tilsvarende for $\bar{X}_-(j-k)$.

Deformerte tilstander konstrueres som i det aksialt deformerte tilfellet. En må nå imidlertid også projisere ut god indre K (oftest $K=0$) før J og M pro-jiseres ut. De tilfellene vi har bruk for er nærmere behandlet i appendiks B.

Vi vender tilbake til de aksialt deformerte funksjonene. Når deformasjonen blir stor, er ikke tilnærmelsen (1), der $\alpha_k^+ |0\rangle$ utvikles bare innen ett hovedskall, god nok. Bedre tilnærmelser er funnet på to måter.

(A) $\Delta N = 2$ kobling

Utviklingen (1) generaliseres:

$$\alpha_k^+ |0\rangle = \sum_{n_j} X(n_{jk}) a_{n_{jk}}^+ |0\rangle. \quad (9)$$

En får bidrag fra annethvert hovedskall, med størst bidrag fra det skallet funksjonene hører til i den sfæriske grensen. Selv for ganske store deformasjoner er det ofte god nok tilnærming å inkludere bare det første hovedskall som gir bidrag, over og eventuelt under det dominerende. For ekstremt store deformasjoner er ikke denne metoden praktisk brukbar, da meget høye skall vil inngå med betydelig vekt i utviklingen (9).

(B) Strekking av funksjonene

Alternativt kan en foreta den koordinat-transformasjonen Nilsson angir i Appendix A i ref. [14], dvs. en "strekking" av enpartikkelfunksjonene i takt med deformasjonen av potensialet. Med meget god tilnærming vil da egenfunksjonene kunne utvikles som i likning (1). Men nå er basisfunksjonene $a_{jk}^+ |0\rangle$ "strukket", dvs. de er funksjoner av de transformerte koordinatene. Dette gjelder for alle deformasjoner.

Metode (A) er praktisk i virkelige, numeriske behandlinger der en har store deformasjoner. Metode (B) er særlig nyttig for teoretiske overveielser i forbindelse med ekstreme deformasjoner.

For ekstremt store deformasjoner får spinn-bane og l^2 leddene neglisjerbar vekt sammenliknet med avviket fra sfærisk potensial. Bølgefunksjonene er derfor nettopp dem en får fra en ren deformert oscillator. De kan derfor skrives i en oscillatorkvant representasjon $a_{n_z n_x n_y \sigma}^+ |0\rangle$ for den romlig deformerte oscillator, eller mer praktisk i representasjonen $a_{N n_z l_z k}^+ |0\rangle$, siden funksjoner med god l_z automatisk har god $n_x + n_y = N - n_z$. Her er $N = n_x + n_y + n_z$ det totale antall oscillatorkvanta, l_z baneimpulsmomentet om z-aksen og σ egenspinnet langs z-aksen. I grensen med ekstrem deformasjon identifiseres derfor ofte Nilsson-funksjonene med symbolene $[N n_z l_z]k$.

Ble spinn-bane og l^2 leddene sløffet i Nilsson-modellen, ville enpartikkel-funksjonene kunne skrives i representasjonen over, for alle deformasjoner.

2.3. SU₃ funksjoner

Ellis og Engeland [11] bruker SU₃ funksjoner i sin konstruksjon av deformerte tilstander. Disse er mangepartikkel-funksjoner klassifisert etter irreduksible representasjoner for en kjede undergrupper. Romdelene noteres slik

$$| [f] (\lambda, \mu) K L M \rangle. \quad (10)$$

For sd-skallet er det kjeden $SU_3 \supset SU_2 \supset R_2 \supset R_2$ som gir opphav til symbolene $[f]$, (λ, μ) , L og M. Da hver (λ, μ) kan inneholde samme L flere ganger, er tallet K satt med for å skille mellom disse. De totale bølgefunksjonene fås av de i uttrykk (10) ved at en tar med spinn og isospinn funksjoner slik at totalt antisymmetriske funksjoner fremkommer.

Vi skal her ikke gå noe inn på hvorledes klassifikasjonen over gjøres i detalj. Derimot vil vi gi en intuitiv tolkning av de fysikalsk viktigste funksjonene. I den forbindelse viser vi at disse er nært beslektet med mangepartikkelfunksjonene konstruert i kap. 2.2. (For den videre diskusjon, se ref. [16, 17].)

Når $[f]$ og (λ, μ) er spesifisert, kan alle tilstander (10) med ulike K, L og M genereres ved å projisere ut god K, L og M ved hjelp av et Hill-Wheeler integral fra én tilstand $| [f] (\lambda, \mu) \rangle_{mv}$:

$$| [f] (\lambda, \mu) K L M \rangle = \frac{1}{n} P_{KLM} | [f] (\lambda, \mu) \rangle_{mv}. \quad (11)$$

Tilstanden $| [f] (\lambda, \mu) \rangle_{mv}$ er den såkalte maksimum vekt tilstand. Merk analogien til uttrykk (5) og generaliseringen av dette til det triaksialt deformerte tilfelle. Vi skal videre se at maksimum vekt tilstanden er bygget opp på en liknende måte som den indre tilstand i eksemplet i uttrykk (4).

For $| [f] (\lambda, \mu) \rangle_{mv}$ gjelder: antall oscillatorkvanta N_x , N_y og N_z i x, y og z retningene er gode kvantetall. Tar en med spinn og isospinn frihetsgradene er det derfor naturlig å utvikle $| [f] (\lambda, \mu) \rangle_{mv}$ i basisen av Slaterdeterminanter bygget opp av enpartikkelfunksjoner i en oscillatorkvant-representasjon. I mange viktige tilfeller blir maksimum vekt tilstanden én enkelt Slaterdeterminant. Dette gjelder alle de viktigste av de funksjonene vi får å gjøre med.

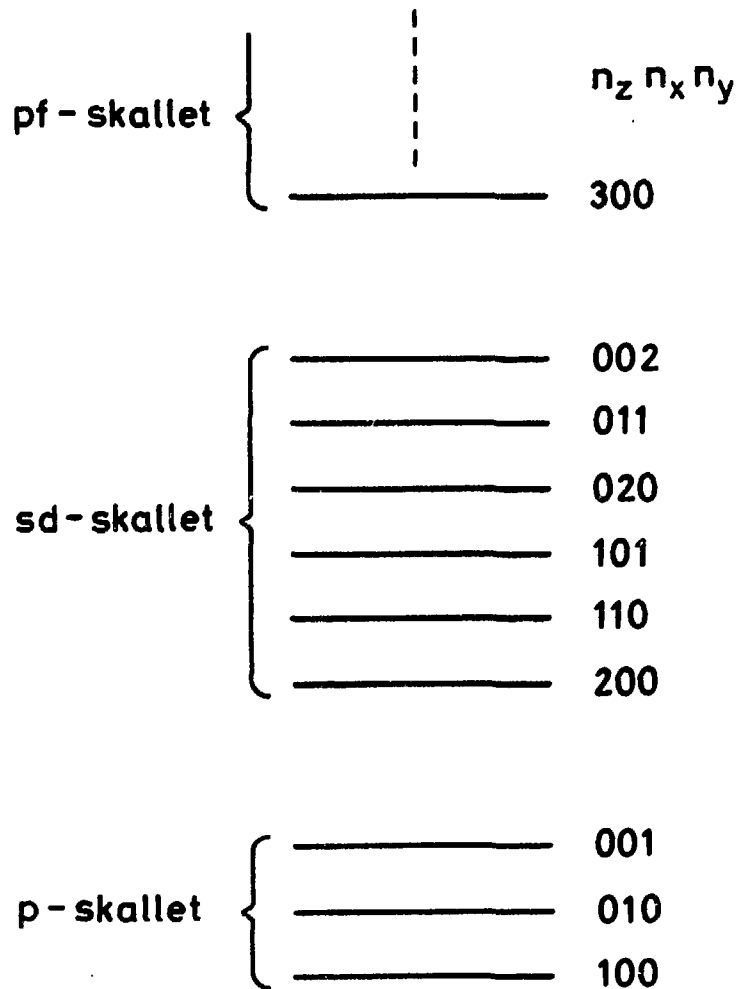


Fig. 3

Rekkefølgen for enpartikkelnivåene i en triaksialt deformert harmonisk oscillator med størst deformasjon i z-retningen og minst deformasjon i y-retningen. Antall oscillatorkvanta i hver koordinatretning er kalt n_x, n_y og n_z .

Vi har dermed fullstendig analogi til eksemplet i uttrykk (4), bortsett fra at enpartikkelfunksjonene er rene oscillatorkvant-funksjoner, dvs. de svarer til dem vi får når enpartikkelpotensialet er triaksialt deformert.

Videre gjelder for $|\{f\}(\lambda, \mu)\rangle_{mv}$ at antall oscillatorkvanta N_x , N_y og N_z er gitt ved

$$\begin{aligned} N_z &= a + \mu + \lambda \\ N_x &= a + \mu \\ N_y &= a \end{aligned} \tag{12}$$

der a er bestemt ved

$$N = N_z + N_x + N_y = 3a + 2\mu + \lambda.$$

Uttrykk (12) viser at når (λ, μ) er gitt, får maksimum vekt tilstanden en massefordeling som svarer til hva en ville fått om oscillatorpotensialet hadde vært triaksialt deformert, med størst utstrekning i z -retningen og minst utstrekning i y -retningen. Dette antyder det følgende, som kan vises å gjelde: Når Slaterdeterminanten over skal bygges opp, får vi lavest energi (med bruk av normale vekselvirkninger) om vi fyller opp det enpartikkelspektret som er vist i fig. 3, nedenfra. Sagt med andre ord: vi skal la z -retningen være favorisert fremfor x -retningen, som igjen skal være favorisert fremfor y -retningen.

Sluttr resultatet er da at SU_3 -funksjonene i mange praktisk forekommende tilfeller er bygd opp som funksjonene fra uttrykk (4) og (5), bortsett fra at enpartikkelfunksjonene er å oppfatte som om de var generert av en triaksialt deformert oscillator uten spinn-bane og l^2 ledd (jfr. siste avsnitt i kap. 2.2).

I tabell 1 og 2 sammenlikner vi forskjellige versjoner for de enpartikkelfunksjonene som kommer høyest i p -skallet, lavest i sd -skallet og høyest i sd -skallet. Disse får vi bruk for som hull-bane og partikkel-bane i oksygenområdet, og hull-bane i kalsiumområdet, hhv.

2.4. Sterk og svak kobling. Romlig deformasjon

I det foregående har vi understreket likhetspunktene mellom SU_3 -funksjonene og mange partikkelfunksjoner konstruert ut fra Nilssonmodellen. Nå vil vi påpeke enkelte forskjeller mellom måten disse blir brukt på av hhv. Ellis og Engeland og av Brown, Green og Gerace.

Tabell 1
Deformerte enpartikkelnivåer av interesse i oksygenområdet

Hull				Partikler				
j	k	$[101]-1/2$	$[101]3/2$	$i 010\rangle$	j	k	$[220]1/2$	$ 200\rangle$
3/2	3/2		1.00	-0.71	5/2	1/2	0.79	0.63
3/2	-1/2	-0.41		-0.41	3/2	1/2	-0.31	-0.52
1/2	-1/2	0.91		0.58	1/2	1/2	-0.53	-0.58

Nilssonbanene $[101]-1/2$, $[101]3/2$ og $[220]1/2$ er tatt fra Chi's tabeller [18]. De svarer til deformasjonen $\delta = 0.3$. Oscillatorfunksjonene $|n_z n_x n_y\rangle$ med spinn opp kan regnes ut slik Ripka gjør [19]. Vi noterer oss at funksjonen $|n_z n_x n_y\rangle$ for partiklene stemmer godt overens med den tilsvarende Nilsson-funksjon. For hull er den derimot en 50% blanding av de to angitte Nilsson-funksjoner.

Tabell 2
Deformerte enpartikkelnivåer av interesse i kalsiumområdet

Hull						Partikler		
j	k	[202]-3/2	[200]1/2	[202]5/2	020> Newton	j	k	[330]1/2
5/2	5/2			1.00	0.50 - 0.16	7/2	1/2	0.86
5/2	-3/2	-0.20			0.22 0.15	5/2	1/2	-0.13
3/2	-3/2	0.98			-0.45 -0.81	3/2	1/2	-0.47
5/2	1/2		-0.21		-0.32 -0.14	1/2	1/2	0.15
3/2	1/2		0.69		0.26 0.35			
1/2	1/2		-0.69		-0.58 -0.40			

Nilssonbanene er som i Tabell 1 tatt fra Chi's [18] tabeller. De svarer her til $\delta = 0.2$. Oscillatorfunksjonen $|n_z n_x n_y \uparrow\rangle$ er også her en betydelig blanding av de angitte Nilssonbanene for hullene. Funksjonen merket Newton er tatt fra Newtons [15] arbeid der en beregning som Nilssons [14] er utført for et triaksialt deformert potensial. Funksjonen i tabellen svarer til deformasjonsparametrene $\delta = 0.2$, $\gamma = 30^\circ$.

Brown, Green og Gerace konstruerer sine deformerte tilstander slik vi gjorde i uttrykk (4) og (5): en enkel indre funksjon med partikler og hull konstrueres ut fra enpartikkelfunksjonene. De endelige, fysikalsk viktige, tilstandene fås så ved projeksjon fra denne. Dette kalles gjerne for en modell med sterk kobling, siden partikler og hull her antas å være sterkt korrelerte, slik at de må behandles som en enhet.

Ellis og Engeland regner derimot innen en modell med svak kobling, der partikkel- og hull-funksjoner dannes hver for seg, projeksjon av tilstander med godt angulært moment medregnet. Først dernest kombineres partikkel- og hull-delene. Dette fører til ulikheter mellom de to modellene ut over de som skyldes forskjellene i valg av enpartikkelfunksjoner (jfr. tabell 1 og 2).

Det at Ellis og Engeland bruker SU_3 -funksjoner, fører til at de har gode muligheter til å ta med mange deformerte komponenter i sine bølgefunksjoner. Dette henger sammen med at SU_3 -teknikken er vel utarbeidet. Brown, Green og Gerace kan vanskelig ta med mer enn én deformert komponent når antall partikler og hull er spesifisert. Forsøker en å ta med flere, finner en at en får problemer med ortogonaliteten mellom tilstandene.

De enpartikkelfunksjonene Brown, Green og Gerace bruker, har romlig deformasjon (jfr. kap. 2.1), dvs. de er generert i et deformert potensial. Det er derfor strengt tatt ikke riktig å utvikle enpartikkelfunksjonene innen bare ett hovedskall av den sfæriske oscillator, slik som i uttrykk (1) og i tabell 1 og 2. For utregning av matriseelementer der bare valenspartikler (evt.hull) bidrar, pleier en likevel å gjøre denne tilnærmelsen. I tilfeller der alle corepartiklene gir bidrag, kan feilene adderes opp og bli så store at en må foreta en nøyaktigere beregning, f.eks. når det indre kvadrupolmoment regnes ut i ref. [9]. Også når en skal regne ut matriseelementer mellom tilstander der den ene har romlig deformasjon og den andre ikke, må en ta hensyn til at overlappet mellom den sfæriske og den deformerte core er mindre enn 1. I kalsium-området er overlappet anslått å være ca. 0.8, i oksygen-området noe mindre [9,10].

Problemer av dette slag oppstår ikke når SU_3 -funksjoner brukes. I kap. 2.3. understreket vi analogien med en triaksialt deformert oscillator. Analogien gjelder bare hvilke enpartikkelfunksjoner de fysikalsk viktigste mangepartikkelfunksjonene er bygd opp av. Selve enpartikkelfunksjonene derimot, er generert i et sfærisk potensial. Dermed: SU_3 -funksjonene har ikke romlig

deformasjon.

Om deformerte tilstander med eller uten romlig deformasjon gir best beskrivelse av atomkjernene, er lite kjent. Vi vil berøre dette spørsmålet gjentagne ganger senere i det foreliggende arbeidet.

I forbindelse med problemene omkring romlig deformasjon må vi nevne et siste poeng. Når Brown, Green og Gerace konstruerer sine indre tilstander som i uttrykk (4), er disse å oppfatte som en tilnærning til en Hartree-Fock tilstand (kap. 2.2.). Det har da ikke mening å innføre polarisasjonsladninger for å korrigere for lph eksitasjoner, da disse bidragene er null p.g.a. Hartree-Fock betingelsen. Dette antyder at polarisasjonseffekter allerede er inneholdt i funksjonene. Vi kan se dette formelt ved å utvikle de deformerte enpartikkelfunksjonene i en sfærisk basis, som i uttrykk (9). I denne basisen opptrer eksitasjoner som i fig. 1b, siden utviklingen (9) inneholder ledd utenfor det dominerende skallet. Når en, som Brown, Green and Gerace, bygger opp en modell for deformerte tilstander med romlig deformasjon, har en dermed automatisk innført en spesiell modell for polarisasjonseffektene.

3. ELEKTRONSPREDNING

Når en sammenlikner eksperiment og teori for elektronspredning, arbeider en oftest ikke med selve virkningstverrsnittene, men med de beslektede formfaktorene. For Coulombspredning, som er det eneste vi skal studere, gjelder

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2 \cdot Z}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E_0} \right)^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \sum_{J=0}^{\infty} |F_J(q)|^2. \quad (13)$$

Denne oppdelingen har den fordel at formfaktorene $F_J(q)$ bare avhenger av bombardementsenergien E_0 og spredningsvinkelen θ via den ene størrelsen q , gitt ved

$$q = \frac{2E_0 \sin \frac{\theta}{2}}{\hbar c}. \quad (14)$$

Størrelsen q er impulsoverføringen i enheter av \hbar .

Formfaktorene er gitt ved

$$F_J(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{2} \sum_{J_i}^{J_f} \langle J_f | T_J(q) | J_i \rangle. \quad (15)$$

Uttrykk for overgangsoperatoren $T_J(q)$ er gitt i kap. 5.3 og 5.4. Der er videre vår definisjon for det reduserte matriseelement gitt. Som vanlig er Z kjerneladningen, og $\hat{J} \equiv (2J + 1)^{\frac{1}{2}}$.

3.1. Formfaktorene

Formfaktorene kan innen den sfæriske skallmodellen skrives som en lineær-kombinasjon av radialintegraler over sfæriske Besselfunksjoner (jfr. likning (4) i kap. 5.4.) :

$$F_J(q) = \sum_{n_f l_f, n_i l_i} C(n_f l_f, n_i l_i) \langle n_f l_f | j_J(qr) | n_i l_i \rangle \quad (16)$$

I de situasjoner vi får å gjøre med (positiv paritets overganger) inneholder summen bare ledd der radialfunksjonene $|n_f l_f\rangle$ og $|n_i l_i\rangle$ hører til samme hovedskall.

de Forest og Walecka gir i likning 4.97 i ref. [20] en generell formel for radialintegralene hvis harmonisk oscillatorfunksjoner brukes. Fra denne finner vi, sammen med uttrykket over:

$$F_{J=0}(q) = \begin{cases} e^{-x} (A + Bx) & \text{i p-skallet} \\ e^{-x} (A + Bx + Cx^2) & \text{i sd-skallet} \\ e^{-x} (A + Bx + Cx^2 + Dx^3) & \text{i pf-skallet} \\ \text{osv.} & \end{cases} \quad (17)$$

for monopolverganger ($J = 0$), og

$$F_{J=2}(q) = \begin{cases} e^{-x} (Bx) & \text{i p-skallet} \\ e^{-x} (Bx + Cx^2) & \text{i sd-skallet} \\ e^{-x} (Bx + Cx^2 + Dx^3) & \text{i pf-skallet} \\ \text{osv.} & \end{cases} \quad (18)$$

for kvadrupolverganger ($J=2$). Størrelsen x er gitt ved $x = (bq/2)^2$ der b er oscillatorparameteren. Konstantene A, B, C, D osv. avhenger av strukturen til de kjernetilstandene overgangen går mellom. Konstanten A for monopolvergangene er lik overlappet mellom de to tilstandene. Vi har da $A = 1$ for elastisk monopolspredning og $A = 0$ for uelastisk spredning. For uelastisk spredning har derfor formfaktorene samme form som funksjoner av x (eller q) for monopol og kvadrupolverganger. Vi diskuterer videre bare slike overganger.

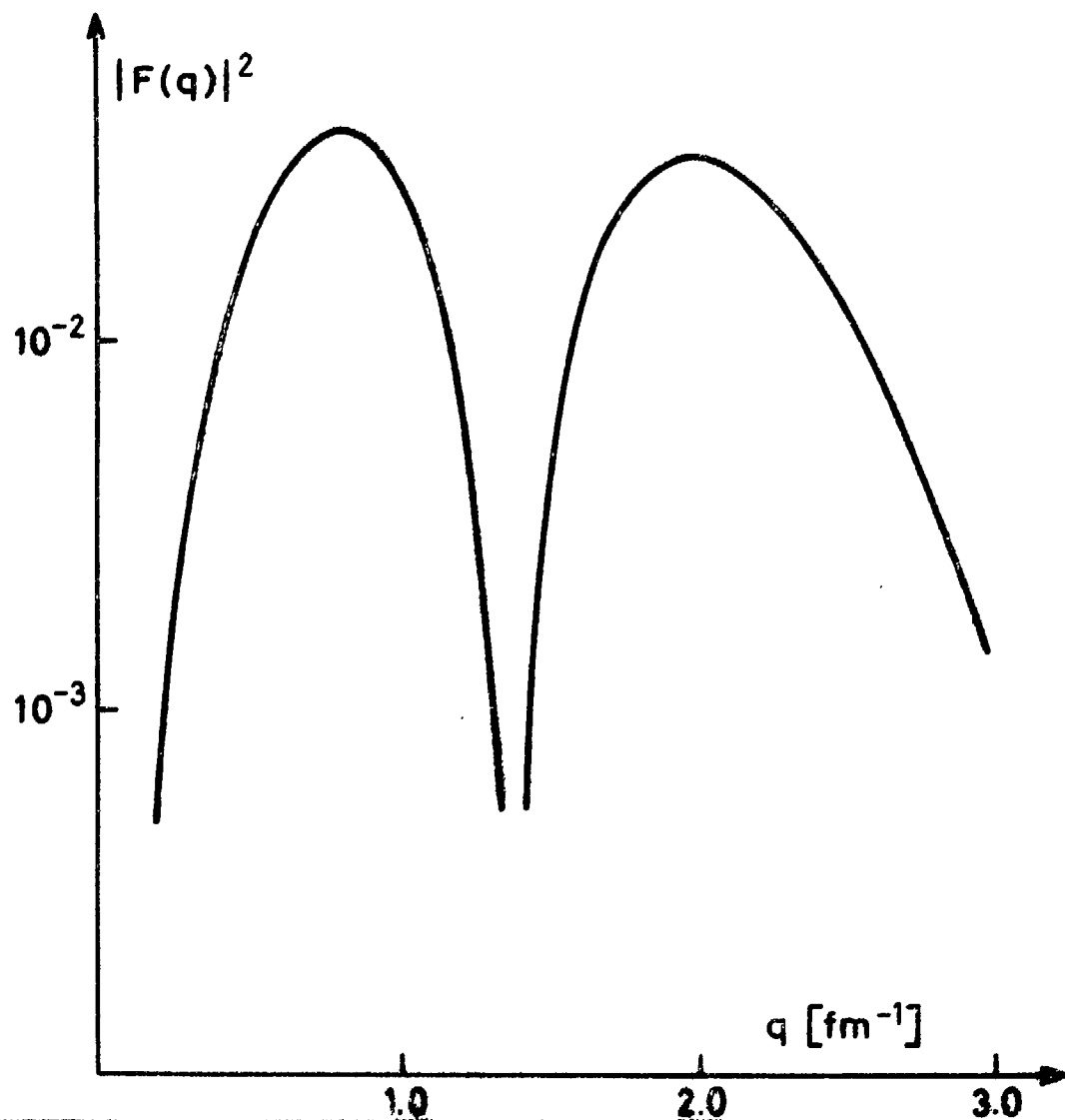


Fig. 4

Et typisk eksempel på formen av $|F(q)|^2$ som funksjon av q innen sd-skallet. Den opptegnede kurven svarer til $C = -0.7 B$, $b = 1.7$ fm (alle størrelser er definert i teksten).

Innen sd-skallet har som oftest B og C motsatt fortegn, slik at $|F(q)|^2$ får en form som vist i fig. 4. Da B og C kan få ulike relative størrelser for ulike modellbølgefunksjoner, har vi her en mulighet til å skille mellom ulike alternativer på grunnlag av kurveformen til $|F(q)|^2$. Tilsvarende muligheter har en prinsipielt også for høyere skall. Da blir etterhvert de mulige kurveformer så varierte (uttrykk (18)) at analysen av dem blir vanskelig. Dessuten må en normalt opp i stadig større x (eller q) for å få det totale bilde av formen av $|F(q)|^2$. Eksperimentene er oftest gjort bare for små impulsiveverfrynginger. En får derfor i praksis stadig dårligere informasjon om hele formfaktoren jo høyere skall en går til.

I oksygenområdet kan en for en gitt overgang dessuten få bidrag både fra p-skallet (hull) og fra sd-skallet (partikler). Disse bidragene har ulik form som funksjon av x (uttrykk (18)). Alt etter hvilken vekt hullbidraget har i forhold til partikkelbidraget, kan da den totale formfaktor anta forskjellig form. Dette kan utnyttes for studium av partikkel-hull strukturen hos bølgefunksjonene. I nærheten av andre lukkede skall har en en liknende forskjell mellom partikkel og hullbidragene. Men på samme måte som foran, tilsløres forskjellene av at mengden av mulige kurveformer øker.

Av det foregående følger: Oksygenområdet synes å gi de beste mulighetene for klare resultater, når en studerer skallmodellstruktur ved hjelp av uelastisk elektronspredning.

3.2. Rekkeutvikling av formfaktorene

Enkelte interessante resultater får vi frem ved å rekkeutvikle formfaktorene etter q direkte fra uttrykk (15), og så sammenlikne med harmonisk oscillator-uttrykkene (17) eller (18). Vi viser her et eksempel.

For monopoloverganger er operatoren $T_{J=0}(q)$ i uttrykk (15) gitt ved

$$T_{J=0}(q) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\text{protoner}} e^{j_0(qr)} . \quad (19)$$

Vi setter uttrykk (19) inn i (15), og rekkeutvikler de sfæriske Bessel-funksjonene

$$\begin{aligned} F_{J=0}(q) &= \frac{1}{2} \langle \psi_f | \sum e^{j_0(qr)} | \psi_i \rangle \\ &= \delta_{f,i} - \frac{1}{6Z} \langle \psi_f | \sum e^{r^2} | \psi_i \rangle q^2 + \frac{1}{120Z} \langle \psi_f | \sum e^{r^4} | \psi_i \rangle q^4 \dots . \quad (20) \end{aligned}$$

På den annen side kan vi bruke sd-skall uttrykket (17), rekkeutvikle eksponensialfunksjonen og sette inn $x = (bq/2)^2$. Vi får da

$$F_{J=0}(q) = A + (B-A)\frac{b^2}{4} q^2 - (B - C - \frac{A}{2})\frac{b^4}{16} q^4 + \dots \quad (21)$$

Sammenlikning av rekkeutviklingene (20) og (21) gir

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | \sum er^2 | \psi_i \rangle &= -\frac{3}{2} b^2 Z(B-A) \\ \langle \psi_f | \sum er^4 | \psi_i \rangle &= -\frac{15}{2} b^4 Z(B-C-\frac{A}{2}) . \end{aligned} \quad (22)$$

For uelastisk spredning, der $A=0$, får vi da for kvadratet av transisjonsradien

$$R_{tr}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \psi_f | \sum er^4 | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | \sum er^2 | \psi_i \rangle} = 5b^2 \left(1 + \frac{1}{x_m}\right) \quad (23)$$

der $x_m = -B/C$ er x -verdien i diffraksjonsminimumet for $|F(q)|^2$.

På denne måten får vi en særlig enkel formel for R_{tr}^2 , som vi av og til har behov for å regne ut.

Av likning (23) ser vi også: diffraksjonsminimumet kommer normalt ved lavest impulsoverføringer for de sterkest deformerte tilstandene. Dette skyldes at for de sterkest deformerte tilstandene, som rager lengst ut i rommet, vil matriseelementet av r^4 være relativt større enn matriseelementet av r^2 , enn hva tilfellet er for mindre sterkt deformerte tilstander. Dermed blir R_{tr}^2 større, og x_m mindre.

3.3. Polarisasjonsladninger

Polarisasjonsbidragene til formfaktorene har en tradisjonelt tatt med ved å gi ladningene i formfaktoruttrykkene et tillegg, den såkalte polarisasjonsladning. Denne metoden fungerer godt for uelastisk spredning (jfr.kap. 5.4.). For elastisk monopolspredning derimot, opptrer et problem.

I grensen for null impulsoverføring er da formfaktoren eksakt 1 (likning (20)). Dette skyldes normeringen av bølgefunksjonen og kan ikke modifieres av noen polarisasjonsledd. Polarisasjonene kan derfor bare påvirke koeffisientene B og C i uttrykkene (17) og (21) (vi holder oss til oksygenområdet). Dette betyr at en ikke uten videre kan innføre polarisasjonsladninger på

vanlig måte i overgangsoperatoren $T_{J=0}(q)$ (jfr. uttrykk (15)), da ellers også koeffisienten A ville påvirkes. Siden polarisasjonsladninger kan brukes for uelastisk spredning, der $A = 0$ ifølge uttrykk (20) og (21), må også elastisk spredning kunne behandles ved at ladninger av samme størrelse innføres i B og C , mens A forblir uforandret lik 1. Polarisasjonsladninger innført på denne måten kaller vi i det følgende for e_{pol} .

Av uttrykk (20) eller (22) ser vi at hvis polarisasjonsladninger innføres i $F_{J=0}(q)$, påvirkes også

$$(r_{rms})^2 = \frac{1}{2} \langle \psi_i | \sum e r^2 | \psi_i \rangle, \quad (24)$$

ladningsradien i kvadrat. Det har vært gjort beregninger av polarisasjonsbidragene til r_{rms} fra mer grunnleggende teori [21]. De endringer man da finner, uttrykkes ved hjelp av den polarisasjonsladning som må innføres i uttrykket for r_{rms} for å gi de funne resultater. Disse ladningene kaller vi her e_{pol} .

Vi vil vise noe som er lite påaktet, nemlig at $e_{pol} \neq \epsilon_{pol}$, men at det likevel er en meget enkel sammenheng mellom e_{pol} og ϵ_{pol} .

Betrakt bidraget til $(r_{rms})^2$ fra én valenspartikkel (eller hull), sett $Z = 1$, og forutsett foreløpig at ingen polarisasjonseffekter er med. Av likningene (22) og (24) får vi et enkelt uttrykk for $(r_{rms})^2$ uttrykt ved A og B . Da vi bare betrakter én partikkel, må A og B inneholde ladningen som multiplikatív faktor: $A = e \cdot A' = e \cdot 1$ og $B = e \cdot B'$. Dermed fås

$$(r_{rms})^2 = \frac{3}{2} b^2 (e - eB'). \quad (25)$$

Siden $(r_{rms})^2 = eb^2 (\frac{3}{2} + N)$ for én partikkel i den harmoniske oscillator, når $N = 0, 1, 2, \dots$ for s -, p -, sd -, skallene, fås av likning (25) at $B' = -\frac{2}{3} N$.

Vi innfører nå polarisasjonsladninger i uttrykk (25). Hvis de innføres som e_{pol} (se foran), skal $e \rightarrow e + e_{pol}$ i uttrykk (25). Da fås

$$(r_{rms})^2 = b^2 (\frac{3}{2} + N)e + b^2 (\frac{3}{2} + N)e_{pol}. \quad (26)$$

Innføres derimot polarisasjonseffektene ved hjelp av ϵ_{pol} (se foran), skal

$e + e + \epsilon_{pol}$ i leddet som inneholder B' i likning (25), mens e skal være uforandret i første ledd da dette stammer fra A , som nå ikke skal korrigeres. Nå får vi

$$(r_{rms})^2 = b^2 \left(\frac{3}{2} + N \right) e + b^2 N \epsilon_{pol} . \quad (27)$$

Sammenliknes uttrykkene (26) og (27), fås

$$\epsilon_{pol} = \frac{2N}{3 + 2N} e_{pol} . \quad (28)$$

For p-skallet ($N = 1$) og for sd-skallet ($N = 2$) fås

$$\epsilon_{pol}^p = \frac{2}{5} e_{pol} , \quad \epsilon_{pol}^{sd} = \frac{4}{7} e_{pol} . \quad (29)$$

Disse relasjonene brukes i kap. 5.5.

4. TONØYTRONOVERFØRING

4.1. DWBA teorien

DWBA (Distorted Wave Born Approximation) teorien for topartikkeloverføring er grundig behandlet av Towner og Hardy [22]. Her trekker vi frem enkelte spesielle trekk av betydning for våre beregninger for (p,t)-reaksjoner (kap. 5.6 og 5.7.). Spesielt for (p,t)-reaksjoner gjelder [22]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sum_{LM} \left| \sum_{j_a \geq j_b} \beta(j_a j_b L) B(j_a j_b LM) \right|^2 . \quad (30)$$

De spektroskopiske amplitudene $\beta(j_a j_b L)$ inneholder all informasjon om kjernestrukturen. De kan skrives slik

$$\beta(j_a j_b L) = \langle J || [a_{j_a}^+ a_{j_b}^+]_L || \bar{J} \rangle , \quad (31)$$

der

$$[a_{j_a}^+ a_{j_b}^+]_{LM} \equiv (1 + \delta_{j_a j_b})^{-1/2} \sum_{m_a m_b} \langle j_a m_a j_b m_b | LM \rangle a_{j_a m_a}^+ a_{j_b m_b}^+ . \quad (32)$$

Det reduserte matriseelement i likning (31) er definert som i kap. 5.3.

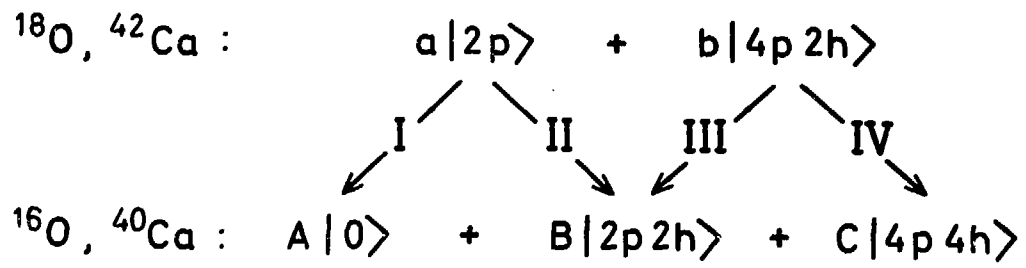


Fig. 5

Mulige måter å overføre to nøytroner på mellom de ulike bølgefunksjonskomponentene i reaksjonene ${}^{18}\text{O}(p,t){}^{16}\text{O}$ og ${}^{42}\text{Ca}(p,t){}^{40}\text{Ca}$. Amplitudene for de forskjellige komponentene er kalt a,b, A,B og C.

Skrivemåten i uttrykkene foran er noe forenklet idet vi ikke angir andre kvantetall enn J og \bar{J} for hhv. grunn-tilstanden i targetkjernen og den tilstanden vi kommer til i slutt-kjernen. Videre angir vi bare de totale angulære momenter j_a og j_b for hvert av de overførte nøytronene. Innen ett hovedskall i enpartikkelbasisen er n_a og l_a unødvendige å spesifisere i tillegg til j_a . Endelig er $j_a \geq j_b$ i likning (30) symbolsk å forstå. Det som menes er at hvert par av enpartikkeltilstander bare skal forekomme en gang i summen.

Bølgefunksjonene for begynnelses- og slutt-tilstanden er i våre tilfeller en lineærkombinasjon av $2p$ og $4p2h$ tilstander for ^{18}O og ^{42}Ca , og av vakuumentilstanden, $2p2h$ og $4p4h$ tilstander for ^{16}O og ^{40}Ca . De spektroskopiske amplitudene (31) blir derfor en sum av tilsvarende bidrag mellom komponentene av bølgefunksjonene. Det er naturlig å dele disse bidragene i fire klasser som vist i fig. 5. Bidrag I og III er partikkelbidrag, dvs. de svarer til overføring av partikler utenfor coren, mens bidrag II og IV er hullbidrag, der partikler fra coren overføres.

Faktorene $B(j_a j_b LM)$ i uttrykk (30) inneholder bl.a. integraler over produktet av distorted waves fra inngangs- og utgangskanalen og bølgefunksjonen for det overførte nøytronpar.

Det er to måter som normalt brukes for å behandle bølgefunksjonene for det overførte nøytronpar. I Glendennings metode [23] forutsetter en at enpartikkelfunksjonene for nøytronene er harmonisk oscillatorfunksjoner. Massesenter- og relativ-bevegelsen for nøytronparet finnes ved bruk av Mosinsky-transformasjonen. Da det integralet i faktoren $B(j_a j_b LM)$ som ble nevnt foran, er følsomt for det assymptotiske forløp av massesenterfunksjonene, utstyrrer Glendennings disse oscillatorfunksjonene med Hankel-funksjons haler.

Når Glendennings metode brukes er det praktisk å skrive om det generelle uttrykket (30) noe, slik at det antar formen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sum_{LM} \sum_N G_{NL} |\bar{B}(NLM)|^2. \quad (33)$$

Indeksene N og L er her radialekvantetallene for massesenterfunksjonene for det overførte nøytronpar. Koeffisientene G_{NL} avhenger av kjernestrukturen ved at de inneholder størrelsene $\beta(j_a j_b L)$, se ref. [23]. Disse koeffisientene kan trekkes sammen med radialfunksjonene $u_{NL}(R)$ for massesenterbevegelsen til de såkalte tonøytronformfaktorer

$$\tilde{u}_L(R) \equiv \sum_N G_{NK} u_{NK}(R) . \quad (34)$$

Integralet over distorted waves og formfaktoren får normalt hovedbidraget fra området omkring kjerneoverflaten. Størrelsen av virkningstverrsnittet i uttrykk (33) avgjøres derfor i stor grad av størrelsen av $\tilde{u}_L(R)$ nær kjerneoverflaten. Defineres oscillatorfunksjonene $u_{NL}(R)$ i likning (34) slik at de er positive for små R , fås konstruktiv interferens i $\tilde{u}_L(R)$ nær overflaten hvis koeffisientene G_{NL} har alternerende fortegn som funksjon av N . En kan dermed lett se fra størrelse og særlig fortegn av koeffisientene G_{NL} , om kjernestrukturen vil gi en sterk eller svak overgang i et gitt tilfelle.

Den andre måten å behandle nøytronfunksjonene på er å bruke Bayman-Kallio's metode [24]. Her behøver en ikke å forutsette harmonisk oscillatorfunksjoner for hvert nøytron; det vanlige er å bruke Woods-Saxon funksjoner. Dette anses av mange å være en forbedring i forhold til Glendenings teknikk. På den annen side er det uklart hvor sterkt hvert nøytron skal bindes i Woods-Saxon potensialet [25]. Det vanlige er å la hvert nøytron få halve energidifferensen mellom de aktuelle nivåer i target og sluttkjernen. Dette fører til at ulike enpartikkelfunksjoner må genereres i Woods-Saxon potensialer med nokså forskjellig dybde. Det kan diskuteres hvor fysikalsk rimelig dette er.

I begge metodene foran forutsetter en den såkalte null-rekkevidde tilnærming [22]. Videre regner en med at det overførte nøytronpar er i en relativ s-tilstand.

4.2. Koblede kanaler

I DWBA-teorien forutsetter en at overføringen av nøytronene skjer direkte fra grunntilstanden i targetkjernen til det aktuelle nivået i sluttkjernen. Dessuten forutsetter en at det ikke skjer eksitasjoner av kjernene før eller etter selve overføringsprosessen. Andre, indirekte overføringer antas å være tatt hensyn til gjennom de optiske potensialer. I enkelte tilfeller kan likevel indirekte overføringer være så sterke at de må inkluderes eksplisitt.

Ascutto og Glendenning [26] har innført en metode til å ta med indirekte prosesser. Denne er en naturlig generalisering av DWBA-teorien. Her får en, ved å løse to sett med koblede differensiallikninger, tatt hensyn til alle uelastiske prosesser i target og i sluttkjernen til alle ordener, pluss partikkeloverføring i første orden (som i DWBA-teorien) fra hvert nivå i

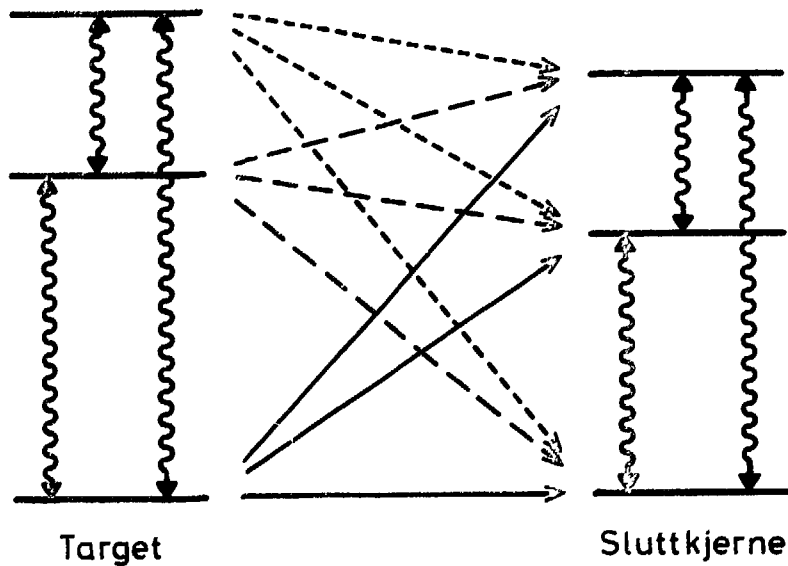


Fig. 6

Illustrasjon av hvilke prosesser som tas hensyn til i en CCBA beregning hvis 3 nivåer i target og 3 nivåer i sluttkjernen tas med. De krøllede pilene mellom nivåene i hver av kjernene representerer uelastiske overganger forårsaket av prosjektilet, evt. den utgående partikkel. Pilene mellom kjernene representerer partikkeloverføring mellom de angitte nivåene. Alle 9 partikkeloverføringene på figuren er prinsipielt likeverdige. De er bare tegnet på ulike vis for å forsøke å gjøre figuren mindre uoversiktlig.

target til hvert nivå i sluttkjernen (fig. 6). En har således ikke regnet med tilbakekopling fra sluttkjernen til target. Denne teorien kaller vi i dette arbeidet for CCBA (Coupled Channel Born Approximation) - teorien, selv om denne betegnelsen også brukes i andre betydninger.

I CCBA-teorien får en å regne ut partikkeloverføringsledd nøyaktig som i DWBA-teorien ved at spektroskopiske amplituder $\beta(j_a j_b L)$ må beregnes. Men nå må en regne ut slike størrelser mellom alle aktuelle nivåer i target og i sluttkjernen. Som foran kan en bruke Glendennings eller Bayman-Kallios metode til behandling av de overførte nøytronene. Og hvis Glendennings metode brukes, kan styrkeforholdet mellom ulike overføringer kontrolleres før den tidkrevende løsningen av de koblete likningene, ved at koeffisientene G_{NL} (se likning (33)) regnes ut.

Nettopp fordi bølgefunksjonene i oksygen og i kalsiumområdet ofte inneholder store deformerte komponenter, må en regne med at indirekte overføringer, og dermed CCBA-teori må få betydning. Mellom sterkt deformerte komponenter er det ofte store matriseelementer av enpartikkeloperatører (f.eks. store E2-overganger). Det kan da bli sterke uelastiske eksitasjoner, slik at indirekte overføringer av nøytronparet kan få betydning. I de tilfellene vi studerer er grunntilstandsovergangen over 10 ganger så sterk som direkteovergangene til mange andre nivåer av interesse. Nå er det en alminnelig erfaring [27] at en 2.ordens prosess der partikkeloverføring etterfølges av uelastisk eksitasjon (eller omvendt) har en styrke på ca. 10% av selve overføringsprosessen. Dette under forutsetning av relativt sterk uelastisk eksitasjon. I våre tilfeller må det bety at 2.ordens prosesser via grunntilstanden i target kan bli av samme størrelsesorden som direkteovergangene. Da de forskjellige bidrag adderes koherent i denne teorien, må en vente at innføring av indirekte prosesser kan gi vesentlige forandringer i virkningstverrsnittene.

5. FEM TIDSSKRIFTARTIKLER

5.1. Konkret bakgrunn for hver av artiklene

I artiklene i kap. 5.3, 5.4 og 5.5 studerer vi forskjellige aspekter ved elektronspredning mot kjerner i oksygenområdet; uelastisk spredning i de to første artiklene, og elastisk spredning i den tredje. Kap. 5.6 og 5.7 inneholder studier av tonnøytronoverføringsreaksjonene $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$ og $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$.

Da det kan være praktisk å ha dem som referanse, gir vi i fig. 7 spektrene for ^{16}O , ^{18}O , ^{40}Ca og ^{42}Ca .

Artikkelen i kap. 5.3. inneholder en omfattende analyse av elektroneksitasjon av positiv paritets nivåer i ^{16}O og ^{18}O . Bakgrunnen for arbeidet var problemene omkring $0_2^+(6.05 \text{ MeV})$ nivået i ^{16}O (pkt.a) i kap. 1.3.). Kaalhus [28] har allerede studert 0^+ -nivåene i ^{16}O . Hans arbeid var imidlertid delvis basert på indirekte eksperimentelle resultater [29] som senere er omstøtt av direkte målinger [30]. Når det gjelder selve regneteknikken har vi sett det vesentlig å behandle bølgefunksjonene så fullstendig som mulig, og ikke bare ta med de dominerende komponentene. Vi skal se at dette kan ha en viktig innflytelse på resultatene. Endelig har vi forbedret Kaalhus' beregninger ved å benytte Woods-Saxon funksjoner i stedet for harmonisk oscillator funksjoner i radialintegralene i uttrykk (16), for monopolvergangene. Vårt arbeid må derfor sees som en naturlig fortsettelse av det arbeidet Kaalhus begynte. Vi forsøker også i kap. 5.3. å finne ut hvor stabile de utregnede formfaktorene er overfor små endringer i bølgefunksjonene, slik at vi kan få opplysninger av betydning for pkt. d) i kap. 1.3.

I artikkelen i kap. 5.3. forutsatte vi at polarisasjonseffektene kunne inkluderes ved hjelp av polarisasjonsladninger. Disse ble antatt å være uavhengige av impulsoverføringen q . At dette siste skulle være tilfelle er imidlertid på ingen måte selvfølgelig. Fra uttrykk (18) følger at formfaktorene i oksygenområdet har formen $e^{-x}(Bx + Cx^2)$, $x = (bq/2)^2$, når vi bruker harmonisk oscillatorfunksjoner. I bidraget fra én partikkel eller ett hull er B og C proporsjonale med ladningene. Forutsettes at polarisasjonsladningene er uavhengige av q (eller x), forutsettes også at forholdet C/B i korreksjonsbidragene er det samme som i de ukorrigerede formfaktorene. Dette er det i prinsipp ingen grunn for. Snarere ville en vente en endring, særlig for hullovergangene. Av uttrykk (18) ser vi at $C = 0$ for hullbidragene (p -skall bidragene). På den annen side finner en på samme måte som i kap. 3.1., at korreksjonsledd som vist i fig. 1b normalt vil kunne gi $C \neq 0$. Dette ville i så fall gi en sterkt q -avhengig polarisasjonsladning. I artikkelen i kap. 5.4. ekstrapolerer vi kjente polarisasjonskorreksjoner for $q = 0$ til høyere q . På den måten får vi en oversikt over hvor god antakelsen om en konstant polarisasjonsladning egentlig er. Dette gir innsikt i problemet reist i pkt. d) i kap. 1.3., ut over den som er funnet i kap. 5.3.

For å møte utfordringen fra pkt. b) i kap. 1.3. har vi i kap. 5.5. studert

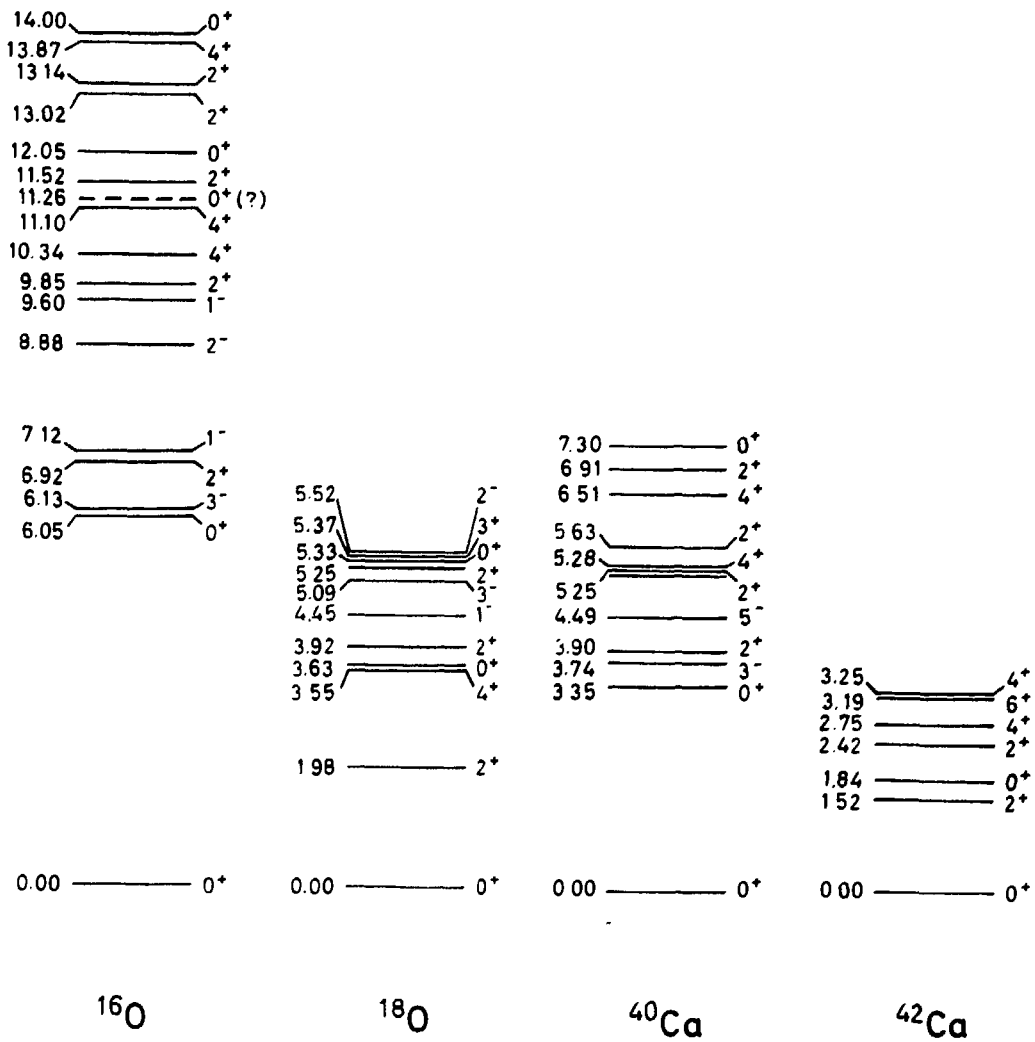


Fig. 7

Utvalgte nivåer i kjernene ^{16}O , ^{18}O , ^{40}Ca og ^{42}Ca tatt fra ref. [6,31]. For ^{18}O og ^{42}Ca er spektrene komplette så høyt opp de er tegnet. Spektret for ^{16}O er komplett til 10 MeV. Over 10 MeV har vi bare tatt med 0^+ , 2^+ og 4^+ nivåene med $T=0$. For ^{40}Ca er spektret komplett til 5.7 MeV. Over denne energien har vi bare tegnet positiv paritets nivåer.

$$F_j(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \sum_{J_i} \langle J_f || T_j(q) || J_i \rangle \quad (15)$$

- 37 -

ladningsradiene for kjerner i oksygenområdet. Det problemet som er antydnet i kap. 1.3. er egentlig ganske alvorlig. Hvis ladningsradiene ikke kan forstås ut fra vanlige, additive polarisasjoner fra hver valenspartikkel, må en stille seg skeptisk til slike beregninger vi har gjort i kap. 5.3. og 5.4., der additive polarisasjoner er forutsatt. Dessuten ville det bli problematisk hvilke data en skulle sammenlikne teorien med i slike beregninger som f.eks. i ref. [21], der en søker å beregne monopol polarisasjonseffekter fra realistiske vekselvirkninger. I kap. 5.5. forsøker vi å løse problemet omkring radiene i oksygenområdet ved, som før, å forutsette additive polarisasjonseffekter. Men i tillegg tar vi eksplisitt hensyn til innvirkningen fra de deformerte komponentene. Den sentrale formel (3) i kap. 5.5. er utledet i appendiks A. Den kortfattede, men viktige diskusjonen frem til uttrykkene (5) i kap. 5.5. er presentert mer eksplisitt i kap. 3.3.

Artiklene i kap. 5.6 og 5.7. om (p,t)-reaksjoner hører nøye sammen. Bakgrunnen for dem var problemet reist i pkt. c) i kap. 1.3. Princeton-gruppen sammenliknet eksperimenter for reaksjonene $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$ og $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$ med Brown-Green-Gerace versjonen av coreeksitasjonsmodellen. Her var det så alvorlige uoverensstemmelser at man fant å måtte forkaste modellen. På grunn av det sterke slektskap mellom denne modellen og Ellis-Engelands modell (kap. 2.), som vi har brukt i de tre foregående artiklene, er det grunn til å tro at også Ellis-Engelands modell vil komme opp i problemer. Dette er da også eksplisitt vist i kap. 5.7. Vi finner den negative konklusjonen Princeton-gruppen trekker, utilfredsstillende på grunnlag av den store mengde av andre data modellene kan forklare. Vi søker derfor i kap. 5.6. og 5.7. å inkludere viktige effekter som ble utelatt fra beregningene i ref. [6, 7, 8].

For kalsiumreaksjonen bygger vi på Gerace og Greens modell [10], men innfører de triaksialt deformerte hullbanene fra tabell 2. Dette synes mer i pakt med Gerace og Greens prinsipielle synspunkter, slik de er uttrykt i ref. [32], enn deres første beregninger i ref. [10]. Formler av betydning for utregningene er angitt i appendiks B. For oksygenreaksjonen har vi igjen anledning til å bruke Ellis og Engelands modell [11]. På basis av overveielserne fra kap. 4.2. finner vi det her nødvendig å behandle reaksjonen i CCBA-formalismen. I kap. 5.7. studerer vi videre hvilken innflytelse romlig deformasjon av enpartikkelbasisen (jfr. kap. 2) har på (p,t)-resultatene. Enkelte overveielser i denne forbindelse er presentert mer eksplisitt i appendiks C enn hva vi hadde anledning til i

artikkelen i kap. 5.7.

5.2. Rettelser

Kap. 5.4. \hat{J}_j i formel (2) skal være \hat{J}_r

Kap. 5.5. 3.linje i hovedteksten på side 456:
no identical skal være not identical

Kap. 5.6. Table 3, under rubrikken merket SU_3 ;
0.5000 skal være -0.5000

11.linje, side 176: pik-up skal være pick-up

nest siste linje i fotnoten, side 176:
 0^+ skal være 0_3^+

Kap. 5.7. 7.linje i annen spalte på side 9:
Specially skal være spatially

14.linje nedenfra, annen spalte på side 11:
specially skal være spatially

11.linje, første spalte på side 12:
spacial skal være spatial.

5.3. Inelastic Electron Scattering and the
Weak Coupling Model for ^{16}O and ^{18}O

Sertrykk fra Nuclear Physics.

$$= \delta_{f,i} - \frac{1}{6Z} \langle \psi_f | \sum e r^2 | \psi_i \rangle \xi^2 + \frac{1}{120Z} \langle \psi_f | \sum e r^4 | \psi_i \rangle \xi^4 \dots \quad (20)$$

1.E.4:2.L

Nuclear Physics A209 (1973) 493–519; © North-Holland Publishing Co., Amsterdam

Not to be reproduced by photoprint or microfilm without written permission from the publisher

INELASTIC ELECTRON SCATTERING AND THE WEAK COUPLING MODEL FOR ^{16}O AND ^{18}O

V. HORSFJORD

NORDITA, Copenhagen

Received 19 October 1972

(Revised 19 March 1973)

Abstract: Form factors and related quantities for a number of even parity transitions in ^{16}O are calculated using wave functions from the weak coupling model introduced by Ellis and Engeland. The theoretical results are compared with existing data. However, in the more interesting cases sufficient data are unfortunately still lacking. Form factors for the two lowest monopole transitions in ^{18}O have also been calculated, and it is pointed out that the corresponding experiments would give valuable data that could shed light on the still unsettled problem of how to describe the structures of the two lowest excited 0^+ levels in ^{18}O .

1. Introduction

In a series of papers ¹⁻³) it has been shown that the weak coupling model introduced by Ellis and Engeland accounts very well in general for such experimental data as positions of energy levels, γ -decay rates and spectroscopic factors for the nuclei in the oxygen region. In order to confront the model with more data we calculate in the present paper form factors for inelastic electron scattering on the nuclei ^{16}O and ^{18}O .

The lowest monopole transition in ^{16}O has been extensively studied: experimentally by Stroetzel ⁴) and Bergstrom *et al.* ⁵), and theoretically by Boeker ⁶), Gerace and Sparrow ⁷) and Erikson ⁸) using several versions of the Brown-Green model ⁹), Kaalhus ¹⁰) using the weak coupling model ¹), and Noble ¹¹) and Bertsch and Bertozzi ¹²) using different α -particle models. Apart from the α -particle works, all calculations predict a form factor that is too low compared with data, although the deviations are not large when the Brown-Green wave functions are correctly treated ⁸). In the present paper we present calculations on this monopole transition, and also on other even parity transitions in ^{16}O based on the weak coupling wave functions.

Kaalhus ¹⁰) has already performed similar calculations for the monopole transitions. In that work, however, the wave functions were drastically simplified so that analytical techniques could be applied in a straightforward manner. In the present work we try to avoid modifying the wave functions. This is shown to have important consequences. Furthermore an attempt is made to take into account Woods-Saxon corrections.

For quite a long time there has been some confusion in the literature as to whether the second or the third 0^+ level, at 3.63 and 5.33 MeV respectively, in ^{18}O contains

the largest component of core-excited (4p-2h)-states, cf. table 1. The reason for this is very simple: before the particle-hole interaction is included, the second spherical and the first deformed 0^+ levels are nearly degenerate. Because of uncertainties in the exact unperturbed positions (which are calculated as near cancellations between large terms) and in the particle-hole interaction, it is difficult to predict unambiguously which level is pushed up and down when the interaction is taken into account. In ref. ¹⁾ 0_2^+ comes out as the most deformed level. The E2 γ -decay rates seem to support this type of structure ²⁾. However, by doing inelastic electron scattering experiments one can obtain independent, and more direct information on the present problem since the structures of the two excited 0^+ levels now are related directly to the ground state, the structure of which is fairly well understood.

TABLE I

The percentage of deformed states in the levels 0_2^+ and 0_3^+ in ^{18}O according to several theoretical works

	Ref. ¹³⁾	Ref. ¹⁴⁾ case 1	Ref. ¹⁴⁾ case 2	Ref. ¹⁵⁾	Ref. ¹⁶⁾	Ref. ¹⁷⁾	Ref. ¹⁸⁾ table 3(a)	Ref. ¹⁾
0_2^+	10	41	6	81	90	27	14	80
0_3^+	76	47	84	2	1	36	80	15

Another motivation for the present work is the following. As is well known, the form factors for inelastic electron excitations for very small momentum transfers are proportional to the strengths of the corresponding γ -decays, except in the monopole case, where there are no γ -decays. The interesting problem then arises whether the electron scattering data for higher momentum transfers can provide additional information about relevant shell model problems, such as the particle-hole structures of the wave functions. The negative possibility exists, that the structures of the form factors are in general not very dependent on shell model characteristics. It is hoped that the present calculations can also shed some light on this problem.

2. Formalism

2.1. THE MODEL

Here we only discuss the features of the model necessary for the present work. For further details consult ref. ¹⁾. We are dealing with a spherical shell model where the filled 1s and 1p shells constitute the vacuum state and where one can have particles in the 2s1d shell and holes in the 1p shell. The model Hamiltonian is written in the form

$$H = H_{sd} + H_p + V_{p, sd}, \quad (1)$$

where $H_{sd(p)}$ is the Hamiltonian for the sd-(p-)shell particles and $V_{p, sd}$ the particle-hole interaction. Details on the various terms in formula (1) are given in ref. ¹⁾.

The eigenvalue problems for H_{sd} and H_p are first solved separately:

$$\begin{aligned}
 H_{sd}|(sd)^{n_1}\alpha_1 J_1 T_1\rangle &= E_{\alpha_1 J_1 T_1 M_{T_1}}^{n_1}|(sd)^{n_1}\alpha_1 J_1 T_1\rangle, \\
 H_p|p^{-n_2}\alpha_2 J_2 T_2\rangle &= E_{\alpha_2 J_2 T_2 M_{T_2}}^{-n_2}|p^{-n_2}\alpha_2 J_2 T_2\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Here n_1 (n_2) is the number of particles (holes) and J , T and M_T the spin and isospin quantum numbers. The symbols α_1 and α_2 represent all other necessary quantum numbers. The M_T dependence of the eigenvalues is due to the Coulomb interaction. The eigenstates of H_{sd} are expressed as linear combinations of SU(3) states

$$|(sd)^{n_1}\alpha_1 J_1 T_1\rangle = \sum C|(sd)^{n_1}[f_1](\lambda_1 \mu_1)\kappa_1 L_1 S_1 J_1 T_1\rangle,
 \tag{3}$$

and similarly for the p-shell. The coefficients C depend on all symbols in expression (3), and the sum runs over $[f_1]$, $(\lambda_1 \mu_1)$, κ_1 , L_1 and S_1 . The symbols in the SU(3) functions have their conventional meaning¹⁾. The relevant eigenstates are listed in table 2, together with the numbers by which they are referred to in subsequent tables.

TABLE 2
The basic particle and hole states

State number	Number of particles	J^π	T	Eigenvalue (MeV)
1	0	0 ⁺	0	0.00
2	2	1 ⁺	0	0.00
3	2	3 ⁺	0	0.92
4	2	5 ⁺	0	1.42
5	2	1 ₂ ⁺	0	4.13
6	2	1 ₃ ⁺	0	6.08
7	2	0 ⁺	1	0.00
8	2	2 ⁺	1	1.74
9	2	4 ⁺	1	3.38
10	2	2 ₂ ⁺	1	3.99
11	2	0 ₂ ⁺	1	4.03
12	2	4 ₂ ⁺	1	7.79
13	4	0 ⁺	0	0.00
14	4	2 ⁺	0	1.65
15	4	4 ⁺	0	4.17
16	4	0 ₂ ⁺	0	5.98
17	4	2 ₂ ⁺	0	8.34
18	4	0 ₃ ⁺	0	10.51
19	4	2 ⁺	1	0.00
20	-0	0 ⁺	0	0.00
21	-2	1 ⁺	0	0.00
22	-2	1 ₂ ⁺	0	3.92
23	-2	2 ⁺	0	7.05
24	-2	0 ⁺	1	0.00
25	-2	2 ⁺	1	7.14
26	-4	0 ⁺	0	0.00
27	-4	2 ⁺	0	4.66
28	-4	0 ₂ ⁺	0	12.53

For further details about the wave functions, see ref. 1).

The total Hamiltonian (1) is now diagonalized in the basis

$$|\phi_{\nu J T M_T}^{n_1 n_2}\rangle = [|(sd)^{n_1} \alpha_1 J_1 T_1\rangle |p^{-n_2} \alpha_2 J_2 T_2\rangle]_{J T M_T}, \quad (4)$$

where the particle and hole functions are those from expressions (2) with the lowest eigenvalues. It is observed in ref. ¹) that in this basis the off-diagonal matrix elements of H (or $V_{p, sd}$) are in general small so that the expansions of the final wave functions in the basis (4) normally contain few terms of appreciable strength. This means that the main correlations are between the particles within the same major shell, whereas the correlations between particles and holes are relatively weak, thus justifying the name "weak coupling model".

The strength of the model lies in that it gives a systematic procedure for picking out the most important components in the wave functions, and in its ability to give a simple unified view of the structure of a series of nuclei. On the other hand, because of some uncertainties ¹), mainly in the interaction term $V_{p, sd}$, one should not claim to account very accurately for all properties of each energy level. The model can be said to be inconsistent with data only if the data systematically cannot be reproduced even after slight adjustments of the wave functions, keeping the main structure unchanged.

2.2. ELECTRON SCATTERING

In the first Born approximation the Coulomb form factor $F_J(q)$ for a transition of multipolarity J is proportional to the reduced matrix element of the transition operator $T_J(q)$:

$$F_J(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{J_f}{J_i} \langle f; J_f || T_J(q) || i; J_i \rangle. \quad (5)$$

We adopt the notation $\hat{A} = (2A+1)^{\frac{1}{2}}$ and define the reduced matrix elements according to the relation

$$\langle f; J_f M_f | T_{JM}(q) | i; J_i M_i \rangle = \langle J_i M_i JM | J_f M_f \rangle \langle f; J_f || T_J(q) || i; J_i \rangle.$$

In formula (5) q is the momentum transfer (in units of \hbar) and Z the proton number of the nucleus.

The shell model expression for the transition operator is

$$\begin{aligned} T_{JM}(q) &= \sum_{T=0}^1 \sum_{\nu=1}^A T_{JM T M_T=0}(\nu; q) \\ &= \sum_{T=0}^1 \sum_{\nu=1}^A e_T j_J(qr_\nu) Y_{JM}(\vartheta_\nu, \varphi_\nu) X_T(\nu), \end{aligned} \quad (6)$$

where $j_J(qr_\nu)$ and $Y_{JM}(\vartheta_\nu, \varphi_\nu)$ are a spherical Bessel function and a spherical harmonic, respectively. Further $r_\nu, \vartheta_\nu, \varphi_\nu$ denote the spherical polar coordinates for the ν th nucleon; $e_T = \frac{1}{2}(e_p + (-)^T e_n)$, where e_p (e_n) is the proton (neutron) charge, and $X_T(\nu) = 1$ for $T = 0$ and $X_T(\nu) = \tau_3(\nu)$ for $T = 1$.

We now express the single-particle operator $T_{JM}(q)$ in the second quantization formalism. After some coupling and recoupling one obtains

$$T_{JM}(q) = \sum_{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LST} \mathcal{O}\{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LSJT\} [a_{(\lambda'0)}^+ a_{(\lambda'0)}]_{(\lambda\mu)\kappa LSJTM_T} \quad (7)$$

where

$$\mathcal{O}\{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LSJT\} = \sum_{l_1 l_2 j_1 j_2} (-)^{\lambda' + l_2} j_1^2 j_2^2 \sqrt{2L\hat{S}} J^{-1} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ j_1 & j_2 & J \end{pmatrix} \\ \times \langle (\lambda'0)0l_1; (0\lambda')kl_2 || (\lambda\mu)\kappa L \rangle \langle (\lambda'0)l_1 j_1 || T_{JT}(q) || (\lambda'0)l_2 j_2 \rangle. \quad (8)$$

The single-particle wave functions employed here are harmonic oscillator functions coupled to definite j , that in SU(3) notation are written $|(\lambda'0)l j m_j \frac{1}{2} m_i \rangle$, where $\lambda' = 1$ for the p-shell and $\lambda' = 2$ for the sd shell. The $[f]$ and κ are not necessary in the single-particle case and are omitted. The $\langle (\lambda'0)0l_1; (0\lambda')kl_2 || (\lambda\mu)\kappa L \rangle$ is a reduced SU(3) coupling coefficient defined in ref. ¹⁹, where $k = 0$ when $\lambda' = 2$ and $k = 1$ when $\lambda' = 1$. In obtaining the above formulae one has taken into account the fact that we are later going to deal with only transitions that conserve parity so that the expression splits up into a p-shell contribution ($\lambda' = 1$) and an sd shell contribution ($\lambda' = 2$). The operator $T_{JT}(q)$ in eq. (8) is the same as $T_{JM T M_T = 0}(v; q)$ from eq. (6), and the triple-barred matrix elements are reduced both in J and T .

The form factors for transitions between the basis states (4) can now be written

$$F_J(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{J_f}{J_i} \sum_{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LST} \mathcal{O}\{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LSJT\} \langle T_i M_{T_i} T M_T = 0 | T_f M_{T_f} = M_{T_i} \rangle \\ \times \langle \phi_{v_f J_f T_f}^{n_1 n_2} || [a_{(\lambda'0)}^+ a_{(\lambda'0)}]_{(\lambda\mu)\kappa LSJT} || \phi_{v_i J_i T_i}^{n_1 n_2} \rangle, \quad (9)$$

and those for transitions between the actual initial (ground) and final states are then simple linear combinations of such expressions. Formula (9) is similar to eq. (13) in ref. ², and the reduced matrix elements in expression (9) are calculated using the same computer program as was employed in that paper. The coefficients $\mathcal{O}\{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LSJT\}$ depend however on our particular transition operators and are computed from eq. (8) using SU(3) coupling coefficients from ref. ¹⁹ and expressions for the reduced matrix elements of the Coulomb transition operators [†] from ref. ²⁰. In appendix A we give a simplified version of eq. (9) in the case of monopole excitations.

In expression (9) for the form factor the dependence on q enters only through the radial integrals in the \mathcal{O} -coefficients. When these are computed one finds that the form factors in our model have the structure

$$F_J(q) = e^{-x} (A + Ax + Bx^2), \quad (10)$$

where $x = (\frac{1}{2}bq)^2$, and $b = (\hbar/m\omega)^{\frac{1}{2}}$ is the oscillator length parameter. For the E2 transitions ($J = 2$) $A = 0$ and for the E4 transitions ($J = 4$) $A = A = 0$. When

[†] One should observe that the convention for the reduced matrix elements in ref. ²⁰ is different from ours.

introducing the series expansion of the spherical Bessel function in eqs. (5) and (6) one sees that in the limit $q = 0$ the monopole ($J = 0$) form factor, in other words Δ , is equal to the overlap of the initial and final states. Hence $\Delta \neq 0$ only for elastic monopole scattering.

For the p-shell contribution the quantity B in eq. (10) always vanishes. From this we see that the graphs of the form factors have very different shapes for the sd shell and p-shell contributions, a fact that gives some prospects for drawing interesting conclusions on the shell model structure in special cases.

In cases of small momentum transfers q it is usually more convenient to work with the reduced transition probability $B\uparrow(J; q)$ defined by

$$\sqrt{B\uparrow(J; q)} = \frac{Z}{\sqrt{4\pi}} (2J+1)!! |F_J(q)|/q^J. \quad (11)$$

The $B\uparrow(J; q)$ defined in this way is finite for $q = 0$ and is normalized in such a way that

$$B\uparrow(J; 0) = \frac{J_f^2}{J_i^2} B\downarrow(J), \quad (12)$$

where $B\downarrow(J)$ is the reduced transition probability for the EJ γ -decay $J_f \rightarrow J_i$.

In the special case of inelastic monopole transitions $(B\uparrow(J; 0))^{\frac{1}{2}} \sim \Delta = 0$. In this case one therefore considers the quantity $(B\uparrow(J; q))^{\frac{1}{2}}/q^2$ when dealing with small momentum transfers.

Another quantity of interest for small q is the transition radius R_{tr} , which is defined by $R_{tr}^2 = \langle f | \sum_{\text{protons}} r^4 | i \rangle / \langle f | \sum_{\text{protons}} r^2 | i \rangle$ for inelastic monopole and quadrupole transitions.

3. Calculations

3.1. PARAMETERS AND CORRECTIONS

The oscillator parameter b is usually determined by comparison with elastic electron scattering data. When performing the calculations we have found that the possible changes in the form factors originating from uncertainties in the structures of the wave functions are of such a magnitude that it is sufficient to use the approximate value $b = 1.70$ fm.

It is important to take into account effects of configurations left out from the model. Estimates²¹⁾ of the effects of short-range correlations in the nucleon-nucleon potential for ^{16}O show that inclusion of such effects may drastically modify the shape of the elastic monopole form factor when $q \gtrsim 3 \text{ fm}^{-1}$.

The long-range correlations not included in the model wave functions can, as an approximation, be divided into Woods-Saxon corrections and core polarization (effective charge) corrections²²⁾. A very simple method for including Woods-Saxon corrections in the monopole case is given in appendix C.

For the Woods-Saxon potential we have used the same radius and diffuseness parameter as in ref. ²³), namely $r_0 = 1.25$ fm and $\alpha = 0.50$ fm. When the binding energies of the sd shell orbitals are taken from the ^{17}O spectrum one finds that the $1d_{5/2}$ orbital is unbound. We therefore neglect the spin-orbit term. This has the consequence that the radial wave functions are independent of the total single-particle angular momentum, a fact that considerably simplifies the inclusion of Woods-Saxon corrections in our formulae. When adopting this approach the binding energies are [ref. ²⁴)] $\epsilon(2s) = -3.27$ MeV and $\epsilon(1d) = -2.11$ MeV. The radial function of the 1p orbital is highly insensitive to the exact value of $\epsilon(1p)$ because the orbital is so strongly bound, and so we have rather arbitrarily taken $\epsilon(1p) = -19.00$ MeV.

It is extremely difficult to give an accurate calculation of the polarization terms; but in the case of E2 γ -decays it is generally accepted that the sum of the polarization and the Woods-Saxon corrections is adequately taken into account by adding a constant (state independent) polarization charge $e_{\text{pol}} = 0.5$ (in units of the elementary charge) to the free nucleon charges in the expression for the transition operator. Since the E2 electron excitation expressions are proportional to the corresponding ones for γ -decays, in the limit $q = 0$, we make here the assumption that all corrections, also for the other values of q in the interval under consideration, can be taken into account in the same way to a reasonable degree of accuracy. For the E4 excitations there exists to our knowledge no information on this problem, and so also here we use the constant polarization charge $e_{\text{pol}} = 0.5$.

For the E0 transitions, however, the situation is somewhat different, in that one here to some extent is able to distinguish experimentally between the two types of corrections.

Compare for instance ^{16}O and ^{18}O . As a first approximation the model proton structures are the same, even when Woods-Saxon corrections are included. Hence the experimentally found difference in rms charge radius ²⁵) (the isotope shift) must be due to the polarization corrections, which are different in the two nuclei. We therefore simulate the polarization corrections by using a constant polarization charge, the magnitude of which is determined in appendix B, according to the ideas above, to be $e_{\text{pol}} = 0.3$.

Considering the uncertainties in the estimate of e_{pol} we take $e_{\text{pol}} = 0.5$ also for the monopole transitions in ^{16}O (where the calculated form factors have a tendency of lying below the experimental ones) in order not to be unjust to the model. However, this must be kept in mind in the discussions.

3.2. WAVE FUNCTIONS FOR ^{16}O

Since the ground state in ^{16}O is mainly a 0p-0h state whereas the 0_2^+ level at 6.05 MeV is predominantly a 4p-4h state, it is evident that the small components of the wave functions will play a crucial role for the lowest monopole excitation. In order to investigate the effect of the small components we consider several relatively similar versions of the wave functions displayed in table 3. Cases (a), (c) and (d) are obtained

TABLE 3
Wave functions for the 0_1^+ and 0_2^+ levels in ^{16}O

Basis state no.	Basis state structure ^{a)}	Particle-hole structure	0_1^+							0_2^+						
			(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
1	1, 20	0p-0h	0.816	0.876	0.802	0.802	0.819	0.819	0.819	-0.176	-0.262	-0.175	-0.175	-0.140	-0.140	-0.140
2	2, 21	2p-2h					0.013						0.037			
3	2, 22		-0.354		-0.348	-0.348	-0.330	-0.330	-0.330				-0.030	-0.053	-0.053	
4	5, 21						-0.042						0.018			
5	5, 22		0.211		0.207	0.207	0.211	0.211	0.211				-0.053	-0.050	-0.050	
6	6, 21						0.020						-0.058			
7	7, 24		0.325	0.469	0.320	0.320	0.298	0.298	0.298	0.137	0.229	0.102	0.102	0.133	0.133	
8	8, 25						-0.055						0.099			
9	10, 25						0.177						0.030			
10	11, 24		-0.186		-0.183	-0.183	-0.179	-0.179	-0.179				0.072	0.084	0.084	
11	13, 26	4p-4h	0.157	0.130	0.154	0.154	0.090	0.090	0.090	0.887	0.937	0.882	0.882	0.839	0.839	
12	13, 28						-0.004						-0.045			
13	14, 27					-0.001	0.049		0.049	0.350		0.349	0.349	0.446	0.446	
14	16, 26					-0.076	-0.077		-0.077	0.202		0.201	0.201	0.147	0.147	
15	17, 27						0.018						-0.088			
16	18, 26						0.026						-0.000			

The different cases (a)-(g) are discussed in the text.

^{a)} The particle and hole parts of each basis state are specified by giving the state numbers of table 1.

TABLE 4
Wave functions for the 0_3^+ and 0_4^+ levels in ^{16}O

Basis state no.	Basis state structure	Particle-hole structure	0_3^+		0_4^+		
			(a)	(e)	(a)	(b)	(e)
1	1, 20	0p-0h	0.387	0.257	-0.062	-0.410	-0.213
2	2, 21	2p-2h		-0.002			0.188
3	2, 22			-0.044			-0.007
4	5, 21			0.010			0.021
5	5, 22		-0.199	-0.184			-0.016
6	6, 21			-0.036			-0.137
7	7, 24		-0.574	-0.315	0.725	0.853	0.781
8	8, 25			-0.000			0.255
9	10, 25			0.114			0.138
10	11, 24		0.341	0.299	0.504		0.213
11	13, 26	4p-4h		-0.080	-0.211	-0.323	-0.181
12	13, 28			0.014			0.136
13	14, 27			0.024	-0.180		-0.119
14	16, 26		0.605	0.779	0.378		0.173
15	17, 27			0.234			0.130
16	18, 26			0.161			0.218

Only cases (a), (b) and (e) are considered.

TABLE 5
Wave functions for the lowest 2^+ levels in ^{16}O

Basis state no.	Basis state structure	Particle-hole structure	2_1^+		2_2^+	2_3^+		2_4^+
			(a)	(b)	(a)	(a)	(b)	(a)
1	8, 24	2p-2h	0.295	0.377	-0.152	0.725	0.923	-0.521
2	10, 24		0.100			0.163		-0.161
3	2, 21				-0.333	0.418		0.731
4	7, 25				0.276	-0.164		-0.257
5	13, 27	4p-4h	0.209		0.742	0.104		0.169
6	14, 26		0.886	0.923		-0.197	-0.377	0.143
7	14, 27		-0.218		0.513	0.427		0.169
8	15, 27		0.153					

Only cases (a) and (b) are considered.

TABLE 6
Wave functions for the two lowest 4^+ levels in ^{16}O

Basis state no.	Basis state structure	Particle-hole structure	4_1^+		4_2^+
			(a)	(b)	(a)
1	3, 21	2p-2h	0.095		-0.671
2	4, 21				-0.078
3	12, 24		0.300		-0.166
4	9, 24		0.101	0.204	
5	14, 27	4p-4h	0.236		0.639
6	15, 26		0.849	0.979	0.087
7	15, 27		-0.338		0.315

Only cases (a) and (b) are considered.

from diagonalizing the Hamiltonian in the basis consisting of states no. 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13 and 14 (see table 3), and afterwards truncating and renormalizing in different ways. Case (a) is the one used in ref. ¹). Wave function cases (e), (f) and (g) are obtained in a similar way when we diagonalize the Hamiltonian in an extended basis. The case (b) will shortly be discussed.

The structures of the third and fourth theoretical 0^+ levels are given in table 4. Only cases (a), (b) and (e) are considered. The four lowest 2^+ levels and the two lowest 4^+ levels that come out from the theory have structures as shown in tables 5 and 6. It is sufficient only to discuss cases (a) and (b), which are defined in a similar way as the corresponding cases for the 0^+ levels.

The Brown-Green model ⁹) has shown a striking ability of reproducing experimental data for monopole and quadrupole transitions ^{8, 9}). Since this model is a strong coupling model, it is conceptually very different from the one used in the present work. In order to find some connection between them we first note that when the basic particle or hole states in table 1 are expanded in pure SU(3) functions (see eq. (3)), one SU(3) state is by far the most dominating (70-90 %) in all cases of interest for the present estimates. For the moment we therefore retain only these leading terms so that the basis states (4) now have the form

$$[(\lambda_1 \mu_1) \kappa_1 L_1 S_1 J_1 T_1 | (\lambda_2 \mu_2) \kappa_2 L_2 S_2 J_2 T_2 \rangle]_{JT}, \quad (13)$$

where we for simplicity keep only the symbols necessary in the present context. We then construct the most deformed strong coupling wave functions as those where the maximum SU(3) representations $(\lambda_1 \mu_1)$ and $(\lambda_2 \mu_2)$ are coupled to maximum total $(\lambda \mu)$ $\kappa = 0$ using the expansion

$$|(\lambda \mu) \kappa = 0 LSJT\rangle = \sum_{\kappa_1 L_1 \kappa_2 L_2 J_1 J_2} D [|(\lambda_1 \mu_1) \kappa_1 L_1 S_1 J_1 T_1 \rangle | (\lambda_2 \mu_2) \kappa_2 L_2 S_2 J_2 T_2 \rangle]_{JT}, \quad (14)$$

with

$$D = \langle (\lambda_1 \mu_1) \kappa_1 L_1; (\lambda_2 \mu_2) \kappa_2 L_2 | (\lambda \mu) \kappa = 0 L \rangle \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{L} \hat{S} \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L \\ S_1 & S_2 & S \\ J_1 & J_2 & J \end{pmatrix}. \quad (15)$$

In the cases of interest one term in eq. (14) dominates (D^2 from 54 to 78 %, with the lowest values for the 4^+ states). We therefore can, as a reasonable approximation, identify the strong coupling wave functions with certain weak coupling ones, namely the leading terms in eq. (14). The "Brown-Green-like" wave functions obtained in this way are called case (b) in tables 3-6. The amplitudes are taken from ref. ⁸). The actual Brown-Green wave functions are of course somewhat different from our case (b) because they employ deformed single-particle wells. The case (b) wave functions, however, are as far in the direction of the real Brown-Green functions as we can come within the weak coupling spherical shell model, using simple approximations. We note that the basis states in wave functions (b) in most cases are the same as the

TABLE 7
Theoretical results for the three lowest monopole excitations in ^{16}O compared with data ^{4,36)}

Wave function case	A (10^{-2})	B (10^{-2})	q_m (fm^{-1})	$\lim_{q \rightarrow 0} (1/q^2 \sqrt{B\uparrow}) \cdot 10^2$			R_{ir}			
				HO ^{c)}	WS ^{d)}	exp.	HO ^{c)}	WS ^{d)}	exp.	
$0_1^+ \rightarrow 0_2^+$	(a)	-5.4	3.1	1.6	8.7	20.5	19.3	4.8	6.4	5.2 ± 1.3
	(b)	-5.8	3.2	1.6	9.5	21.5		4.7	6.4	
	(c)	-5.1	2.9	1.5	8.2	19.3		4.8	6.4	
	(d)	-4.3	2.1	1.7	7.0	14.9		4.6	6.3	
	(e)	-3.3	1.5	1.8	5.4	11.0		4.6	6.2	
	(f)	-3.2	1.7	1.6	5.2	11.6		4.7	6.3	
	(g)	-3.4	1.4	1.8	5.5	11.8		4.5	6.1	
	(h)	-3.8	2.6	1.4	6.2	16.0		4.9	6.6	
$0_1^+ \rightarrow 0_3^+$	(a)	4.9	-1.4	2.2	7.9	13.2	23.0 ^{a)}	4.3	5.7	6.3 ± 0.9 ^{a)}
	(e)	4.5	-1.8	1.9	7.3	14.1		4.5	6.0	
$0_1^+ \rightarrow 0_4^+$	(a)	-1.3	0.23	2.8	2.1	2.9	15.5 ^{b)}	4.1	5.1	6.5 ^{b)}
	(b)	-5.3	2.4	1.8	8.6	17.7		4.6	6.2	
	(e)	-2.5	0.74	2.1	4.0	6.8		4.3	5.7	

The quantities considered are defined in subsect. 2.2.

^{a)} Data for the 12.05 MeV level ⁴⁾.

^{b)} Data for the 14.00 MeV level ³⁶⁾.

^{c)} Results when using harmonic oscillator functions.

^{d)} Results when using Woods-Saxon functions.

TABLE 8
Theoretical and experimental ⁴⁾ results for some quadrupole excitations in ^{16}O

Wave function case	A (10^{-2})	B (10^{-2})	q_m (fm^{-1})	$R_{\text{ir}}(\text{theory})$ (fm)	$R_{\text{ir}}(\text{exp})$ (fm)	$\sqrt{B\uparrow}(\text{theory})$ ($e \cdot \text{fm}^2$)	$\sqrt{B\uparrow}(\text{exp})$ ($e \cdot \text{fm}^2$)	
$0_1^+ \rightarrow 2_1^+$	(a)	12.7	-4.9	1.91	3.73	3.5 ± 0.4	3.1	6.2 ± 0.3
	(b)	14.0	-5.7	1.85	3.77	3.5 ± 0.4	3.4	6.2 ± 0.3
$0_1^+ \rightarrow 2_2^+$	(a)	4.9	0.5		3.02		1.2	0.84 ± 0.20
$0_1^+ \rightarrow 2_3^+$	(a)	2.5	-1.5	1.51	4.03	3.7 ± 0.5	0.6	4.2 ± 0.2
	(b)	11.5	-4.2	1.94	3.72	3.7 ± 0.5	2.8	4.2 ± 0.2
$0_1^+ \rightarrow 2_4^+$	(a)	-7.0	1.1	3.00	3.42		1.7	

TABLE 9
Theoretical and experimental results for some E2 γ -decays in ^{16}O

Wave function case	A (10^{-2})	$B\downarrow$ ($e^2 \cdot \text{fm}^4$)	Γ_{theory} (eV)	Γ_{exp} (eV)	
$2_1^+ \rightarrow 0_1^+$	(a)	12.7	1.98	2.54×10^{-2}	$(9.3 \pm 1.0) \times 10^{-2}$ ^{a)}
	(b)	14.0	2.33	2.98×10^{-2}	
$2_1^+ \rightarrow 0_2^+$	(a)	71.0	60.7	2.44×10^{-5}	$(1.5 \pm 0.5) \times 10^{-5}$ ^{b)}
	(b)	60.0	43.2	1.74×10^{-5}	
$2_2^+ \rightarrow 0_1^+$	(a)	4.9	0.29	2.17×10^{-2}	$(6.1 \pm 0.5) \times 10^{-3}$ ^{c)}
$2_2^+ \rightarrow 0_2^+$	(a)	25.0	7.65	4.89×10^{-3}	$(1.9 \pm 0.4) \times 10^{-3}$ ^{d)}
$2_3^+ \rightarrow 0_1^+$	(a)	2.5	0.07	1.19×10^{-2}	$(5.5 \pm 0.7) \times 10^{-1}$ ^{a)}
	(b)	11.5	1.58	2.59×10^{-1}	
$2_3^+ \rightarrow 0_2^+$	(a)	-8.4	0.85	3.34×10^{-3}	$(3.0 \pm 0.7) \times 10^{-2}$ ^{d)}
	(b)	-16.0	3.11	1.23×10^{-2}	
$2_4^+ \rightarrow 0_1^+$	(a)	-7.0	0.58	9.55×10^{-2}	
$2_4^+ \rightarrow 0_2^+$	(a)	12.0	1.60	6.33×10^{-3}	

^{a)} Ref. ⁴⁾.

^{b)} Mean value of results in ref. ³²⁾.

^{c)} "Best" value of ref. ³²⁾.

^{d)} Ref. ³²⁾.

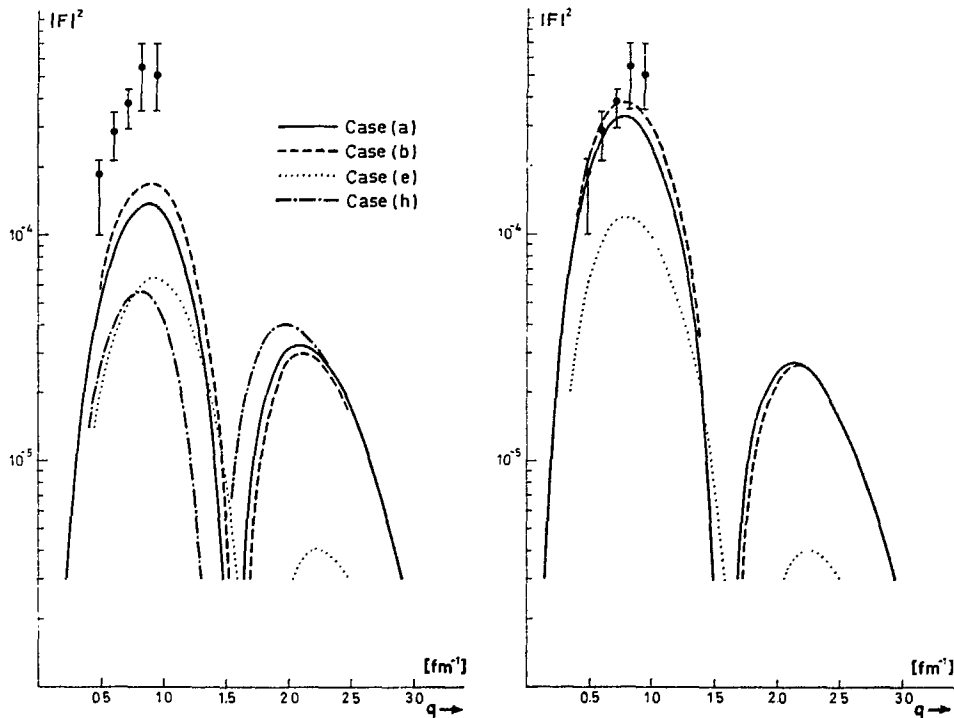


Fig. 1a. Computed form factors for the 6.05 MeV monopole excitation in ^{16}O using harmonic oscillator wave functions. Only results for wave function cases (a), (b), (e) and (h) discussed in the text are shown. The experimental results are mean values from ref. ⁵).

Fig. 1b. Same as fig. 1a, using Woods-Saxon wave functions.

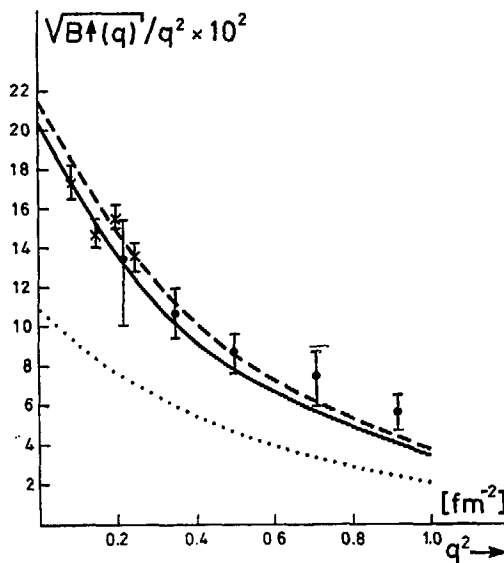


Fig. 2. The quantity $(B^{\uparrow}(q))^{1/2}/q^2$ for the 6.05 MeV monopole excitation in ^{16}O . Woods-Saxon corrections are included. The experimental points \times are taken from ref. ⁴) whereas the points \bullet are the same as in fig. 1.

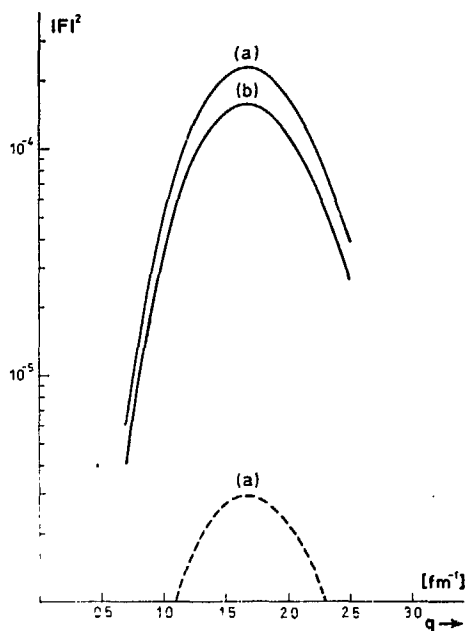


Fig. 3. Computed form factors for the $0_1^+ \rightarrow 4_1^+$ excitation (solid lines) and $0_1^+ \rightarrow 4_2^+$ excitation (dashed line) in ^{16}O for wave function cases (a) and (b).

dominating 2p-2h and 4p-4h states in the weak coupling wave functions. For the 2p-2h parts we can have (i) $S_1 = S_2 = 0, T_1 = T_2 = 1$ or (ii) $S_1 = S_2 = 1, T_1 = T_2 = 0$ when we suppose $S = T = 0$. The wave functions (b) correspond to using only coupling scheme (i), which is the Zamick prescription²⁶⁾. In some treatments of the positive parity states in ^{16}O the Zamick rule is either assumed²⁷⁾ or comes approximately out as a calculated result²⁸⁾.

Other works either assume⁹⁾ or obtain approximately²⁹⁾ the supermultiplet prescription, which amounts to taking 50% of each of (i) and (ii) above (with opposite signs, when using our phase conventions).

If therefore the basis states corresponding to coupling scheme (ii) are also considered, we find that for the 0^+ states this turns out to be the basis state no. 3, whereas they do not correspond to any of the basis states in tables 5 and 6 for the 2^+ and 4^+ wave functions. Hence we see that for the ground state the weak coupling wave functions correspond to using the supermultiplet prescription, whereas the Zamick prescription is best for the other states. The Ellis-Engeland model should be expected to give rather definite information on this point because the positions of the unperturbed energy levels are fitted to experimental binding energies for relevant nuclei during the calculation¹⁾. It is also important to note that the basis state no. 3 for the 2^+ states does not appear with any appreciable weight in the expansions (14). The fact that this state is so strongly mixed into the higher 2^+ wave functions is therefore a feature of the weak coupling model that is foreign to the Brown-Green model.

TABLE 10
The structures of the three lowest 0^+ states in ^{18}O for three values of the energy shift parameter E

Basis state no.	Basis state structure ^{a)}	Particle hole structure	0_1^+			0_2^+			0_3^+		
			$E = -0.9$	$E = 0$	$E = 0.9$	$E = -0.9$	$E = 0$	$E = 0.9$	$E = -0.9$	$E = 0$	$E = 0.9$
1	7, 20	2p-0h	0.922	0.955	0.970	0.366	0.261	0.142	0.067	0.099	0.172
2	11, 20		0.020	0.013	0.010	-0.195	-0.364	-0.772	0.964	0.919	0.622
3	13, 24	4p-2h	-0.386	-0.295	-0.239	0.862	0.848	0.579	0.192	0.349	0.733
4	16, 24		0.029	0.036	0.039	0.165	0.174	0.179	-0.146	-0.092	0.015
5	14, 25		-0.024	-0.003	0.009	0.241	0.223	0.133	0.090	0.127	0.217
6	19, 25		-0.005	-0.004	-0.004	0.009	0.011	0.013	-0.011	-0.009	-0.002
7	19, 23		-0.010	-0.010	-0.009	-0.004	-0.003	-0.004	0.005	0.004	0.003

^{a)} The structure of each basis state is of the type (4) and is specified by giving the state numbers from table 2.

3.3. RESULTS FOR ^{16}O

Results for the various quantities mentioned in subsect. 2.2, characterizing the form factors, are given in tables 7 and 8 for the monopole and quadrupole excitations, respectively. The transition rates for E2 γ -decays to the two lowest 0^+ states have also been calculated, and are given in table 9. Figs. 1-3 contain some of the results for the lowest monopole transition and the results for the hexadecapole transition.

In addition to the case where the basis functions are treated completely we have included a case (h) for the lowest monopole excitation. Here we expand the wave functions (e) in a basis of pure SU(3) functions for particles and for holes, retaining only the states with amplitudes of magnitude greater than 0.05. This calculational procedure, which is the one used in refs. ^{2,3}) when calculating γ -decay probabilities, and also rather similar to what was used in ref. ¹⁰), is very much faster than the complete treatment and gives normally rather accurate results. For the $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ transition, however, where the small amplitudes are of importance, this procedure is too crude as can be seen from a comparison of the results from cases (e) and (h) in table 7 and fig. 1a.

3.4. WAVE FUNCTIONS FOR ^{18}O

In order to investigate more closely the consequences of the different possible structures of the 0_2^+ and 0_3^+ levels in ^{18}O , as discussed in the introduction, we have shifted the unperturbed positions of the 4p-2h levels E MeV up or down relatively to the 2p-0h levels and then diagonalized the interaction (1). The energy E has been varied from -1.5 to $+1.5$ in steps of 0.3. In this way we obtain sets of alternative wave functions exhibiting different degrees of deformations, parametrizing the problematic point in the model. As E increases, the 0_2^+ level changes character from being predominantly deformed (4p-2h) to being predominantly spherical (2p-0h), whereas 0_3^+ shows the opposite change. For $E = 0$ we have the case considered in ref. ^{1,2}). The structures of the three lowest lying 0^+ levels are displayed in table 10 for $E = -0.9$, 0, and 0.9.

3.5. RESULTS FOR ^{18}O

In ref. ²) it is found that the branching ratios of the $0_3^+ \rightarrow 2_1^+$ and the $0_3^+ \rightarrow 2_2^+$ E2 γ -decays are in conflict with experiment, but it is argued that because of strong cancellations the predictions are uncertain. We have computed the widths for these E2 transitions, and from them the branching ratios, assuming the sum of the ratios to be 73 %, which is the experimental value ²), for the different values of E . The result [†] for the $0_3^+ \rightarrow 2_2^+$ transition is shown in fig. 4.

[†] Because of the time saving computational procedure adopted in refs. ^{2,3}), which was discussed in subsect. 3.3, there is a disagreement between our results for $E = 0$, and those reported in ref. ²). The discrepancy is, however, not so large as it may seem, as a result of the extreme sensitivity of the ratios to variations in the structure near $E = 0$.

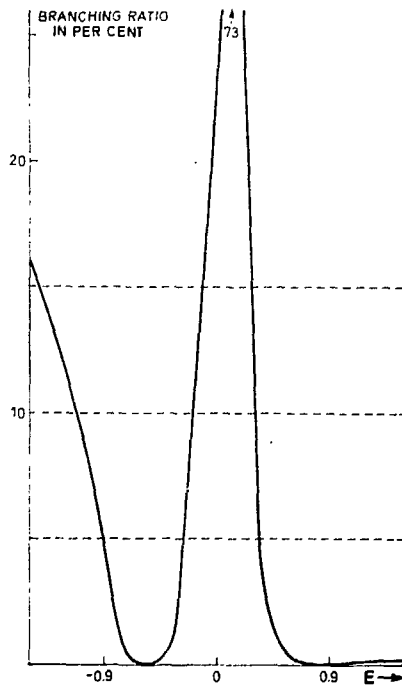


Fig. 4. Computed branching ratio for the E2 γ -decay $0_3^+ \rightarrow 2_2^+$ in ^{18}O as a function of the energy shift E . The experimental value $^{2)}$ is 10 ± 5 .

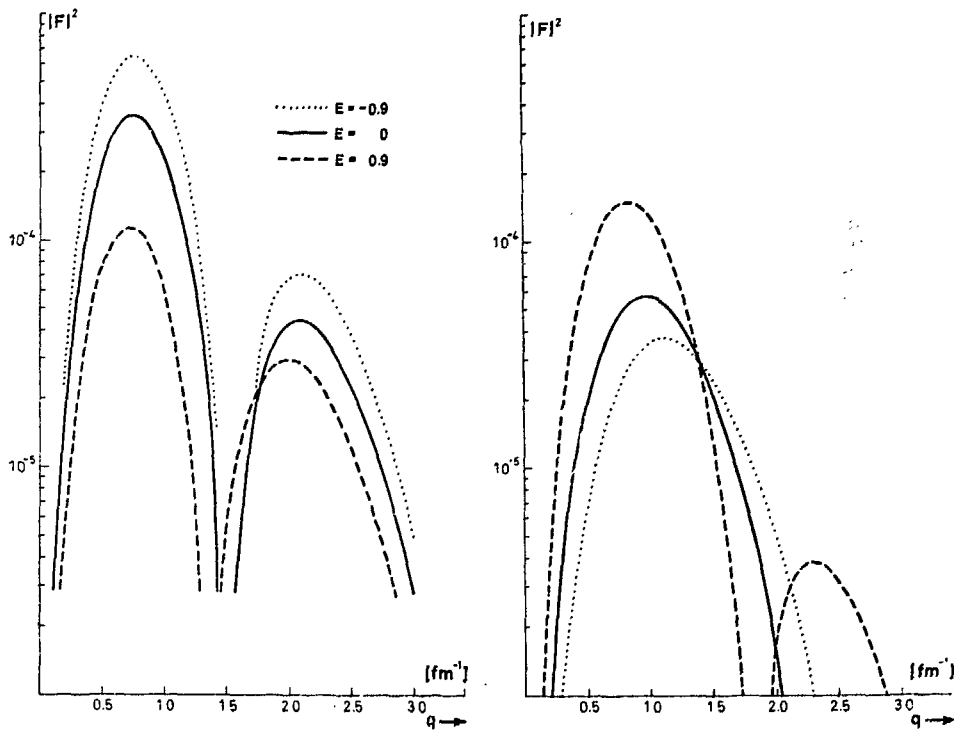


Fig. 5a. Computed form factors for the $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ excitation in ^{18}O for three values of the energy shift E . Woods-Saxon corrections are included.

Fig. 5b. The same as fig. 5a, for the $0_1^+ \rightarrow 0_3^+$ excitation in ^{18}O .

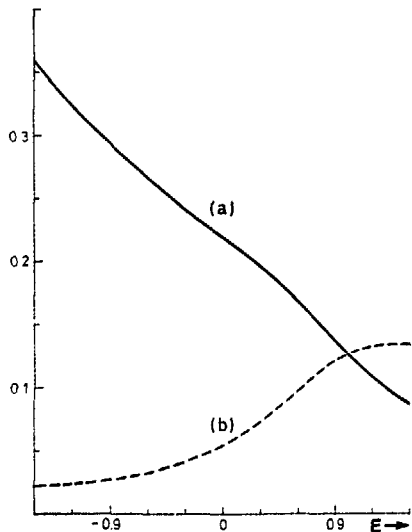


Fig. 6. The quantity $\lim_{q \rightarrow 0} (B^\dagger(q))^{1/2}/q^2$ for the transitions $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ (curve (a)) and $0_1^+ \rightarrow 0_3^+$ (curve (b)) in ¹⁸O for various values of the energy shift E .

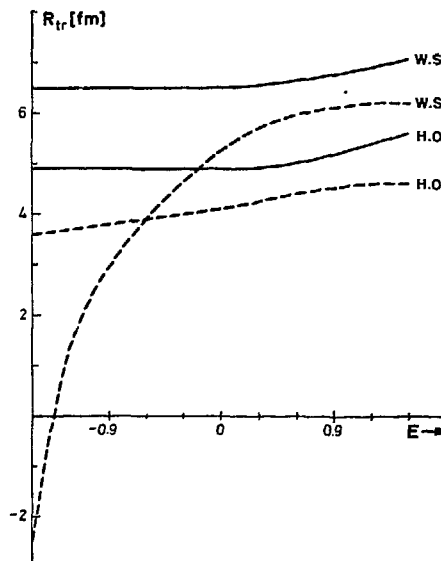


Fig. 7. Computed transition radii for the excitations $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ (solid lines) and $0_1^+ \rightarrow 0_3^+$ (dashed lines) in ¹⁸O when using harmonic oscillator (H.O.) or Woods-Saxon (W.S.) radial wave functions.

In fig. 5 we give the results for the squared form factors for the excitations to the levels 0_2^+ and 0_3^+ for $E = -0.9, 0$ and $+0.9$. The low q data $\lim_{q \rightarrow 0} (B^\dagger(q))^{1/2}/q^2$ and R_{tr} are presented in figs. 6 and 7. It is found that when the coefficients A and B in formula (10) have the same signs, $\langle f|\sum r^4|i\rangle$ and $\langle f|\sum r^2|i\rangle$ may have opposite signs so that R_{tr}^2 may become negative. For $E = -1.5$ we have encountered such a situation for the Woods-Saxon case. We then define $R_{tr} = \text{sign}(R_{tr}^2) \cdot (|R_{tr}^2|)^{1/2}$.

4. Discussion

We find that it is very important to include Woods-Saxon corrections for the monopole transitions, particularly for low values of the momentum transfer q . This is what might be expected from the fact that the form factor is essentially the Fourier transform of the transition charge density, and this density is mainly modified in the tail region when we replace harmonic oscillator functions with Woods-Saxon functions. For normal positions of the diffraction minimum (i.e. from 1 to 2 fm^{-1}) we also find that this position is only very slightly changed when Woods-Saxon corrections are taken into account.

It has been verified that the Woods-Saxon wave functions employed here (with the lowest s-shell at -35 MeV) give an elastic scattering form factor for ¹⁶O that is very close to the harmonic oscillator one out to $q \approx 1.9 \text{ fm}^{-1}$, i.e. to beyond the first

diffraction minimum. However, such a comparison has only a limited value as a justification for the Woods-Saxon parameters that have been used. The elastic scattering is a volume effect that depends mainly on the 1s and 1p wave functions, whereas the inelastic scattering, which is a surface effect, depends crucially on the sd shell wave functions. We have therefore checked the calculations by evaluating inelastic scattering form factors for other sets of Woods-Saxon parameters in order to explicitly see what then happens.

We find that if we increase the diffuseness parameter the form factors are practically unchanged, except for small q , where they are slightly increased. As an example we mention that when the diffuseness is increased from 0.5 to 0.6 the squared form factor for the $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ transition in ^{16}O is increased by 12% at the first maximum. This is certainly a small effect compared to the uncertainties investigated in subsect. 4.1.

Reasonable changes in the radius parameter produce much smaller effects (except in the extreme tail region of the form factors).

It is then obvious that even if the rather sizable differences in the results when using Woods-Saxon wave functions instead of harmonic oscillator functions come about because of cancellations in the expressions in brackets in eq. (C.3), there are no real ambiguities concerning the typical magnitudes of these effects.

4.1. THE TRANSITION $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ IN ^{16}O

There is a strong dependence of the results on the various versions of the wave functions (table 7). This is a manifestation of the crucial role the very small components in the wave functions play in the lowest monopole excitation in ^{16}O . One cannot expect that the model should be able to predict very accurately amplitudes of order of magnitude of a few percent. Hence one has to realize that there exist considerable uncertainties in the theoretical predictions. These problems will not be so pronounced for the other transitions, since they do not, in most cases, depend so crucially on the small components of the wave functions.

When all corrections are taken into account the form factors for cases (a) and (b) are in close agreement with data (table 7 and figs. 1b and 2). The value of the fit is somewhat reduced because of the following: (i) The wave functions (a) and (b) are severely truncated. (ii) The magnitude of the polarization charge may be exaggerated. (iii) The Woods-Saxon functions may be too large in the tail region thus enhancing the form factor too much for small q .

Support for (iii) can be found in the values for the transition radii R_{tr} in table 7. When the calculated values are compared with the experimental one, it is seen that even if the theoretical values are all within the experimental errors (except for case (h)) the Woods-Saxon results are probably somewhat high, indicating that tail effects may be exaggerated. Nevertheless the results show that when reasonable corrections are introduced, the predictions from the weak coupling model are in relatively good agreement with data, the considerable theoretical uncertainty investigated above taken into account. On the other hand, it is striking that the form factors in nearly all

cases are on the low side compared with the experiments, indicating a slight discrepancy. On the basis of the present work it is difficult to give any prescription of how the wave functions then should be changed. But from eq. (A.4) (appendix A) one can see that if the admixture of 4p-4h components in the ground state is increased from the 2.5% for case (a) to, say 4%, we will have excellent agreement with existing data, even when reducing the polarization and Woods-Saxon effects somewhat. This should be compared with the 6% 4p-4h admixture proposed by Celenza *et al.*²⁸⁾ and the 9% admixture found by Latorre and Irvine³⁰⁾. In the paper by Zucker *et al.*³¹⁾ a good result for the monopole matrix element for the $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ transition is obtained, and this seems also here to be due to a very large 4p-4h admixture in the ground state, although it is impossible to see from that paper exactly how large it is.

As mentioned the actual Brown-Green wave functions employed in ref.⁸⁾ are similar to our case (b), except that they are formulated in a deformed basis. In ref.⁸⁾ it is found that the deformations affect the form factors in two ways: (i) The core is deformed, thus increasing the form factors. (ii) Since the core is deformed the particles and holes added to it will move in orbits that extend farther out than in the spherical case. These two effects are both conceptually and numerically very similar to the polarization and Woods-Saxon effects, respectively, introduced in the present work^{† †}.

When our corrections are taken into account the only essential difference between the Brown-Green and the weak coupling wave functions is therefore that the former roughly consist of the most deformed components of the latter, and this seems to be responsible for the fact that the minimum of the squared form factor is located at a lower value of q for the Brown-Green model⁸⁾.

In fact, if we use wave function case (b) but retain, in the spirit of the first approximation in subsect. 3.2, only the dominant SU(3) components in each of the basis functions, we obtain a result that can hardly be distinguished from the findings in ref.⁸⁾. Therefore, it would be important to extend the measurements to higher values of the momentum transfer in order to determine this position.

4.2. HIGHER MONOPOLE EXCITATIONS IN ^{16}O

Experimentally³²⁾ 0^+ levels are found at 11.26, 12.05 and 14.00 MeV, but only the latter two have been seen in electron scattering works. Recent considerations³³⁾ indicate that if the 11.26 MeV level should exist at all, it would probably have a kind of structure that is not included in the model considered here. We therefore neglect this level and assign the theoretical 0_3^+ structure to the 12.05 MeV level and the 0_4^+ structure to the 14.00 MeV level.

[†] The author is indebted to Dr. T. Erikson for clarifying discussions on this point.

^{††} One should therefore not attempt to include Woods-Saxon type corrections in the calculations in ref.⁸⁾ in order to improve the results. The effects of such corrections seem to be already taken into account through the extremely large deformations⁸⁾ used by Brown and Green.

Table 7 shows that the calculated strengths for both transitions are too low compared with data. (The large difference for 0_4^+ between case (b) and the two others is mainly due to the fact that the 0_4^+ wave function (b) contains an especially large 0p-0h component.) However, it was found in subsect. 4.1 that the 4p-4h part of the ground state should be slightly increased. If we in addition make reasonable changes of the 0_3^+ and 0_4^+ wave functions, retaining the main characteristics, the results can be brought into accord with existing data.

The weak coupling model wave functions for the third and fourth 0^+ states are therefore not in definite disagreement with data, although one ought to make a more careful study of the structures of these levels before more certain conclusions can be drawn.

4.3. QUADRUPOLE TRANSITIONS IN ^{16}O

We first discuss the electron scattering and γ -decay results quoted in table 9. The experimental data correspond to the 2^+ levels at 6.92 MeV, 9.85 MeV and 11.52 MeV. We immediately observe that the theory gives too weak transitions in all cases except for the $2_1^+ \rightarrow 0_2^+$ transition, which comes out somewhat too strong. We have not been able to obtain satisfactory agreement with data, neither by changing the model wave functions (retaining the main characteristics) nor by employing the upper limits for the polarization charges given in ref. ²²).

Since the results for $q = 0$ show so many problems one should not at present attempt to make a detailed comparison with data for higher momentum transfers. Nevertheless some general statements concerning the form of the graph of $|F|^2$ versus q can be made.

The excitation $0_1^+ \rightarrow 2_2^+$ is dominated by the transition from the 0^+ basis state no. 11 (shorter: $(0^+; 11)$) to $(2^+; 5)$. We then see that the transition goes mainly between hole parts of the wave functions, and hence the coefficient B is small (see subsect. 2.2). The squared form factor for the excitation to the 9.85 MeV level should therefore have no minimum within the experimentally available range of q -values. Unfortunately the transition is very weak so that till now only one point on the graph has been reported ⁴).

The theoretical structures for 2_3^+ and 2_4^+ are rather similar and the energies lie close. It is therefore not clear which of these structures should be assigned to the 11.52 MeV level. One can draw no definite conclusions from the γ -decays, but the shapes of the form factors are indeed very different (table 8). This is mainly due to different interference effects between the transition $(0^+; 7) \rightarrow (2^+; 1)$ and $(0^+; 3) \rightarrow (2^+; 3)$ (which is a hole part transition so that the coefficient B vanishes) for the two states.

For the Brown-Green-like case (b) one does not have this effect because the basis states $(0^+; 3)$ and $(2^+; 3)$ are absent. This effect is therefore crucially dependent on a breakdown of the Zamick isospin rule for the ground state, and of the presence of the $(2^+; 3)$, which was seen in subsect. 3.2 to be a feature foreign to the Brown-Green model. We have found this shape effect to be relatively insensitive to the other contri-

butions which build up cancellations and therefore reduce the total strength of the transitions. Therefore, even if the γ -decay widths are not in accord with experiments, the shapes of the form factors contain valuable information. The only experimental data for the excitation to the 11.52 MeV level are the old ones of ref. ³⁴). They are consistent with the assignment of the 2_3^+ structure (table 8) to the 11.52 MeV level, but new measurements carried to higher momentum transfers are necessary in order to definitely prove this. One should also try to make the corresponding measurements for the next 2^+ levels around 13 MeV to see if one of them gives the results consistent with the 2_4^+ structure.

4.4. HEXADECAPOLE TRANSITIONS IN ¹⁶O

The two lowest 4^+ levels that have been observed in ¹⁶O are those at 10.34 MeV and 11.10 MeV. The results for $0_1^+ \rightarrow 4_1^+$ in fig. 3 are comparable to the findings in ref. ⁸) except that the maximum in our case is situated at a higher value of the momentum transfer. The $0_1^+ \rightarrow 4_2^+$ transition comes out so weak that it may be difficult to detect it. The reason for this is that the largest components of the 4_2^+ wave function are only connected, through the hexadecapole operator, with relatively unimportant components of the ground state. No experimental data are available at present. If it turns out that the $0_1^+ \rightarrow 4_2^+$ transition is stronger than predicted here, it may be taken as an indication that the 4p-4h part of the ground state has a structure very different from that employed in the present paper.

TABLE 11
Synopsis of theoretical results for ¹⁸O

If predominantly	0_2^+	0_3^+
spherical	Medium transition strength $q_m \approx 1.5 \text{ fm}^{-1}$ R_{tr} normal	Weak transition No minimum within reasonable range of q . R_{tr} small
deformed	Strong transition $q_m \approx 1.5 \text{ fm}^{-1}$ R_{tr} normal	Medium transition strength $q_m \approx 1.5 \text{ fm}^{-1}$ R_{tr} normal

The meaning of the words medium, normal etc. is made clear by comparison with figs. 3 and 4.

4.5. MONOPOLE TRANSITIONS IN ¹⁸O

We note that the branching ratio in fig. 4 is very sensitive to the structure of the wave functions. This is a result of cancellations between the 2p-0h and 4p-2h contributions. Agreement with experiment can be obtained for E in the region near 0 and for $E < -0.9$. These data seem to rule out the possibility of 0_3^+ being the most deformed level. This comparison has, however, the disadvantage that it is somewhat indirect, because it involves the structures of the 0_3^+ , 2_1^+ and 2_2^+ levels simultaneously.

We now proceed to the more direct case of electron scattering. In particular we must consider the alternatives $E < -0.9$ and $E \approx 0$ rather closely.

Some general results are summarized in table 11. It turns out, when a close inspection of the calculations is performed, that the results in table 11 only depend on general characteristics of the wave functions (relative phases of the main components and normal magnitudes of the amplitudes). The results, therefore, have a more general validity than might be thought from a mere inspection of figs. 5 and 6.

The results discussed till now should give good opportunities of distinguishing between the various possible structures of 0_2^+ and 0_3^+ , if these levels can be resolved from neighbouring levels over a wide range of q -values. However, the levels 0_2^+ and 0_3^+ are separated by only 80 keV from the 4_1^+ and the 2_3^+ levels, respectively. With the present day experimental technique it should be possible to resolve the 0^+ levels, at least for low q . Calculations³⁵⁾ show that the form factor for excitation to 4_1^+ is of the same order of magnitude as the lowest monopole excitation, but that it has its maximum near $q = 1.5 \text{ fm}^{-1}$. Even if the 0_2^+ and 4_1^+ levels are not resolved, one should then be able to extract information on the low q part of the monopole form factor. For 0_3^+ the situation is worse. The squared form factor for excitation to 2_3^+ is about one order of magnitude larger than the $0_1^+ \rightarrow 0_3^+$ squared form factor and has the same general shape³⁵⁾. One can, therefore, not expect to obtain information on the $0_1^+ \rightarrow 0_3^+$ form factor unless the 0_3^+ level is resolved. From such considerations it is clear that it would be valuable if definite conclusions about the structures of the 0_2^+ and 0_3^+ levels can be drawn from the low q data. From fig. 6 it is evident that measurements of the reduced transition probabilities for the two excitations will distinguish very well between the two cases when 0_2^+ or 0_3^+ is the most deformed level, even when uncertainties in the polarization charge and the Woods-Saxon parameters are recognized. It should also probably be possible to distinguish unambiguously between the $E \approx 0$ and $E < -0.9$ cases.

If we adopt the modest view that the R_{tr} should at least have a value between the harmonic oscillator and the Woods-Saxon predictions, and probably nearest to the latter, we see from fig. 7 that it is certainly also possible to judge from measurements of R_{tr} , whether $E \approx 0$ or $E < -0.9$. It is particularly interesting to have measurements of the transition radius for the $0_1^+ \rightarrow 0_3^+$ excitation.

5. Conclusions

The calculations in the present paper show that it is possible to extract information on shell-model wave functions that is not duplicated in other experiments. However, in most cases one then has to make accurate measurements for momentum transfers up to at least 2 fm^{-1} , and this is certainly possible. Such a low q quantity as the transition radius does not seem to contain valuable structure information. (A somewhat singular case, where this general conclusion does not hold true, was however encountered for ^{18}O .) When comparing theory and experiment one should exercise

some care, because the form factors seem to be relatively strongly dependent on details of the wave functions that can at present not be accurately calculated. For instance: one can certainly not draw any conclusions from deviations of the minima for the form factors as small as 0.1 fm^{-1} , nor can one draw conclusions from discrepancies near the maxima of the form factors as small as, say, 10 or 20 %. It is, therefore, comforting that cases nevertheless do exist where theoretical alternatives are significantly different.

The most important specific results are:

(i) The form factor for the lowest monopole excitation in ^{16}O is strongly dependent on details in the structures of the 0_1^+ and 0_2^+ levels. When this is recognized one cannot see any actual discrepancy between experiment and theory, although the data seem to require a 4p-4h admixture in the ground state that is somewhat larger than the 2.5 % obtained by Ellis and Engeland. An admixture of 4 % is found to be reasonable, and this seems not unrealistic when we compare with other works.

(ii) In spite of difficulties for low momentum transfers it is found that one can obtain some information on the quadrupole transitions to the 9.85 MeV and 11.52 MeV levels in ^{16}O by extending the measurements to higher q . The existing data for the 11.52 MeV level give vague evidence for the weak coupling wave functions being reasonable, although new data for this level as well as for the next 2^+ levels are necessary in order to allow for drawing more definite conclusions.

(iii) One should obtain a good picture of the structures of the 0_2^+ and 0_3^+ levels in ^{18}O by comparing the results found in the present paper with experiments. Even if it is not possible to resolve the excited 0^+ levels from nearby levels over a wide range of momentum transfers, one can get valuable information from the low q data. It is, therefore, suggested that such experiments be done.

In the appendices formulae have been derived that are also suitable for analysis of data in other cases than considered in the present paper.

The weakest point in the present calculations is probably the assumption that the polarization charges are constants, i.e. the same for neutrons and protons, state independent and independent of the momentum transfer. Investigations of such problems are in progress.

The author would like to thank Dr. T. Engeland for suggesting the problem on ^{18}O and for advice during the preparation of the manuscript. Numerous discussions with Dr. T. Erikson during the latter part of the work are also gratefully acknowledged.

Appendix A

THE MONOPOLE FORM FACTOR

In the monopole case the expression (9) for the form factor can be considerably simplified. The possible coefficients $\mathcal{O}\{\lambda'(\lambda\mu)\kappa LSJT\}$ in that expression for $J = 0$, which are in the following referred to as $\mathcal{O}\{v, T\}\pi^{-\frac{1}{2}}$, $v = 1, 2, 3$, are, when using

harmonic oscillator functions:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\{1, T\} &= \mathcal{O}\{1(00)0000T\}\pi^{\frac{1}{2}} = e_T e^{-x(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}x)}, \\ \mathcal{O}\{2, T\} &= \mathcal{O}\{2(00)0000T\}\pi^{\frac{1}{2}} = e_T e^{-x(\sqrt{6} - \frac{4}{3}\sqrt{6}x + \frac{1}{3}\sqrt{6}x^2)}, \\ \mathcal{O}\{3, T\} &= \mathcal{O}\{2(22)0000T\}\pi^{\frac{1}{2}} = e_T e^{-x(-\frac{1}{15}\sqrt{30}x^2)}.\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Eq. (9) expresses the fact that the form factor is a linear combination of the coefficients $\mathcal{O}\{v, T\}$:

$$F_{J=0}(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \sum_{v, T} \alpha_{fi}(v, T) \mathcal{O}\{v, T\}. \quad (\text{A.2})$$

On the other hand one obtains from eq. (6) for $q = 0$

$$T_{J=0}(q = 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [e_0 N + e_1 2T_3], \quad (\text{A.3})$$

where N is the operator for the total number of particles (in the p and sd shells) and T_3 the third component of the isospin operator. Further $e_T = \frac{1}{2}(e_p + (-)^T e_n)$ with the polarization charges included.

Suppose first that the initial and final states are states with n particles (in the p and sd shells) with n_{sd} of them in the sd shell. The isospin structure for the initial state is supposed to be $|T_p^i T_{sd}^i; TM_T\rangle$ and similarly for the final state. The basis states (4) are of this type. If q is put equal to zero in formula (A.2) and the resulting expression for $F_{J=0}(q = 0)$ is compared with the corresponding one obtained from formula (A.3), one gets expressions for $\alpha_{fi}(v, T)$ when $v = 1, 2$ using the results (A.1). The expressions are substituted in formula (A.2) and one then has for all q

$$\begin{aligned}F_{J=0}(q) &= \frac{\langle f|i\rangle}{Z} e^{-x} \{ [e_0 n + e_1 2M_T](1 - \frac{2}{3}x) \\ &\quad + [e_0 n_{sd} + e_1 M_T f(T_p, T_{sd}, T)](-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2) \} + \text{terms from } \mathcal{O}\{3, T\},\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

with

$$f(T_p, T_{sd}, T) = \left[\frac{T_{sd}(T_{sd} + 1) - T_p(T_p + 1)}{T(T + 1)} + 1 \right].$$

Because of $\langle f|i\rangle$ we have put $T_p^f = T_p^i = T_p$ etc. Note that the terms from $\mathcal{O}\{3, T\}$ will have the form $\beta x^2 e^{-x}$. The expression $f(T_p, T_{sd}, T)$ should be considered as finite for $T = 0$.

The actual initial and final states are linear combinations of states with different n_{sd} , T_p and T_{sd} but with n , T and M_T fixed. For inelastic scattering, where the initial and final states are orthogonal, all contributions from the term with the first square bracket in expression (A.4) will therefore cancel. The actual calculations have been performed using a computer directly from eq. (9). Because of slight non-orthogonalities between the initial and final states that in some cases occur as a result of trunca-

tions, it then has proven exceedingly important explicitly to put the aforementioned term equal to zero in order to get an acceptable numerical accuracy.

Appendix B

POLARIZATION CHARGES

Since the expression for the form factors in our cases splits up into an sd shell and a p-shell contribution, we can write eq. (5), retaining only the symbols important for the present considerations, as

$$\begin{aligned}
 F &= \langle f|T(\text{sd})|i\rangle + \langle f|T(\text{p})|i\rangle \\
 &= \langle f|T(\text{sd})|i\rangle + \langle f|i\rangle\langle 0|T|0\rangle - \langle f|T(\text{h})|i\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Here $T(\text{sd})$ and $T(\text{p})$ are the sd- and p-shell parts of the transition operator. The latter part is further split up into a core contribution $\langle f|i\rangle\langle 0|T|0\rangle$ and a hole contribution $\langle f|T(\text{h})|i\rangle$. Since the polarizations are caused by the sd shell particles and the p-shell holes, one should include the polarization charge in $T(\text{sd})$ and $T(\text{h})$ and not in the core term †. But now the weak coupling model p-shell functions are formulated as p-shell particle functions ¹) so that we are in practice using $T(\text{p})$ in eq. (B.1). This has the consequence that when we include the polarization charge in $T(\text{p})$ we are actually also attributing it to the core term. This does no harm for inelastic scattering where the core term vanishes due to the overlap $\langle f|i\rangle$.

For elastic scattering, however, one must correct the core term and also include the contribution from the 1s shell part of the core. Further, the coefficient A in eq. (10), which is the overlap of the initial and final states, is equal to unity whether corrections are made or not. With all this in mind we get from eq. (10) for elastic monopole scattering on the oxygen isotopes

$$F_{J=0}^{\text{elastic}}(q) = e^{-x} [1 + (A + e_0 - \frac{1}{2})x + Bx^2].
 \tag{B.2}$$

We now expand the exponential and compare with the general formula

$$F_{J=0}^{\text{elastic}}(q) = 1 - \frac{1}{6}(r_{\text{rms}})^2 q^2 + \dots,$$

obtained from eqs. (5) and (6) when expanding the spherical Bessel function. We then find

$$(r_{\text{rms}})^2 = \frac{3}{2}b^2(1 - e_{\text{pol}} - A).
 \tag{B.3}$$

Here r_{rms} is the rms charge radius. From formula (A.4) we get an analytical expression for the quantity in parantheses in eq. (B.3). If we approximate the structure of the ¹⁶O ground state with the vacuum state, which has $n = 12$, $n_{\text{sd}} = 0$, $M_T = 0$, and the ¹⁸O ground state with the simple state with $n = 14$, $n_{\text{sd}} = 2$, $M_T = -1$, $T = T_{\text{sd}} = 1$ and $T_{\text{p}} = 0$, we find from expressions (A.4) and (B.3) for the ratio g

† Actually only to first order in the two-body coupling operator called ν_{12} in ref. 22).

between the rms charge radii for ^{18}O and ^{16}O

$$g = 1 + \frac{2}{9}e_{\text{pol}}.$$

Comparison with refs. ²⁵⁾ then gives $e_{\text{pol}} \approx 0.3$.

One should realize that there are large uncertainties associated with this number. For instance, in order to simplify the estimate we have employed harmonic oscillator functions supposing that the ratio g above is adequately determined that way. Furthermore the estimate gives no information on the polarization charges for holes and for proton particles in the case that these should be different from the neutron particle charges.

Appendix C

INCLUSION OF WOODS-SAXON EFFECTS

The form factors are dependent on the radial wave functions only via the coefficients $\mathcal{O}\{\lambda(\lambda\mu)\kappa LSJT\}$ which are relatively easy to evaluate compared to the last term in eq. (9), that is independent of the radial functions. Hence it is in principle straightforward to include the Woods-Saxon corrections. For the monopole transitions we have found it more convenient to proceed in a formally different way.

Using a similar notation for the \mathcal{O} -coefficients as in appendix A, but suppressing the isospin index T , eq. (A.2) can be written

$$F_{J=0}(q) = \sum_{\nu=1}^3 \gamma(\nu)\mathcal{O}\{\nu\}. \quad (\text{C.1})$$

In what follows we include for convenience the charges e_T in the numbers $\gamma(\nu)$, which of course depend on the initial and final states, and are independent of the radial functions. From formula (8) one finds that

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\{1\} &= \sqrt{3}\langle 1p|j_0(qr)|1p\rangle, \\ \mathcal{O}\{2\} &= \frac{1}{6}\sqrt{6}\langle 2s|j_0(qr)|2s\rangle + \frac{5}{6}\sqrt{6}\langle 1d|j_0(qr)|1d\rangle, \\ \mathcal{O}\{3\} &= -\frac{1}{6}\sqrt{30}\langle 2s|j_0(qr)|2s\rangle + \frac{1}{6}\sqrt{30}\langle 1d|j_0(qr)|1d\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

When the harmonic oscillator expressions for the radial integrals are substituted in these expressions we get expressions (A.1) but with e_T removed.

When introducing the harmonic oscillator expressions (A.1) in eq. (C.1) and comparing with the general result in eq. (10) we get simple expressions for the numbers $\gamma(\nu)$ in terms of A , A and B . When again these together with eqs. (C.2) are substituted in formula (C.1) we find for inelastic scattering, where $A = 0$, that

$$\begin{aligned} F_{J=0}(q) &= [\frac{3}{2}\langle 1p|j_0(qr)|1p\rangle + \langle 2s|j_0(qr)|2s\rangle - \frac{5}{2}\langle 1d|j_0(qr)|1d\rangle]A \\ &+ [\frac{5}{2}\langle 2s|j_0(qr)|2s\rangle - \frac{5}{2}\langle 1d|j_0(qr)|1d\rangle]B. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

This expression gives the form factor for inelastic monopole scattering for general radial wave functions in terms of the harmonic oscillator quantities A and B . When

the Woods-Saxon parameters are fixed the quantities in square brackets in eq. (C.3) are computed once and for all for a range of q -values. Once the harmonic oscillator case is treated, which is usually the starting point, Woods-Saxon corrections are then very easily included.

When evaluating transition radii we need expressions for $\langle f | \sum r^2 | i \rangle$ and $\langle f | \sum r^4 | i \rangle$. Very simple expressions for these quantities in terms of A and B are derived from eq. (C.3) when expanding the spherical Bessel functions and comparing with eqs. (5) and (6).

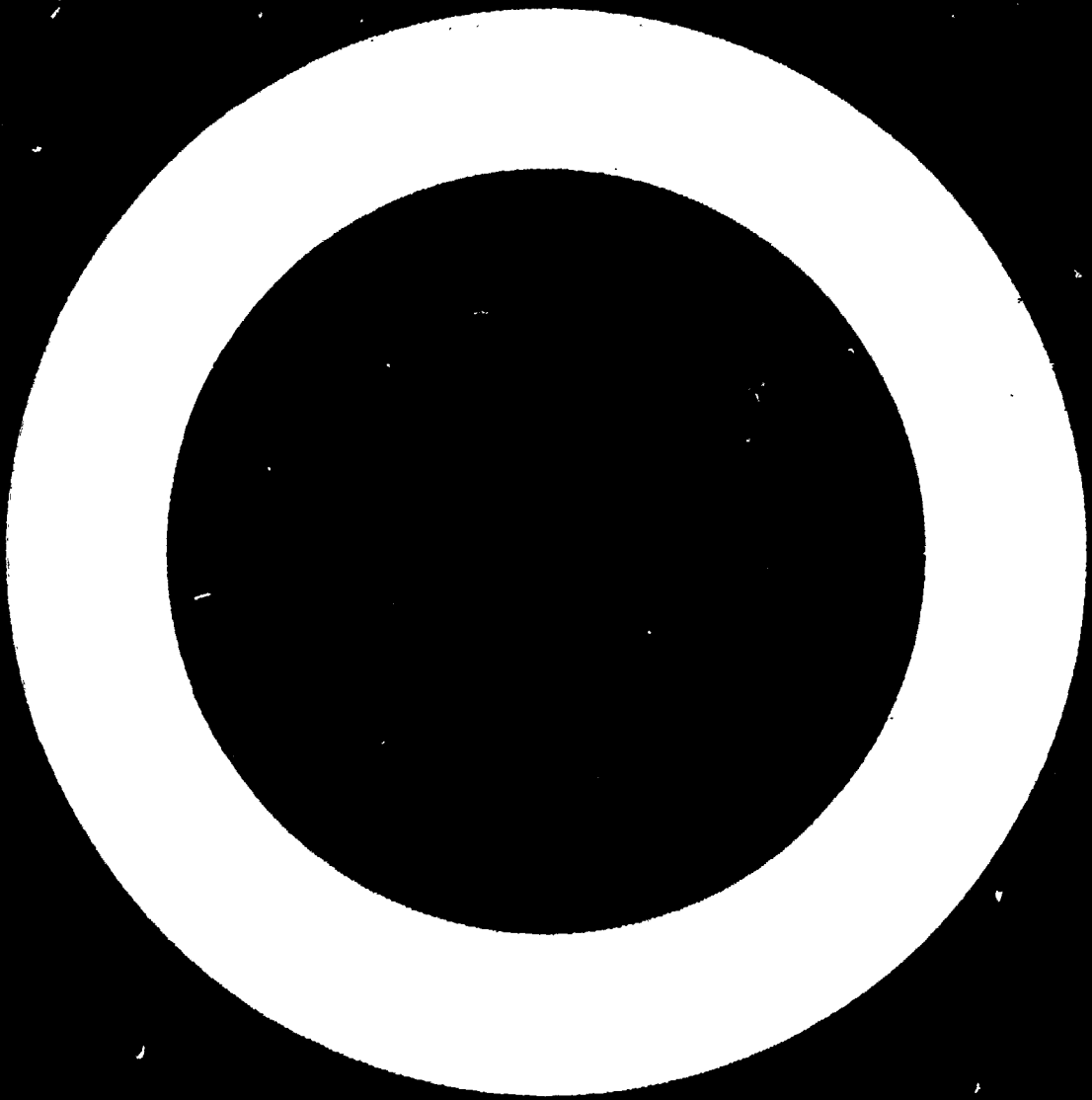
References

- 1) P. J. Ellis and T. Engeland, Nucl. Phys. **A144** (1970) 161
- 2) T. Engeland and P. J. Ellis, Nucl. Phys. **A181** (1972) 368
- 3) S. Lie, T. Engeland and G. Dahll, Nucl. Phys. **A156** (1970) 449;
S. Lie and T. Engeland, Nucl. Phys. **A169** (1971) 617;
S. Lie, Nucl. Phys. **A181** (1972) 517
- 4) M. Stroetzel, Z. Phys. **214** (1968) 357
- 5) J. C. Bergstrom, W. Bertozzi, S. Kowalski, X. K. Maruyama, J. W. Lightbody, Jr., S. P. Firozinsky and S. Penner, Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 152
- 6) E. Boeker, Phys. Lett. **24B** (1967) 616
- 7) W. J. Gerace and D. A. Sparrow, Nucl. Phys. **A154** (1970) 576
- 8) T. Erikson, Nucl. Phys. **A170** (1971) 513
- 9) G. E. Brown and A. M. Greer, Nucl. Phys. **75** (1966) 401
- 10) O. Kaalhus, Nucl. Phys. **A130** (1969) 146
- 11) J. V. Noble, Phys. Rev. **C1** (1970) 1900
- 12) G. F. Bertsch and W. Bertozzi, Nucl. Phys. **A165** (1971) 199
- 13) P. Federman and I. Talmi, Phys. Lett. **15** (1965) 165
- 14) P. Federman and I. Talmi, Phys. Lett. **19** (1965) 490
- 15) H. G. Benson and H. M. Irvine, Proc. Phys. Soc. **89** (1966) 249
- 16) H. G. Benson and B. H. Flowers, Nucl. Phys. **A126** (1969) 305
- 17) G. E. Brown, Congrès International de Physique Nucléaire, vol. 1 (Paris, 1964) 129
- 18) T. Engeland, Nucl. Phys. **72** (1965) 68
- 19) J. D. Vergados, Nucl. Phys. **A111** (1968) 687
- 20) R. S. Willey, Nucl. Phys. **40** (1963) 529
- 21) C. Ciofi degli Atti, Nucl. Phys. **A120** (1969) 350;
W. J. Gerace and D. A. Sparrow, Phys. Lett. **30B** (1969) 71;
D. A. Sparrow and W. J. Gerace, Nucl. Phys. **A145** (1970) 289;
F. C. Khanna, Nucl. Phys. **A165** (1971) 475
- 22) M. Harvey and F. C. Khanna, Nucl. Phys. **A155** (1970) 337
- 23) I. Kanestrøm and H. Koren, Nucl. Phys. **A130** (1969) 527
- 24) H. Koren and I. Kanestrøm, Phys. Norv. **2** (1968) 107
- 25) F. Lacoste and G. R. Bishop, Nucl. Phys. **26** (1961) 511;
R. P. Singhal, J. R. Moreira and H. S. Caplan, Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 73
- 26) L. Zamick, Phys. Lett. **19** (1965) 580
- 27) G. E. Brown and A. M. Green, Nucl. Phys. **85** (1966) 87
- 28) L. S. Celenza, R. M. Dreizler, A. Klein and G. J. Dreiss, Phys. Lett. **23** (1966) 241
- 29) G. Kluge and P. Manakos, Phys. Lett. **29B** (1969) 277
- 30) C. D. Latorre and J. M. Irvine, The structure of ^{14}N and ^{16}O , preprint
- 31) A. P. Zuker, B. Buck and J. B. McGrory, Phys. Rev. Lett. **21** (1968) 39
- 32) F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. **A166** (1971) 1
- 33) T. Engeland, private communication
- 34) G. R. Bishop, C. Betourne and D. B. Isabelle, Nucl. Phys. **53** (1963) 366
- 35) V. Horsfjord, theses, University of Oslo, 1969, unpublished
- 36) M. Stroetzel and A. Goldman, Z. Phys. **233** (1970) 245

5.4. Momentum Dependence of Polarization Charges in Electron

Excitation of Nuclei in the Oxygen Region

Manuskript, godkjent for publikasjon i Nuclear Physics.



MOMENTUM DEPENDENCE OF POLARIZATION CHARGES IN ELECTRON

EXCITATION OF NUCLEI IN THE OXYGEN REGION

V. Horsfjord

Institute of Physics, University of Oslo,

Oslo 3, Norway^{+,**}

Abstract: We have considered the polarization effects for monopole and quadrupole electron excitations of nuclei in the oxygen region. A phenomenological method has been used in order to extrapolate empirical values for the polarization charges, from the real photon limit, to higher momentum transfers. We find in most cases polarization charges that are nearly constant, for momentum transfers up to 2 or 3 fm⁻¹. Hence we have provided a justification in the oxygen region, for the assumption most frequently made, when experiments and theory are compared.

April 1975

⁺ Work supported in part by the Norwegian Research Council for Science and Humanities.

^{**} Present address: Trondheim Lærerskole, 7000 Trondheim, Norway

1. Introduction

As recently discussed by Brussaard¹⁾, it is desirable that the dependence on momentum transfer should be investigated for the effective charges in electron scattering. This has in particular relevance to our earlier work²⁾ where we calculated form factors for inelastic electron scattering on the nuclei ^{16}O and ^{18}O , based on wave functions from the weak coupling model³⁾. There it was assumed that the polarization charges were constants, independent of the momentum transfer q . However, the information on nuclear structure, that may be obtained from a comparison between experiment and theory, crucially depends on how good this approximation actually is. As an example, consider the lowest monopole excitation in ^{16}O . The position of the first diffraction minimum is predicted⁴⁾ to come at $q_{\text{BG}} = 1.4 \text{ fm}^{-1}$ for the Brown-Green model⁵⁾, and at $q_{\text{WC}} \geq 1.5 \text{ fm}^{-1}$ for the weak coupling model²⁾. Therefore we have an opportunity to distinguish between the two models, when careful measurements of form factors are carried out in the range $1 \text{ fm}^{-1} < q < 2 \text{ fm}^{-1}$. However, the estimate of q_{WC} relies on the use of constant polarization charges. If this condition is not fulfilled, q_{WC} may well be shifted to lower momentum transfers, and the above possibility may be spoiled.

The purpose of the present paper is to investigate how reliable the assumption of a constant polarization charge is, for monopole and quadrupole excitations in ^{16}O and ^{18}O . For this purpose we adopt a phenomenological approach, close to the one introduced by Harvey and Khanna⁶⁾. The polarization terms are calculated from the first order contribution in fig. 1. The interaction is of the standard form

$$V = \lambda \cdot W(\underline{r}_1, \underline{r}_2) \cdot \sum_{\substack{T=0,1 \\ S=0,1}} \lambda_{\text{TS}} P^{\text{TS}} \quad . \quad (1)$$

where P^{TS} projects onto the two-particle space with isospin T and spin S . The strength λ and exchange parameters A_{TS} are chosen so that the polarization charges are reproduced in the real photon limit. These are reasonably well known, since they are related to the isotope shift in the monopole case and the γ -decay in the quadrupole case. Once the parameters are fixed, the polarization effects can be calculated for all q . The present approach therefore provides a method for extrapolating empirical polarization effects from $q = 0$ to higher q . However, due to uncertainties associated with the low q charges, we may obtain various, equally reasonable, parametrizations of the interaction (1). Different sets of parameters give rise to polarization charges with different q -dependences. In this way we can obtain an idea of the uncertainty associated with the extrapolation to higher q .

The present method goes beyond first order perturbation theory since the interaction parametrized in eq. (1) represents the "exact" coupling between the model and excluded spaces⁶⁾. The main assumptions that have been made are

- (i): The coupling operator V can adequately be approximated by the simple form (1).
- (ii): The second order terms in V (no higher order terms exist⁶⁾) can be neglected.
- (iii): We include 2 π -intermediate excitations only.

In the next section we present some details of the mathematical formalism, and determine the parameters to be used. Results of the calculations on polarization effects are presented in sect. 3, first for configurations with a single particle or hole in addition to the ^{16}O core, and then for actual transitions in ^{16}O and ^{18}O . Finally we relate our results to some other works in the field. The main conclusions are summarized in the concluding section.

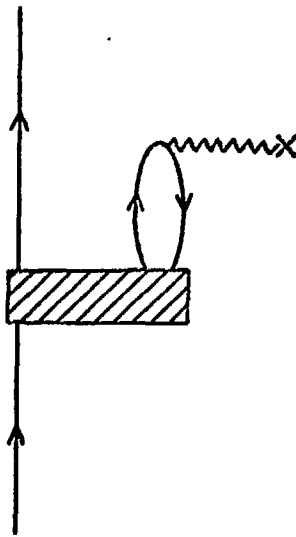


Fig. 1 Polarization contributions included in the present work. The shaded area represents the coupling operator V . Exchange terms as well as terms with opposite "time" order are implied.

2. Computational Methods

2.1 Formalism

In the 1. Born approximation the Coulomb form factor $F_J(q)$ for a transition of multipolarity J is

$$F_J(q) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \frac{\hat{J}_i}{\hat{J}_i} \langle f; J_f || T_J(q) || i; J_i \rangle, \quad (2)$$

where $\hat{A} = (2A + 1)^{\frac{1}{2}}$, Z is the proton number, q the momentum transfer (in units of \hbar), and where the reduced matrix elements are defined according to the relation

$$\langle j_1 m_1 | T_{JM} | j_2 m_2 \rangle = \langle j_2 m_2 | T_{JM} | j_1 m_1 \rangle \langle j_1 || T_J || j_2 \rangle.$$

The transition operator $T_{JM}(q)$ is

$$T_{JM}(q) = \sum_{T=0}^1 \sum_{\nu=1}^A T_{JMIM_T=0}(\nu; q)$$

$$= \sum_{T=0}^1 \sum_{\nu=1}^A e_T j_J(qr_\nu) Y_{JM}(\theta_\nu, \phi_\nu) X_T(\nu) \quad , \quad (3)$$

where $X_0(\nu) = 1$ and $X_1(\nu) = \tau_3(\nu)$, and $e_T = \frac{1}{2}(e_p + (-)^T e_n)$, $e_p(e_n)$ being the proton (neutron) charge. We use the convention that $m_T = +\frac{1}{2}$ for protons. The explicit expression for the doubly reduced matrix element (both in J and T) of $T_{JMIM_T=0}$ is \uparrow)

$$\langle n_f l_f j_f \frac{1}{2} || T_{JT} || n_i l_i j_i \frac{1}{2} \rangle$$

$$= (4\pi)^{-\frac{1}{2}} (-)^{j_i + J + \frac{1}{2}} \hat{l}_i \hat{l}_f \hat{j}_i \hat{j}_f \begin{Bmatrix} l_f j_f \frac{1}{2} \\ j_i l_i J \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l_f J l_i \\ 0 \ 0 \ 0 \end{pmatrix} \langle n_f l_f | j_J(qr) | n_i l_i \rangle. \quad (4)$$

The correction from fig. 1 to the matrix element $\langle f|T|i \rangle$ is denoted as polarization correction and is given by $\langle f|\delta T|i \rangle$, where

$$\delta T = \frac{1}{-\Delta E} T \sum_{\phi} |\phi \rangle \langle \phi | V. \quad (5)$$

Here V is the coupling operator and $|\phi \rangle$ the intermediate states of $\Delta E = 2\hbar\omega$ excitation energy. The correction operator δT has the same general tensor properties as T , since both V and $\sum |\phi \rangle \langle \phi |$ are scalars.

We obtain for the reduced matrix element of δT , when exchange terms and terms with opposite "time" order are included,

$$\begin{aligned}
 & \langle n_p^1 j_p^{\frac{1}{2}}; j_p^{\frac{1}{2}} \| \delta T_{JT} \| n_i^1 j_i^{\frac{1}{2}}; j_i^{\frac{1}{2}} \rangle \\
 &= \sum_{p,h} \frac{(-)^{T+j_p-\frac{1}{2}}}{2\pi\omega\sqrt{4\pi} \hat{j}_p} \hat{1}_p \hat{1}_h \hat{j}_p \hat{j}_h \begin{Bmatrix} 1_h j_h^{\frac{1}{2}} \\ j_p^1 j_p^J \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1_h J 1_p \\ 0 \infty \end{pmatrix} \\
 &\times \left[\overbrace{\langle r_h | V | i_p \rangle}^{JT} - (-)^{j_i+j_p} \overbrace{\langle i_h | V | r_p \rangle}^{JT} \right] \langle n_h^1 j_h | j_J(qr) | n_p^1 j_p \rangle. \quad (6)
 \end{aligned}$$

The cross-coupled matrix elements are defined by

$$\overbrace{\langle r_h | V | i_p \rangle}^{JT} = (-)^{j_h-j_p+J+T+1} \hat{j}_h \hat{j}_p \hat{j}_T \sum_{J'T'} \hat{j}_T^{2T,2} \begin{Bmatrix} j_p j_h J \\ j_p j_i J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{2} T' \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} T \end{Bmatrix}$$

$$\times \langle n_p^1 j_p^J, n_h^1 j_h; J'T' | V | n_p^1 j_p, n_i^1 j_i; J'T' \rangle. \quad (7)$$

The matrix elements of V in formula (7) are antisymmetrized but not normalized.

The expressions of eqs. (6) and (7) give the polarization corrections in the simple cases with one particle (hole) outside the core. In more complicated cases the weak coupling model³⁾ is assumed. Then the corrections are calculated from the one particle (hole) results, following the procedure outlined in sect. 2.2. of ref.²⁾, with the operator T replaced by δT .

When the matrix elements of the correction operator are evaluated, one can calculate corrected form factors from eq. (2), (with $T_J \rightarrow T_J + \delta T_J$). In the single-particle (hole) cases one may alternatively evaluate the polarization charges

$$e_{\text{pol}} = e_0 + \tau_3 e_1$$

$$= \frac{\langle f || \delta T_{J,T=0} || i \rangle}{2 \langle f || T_{J,T=0} || i \rangle} + \tau_3 \frac{\langle f || \delta T_{J,T=1} || i \rangle}{2\sqrt{3} \langle f || T_{J,T=0} || i \rangle}, \quad (8)$$

where $\tau_3 = +1$ for protons and $\tau_3 = -1$ for neutrons. The monopole polarization charges deserve some attention. When the matrix elements in the denominators in eq. (8) are evaluated with harmonic oscillator wave functions, they take the form $e^{-x}(f + gx + hx^2)$. Here f , g and h are constants, and $x = (bq/2)^2$, b is the oscillator parameter. A simple analysis shows that f should always be put equal to zero, in order to make the polarization charges consistent with those found in ref⁸⁾, which serve as a basis for the extrapolation to higher q .

When V is a central (space-scalar) interaction, the polarization charge depends on l_i and l_f , but when these are specified it is independent of j_i and j_f , as was proved by Federman and Zamick⁹⁾. In the appendix we further prove that

$$e_{\text{pol}} = \begin{cases} \alpha A_{00} + 3\beta A_{01} + \beta A_{10} + 3\alpha A_{11} & \text{for neutrons} \\ 2\beta A_{10} + 6\alpha A_{11} & \text{for protons.} \end{cases} \quad (9)$$

These relations can be used as a means to simplify the calculations, since only two quantities α and β have to be calculated for each $n_i l_i, n_f l_f$. The expressions (9) further imply special relations between the exchange parameters A_{TS} , as discussed in the next subsection.

2.2. Parameters

We have used two different choices for W in eq. (1), namely the quadrupole-quadrupole (QQ) interaction and the Yukawa (Y) interaction. For

the monopole transitions only the latter can be used. The QQ-interaction is normalized as in ref. 6). The general strength $\lambda = \frac{1}{2}x$ introduced in that paper is included in the exchange parameters A_{TS} . The five parameters A_{TS} and λ are not independent. For the Y interaction we therefore fix $\lambda = -100$ MeV. The range of the Y interaction is taken equal to 1.7 fm. This choice has given good results for the particle-hole interaction between the p and sd shells³⁾, which probably is the case that comes closest to ours. For the single particle wave functions we use harmonic oscillator functions with length parameter $b = 1.7$ fm. As usual in the oxygen region we take $2\hbar\omega = 28$ MeV.

The two-particle matrix elements of V in eq. (7) are evaluated using standard Moshinsky transformation methods, in the Y interaction case. The calculations show that the Y interaction acts much like a delta-force for E2 transitions in the following respect: it gives very small contributions from the P^{00} and P^{11} parts. These parts are accordingly neglected in the subsequent calculations. We thus have only the two exchange parameters A_{01} and A_{10} for E2 transitions when the Y force is used. For the monopole transitions, however, there are substantial contributions from all four exchange terms.

We now use the formulae given in the preceding subsection and find the exchange mixtures needed to reproduce empirical polarization charges in the real photon limit. Results are given in table 1. As mentioned in the introduction various sets of parameters may be used. The sets displayed in table 1 are the ones adopted for calculations discussed in the following section. We would like to make the following comments to table 1. In the case of the Y interaction, it was impossible to obtain good results for both the quadrupole and the monopole charges, using the same parameters. As is well known, serious cancellations occur in the matrix elements of fig. 1 for monopole excitations. One should probably introduce a density

Table 1

Connection between polarization charges at $q = 0$
and exchange parameters in the coupling operator V .

Force	Pol. charge at $q=0$ for neutrons/protons			Exchange parameters				
	1d+1d	1d+2s(E2) 2s+2s(E0)	1p+1p	A_{00}	A_{01}	A_{10}	A_{11}	
E2	QQ	0.50	0.50	0.50	0.098	0.032	0.098	0.032
		0.50	0.50	0.50				
		0.40	0.37	0.60				
		0.60	0.63	0.40				
	Y	0.50	0.37	0.71	-0.207	0.071	0.059	0.066
		0.50	0.37	0.71				
		0.40	0.30	0.57				
		0.60	0.45	0.85				
E0	Y	0.30	0.31	0.30	1.19	-0.11	-0.34	0.40
		0.30	0.31	0.30				
		0.30	0.30	0.27				
		0.20	0.20	0.18				

Empirical, approximate values for polarization charges at $q = 0$ are taken from refs. (6,8).

dependence in eq. (1) in order to push the interaction strength more to the nuclear surface. In our case this effect is absorbed in the choice of exchange parameters. It is therefore reasonable to admit different sets of parameters for monopole and quadrupole excitations. Note also that the parameters A_{TS} from table 1 in most cases are considerably different from those of the Rosenfeld or Gillet¹⁰⁾ interactions. This is not accidental. If one for instance assumes equal E2 polarization charges for protons and neutrons, it follows from eq. (9) that $A_{10} = 3A_{01}$, for the Y interaction, in striking contrast to what is the case for the two mentioned forces. However, one has to bear in mind the conceptual difference⁶⁾ between these forces and the one considered in the present paper.

3. Results and discussion

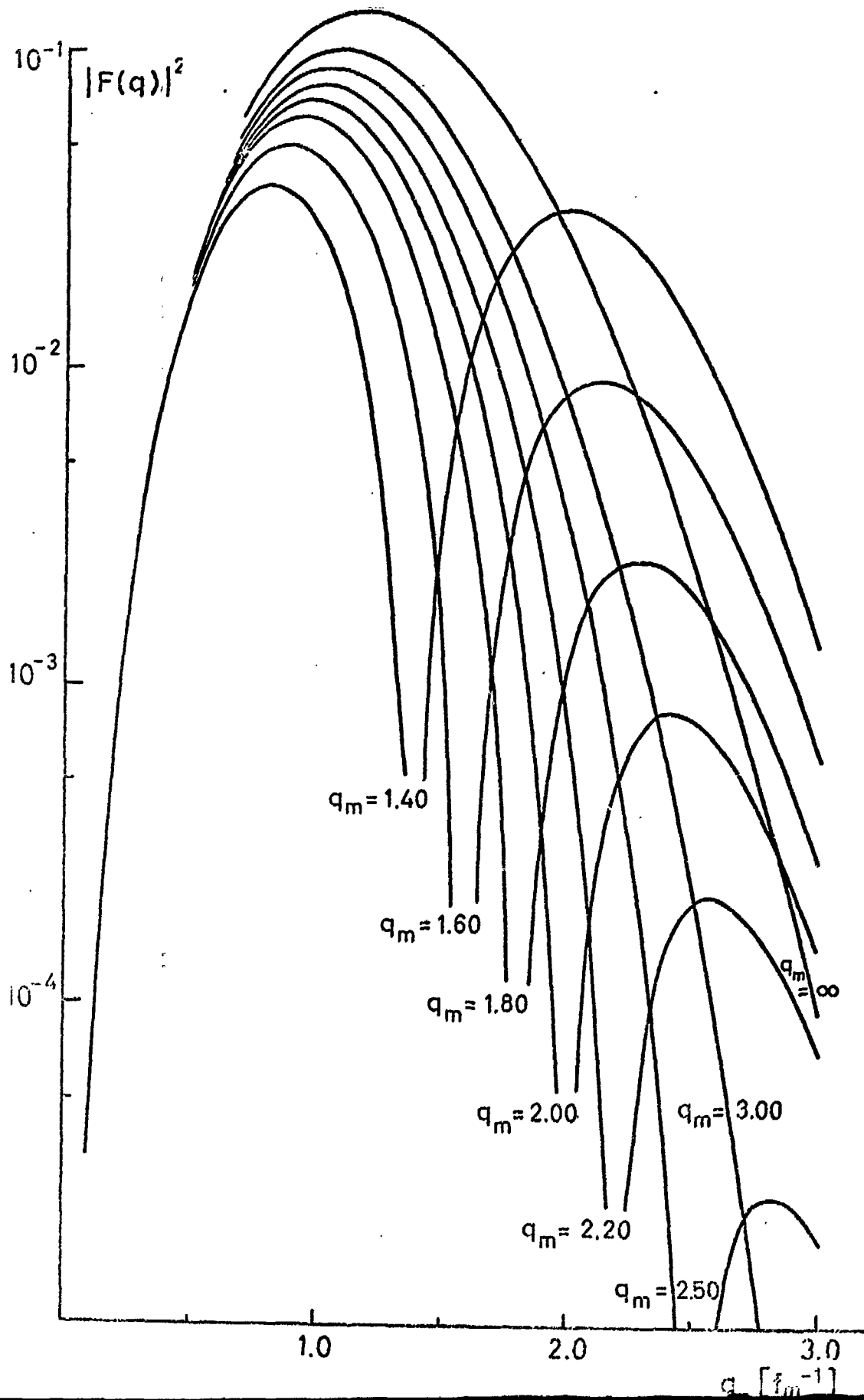
When the radial integrals in eqs. (4) and (6) are evaluated, it is found that all form factors, both corrected and uncorrected, in the cases of interest, take the form

$$F(q) = e^{-x}(Ax + Bx^2) \quad (10)$$
$$x = (bq/2)^2 .$$

The shape of the form factor is therefore uniquely determined by the ratio A/B , which more conveniently can be expressed by giving

$$q_m = \text{sign}(-A/B) \cdot \frac{2}{b} \cdot (|A/B|)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Fig. 2 Squared form factors of the form (10) corresponding to various q_m . Since only the shapes of the form factors are of interest in this connection, we have used $A = 1.0$ (cf. eq.(10)) for all curves.



When $A/B < 0$, which is the normal situation, q_m is the position of the diffraction minimum of $|F(q)|^2$. In fig. 2 we display the shapes of $|F(q)|^2$ for some q_m . In the following we will characterize the form factors by the quantity q_m (the actual shapes can then be inferred from fig. 2). If the correction in the single particle and hole cases does not change the shape of the form factor, we have a constant polarization charge.

The present treatment of the polarization corrections is expected to be valid only in the region from $q = 0$ to $q = 2$ or 3 fm^{-1} . For higher momentum transfers terms from the neglected $2n\hbar\omega$ ($n > 1$) excitations may be important, since they give rise to higher powers of x than expression (10) contains. This limitation, however, is of little practical importance. Our object in ref. 2) and in the present work is to check wave functions from the spherical shell model against electron scattering data. Such a task is in any case somewhat doubtful for $q \gtrsim 3 \text{ fm}^{-1}$, because of uncertainties from short range correlations¹¹⁾ and the neutron intrinsic form factor¹²⁾.

3.1. The single particle and hole cases

Results for configurations with a single particle (hole) outside the core are given in table 2. We note that the results for q_m (and hence the shapes of the form factors) are in most cases fairly stable for a given interaction. There exist, however, noticeable differences between the QQ and Y results for E2 transitions. The same differences have been found for other sets of exchange parameters. An inspection of the calculations reveals that a major source of the differences is a different weighting of the $1p \rightarrow 2p$ virtual excitation in the QQ and Y cases. This is what might be expected: Since there is a node in the radial integrals of the interaction (direct contribution) in the $1p \rightarrow 2p$ term, this virtual excitation is very sensitive to the radial distribution of the interaction

Table 2

Calculated results for q_m (cf. eq.(11)) for single particle (hole) transitions.

	Transition	Force	q_m				
			const.pol.charge	neutron	proton	isoscalar	isovector
E2	1d + 1d	QQ	2.20	2.04	2.14	2.11	2.20
				2.21	2.09	2.11	2.06
		Y		2.54	2.30	2.35	2.20
				2.54	2.31	2.35	2.25
	2s + 1d	QQ	1.66	2.04	1.76	1.82	1.66
				2.13	1.77	1.82	1.70
Y		1.85		1.71	1.74	1.66	
		1.85		1.72	1.74	1.69	
1p + 1p	QQ	∞	2.04	3.53	2.88	-227	
			2.07	3.72	2.88	-4.56	
	Y		-8.75	-13.6	-11.4	1.18	
			-8.75	-12.9	-11.4	-18.7	
E0	1d + 1d	Y	2.63	2.18	2.50	2.43	2.63
				2.18	2.54	2.45	2.70
	2s + 2s	Y	1.66	1.62	1.65	1.65	1.66
				1.60	1.65	1.64	1.67
	1p + 1p	Y	∞	3.41	7.12	5.58	-102
				3.87	9.77	6.89	-12.4

The parameters used for the QQ and Y forces are those from table 1.

strength. The extreme increase of the strength of the QQ interaction for large radii is probably not physical. We therefore believe that the Y results are the more reliable ones.

The uncorrected form factors for the hole transitions have a shape corresponding to $q_m = \infty$, i.e. the coefficients B in expression (10) always vanish. On the other hand, the corrections might well, in principle, give rise to a $B \neq 0$, so that the shape of the form factor might be drastically changed (i.e. the polarization charge might be strongly q-dependent). However, the calculations show (table 2) that in nearly all cases $|q_m|$ is fairly large. Note in this connection that the shape difference between for instance the $q_m = 3\text{fm}^{-1}$ and $q_m = \infty$ form factors is very small, for momentum transfers $0 \leq q \leq 2\text{fm}^{-1}$ (fig. 2). Therefore: in the case of hole transitions, where the prospects for having a constant polarization charge were, as we have seen, indeed doubtful, the calculations nevertheless indicate that this is a reasonable approximation. (The QQ-results seem to give exceptions, but as stated above, they appear to be slightly unphysical.)

We next turn to the particle transitions. Table 2 shows that the change in q_m when using various interactions is of the order 0.2fm^{-1} for neutrons and less than 0.1fm^{-1} for protons, when $q_m \leq 2\text{fm}^{-1}$. That the changes are smallest for protons is reasonable, since the polarizations there give rise to only a part of the total form factor, in contrast to what is the case for neutrons. When q_m is much larger than 2fm^{-1} the changes are larger than stated above. Note, however, that a change as large as 0.3fm^{-1} from $q_m = 2.20\text{fm}^{-1}$ to $q_m = 2.50\text{fm}^{-1}$, for instance, produces a change in the shape of the form factor that is fairly small within the interval $0 \leq q \leq 2\text{fm}^{-1}$ (see fig. 2). We can therefore, also for the particle transitions, conclude that the hypothesis of a constant polarization charge, is a reasonable first approximation. This is in fact non-trivial. We have performed similar calculations for unphysical sets of parameters (corresponding e.g. to negative polarization charges or

large differences between the proton and neutron charges). Then the results are, in most cases, unstable against minor changes in the parameters, or strongly momentum-dependent.

The single particle (hole) results discussed till now, do not give complete information on how accurate the constant charge approximation is in cases of practical interest. In other nuclei transitions may take place partly between neutrons and partly between protons. Then it is not obvious only from the above what is the q -dependence due to the polarizations. Furthermore there are not only uncertainties associated with the polarization charges used, but also with the wave functions. In the following we discuss to what extent one can distinguish between these two sources of uncertainty. In the subsequent subsections we discuss various transitions of special interest in this regard.

3.2. Monopole transitions in ^{18}O

For the transition $o_1^+ \rightarrow o_2^+$ in ^{18}O the Y force gives results practically identical to those obtained using a constant polarization charge, namely $q_m = 1.48 \text{ fm}^{-1}$. For the higher monopole transition $o_1^+ \rightarrow o_3^+$, however, there is some change. A constant polarization charge $e_{\text{pol}} = 0.3$ gives $q_m = 2.33 \text{ fm}^{-1}$. The two parametrizations of the Y force in table 1 instead give $q_m = 2.05 \text{ fm}^{-1}$ and $q_m = 2.16 \text{ fm}^{-1}$, respectively. This means that the transition radius²⁾ is increased from 4.25 fm to 4.35 fm or 4.38 fm. In ref.²⁾ it was found, using a constant polarization charge, that it should be possible to see from measurements of transition radii whether o_2^+ or o_3^+ has the largest admixture of deformed components. An inspection of fig. 7 of ref.²⁾ shows that this conclusion is not invalidated by the 0.1 fm increase in transition radius due to polarization effects.

3.3. Monopole transitions in ^{16}O

Calculations using several parametrizations of the Y force have been performed for excitations to the 0^+ levels at 6.05 MeV, 12.05 MeV and 14.00 MeV. In all cases the values of q_m are very close to those obtained with constant $e_{\text{pol}} = 0.3$. The changes are at most a few hundredths of a fm^{-1} . Compared to the variations resulting from the use of several equally reasonable choices for the wave functions²⁾, the uncertainties due to polarizations are negligible. For a comparison with data, see fig. 1b and fig. 2 in ref. ²⁾. There Woods-Saxon effects have also been included. Returning to the example mentioned in the introduction, we now see that the possibility to distinguish between the Brown-Green and the weak coupling models from the $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ excitation, is not at all crippled by polarization effects.

3.4. Quadrupole transitions in ^{18}O

Some results for the three lowest quadrupole excitations in ^{18}O are given in table 3. We note that the diffraction minimum for the 1.98 MeV excitation is shifted to a higher momentum transfer, compared to the constant polarization result. This is what might be expected. The transition takes place mainly between two-neutron states, and from table 2 we see that the single neutron form factors show the same tendency. Comparison with fig. 2 shows that the shift is probably large enough to be detectable. Since the structures of the ground and excited state are well established, we have here a rather clean opportunity to study the small, but significant, outward shifting of the minima for the single neutron form factors. The experiments of ref. ¹³⁾ were unfortunately done at too low momentum transfers to shed light on the present problem.

Table 3 further shows that the position of the diffraction minimum is very unstable for the 3.92 MeV excitation. One important reason for this is a near cancellation between the parts of the total form factor originating

Table 3

The quantity q_m (position of diffraction minimum) for some E2 excitations in ^{18}O

	$0_1^+ + 2_1^+(1.98 \text{ MeV})$	$0_1^+ + 2_2^+(3.92 \text{ MeV})$	$0_1^+ + 2_3^+(5.25 \text{ MeV})$
$e_{\text{pol}} = 0.5$	1.87	1.37	1.85
QQ	2.00	1.91	1.87
	2.08	1.83	1.87
Y	2.11	1.27	1.92
	2.16	1.38	1.92

The parameters used for the QQ and Y forces are those from table 1.

Table 4

The quantity q_m (position of diffraction minimum) for some E2 excitations in ^{16}O

	$0_1^+ + 2_3^+$	$0_1^+ + 2_4^+$
$e_{\text{pol}} = 0.5$	1.51	3.00
QQ	1.71	2.38
	1.71	2.40
Y	1.45	3.33
	1.45	3.33

The parameters used for the QQ and Y forces are those from table 1.

$$\langle j_1 m_1 | T_{JM} | j_2 m_2 \rangle = \langle j_2 m_2 | T_{JM} | j_1 m_1 \rangle \langle j_1 || T_J || j_2 \rangle.$$

- 86 -

from the spherical and deformed parts of the wave functions, introducing a strong sensitivity to details in the problem. If we neglect the QQ results (cf. subsection 3.1.) there is evidence for a fairly constant polarization effect. However, the large difference between the QQ and Y results, together with the mentioned cancellation effect, suggests that the question should be left open.

The q_m values presented in table 3 for the third (5.25 MeV) E2 excitation are characterized by a remarkable stability. One therefore has a clean test of model wave functions when doing experiments on this excitation. This is fortunate, since a competing model requires ¹⁴⁾ that $q_m = 1.4 \text{ fm}^{-1}$ in contrast to our $q_m \approx 2 \text{ fm}^{-1}$.

3.5. Quadrupole transitions in ^{16}O

The calculated results for $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ are also fairly stable when both the QQ and the Y forces are used. The q_m is shifted less than 0.1 fm^{-1} outwards from the position 1.91 fm^{-1} obtained using the constant polarization charge 0.5. Table 8 in ref. ²⁾ shows that there exists an uncertainty of the same order of magnitude due to incomplete knowledge of details of the wave functions.

The higher E2 excitations are, however, the more interesting ones, as discussed in ref. ²⁾, since we have there possibilities to test the model from the shapes of the form factors. For the $0_1^+ \rightarrow 2_2^+$ transition the various interactions that have been tried, all confirm the result from ref. ²⁾, namely that the form factor is predicted to have no minimum within the range of q -values considered.

It was found in ref. ²⁾ that the shapes of the 2_3^+ and 2_4^+ form factors are so different that it should be easy to test if the 11.52 MeV level has the 2_3^+ or the 2_4^+ structure. Representative results for the $0_1^+ \rightarrow 2_3^+$ and $0_1^+ \rightarrow 2_4^+$ transitions are presented in table 4. We note that the Y force gives form factors fairly close to those obtained using the constant polari-

zation charge. The QQ force reduces the difference between the two form factors. In all cases, however, the difference is large enough to make the 2_3^+ and 2_4^+ results very different. Hence, the conclusion from ref. 2) is not modified by uncertainties concerning the polarization effects.

3.6. Comparison with related works

Progress has been made in the attempts to understand polarizations, starting from realistic interactions. Nevertheless a phenomenological approach has been adopted in the present paper. The reason for this is that the realistic approaches are still not able to account satisfactorily for the magnitudes of the polarization charges at $q = 0$ (see for instance ref. 15)).

Suzuki 16), using the vibrational model for the $2\hbar\omega$ excitations, and Erikson 4), using the Brown-Green model, have found effective (bare plus polarization) charges that are said to be very strongly dependent on momentum transfer. This seems to be in clear contradiction to our findings. However, graphs of the effective charges as functions of q may be misleading. For instance, the effective charge corresponding to a shift of q_m from 1.7 fm^{-1} to 1.8 fm^{-1} , normalized to unity for $q = 0$ (as in ref. 16)) is in our model given by (cf. eq. (10)) $e(q) = [1 - (q/1.8)^2] / [1 - (q/1.7)^2]$. This expression differs from unity by more than 25% in the interval from 1.45 fm^{-1} to 2.2 fm^{-1} , and may thus be said to be strongly q -dependent. However, the change in the $|F|^2$ is fairly small (fig. 2). When we in the present paper state that the polarization charges are nearly q -independent, we just mean that they produce changes in the shape of the form factors that are small compared to the uncertainties associated with the model wave functions (ref. 2)). When this is appreciated, one can see that the effective charges in ref. 4) are close to be constant for monopoles, and not too far from constant for quadrupoles, for q up to 2 fm^{-1} . Further, one should note that the deformations of the core in ref. 4) both give rise to polarization

effects, and modify the valence particle form factors. The q -dependence of the quadrupole effective charge is to a large extent compensated in ref. ⁴⁾ by a corresponding change in the valence particle form factors. If the findings in ref. ⁴⁾ were to be interpreted as a calculation of effective charges to be used in a spherical shell model, the effective charges should probably be associated with this combined effect, at least for quadrupole transitions. Therefore the results of ref. ⁴⁾ are actually in good accord with ours.

On the other hand, polarization charges calculated ¹⁶⁾ from the vibrational model are certainly strongly q -dependent. There the polarization terms for a given multipole always have the same q -dependence, independent of the q -dependence of the form factor being corrected. This is obviously due to the restrictive assumption that every form factor is corrected by the coupling to a unique state of $2\hbar\omega$ excitation energy.

The experimental work of Peterson et al. ¹⁷⁾ on ^{51}V has been interpreted ¹⁶⁾ as an experimental basis for the introduction of q -dependent polarization charges. However, the discrepancies between experiment and theory in ref. ¹⁷⁾ may well have other explanations, as pointed out in that paper.

4. Conclusion

The calculations show that the use of constant (cf. subsect. 3.6.) polarization charges is usually well justified for normal momentum transfers, i.e. from $q = 0$ to $q \approx 2 \text{ fm}^{-1}$. It is worth noting that this conclusion is fairly good also for the hole parts, where the prospects for finding such a result were doubtful. Hence the predictions and comparisons with data in ref. ²⁾ have been put on a firmer basis. The more recent data of ref. ¹⁸⁾ do not shed much more light on the problems discussed in our earlier work (ref. ²⁾). New measurements carried out for momentum transfers up to $q \approx 2 \text{ fm}^{-1}$ would, however, be of great importance.

- 91 -

If only configurations with a single neutron outside the core are considered, we find uncertainties in the positions of the diffraction minima of the order $\Delta q_m = 0.2 \text{ fm}^{-1}$. However, when more complicated wave functions are used, corresponding to actual levels in oxygen nuclei, the uncertainties are often strongly reduced. This is, at least partly, due to the stabilizing effect from protons, discussed in subsection 3.1. In fact, we find in realistic cases that the calculated positions of the diffraction minima are often determined (uncertainties due to polarizations taken into account), to within some hundredths of a fm^{-1} . This is much less than the uncertainties originating from simplified treatments of the model wave functions. We therefore conclude that possible discrepancies between experiment and theory of more than 0.1 fm^{-1} are certainly due to the explicit nuclear structure, and not to polarizations. An exception from this rule occurs when the wave functions are dominated by neutrons. The uncertainties are then of the same order of magnitude as for the single neutron form factors.

Details for each one of the lowest E0 and E2 excitations in ^{16}O and ^{18}O are given in subsections 3.2. to 3.5.

Finally the calculations indicate that there is some coupling between the constant polarization charge result, and the magnitude of the charges at $q=0$. We only obtain the conclusion above when we start with what is felt as reasonable values for the low q charges. This seems to be especially important for the monopole polarization charges.

The author is indebted to Dr. T. Engeland for help with some of the numerical calculations. He is very grateful to Drs. T. Engeland and E. Osnes for carefully reading the manuscript and for pointing out improvements. Part of the work was carried out at NORDITA, Copenhagen.

As is well known, serious cancellations occur in the matrix elements of fig. 1 for monopole excitations. One should probably introduce a density

- 92 -

Appendix

Proof of eq. (9)

We introduce the following notations

$$|\psi_i\rangle = |n_i, l_i, m_i\rangle | \frac{1}{2}m_{s_i} \rangle | \frac{1}{2}m_{t_i} \rangle = |i\rangle |m_{s_i}\rangle |m_{t_i}\rangle$$

$$V = W(\underline{r}_1, \underline{r}_2) P^{T,S}$$

$$T = t \cdot X_{T_1 M_{T_1}} = 0$$

We thus work in a basis where the angular momenta have not been coupled to definite j . Further we consider only one of the four exchange components of V at a time. The $X_{T_1 M_{T_1}}$ is defined in eq. (3). When $P^{T,S}$ is absent eq. (8) obviously gives a j_f, j_i independent polarization charge, since there is no dependence on the spins. When $P^{T,S}$ is included, we obtain the following expression for the term from fig. 1

$$\langle \psi_f | \delta T | \psi_i \rangle = \frac{2}{-\Delta E} \sum_{p,h} \delta(m_{s_h}, m_{s_p}) F(T_1, m_{t_h}) \delta(m_{t_h}, m_{t_p}) \langle h | t | p \rangle$$

$$\times [\langle fp | W | ih \rangle - (-)^{S+T} \langle fp | W | hi \rangle] \times \sum_{\substack{S' M'_S \\ T' M'_T}} \langle \frac{1}{2}m_{s_f} \frac{1}{2}m_{s_p} | S' M'_S \rangle$$

$$\times \langle \frac{1}{2}m_{s_i} \frac{1}{2}m_{s_h} | S'' M''_S \rangle \langle \frac{1}{2}m_{t_i} \frac{1}{2}m_{t_h} | T' M'_T \rangle \langle \frac{1}{2}m_{t_i} \frac{1}{2}m_{t_h} | T'' M''_T \rangle \delta(T, T') \delta(T'', T) \delta(M'_T, M''_T)$$

with

$$F(T_1, m_{t_h}) = \begin{cases} 1 & \text{when } T_1 = 0 \\ 2m_{t_h} & \text{when } T_1 = 1 \end{cases}$$

When the sums over spins and isospins are explicitly carried out, we have

$$\langle \psi_f | \delta T | \psi_i \rangle = \frac{2}{-\Delta E} \cdot \frac{1}{4} \delta(m_{s_f}, m_{s_i}) \delta(m_{t_f}, m_{t_i}) \hat{S}^2 G(T_1, T, m_{t_i})$$

$$\times \sum_{p,h} \langle h|t|p \rangle [\langle fp|W|ih \rangle - (-)^{S+T} \langle fp|W|hi \rangle] \quad (A1)$$

with

$$G(T_1, T, m_{t_i}) = \begin{cases} T^2 & \text{when } T_1 = 0 \\ (-)^{T+1} \cdot 2m_{t_i} & \text{when } T_1 = 1 \end{cases}$$

We observe that the dependence on m_{s_f} and m_{s_i} in eq. (A1) is the same as we have when $P^{T,S}$ is absent. Therefore the polarization charges in the present case too, do not depend on spins and hence on the total angular momenta. This is the result of Federman and Zamick⁹⁾. From

$$\langle \psi_f | T | \psi_i \rangle = \langle f|t|i \rangle \delta(m_{s_f}, m_{s_i}) \delta(m_{t_f}, m_{t_i}) \cdot F(T_1, m_{t_i})$$

and eqs. (8) and (A1) we further deduce the expressions (9) with

$$\alpha = a(-) \quad \text{and} \quad \beta = a(+)$$

where

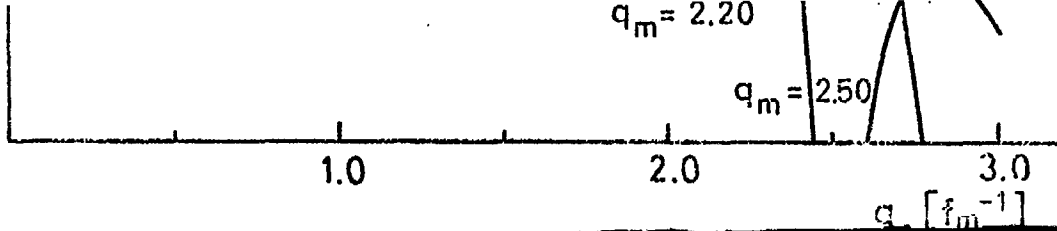
$$a(\pm) = \frac{1}{-\Delta E} \cdot \frac{\sum \langle h|t|p \rangle [\langle fp|W|ih \rangle \pm \langle fp|W|hi \rangle]}{2 \langle f|t|i \rangle}$$

q_m . Since only the shapes of the form factors are of interest in this connection, we have used $A = 1.0$ (cf. eq.(10)) for all curves.

- 94 -

References

- 1) P.J. Brussaard, Proc.Int.Conf.on Nuclear Structure and Spectroscopy, Vol 2, eds. H.P. Blok and A.E.L. Dieperink, Amsterdam 1974
- 2) V. Horsfjord, Nucl.Phys. A209 (1973) 493
- 3) P.J. Ellis and T. Engeland, Nucl. Phys. A144 (1970) 161
- 4) T. Erikson, Nucl. Phys. A170 (1971) 513
- 5) G.E. Brown and A.M. Green, Nucl. Phys. 75 (1966) 401
- 6) M. Harvey and F.C. Khanna, Nucl. Phys. A155 (1970) 337
- 7) R.S. Willey, Nucl. Phys. 40 (1963) 529
- 8) V. Horsfjord, Phys. Lett. 45B (1973) 455
- 9) P. Federman and L. Zamick, Phys. Rev. 177 (1969) 1534
- 10) V. Gillet, Nucl. Phys. 51 (1964) 410
- 11) C. Ciofi degli Atti, Nucl. Phys. A120 (1969) 350; W.J. Gerace and D.A. Sparrow, Phys. Lett. 30B (1969) 71; D.A. Sparrow and W.J. Gerace, Nucl. Phys. A145 (1970) 289; F.C. Khanna, Nucl. Phys. A165 (1971) 475
- 12) W. Bertozzi, J. Friar, J. Heisenberg and J.W. Negele, Phys. Lett. 41B (1972) 408
- 13) F. Lacoste and G.R. Bishop, Nucl. Phys. 26 (1961) 511
- 14) L. Grünbaum and N.K. Ganguly, Nucl. Phys. A100 (1967) 645
- 15) P.J. Ellis and E. Osnes, Phys. Lett. 49B (1974) 23
- 16) T. Suzuki, Phys. Rev. C8 (1973) 2111
- 17) G.A. Peterson, K. Hosoyama, M. Nagao, A. Nakada and Y. Torizuka, Phys. Rev. C7 (1973) 1028
- 18) J.C. Bergstrom, I.P. Auer, F.J. Kline and H.S. Caplan, Nucl. Phys. A213 (1973) 609; J.C. Bergstrom and I.P. Auer, Nucl. Phys. A215 (1973) 232



- 95 -

5.5. Charge Radii and Polarization

Effects in the Oxygen Region

Særtrykk fra Physics Letters.

might be expected: Since there is a node in the radial integrals of the interaction (direct contribution) in the $1p \rightarrow 2p$ term, this virtual excitation is very sensitive to the radial distribution of the interaction

CHARGE RADII AND POLARIZATION EFFECTS IN THE OXYGEN REGION

V. HORSFJORD

Nordita, Copenhagen, Denmark

Received 14 June 1973

When using reasonable monopole polarization charges, it is possible to fit the systematics of charge radii in the oxygen region, if core-excited components are taken into account.

It has been suggested (see for instance refs. [1, 2] that the isotope shift of nuclear charge radii may be due to simple, additive polarizations of the proton core when neutrons are added to it. This is a very tempting hypothesis since the corresponding one works so well for the quadrupole operator, and since also single-particle polarization charges have been included, with good results, in several calculations of monopole electron excitations. In its simplest version this explanation fails, however, for the oxygen isotope shifts. It would necessarily produce a linear increase of the radius when neutrons are added to ^{16}O , whereas experiments [3] show that $r_{\text{rms}}(^{17}\text{O}) \lesssim r_{\text{rms}}(^{16}\text{O})$ and $r_{\text{rms}}(^{18}\text{O}) = 1.02 r_{\text{rms}}(^{16}\text{O})$.

Bertozzi et al. [4] have recently shown that taking into account the neutron electric form factor and the spin-orbit term in the electron-nucleus interaction, they can explain certain anomalies in the calcium radii, when these are measured by elastic electron scattering. But since these effects are again roughly proportional to the number of particles added to the core [4], they can obviously not explain the oxygen data.

In this paper we demonstrate that if we, in addition to the effects above, also include the core-excited components that emerge from structure calculations, we can reproduce the oxygen data - and also existing data on other neighbouring nuclei. The main idea is: Since ^{16}O is known to have a larger admixture of core-excited components than its neighbours, its radius is larger than one would expect from the arguments discussed. Together with the linear increase from the polarizations, this produces just the effect that the data require.

The mean r^2 operator is

$$(r_{\text{rms}})^2 = \frac{1}{Z} \sum (e_0 + e_1 r_3) r^2 \tag{1}$$

where the isoscalar and isovector charges

$$e_T = \frac{1}{2} (e_{\text{proton}} + (-)^T e_{\text{neutron}}) \tag{2}$$

are effective charges, i.e. they contain the free particle charges as well as polarization parts (we use the convention with $m_{T_z} = +\frac{1}{2}$ for protons). The ground state wave function is $|\psi\rangle = \sum \alpha (n_{sd} n_h T_{sd} T_h; TM_T)$ where α denote labels additional to the numbers of particles, n_{sd} , and holes, n_h , and the isospin quantum numbers. Following the ideas in the appendix in ref. [5] we find for the contribution to $(r_{\text{rms}})^2$ from each component of the wave function

$$(r_{\text{rms}})^2 = a^2 \frac{1}{Z} [2r_{1s}^2 + 6r_{1p}^2 - n_h r_{1p}^2 e_0^h + M_T (2-f) r_{1p}^2 e_1^h + n_{sd} (\frac{1}{6} r_{2s}^2 + \frac{5}{6} r_{1d}^2) e_0^{sd} + M_T f (\frac{1}{6} r_{2s}^2 + \frac{5}{6} r_{1d}^2) e_1^{sd} + \frac{5}{2} (r_{2s}^2 - r_{1d}^2) B]. \tag{3}$$

Here we have neglected [5] the spin-orbit single particle potential so that the radial integrals $r_{1s}^2 \equiv \int R_{1s}^2(r) r^4 dr$ etc. depend only on the single-particle quantum numbers n and l . In eq. (3) $f = 1 + [T_{sd}(T_{sd}+1) - T_h(T_h+1)]/[T(T+1)]$. The effective charges may be different for particles and holes, and have accordingly been provided with superscripts. The terms B are complicated and may be evaluated by computer as was explained in ref. [5]. In addition to the terms above there are some non-diagonal contributions containing the terms B . All contributions from the B 's are small, but for completeness they have been retained in the following calculations.

Table 1

Recent experimental results for charge rms radii in the oxygen region. For the nitrogen isotopes we have used the results from ref. [7] which do not take into account the MI scattering, since we feel that the magnetic contributions have been much exaggerated in the final analysis in that paper

	Charge radius (in fm)		$[r_{rms}/r_{rms}({}^{16}\text{O})]^2$		Ref.
	Born approx. and H.O. distribution	DWA and H.O. distribution	From column 2	From column 3	
${}^{14}\text{C}$		2.52 ^{a)}		0.89 ^{a)}	[6]
${}^{14}\text{N}$	2.56		0.89		[7]
${}^{15}\text{N}$	2.64	2.60	0.95	0.94	[7]
${}^{16}\text{O}$	2.712	2.674	1	1	[3]
${}^{17}\text{O}$	2.700	2.662	0.99	0.99	[3]
${}^{18}\text{O}$	2.766	2.727	1.04	1.04	[3]
${}^{19}\text{F}$		2.871		1.15	[8]

a) This number should probably be somewhat reduced since Fermi distributions seem to produce slightly larger radii than H.O. ones in this region.

Before proceeding to the calculations we must insert a comment on the polarization charges defined above. They are in fact no identical to those employed in inelastic electron scattering works. For monopole electron scattering the transition operator is $T = \sum(e_0 + e_1 \tau_3) j_0(qr)/z$ where q is the momentum transfer, so that the form factor becomes

$$F(q) = \langle \psi_f | T | \psi_i \rangle$$

$$= \frac{1}{z} [\langle \psi_f | \sum (e_0 + e_1 \tau_3) | \psi_i \rangle \quad (4)$$

$$- \frac{1}{6} \langle \psi_f | \sum (e_0 + e_1 \tau_3) r^2 | \psi_i \rangle q^2 + \dots]$$

when expanding the spherical Bessel functions. Hence the $(r_{rms})^2$ operator (1) is proportional to the term multiplying q^2 in $F(q)$. From theoretical reasons the first term in the expression (4) must be equal to unity for elastic scattering, and so we cannot have polarization charges there. This shows that the concept of polarization charge for the full elastic $F(q)$ is by no means clear. However, if we use harmonic oscillator functions, we can circumvent this obstacle, because of the special analytical form $F(q)$ then has, as was indicated in the appendix of ref. [5]. Let the polarization charges in this latter case be denoted by ϵ . A simple analysis now shows

$$\epsilon_{pol}^h = \frac{2}{3} \epsilon_{pol}^h, \quad \epsilon_{pol}^{sd} = \frac{4}{7} \epsilon_{pol}^{sd} \quad (5)$$

for both protons and neutrons. Inelastic scattering

works (see ref. [5]) indicate that $\epsilon_{pol} \approx 0.3$ may be a reasonable number. Therefore

$$\epsilon_{pol}^h \approx 0.12 \quad \text{and} \quad \epsilon_{pol}^{sd} \approx 0.17 \quad (6)$$

should be reasonable for protons and for neutrons. We work with the e 's and not the ϵ 's in the present paper because the former are the natural ones when the $(r_{rms})^2$ operator is studied separately, and because the definition of the latter loses its meaning when we do not stick to harmonic oscillator functions.

The experimental values of r^2 for each nucleus differ by rather large amounts, according to which method is used to extract information from the raw data. But we see from table 1 that the ratios between the radii for different nuclei seem to be well determined. These ratios are plotted in fig. 1 and 2 together with theoretical results.

For the calculations we have employed the wave functions from the weak coupling model [9], where spurious center-of-mass excitations have been removed to a high degree of accuracy. Corrections due to the neutron charge distribution and the electron-nucleus spin-orbit interaction are included in the approximation of eq. (5) in ref. [4]. Since these corrections prove to be small they have only been calculated for the dominating component in each wave function.

Some results for the nuclei where data exist, and also for a few others that are thought to be important in this connection, are given in fig. 1. Here we have used the Woods-Saxon potential that was as-

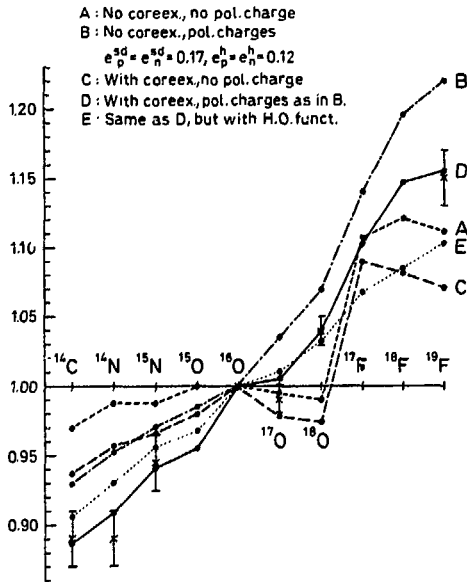


Fig. 1. Mean square charge radius for several nuclei relative to that of ^{16}O . The experimental values are those from table 1. Experimental errors for ^{17}O and ^{18}O are taken from ref. [3]. For the other nuclei it is difficult to estimate the experimental errors, and so we have arbitrarily used twice the value quoted for ^{17}O and ^{18}O . The theoretical points have been connected by solid or dotted lines. In cases A to D a W.S. potential with $r = 1.25$ fm and $a = 0.5$ fm is used. In case E we use a H.O. potential with $b = 1.70$ fm.

summed in ref. [5]. For the calculations where polarization charges have been included we have used the values from eqs. (6). With the parameters introduced (and others, reasonably close to them) the $(r_{rms})^2$ for ^{16}O comes out near to 7.30 fm^2 (depending a little on the precise values of the parameters), which is consistent with experiments [3]. We immediately observe that when core-excited components plus polarization effects are included, the computed radii agree very well with the data. This agreement can not be achieved if only one of the effects is included. The calculations agree even better with data, notably for ^{17}O , if we increase the diffuseness of the Woods-Saxon potential a little and increase the 4 particle-hole component of ^{16}O somewhat (which was

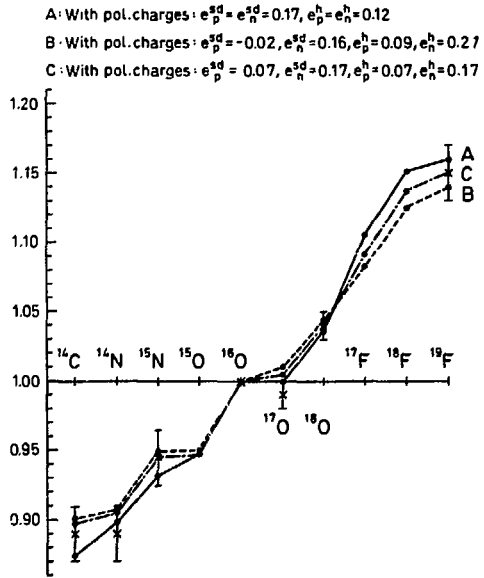


Fig. 2. Same as fig. 1 but with different polarization charges. The W.S. potential used here has $r = 1.25$ fm and $a = 0.60$ fm. Furthermore the amount of 4p4h components in ^{16}O has been raised to 4%.

found in ref. [5] to be a desirable change). For comparison a calculation using harmonic oscillator functions (with $b = 1.70$ fm) has been included.

The matters may be more involved, however. In a recent article [10] it has been suggested that roughly $\frac{1}{2}$ of the so-called Nolen-Schiffer effect should be explained by a simple coupling of the valence particle (or hole) to the isovector monopole mode of the core. If the polarization charges introduced in the present paper also can be given such a simple interpretation, we find an approximate connection between the isovector polarization charge and the magnitude of the Nolen-Schiffer effect, using eq. (8) in ref. [10], formula (3) in the present paper, and data compiled in ref. [11]. Assuming harmonic oscillator functions, and neglecting core-excitations for the one particle (hole) nuclei (which are good approximations for this crude comparison) we find

$$\begin{aligned} e_{1,\text{pol}}^{\text{sd}} &\approx -0.09 && \text{for } d_{5/2} \\ e_{1,\text{pol}}^{\text{h}} &\approx -0.06 && \text{for } p_{1/2}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

These numbers show that the neutron and proton monopole polarization charges may be very different, and that the neutron polarizes more than the proton, in contrast to what is the case for quadrupoles. When we introduce differences between the neutron and proton polarization charges, we must also change the isoscalar charges in order to obtain reasonable fits to the data. In fig. 2 we have plotted results for a few choices of the charges. Here we have used a diffuseness $a = 0.6$ in the Woods-Saxon potential and increased the 4 particle-4 hole component of the ^{16}O wave function to four per cent, which, when using the same charges, gives a slightly better fit compared to what was obtained in fig. 1.

Now ^{16}O appears to become a little smaller than ^{17}O , contrary to experiment (remember that the parameters now are more favourable than in fig. 1), even if the discrepancy is not so large. The reason for this is that the core-excited components in ^{16}O are not so efficient in increasing the radius when the proton charges are reduced, since they contain a great deal of proton-excitations. Apart from this we still have a good fit to the data. Many other calculations have been performed, with the same general results.

In conclusion we can say that the idea of simple additive monopole polarizations prove to work well, provided that the core-excited states used in structure calculations are included. Further the polarization charges necessary to produce agreement with data have values that seem reasonable when compared with inelastic electron scattering works. The calculations suggest that not as much as $\frac{1}{2}$ of the Nolen-Schiffer effect can be explained by a simple polariza-

tion mechanism - even if the data used in the present work are scarcely of the quality that they permit us to draw definite conclusions on this point. It might, however, be illuminating to have precise measurements of the ratios between the radii of ^{17}O and ^{17}F and of ^{15}O and ^{15}N . Finally: Since the core-excited components seem to be important, they ought certainly to be included in cases where one tries to obtain very detailed information on the single particle potential from elastic electron scattering.

The present calculations are of course crude, especially because they neglect the spin-orbit term in the single particle potential. However, many more calculations than reported here, with different parameters, have convinced us that the general pattern obtained is well determined.

References

- [1] R.C. Barrett, Nucl. Phys. 88 (1966) 128.
- [2] A. Lande, A. Molinari and G.E. Brown, Nucl. Phys. A115 (1968) 241.
- [3] R.P. Singhal, J.R. Moreira and H.S. Caplan, Phys. Rev. Lett. 24 (1970) 73.
- [4] W. Bertozzi, J. Friar, J. Heisenberg and J.W. Negele in Proc. Sendai Conf., September 1972, p. 145.
- [5] V. Horsford, Nucl. Phys. in press
- [6] F.J. Kline, Ph.D. thesis, Catholic University 1971.
- [7] E.B. Dally and M.G. Croissiaux, Phys. Rev. C2 (1970) 2057.
- [8] P.L. Hollowell et al., Phys. Rev. C7 (1973) 1396.
- [9] P.J. Ellis and T. Engeland, Nucl. Phys. A144 (1970) 161; T. Engeland and P.J. Ellis, Nucl. Phys. A181 (1972) 368; S. Lie, T. Engeland and G. Dahl, Nucl. Phys. A156 (1970) 449; S. Lie and T. Engeland, Nucl. Phys. A169 (1971) 617; S. Lie, Nucl. Phys. A181 (1972) 517.
- [10] G.E. Brown, V. Horsford and K.F. Liu, Nucl. Phys. A205 (1973) 73.
- [11] J. Damgaard, C.K. Scott and E. Osnes, Nucl. Phys. A154 (1970) 12.

5.6. On the Predictions of the Coexistence

Model for the Reaction $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$

Særtrykk fra Physics Letters.

ON THE PREDICTIONS OF THE COEXISTENCE MODEL FOR THE REACTION $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$

T. ERIKSON, V. HORSFJORD and B. NILSSON
NORDITA, Copenhagen, Denmark

Received 24 July 1973

The coexistence model as formulated by Gerace and Green for ^{40}Ca has been shown to predict cross sections for the reaction $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$ in strong disagreement with experiment. In the present letter we demonstrate how a much improved agreement can be obtained by introducing additional kinds of basis states. Especially important are triaxially deformed components, which contain admixtures of the $1s_{1/2}$ state.

Apart from the unperturbed energies and pure geometry, virtually one single matrix element $M_0 = \langle 0|V|(2p-2h)^{J=0}\rangle$ determines the coefficients in the mixtures (see fig. 1), comprising a spherical state and deformed multiparticle-multihole states, that describe all the low even-parity states in the coexistence model [1-3] for nuclei in the region of a doubly closed shell. Yet the model presents a consistent description of a series of energy levels for nuclei around ^{16}O and ^{40}Ca and accounts successfully [4] for a large body of data, mainly $B(E2)$ -values. Serious doubt has however been thrown upon its validity by the disagreement between experiments on (p,t) reactions and the predictions of the model, reported recently [5, 6, 9]. Since the (p,t) reactions test important properties of the coexistence model, to which the $B(E2)$ values are insensitive, we have started a comprehensive study of these reactions within the framework of the coexistence model. In this note we report only on a couple of points pertinent to the reaction $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$ at 41.7 MeV, for which the Princeton group [6, 9] finds the following discrepancies between theory and experiment:

1° Experimentally the integrated cross sections of the 0_2^+ (3.35 MeV) and 2_1^+ (3.90 MeV) levels are roughly 20% and 10% of the ground state cross section, whereas the theory is said to predict values of the order of 1% in both cases (cf. table 2).

2° In the experiments the shape of the cross sections are characteristic for the L -value transferred. This structure is absent in some of the theoretical cross sections (cf. fig. 2).

3° The theory is found to predict fairly large cross

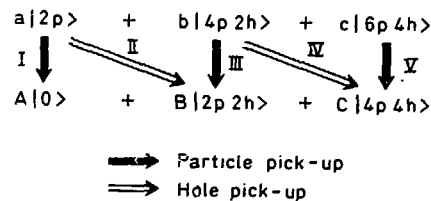


Fig. 1. States and transitions in the coexistence model description of $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$.

sections for the 0_3^+ (7.30 MeV) and 2_2^+ (7.11 MeV) levels (cf. table 2). Experimentally no appreciable 0^+ or 2^+ strength is found in these levels, nor in their vicinity.

4° The experimentally found ratios between the excitation strengths of the 0^+ levels of $T=0$, $T=1$ and $T=2$ at 7.30 MeV, 9.39 MeV and 11.97 MeV are at variance with a theory that describes these levels mainly $2p-2h$ states.

This latter discrepancy is obviously chained to the question of the 0^+ state at 5.21 MeV, which is not seen in (p,t) reactions and whose main component has been suggested to be $8p-8h$ [3] or $[(4p)_{T_p=2} \times (4h)_{T_h=2}]_{T=0}$ [7]. Whatever the nature of this third core-excited state, it is likely to mix in strongly in the 7.30 MeV level and invalidate the predictions of any model that neglects it.

The calculations presented in this note were performed in the distorted wave Born approximation using the code DWUCK [10] which calculates a zero range form factor with the Bayman-Kallio method [11]. The single particle wave functions were generat-

Table 1
Parameters used for optical and bound state potentials. All radial functions were of Woods-Saxon form.

	Potential parameters							
	V	r	a	W	W _D	r ₁	a ₁	r _C
Protons	45.4	1.16	0.78	9.8	1.9	1.32	0.54	1.2
Tritons (A)	173.0	1.16	0.70	14.8	-	1.65	0.806	1.16
Tritons (B)	146.0	1.24	0.678	25.1	-	1.45	0.841	1.24
Neutrons*		1.25	0.65					

* The well depth was searched for to give bound state at one-half the two nucleon separation energy. A Thomas form spin-orbit potential of 25 MeV strength was included.

ed from a Woods-Saxon well with parameters listed in table 1 and were bound at half the two-particle separation energy.

The optical potentials are also listed in table 1. The proton parameters were derived from the work by Mani et al. [12]. The real well depth was given a reasonable energy dependence of 0.22E, which gives the value 45.4 MeV for 41.7 MeV bombarding energy. The outgoing tritons have energies of the order of 30 MeV. In the calculations presented here we have used two sets of triton parameters: (A) A potential derived from experiments at 20 MeV by Flynn et al. [13] and (B) a set derived from information given by Hafele et al. [14]. No extrapolation to the energy region of 30 MeV has been attempted. The angular distributions of figs. 2 and 3 are calculated with the set (A).

Table 2
The summed cross sections ($\sum_{10^\circ}^{70^\circ} \sigma(\theta_i)$, the sum being in steps of 2.5°) in percent of the one for the ground state transition as reported from experiments [9] and as obtained for various modifications of the coexistence model.

Transition	Ex-periment	Gerace-Green		SU ₃		Newton			
		(A)	(B)	(A)	(B)	(A)	(B)		
0 ₁ ⁺ → 0 ₁ ⁺	100	100	100	100	100	100	100		
0 ₁ ⁺ → 0 ₂ ⁺	20.6	0.7	3.5	1.6	2.9	11.2	11.3	5.8	6.6
0 ₁ ⁺ → 2 ₁ ⁺	10.3	0.8	1.8	0.4	1.8	9.6	12.2	2.8	4.9
0 ₁ ⁺ → 0 ₃ ⁺	<1.0	1.4	6.7	1.6	7.3	2.8	6.7	1.8	6.2
0 ₁ ⁺ → 2 ₂ ⁺	3.5	3.8	7.7	3.5	7.1	0.8	4.3	1.3	4.9

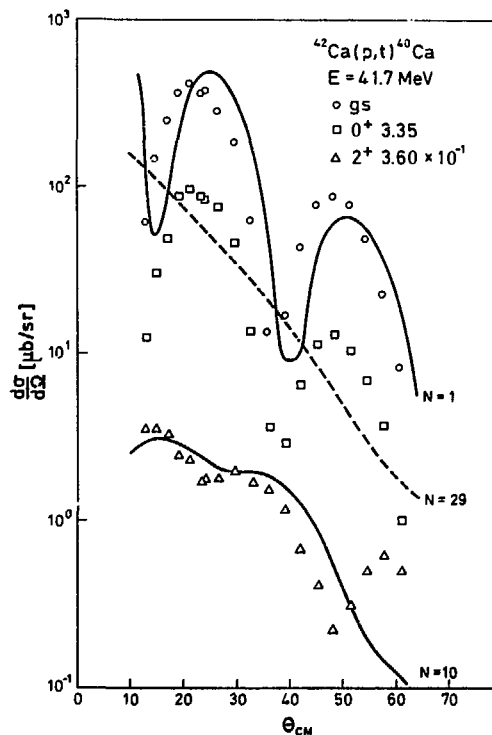


Fig. 2. Experimental results compared with the predictions of the model of ref. [2], corresponding to column 3(A) of table 2 for the transitions to the ground state (solid line and circles in upper part), 0⁺ at 3.35 MeV (dashed line and squares) and 2⁺ at 3.60 MeV (solid line and triangles in lower part). The 2⁺ cross sections have been multiplied by 10⁻¹ for the reason of clarity. All theoretical cross sections are normalized such that the ground state transition agrees with the experimental one. The extra normalization N required for the excited states is indicated in the figure.

In table 2 the second column gives the results of a calculation starting from the state vectors of Gerace and Green [2] with appropriate Nilsson functions [8] for the single-particle functions. The results certainly have more in common with the calculations by Debevec [9] than with his experimental results.

It has been suggested [5] that inclusion of a 6p-4h component in the ⁴²Ca ground state might remove some of the discrepancies. We have determined a ground state comprising a 6p-4h component in the spirit of Gerace and Green and find

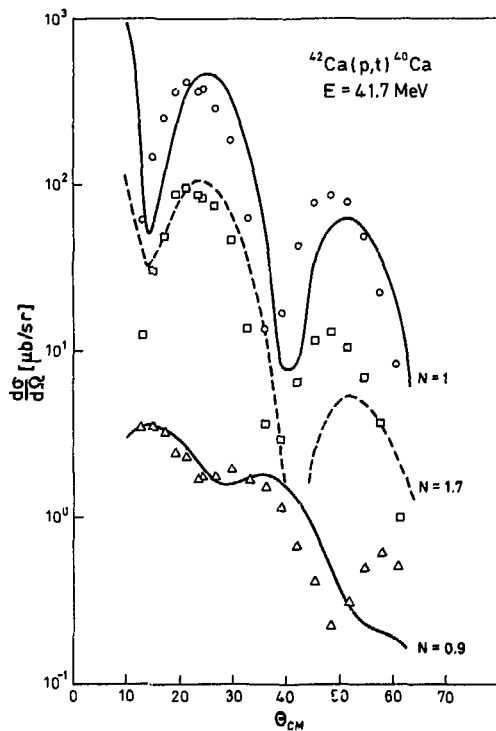


Fig. 3. Same as fig. 2 but for the model including $6p-4h$ states and using SU_3 states for the hole levels (cf. column 5(A) of table 2).

$$|^{42}\text{Ca, ground}\rangle \quad (1) \\ = 0.872|2p\rangle + 0.475|4p-2h\rangle + 0.188|6p-4h\rangle.$$

Using state (1) we obtain the results shown in table 2 column 4. No significant improvement is obtained. We retain however in the following the ground state (1) for ^{42}Ca , since we feel that such a description is more consistent with the states used for ^{40}Ca .

Several calculations indicate that deformations lacking axial symmetry are energetically favorable in the Ca region. This was in fact realized by Gerace and Green [18], who considered Nilsson functions for computational reasons only.

The lowest levels in the unfilled shell ("particle states") are those with all quanta in the direction of weakest potential, whereas the highest levels in the last filled shell ("hole states") are those having as

Table 3
The single-particle states for particles and holes.

Particles			Holes			Newton	
j	k	# 14 $\frac{1}{2}[330]$	j	k	# 8 $\frac{3}{2}[202]$	SU_3	$\beta = 0.2$ $\gamma = 30^\circ$
7/2	1/2	0.8611	5/2	5/2		0.5000	0.1553
5/2	1/2	-0.1305	5/2	-3/2	-0.2027	-0.2236	-0.1489
3/2	1/2	-0.4673	3/2	-3/2	0.9792	0.4472	0.8102
1/2	1/2	0.1522	5/2	1/2		0.3162	0.1363
-	-	-	3/2	1/2		-0.2582	-0.3477
-	-	-	1/2	1/2		0.5774	0.3973

many quanta as possible in the direction of strongest potential. Therefore we conclude that changing from axial symmetry to a small deviation from such a symmetry, which essentially means a redistribution of potential strength among the two minor axes, does not affect the particle state significantly but may produce important modifications of the hole states. This claim is substantiated by actual calculations [16]. In our investigation of effects from deviations from axial symmetry in the core-excited components we are therefore concerned with modifications of the hole states only. The first estimate we obtain by choosing as hole states those with all quanta in the x -direction, which amounts to introducing the single-particle orbits of mixed k -values given in table 3 under the heading SU_3 . The neglect of the spin-orbit potential introduces an over-estimate of the $d_{5/2}$ state in this description.

A complete Nilsson-like calculation including the spin-orbit term has been carried out by Newton [16]. His single-particle state for $\beta = 0.2$ and $\gamma = 30^\circ$ is also given in table 3.

The results for the (p,t) calculation using these states are found in table 2 and fig. 3. We see that the introduction of triaxial single-particle states for the holes removes to a large extent the disagreement. In particular the cross sections for reactions leading to the $3/2^+$ and 2^+ levels in ^{40}Ca are enhanced and the angular distributions are more reasonable. The shape of the ground state cross section is in all cases satisfactory. The shift of the maximum around 25° is probably a manifestation of finite range effects. This has been checked using the finite range correction in DWUCK, and is also apparent in the exact finite range calculations by Bayman [15].

Via coefficients in ^{40}Ca and ^{42}Ca of fig. 1, the magnitudes and the interplay of the transition amplitudes I-V, the total transition amplitude is determined by the value of M_0 and by the unperturbed energies. Accepting the order $\epsilon_0 < \epsilon_{4p4h} < \epsilon_{2p2h}$, we have established that the sign of M_0 is such as to produce the following pattern[†], inherent in the model:

$$\begin{array}{l}
 {}^{40}\text{Ca} \\
 {}^{42}\text{Ca} \quad 0_1^+ \rightarrow
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 0_1^+ \text{ All contributions add coherently} \\
 0_2^+ \text{ Particle pick-up (mainly I) and hole} \\
 \text{pick-up (mainly IV) compete} \\
 \text{The presence of } |6p-4h\rangle \text{ weakens} \\
 \text{particle pick-up} \\
 0_3^+ \text{ Cancellations occur between particle} \\
 \text{pick-up and hole pick-up but also with-} \\
 \text{in these categories.}
 \end{array}
 \right.$$

The introduction of $|6p-4h\rangle$ produces an enhancement of the 0_2^+ cross section, since a weakening of the particle pick-up makes the hole pick-up more preponderant. The improvement of agreement upon introducing triaxial hole wave functions is also because of a stronger hole pick-up, this time due to the appearance of the $1s_{1/2}$ state, which is strongly favoured in two-nucleon pick-up.

If a strong cancellation occurs, the form factor is suppressed in the surface region, where normally the main contribution to the transition amplitude is obtained. Therefore the shape of cross sections characteristic of the transferred L -value is replaced by the rather structureless shape that is a consequence of comparable contributions from a wide range of r -values. In such a situation the results become extremely sensitive to the choice of parameters in the optical potential — as can be seen in table 2 — and to the way in which the correct asymptotic behaviour of the form factor is achieved.

[†] Broglia et al. [17] have succeeded in producing a pattern with coherence in $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$. Their description is however crippled by the easily established fact that their $2p-2h$ state must lie below the $4p-4h$ state and places 0_1^+ disastrously close to the ground state.

We therefore feel that the absence of structure in some cases is more of a warning that the angular distribution may lack physical significance, than an additional sign of failure of the model. In fig. 3 we also see that the characteristic shape is restored once the cancellation is made less complete.

The general improvement obtained by introducing triaxial deformation does not take us as far as to complete agreement, but it provides a case for a thorough reexamination before assigning a death certificate to the coexistence model.

The authors are greatly indebted to Professor G.E. Brown for suggesting their joint effort in this study and to Professor G.T. Garvey for his alacrity in communicating results. Thanks are also due to Dr. R.A. Broglia for his interest in our work, intimated at several occasions.

References

- [1] G.E. Brown and A.M. Green, Nucl. Phys. 75 (1966) 401.
- [2] W.J. Gerace and A.M. Green, Nucl. Phys. A93 (1967) 110.
- [3] W.J. Gerace and A.M. Green, Nucl. Phys. A123 (1969) 241.
- [4] J.R. MacDonald, D.H. Wilkinson and D.E. Alburger, Phys. Rev. C3 (1971) 219.
- [5] J.P. Schapira et al., Phys. Rev. C5 (1972) 1593.
- [6] E.G. Adelberger et al., Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 883.
- [7] P. Federman and S. Pittel, Phys. Rev. 186 (1969) 1106.
- [8] B.E. Chi, Nucl. Phys. 83 (1966) 97.
- [9] P.T. Debevec, thesis, Princeton 1972.
- [10] P.D. Kunz, unpublished.
- [11] B.F. Bayman and A. Kallio, Phys. Rev. 156 (1967) 1121.
- [12] G.S. Mani, D.T. Jones and D. Jacques, Nucl. Phys. A165 (1971) 384.
- [13] E.R. Flynn et al., Phys. Rev. 182 (1969) 1113.
- [14] J.C. Hafela, E.R. Flynn and A.G. Blair, Phys. Rev. 155 (1967) 1238.
- [15] B.F. Bayman and D.H. Feng, Nucl. Phys. A205 (1973) 513.
- [16] T.D. Newton, CRT-886 Chalk River 1960.
- [17] R.A. Broglia, K. Koltveit and B. Nilsson, Phys. Lett. 37B (1971) 441.
- [18] W.J. Gerace and A.M. Green, Nucl. Phys. A113 (1968) 641.

5.7. On the Importance of Multi-Step
Processes in the Reaction $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$

Særtrykk fra Physics Letters.

ON THE IMPORTANCE OF MULTI-STEP PROCESSES IN THE REACTION $^{18}\text{O}(p, t)^{16}\text{O}$

V. HORSFJORD*

Institute of Physics, University of Oslo, Oslo 3, Norway

Received 21 January 1975

A coupled channels analysis of the reaction $^{18}\text{O}(p, t)^{16}\text{O}$ has been performed, using the weak coupling wave functions of Ellis and Engeland. It is found that these wave functions are consistent with the data. The rather sizeable contributions from transitions via the ^{16}O ground state play an essential role in producing this result. The data seem not to support the use of a strongly deformed single particle basis for the multiparticle-multihole components of the wave functions.

In works by the Princeton group [1] on the reaction $^{18}\text{O}(p, t)^{16}\text{O}$, it has been shown that the predictions from the Brown-Green model [2] seem to be inconsistent with experimental results. The weak coupling model developed by Ellis and Engeland [3] gives wave functions fairly similar [4] to those from the Brown-Green model. It is therefore expected that this model will also fail to account for the data. This is indeed the case, as can be seen from fig. 1. There we present results for the lowest-lying positive parity states in ^{16}O from a standard DWBA calculation. The optical potential parameters and triton size parameter are the same as those employed in refs. [1]. The form factors have been calculated using the Glendenning method [5], with the harmonic oscillator parameter $b = 1.8$ fm.

Fig. 1 shows the following severe shortcomings of the theory: (A) The cross section for the $2^+(6.92$ MeV) level is 60 times too small. (B) The cross section to the $0^+(12.05$ MeV) level is one order of magnitude too large. We have tried to escape from these problems by using other versions of the wave functions [4], but in vain. This is obviously due to the fact that the transition to the former level proceeds via wave function components with relatively small amplitudes, whereas the situation is the opposite one for the latter level. We also note that the second peak of the ground state angular distribution is much too low. But if the finite range correction in the code DWUCK [6] is used, the fit to data is much improved.

* Present address: Sverresborg Ungdomsskole, 7000 Trondheim, Norway.

In this note we give a very brief account of calculations done in order to investigate the consequences of two possible ways to improve the agreement between theory and experiment. (1) We perform a coupled channels calculation in order to give an improved treatment of the reaction process. (2) We study the effects from using a specially deformed single particle basis, in the spirit of Brown and Green [2].

We start with the coupled channels calculation. Preliminary calculations have shown us that the by far most important indirect route to an excited positive parity level in ^{16}O , is the one going via the ^{16}O ground state. Excitations in the target nucleus seem to be of less importance. Still we have, for completeness, included the $2^+(1.98$ MeV) and $0^+(3.63$ MeV) levels in ^{18}O . Other levels are either weakly connected to the ground state in (p, p') experiments [7], or have small overlaps with levels in ^{16}O (+ 2 neutrons). In order to exploit the computer codes available at the nuclear physics group in Oslo, we have made the following simplification: In those source terms in the coupled equations that describe inelastic scattering, we have used formulae from the vibrational model. For the levels in ^{18}O just mentioned, this means that we take 0_1^+ as the zero phonon state, 2_1^+ as the one phonon state and 0_2^+ as a two phonon state. Expressions for the source terms are given by Tamura [8]. The vibrational strength β_2 for $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ is determined by fitting the theory to the (p, p') data of ref. [7]. The result is $\beta_2 = 0.37$, which is the same as found in ref. [7] using a rotational model. Values for the vibrational strengths $(\beta_0)^2$ for $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$ and

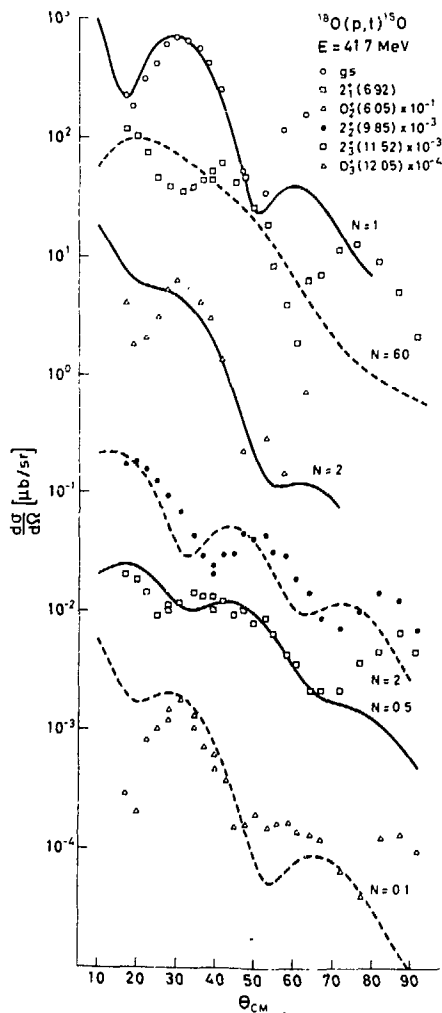


Fig. 1. DWBA results from the weak coupling wave functions compared with data. All theoretical cross sections are normalized such that the ground state transition agrees with the experimental one. The extra normalization N required for the excited states is indicated in the figure.

β_2' for $2_1^+ \rightarrow 0_2^+$ are found from electron scattering results on transition radii and E2 γ -decay results, respectively, by exploiting formulae from ref. [9] and data quoted in refs. [3, 4]. The signs of the parameters are

Table 1
Coupling parameters used in the calculations.

Nucleus	Levels coupled	Coupling parameters		
		β_2	β_0'	β_2'
^{18}O	$0_1^+ \quad 2_1^+ \quad 0_2^+$	0.37	0.40	0.12
^{16}O	$0_1^+ \quad 2_1^+ \quad 0_2^+$	0.20	-0.38	0.25
	$0_1^+ \quad 2_2^+$	0.04		
	$0_1^+ \quad 2_3^+ \quad 0_3^+$	0.14	0.44	0.10
	$0_1^+ \quad 2_4^+ \quad 0_4^+$	0.14	-0.30	0*

* No data available.

determined so as to give the coupling matrix elements the same signs as the corresponding electromagnetic matrix elements, calculated from the weak coupling wave functions. The parameters are given in table 1. Excitations in ^{16}O are treated in a similar way. Couplings between $0_1^+ \quad 2_1^+ \quad 0_2^+$, $0_1^+ \quad 2_2^+$, $0_1^+ \quad 2_3^+ \quad 0_3^+$ and $0_1^+ \quad 2_4^+ \quad 0_4^+$ have been treated in separate runs, again using the vibrational model expressions for the coupling terms only. Our simplified method therefore does not include indirect processes between, say, 0_2^+ and 0_3^+ . However, this is of minor importance in a rough first calculation, since the only indirect route that really can cope with the direct one, is the route via the ^{16}O ground state. It has been checked that no significant ambiguity arises, when comparing cross sections relative to the ground state, for excited levels treated in separate runs. Since no relevant (t, t') experiments are available, we instead extract information on the β 's from electromagnetic data compiled in refs. [3, 4], as for ^{18}O , and from (p, p') and (α, α') experiments [10, 11]. In a few cases the β 's obtained from the (p, p') and (α, α') results deviate from the electromagnetic ones. Then the former are selected from physical reasons. For results, see table 1.

In this way the inelastic excitations have been provided with the right signs and overall strengths. The radial dependence, however, may not be excellently treated. Therefore we do not expect to be able to account very well for the angular distributions in cases where the indirect transitions dominate.

Results are given in fig. 2. It is striking that the magnitudes of *all* cross sections now agree well with the experiments. The result for 2_1^+ (6.92 MeV) is especially pleasing. The contributions from the indirect transitions completely dominate the cross section and

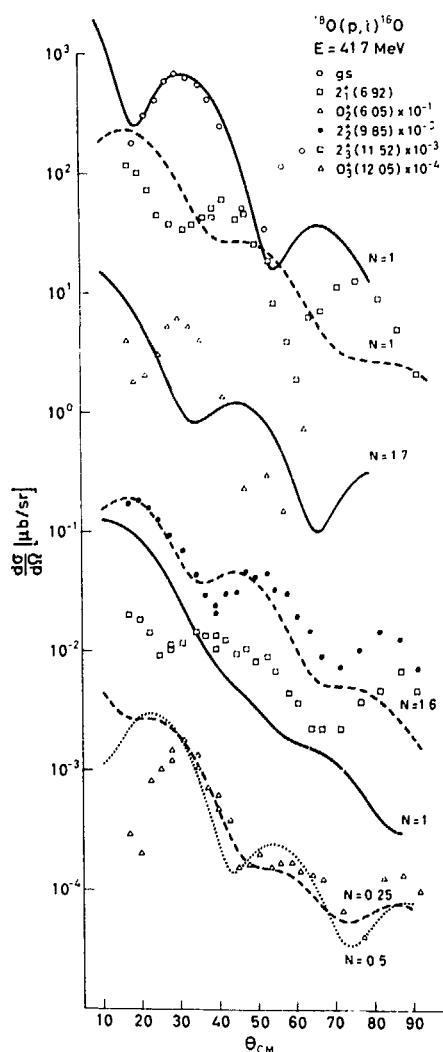


Fig. 2. Same as fig. 1 except that the theoretical results now have been obtained from coupled channels calculations. For the $0_3^+(12.05)$ MeV level two theoretical alternatives have been given, corresponding to wave function (a) (dashed curve) and wave function (e) (dotted curve) from ref. [4].

raise it to the experimental magnitude. And further: the cross section to $0_3^+(12.05)$ MeV, which before was far too large, is reduced to an acceptable level.

The overall magnitudes of the cross sections to the $0_2^+(6.05)$ MeV and $2_3^+(11.52)$ MeV levels agree well with the experiments, as before, even if the angular distributions are a bit peculiar. A closer inspection of the calculations reveals that for both levels the indirect contributions are roughly twice the direct ones. The relative signs are such as to produce destructive interference. On the background of the remark on angular distributions, made above, we find the results quite acceptable.

The weak coupling model predicts a fourth 2^+ level not much above the 2_3^+ level. From electron scattering results it seems improbable [4] that the 2_4^+ structure (instead of 2_3^+) should be associated with the experimental 11.52 MeV level. This conclusion is strongly supported by the present (p, t) results. The direct transition to 2_4^+ is weak. If the 11.52 MeV level had this structure, the total cross section would be dominated by the indirect terms, which are much too strong.

The model also predicts a fourth 0^+ level that has been identified [4] with the 14.00 MeV level seen in electron scattering works. This level is not seen in the (p, t) experiments [1]. It is found that the theoretical (p, t) results are very unstable against minor adjustments of the wave functions. If a version, called case (e) in ref. [4], is used for 0_4^+ , the predicted cross section is very small.

We thus find that when multi-step processes are included, the weak coupling wave functions are consistent with (p, t) experiments for all the levels in ^{16}O that have been considered. However, according to the ideas underlying the Brown-Green model, the multiparticle-multipole components of the wave functions should be formulated in a specially deformed single particle basis. Such a deformation is expected to strongly affect the predictions for transfer reactions [12]. It is therefore important also to check what are the consequences for the weak coupling model, if the basis is allowed to deform.

Deformations affect the overlaps $\langle ^{18}\text{O} | a_1^\dagger a_2^\dagger | ^{16}\text{O} \rangle$ in two ways: (i) The overlap between the core-particles in ^{16}O and ^{18}O is reduced to roughly 0.7 (see ref. [2]) for transitions between wave function components where only one of them is deformed. (ii) The valence particle (hole) functions are deformed. The effect of (ii) can be included in the following crude, but simple way. (The method is in principle very close

to the one used in ref. [13]). The lowest lying Nilsson-function in the sd-shell with $\delta = 0.6$ is expanded in a spherical basis, with $\Delta N = 2$ couplings included[‡].

We have found that this function can be well simulated using the expansion without $\Delta N = 2$ coupling, provided the oscillator parameter is changed from $b = 1.80$ fm to 2.29 fm. A similar calculation for the highest Nilsson function in the p-shell gives no significant changes, as might be expected, since it has most of its oscillator quanta orthogonal to the stretching direction. The effects from spacial deformations therefore can, in a first approximation, be treated using the computer codes written for a spherical basis. We only have to introduce the overlap factors 0.7, and change the oscillator parameter for particle pick-up. (We have found it reasonable not to make this change in the factor Ω_n of ref. [5]).

The coupled channels calculations have now been redone with these modifications. The results can be summarized in the following way: The cross sections to the 0^+ (6.05 MeV) and 2^+ (6.92 MeV) levels are not seriously affected. For the latter level this is reasonable, since the cross section is dominated by the indirect terms, the magnitudes of which are fixed from inelastic scattering experiments. The cross sections to higher levels are strongly increased. The 2^+_3 (11.52 MeV) and 0^+_3 (12.05 MeV) cross sections are now one order of magnitude too large.

We conclude that the indirect transitions are in some cases remarkably strong. The calculations indicate that such processes should certainly be included in any treatment of the reaction $^{18}\text{O}(p, t)^{16}\text{O}$, irrespective of which model is used. In particular it is shown that the weak coupling model proves to be consistent with the data, when multi-step processes are included. For all levels studied, the indirect con-

[‡] The author is indebted to Dr. I. Ragnarsson at NORDITA, Copenhagen, for giving him the $\Delta N = 2$ expansions.

tributions have precisely such magnitudes and signs that: (a) Cross sections that in DWBA are much too small or large, are considerably improved. (b) Cross sections that in DWBA are consistent with data, are not much changed (in magnitude), even if the total transition amplitudes are sometimes built up in an entirely different manner. Further: if deformations of the order of magnitude employed by Brown and Green are introduced, the agreement is destroyed for levels above 10 MeV in ^{16}O . This may represent a warning against a literal interpretation of the Brown-Green model, so far as the magnitude of the deformations is concerned.

The author is greatly indebted to Drs. T. Engeland, I. Espe, T. Pedersen and T. Sannes for discussions, help, and for allowing him to make use of their computer programs. The coupled channels calculations were performed using the code TOR, written by Dr. I. Espe.

References

- [1] E.G. Adelberger et al., Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 883; R.S. Ohanian, Ph.D. thesis, Princeton University 1973.
- [2] G.E. Brown and A.M. Green, Nucl. Phys. 75 (1966) 401.
- [3] P.J. Ellis and T. Engeland, Nucl. Phys. A144 (1970) 161; T. Engeland and P.J. Ellis, Nucl. Phys. A181 (1971) 368.
- [4] V. Horsfjord, Nucl. Phys. A209 (1973) 493.
- [5] N.K. Glendenning, Phys. Rev. 137 (1965) B102.
- [6] P.D. Kunz, unpublished.
- [7] R. Resmisi et al., Phys. Lett. 37B (1971) 275.
- [8] T. Tamura, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 679.
- [9] J.P. Davidson, Collective models of the nucleus (Academic Press, New York and London, 1968).
- [10] W.W. Daehnick, Phys. Rev. 135 (1964) B1168.
- [11] B.G. Harvey et al., Phys. Rev. 146 (1966) 712.
- [12] E. Rost, Phys. Lett. 21 (1966) 87; R.J. Ascutto and B. Sørensen, Nucl. Phys. A190 (1972) 309.
- [13] T. Erikson, V. Horsfjord and B. Nilsson, to be published.

6. KONKLUSJONER. DISKUSJON

Konklusjoner angående detaljene i arbeidet er allerede gitt i de enkelte artiklene. I dette kapitlet understreker vi bare de resultatene vi anser å være de vesentligste. Vi sammenlikner også våre beregninger med enkelte arbeider som er kommet til etter at de respektive artiklene i forrige kapittel var ferdig utarbeidet.

Hovedpoenget med dette kapitlet er likevel å prøve å sette resultatene fra de ulike artiklene i sammenheng.

6.1. Generelle trekk

Det er tilfredsstillende å kunne konkludere at vi har fått akseptabel overensstemmelse mellom teori og eksperiment på alle de områdene vi har tatt opp, der man tidligere har ment å se alvorlige uoverensstemmelser. Dette gjelder styrken for den laveste monopoleksitasjonen i ^{16}O , systematikken for ladningsradiene i oksygenområdet og de relative eksitasjonsstyrker for lavtliggende nivåer i ^{16}O og ^{40}Ca , målt med (p,t)-reaksjoner. Vi har oppnådd denne overensstemmelsen ved å ta med i beregningene viktige fysiske effekter som tidligere har vært utelatt. Disse diskuteres mer i detalj i de følgende avsnittene.

Beregningene oppfordrer til en viss varsomhet når en skal trekke opplysninger om sfæriske skallmodellfunksjoner fra data for uelastisk elektronspredning. Formfaktorene er vist å være følsomme for komponenter i bølgefunksjonene som er så små at de neppe kan beregnes med noen stor grad av sikkerhet. I tillegg har vi usikkerheter forbundet med polarisasjonseffektene. Dette gjør at en normalt vanskelig kan trekke konklusjoner om bølgefunksjonene hvis det er avvik mellom teori og eksperiment, eller mellom ulike teoretiske alternativer, på noe særlig mindre enn 0.1 fm^{-1} for posisjonen av diffraksjonsminimumet. Heller ikke kan en legge vekt på små uoverensstemmelser for høyden av kurven for den kvadrerte formfaktor omkring første maksimum. Denne kan være svært følsom for små komponenter i bølgefunksjonene, og, for monopolovergange, for usikkerheter i forbindelse med enpartikkelpotensialet (Woods-Saxon parametre, o.l.) I forbindelse med den sfæriske skallmodellen ser det derfor ut til at uelastisk elektronspredning normalt bare gir interessante resultater i to situasjoner. Disse er: (1) Monopoloverganger for små impulsoverføringer. For monopolovergange får en ikke opplysninger fra γ -decay. Usikkerheter angående kurveformen for den

kvadrerte formfaktor får ingen særlig innflytelse på lav- q resultatene. Og, (2) situasjoner for monopoloverganger eller kvadrupoloverganger der formfaktorene har konkurrerende hovedbidrag hvor det ene er en hullovergang og det andre en partikkelovergang. Da disse bidragene har helt ulik karakter (kap. 3.1.), vil ulike teoretiske alternativer kunne gi formfaktorer så forskjellige at usikkerhetene over blir av liten betydning. Det ikke-trivielle i denne sammenheng er at slike situasjoner virkelig finnes (de høyere 2^+ nivåene i ^{16}O). Merk videre at bølgefunksjoner med svak kopling (kap. 2.4.) er særlig nyttige for en slik analyse. Hver komponent i bølgefunksjonen er et produkt $|p\rangle|h\rangle$ av en partikkel- og en hull-tilstand (angulært moment koplingen neglisjeres her da den er uten prinsipiell betydning). Overgangsoperatoren T (kap. 3.) kan skrives som en sum $T = T_p + T_h$, der T_p virker på partikkel-frihetsgradene og T_h på hull-frihetsgradene. Matrise-elementet av T mellom $|p\rangle|h\rangle$ og $|p'\rangle|h'\rangle$ og dermed formfaktoren, blir da

$$\langle h' | \langle p' | T | p \rangle | h \rangle = \delta_{p,p'} \langle h' | T_h | h \rangle + \delta_{h,h'} \langle p' | T_p | p \rangle . \quad (35)$$

På grunn av Kronecker-deltene er det her særlig enkelt å se om vi får rene partikkel- eller hullbidrag mellom de tilstandene som inngår med størst vekt i bølgefunksjonene.

6.2. Romlig deformasjon

Lar vi de deformerte tilstandene få romlig deformasjon (kap. 2.1.), får dette innvirkning både på elektronsprednings- og (p,t) -resultatene.

Våre elektronsprednings-beregninger er alle gjort i en sfærisk basis. Tilsvarende beregninger for enkelte av nivåene i ^{16}O er gjort av Torbjørn Erikson [33] ut fra Brown-Green modellen. I disse beregningene er det tatt med meget sterke romlige deformasjoner. Nå er det nokså stor likhet mellom Brown-Greens og Ellis-Engelands bølgefunksjoner - bortsett fra romlig deformasjon (kap. 2, og subsect. 3.2. i artikkelen i kap. 5.3.). Ved å sammenlikne Eriksons og våre resultater vil en derfor få opplysninger om virkningen av den romlige deformasjon.

Erikson [33] viser at den romlige deformasjon påvirker hans resultater på 2 måter: 1) Coren deformeres. Dette er ifølge kap. 2.4. begrepsmessig samme effekt som våre polarisasjonsladninger tar hensyn til. 2) Partikler og hull utenom coren beveger seg i enpartikkelbaner som

strekker seg lenger ut i rommet. Intuitivt vil en vente at denne effekten hos Erikson skulle tilsvare vår bruk av Woods-Saxon funksjoner. Det er nå av interesse å undersøke om disse to effektene også numerisk stemmer overens i Eriksons og i våre beregninger.

Når det gjelder effekt (1) angir Erikson størrelsen av denne ved å angi effektive ladninger. Disse er i ref. [33] multiplikative ledd i formfaktoruttrykkene, som går mot 1 i grensen med null polarisasjon. Våre formfaktoruttrykk kan for ^{16}O , som har isospinn $T = 0$, skrives på en tilsvarende måte. Det som svarer til Eriksons effektive ladninger e_{eff} , blir hos oss den dobbelte isoskalarladning:

$$e_{eff} = 2 \cdot \frac{e_p + e_n}{2} = 1 + 2 \epsilon_{pol} \quad (36)$$

idet $e_p = 1 + \epsilon_{pol}$ og $e_n = \epsilon_{pol}$; ϵ_{pol} er polarisasjonsladningen.

For monopolovergangene viser Erikson at $e_{eff} = 1.3$, noe som svarer til $\epsilon_{pol} = 0.15$, altså halvparten av hva vi bruker. For kvadrupolovergangene finner Erikson $e_{eff} = 2$, noe som er i overensstemmelse med vår $\epsilon_{pol} = 0.5$. Når det så gjelder effekt (2) foran, kan vi få opplysninger om denne ved å sammenlikne Eriksons formfaktorkurver for den sfæriske grensen, dvs. med både effekt (1) og (2) utelatt, og for de endelige uttrykkene, der begge effektene altså er med. Når vi foran har sett størrelsen av effekt (1), gir denne sammenlikningen straks størrelsen av effekt (2). På denne måten finner vi fra ref. [33] at strekkingen av valensbanene (effekt (2)) forårsaker en økning omkring første maksimum med en faktor ca. 3 for den kvadrerte formfaktor i monoptilfellet. I kvadrupoltilfellet får vi bare en moderat økning. Disse tallene er noe større enn de vi har regnet med i artikkelen i kap. 5.3. For monopolovergangene finner vi at Woods-Saxon funksjonene forårsaker en økning i den kvadrerte formfaktor omkring første maksimum på en faktor 2, mens vi ikke har innført Woods-Saxon korreksjoner i kvadrupoltilfellet. Årsaken til dette siste er at beregninger av kvadrupol formfaktorene mellom de aktuelle enpartikkelfunksjonene viser at disse ikke endres nevneverdig om Woods-Saxon funksjoner innføres, bortsett fra for lave impulsoverføringer.

Alt i alt ser vi da at grovt regnet stemmer Eriksons og vår beskrivelse av effekt (1) og (2) foran overens. For monopolovergangene er det likevel den forskjell - hvis vi betrakter detaljene - at corepolarisasjonen er mindre hos Erikson, mens effekten av strekkingen av valensbanene er større. Vi vil i denne forbindelse peke på at vår beskrivelse

har det fortrinn at den corepolarisasjon som brukes for uelastisk spredning ($\epsilon_{\text{pol}} \approx 0.3$), nettopp stemmer overens med hva en trenger for å forklare radiusvariasjonene mellom kjerner i oksygenområdet (kap. 5.5.). Dessuten tyder våre beregninger for reaksjonen $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$ (kap. 5.7.) på at effekten av romlig deformasjon for valensnukleonene er overdrevet i Brown-Green modellen. Det stemmer med at effekt (2) hos Erikson, som vi nettopp har sett, synes å være for sterk. Innføring av romlig deformasjon gir derfor så langt vi har undersøkt det til nå, ingen effekter som vi ikke på vel så god måte kan forstå innen våre beregninger.

For kvadrupolovergangene stemmer Eriksons [33] beregninger vesentlig bedre overens med data enn våre resultater. Dette skyldes etter det foregående ikke deformasjonseffekter. Selv når Erikson ser bort fra effekt (1) og (2) foran (den sfæriske grensen, ref. [33]), får han adskillig større formfaktorer enn det vi får under samme forhold. Dette må bety at bølgefunksjoner med sterk kopling (kap. 2.4.) gir større kvadrupolmatriseelementer enn de tilsvarende funksjoner med svak kopling - selv når vi regner i en sfærisk basis. Det ville derfor være interessant å kopiere Ellis og Englands [11] beregninger for ^{16}O , men bruke basisfunksjoner med sterk SU_3 -kopling mellom partikkel- og hull-delene av bølgefunksjonene.

For laveste monopoleksitasjon i ^{16}O finner vi en liten, men viktig, forskjell mellom Eriksons og våre resultater. Diffraksjonsminimumet kommer ved lavere impulsoverføring i Eriksons beregning. Dette skyldes ikke forskjeller i behandling av romlig deformasjon, men er en konsekvens av forholdene diskutert i siste avsnitt av kap. 3.2. Ellis og Englands bølgefunksjoner, som vi bruker, inneholder mange fler komponenter enn de Erikson har benyttet. De sterkest deformerte komponentene er felles for de to sett av bølgefunksjoner. De mindre sterkt deformerte komponentene i Ellis og Englands bølgefunksjoner vil da, ifølge kap. 3.2., bevirke at diffraksjonsminimumet skyves mot høyere impulsoverføringer. Da forskjellen er stor nok til å være signifikant (jfr. kap. 6.1.), og da den har sin årsak i en prinsipiell forskjell mellom Brown-Green's og Ellis-England's modell, anser vi det vesentlig at nøyaktige eksperimenter gjøres. Eksperimentene i ref. [30], som er de nyeste vi kjenner til, er ikke gjort ved høy nok impulsoverføring til å belyse dette punktet.

I forbindelse med (p,t)-reaksjonene er det interessant å merke seg at

romlige deformasjoner ikke uten videre er tatt med i sin helhet, selv om en bruker Brown-Green-Gerace's bølgefunksjoner, slik vi har gjort i kap. 5.6. Der har vi tatt hensyn til deformasjonene ved å innføre overlappfaktoren 0.8 for overgang II i fig. 5, jfr. kap. 2.4. De enkelte partikkel- og hullfunksjonene er behandlet i den vanlige tilnærming der de utvikles i sferisk basis innen bare ett hovedskall. Strengt tatt burde valensfunksjonene også gis romlig deformasjon. Beregninger [34] viser at denne siste effekten ikke betyr så mye i kalsiumområdet. I oksygenområdet derimot, der deformasjonene er langt større, hvis vi skal tro Brown og Green [9], gir nettopp denne effekten et markert utslag. Dette har vi vist i siste del av artikkelen i kap. 5.7. At de store forandringene i tverrsnittene nettopp skyldes romlig deformasjon av valensbanene, og ikke er en core-effekt, vises også av foreløpige DWBA beregninger [34] for reaksjonen $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$ ut fra Brown-Green modellen. Core-overlappet er der med i alle beregningene. Tar vi hensyn til romlig deformasjon av valensbanene eller ikke, får vi i begge tilfeller kvalitativt samme resultater som i kap. 5.7.

Årsaken til den sterke innflytelse fra romlig deformasjon er klar. Deformasjonen fører til at bølgefunksjonen for det overførte nøytronpar strekker seg lenger ut i rommet der spredningsbølgefunksjonene ikke er så neddempet av absorpsjonsleddet i det optiske potensial. Fra teorien i kap. 4.1. følger da at virkningstverrsnittet økes. Som forklart i kap. 5.7. påvirkes vesentlig partikkel-overføring og bare i uvesentlig grad hull-overføring. Det er derfor eksitasjoner der overganger av type III i fig. 5 dominerer, at denne effekten blir merkbar. I ^{16}O gjelder dette særlig eksitasjoner til tilstandene 0_3^+ (12.05 MeV), 0_4^+ (14.00 MeV), 2_3^+ (11.26 MeV), 2_4^+ og i noen grad 2_1^+ (6.92 MeV). Dette ses fra amplitudene i fig. 8. Nettopp disse tverrsnittene ble også sterkt påvirket i beregningene i kap. 5.7.

Vi trekker den konklusjon (kap. 5.7.) at så store romlige deformasjoner som Brown og Green bruker i ^{16}O , ikke synes å være i overensstemmelse med (p,t)-data.

6.3. Polarisasjonseffekter

Vi finner det tilfredsstillende at polarisasjonsladninger av samme størrelse kan brukes både i elastisk og i uelastisk elektronspredning.

Når vi i artikkelen i kap. 5.4. beregner polarisasjonseffekter for ulike impulsoverføringer, er det vesentlig å bruke en fenomenologisk vekselvirkning

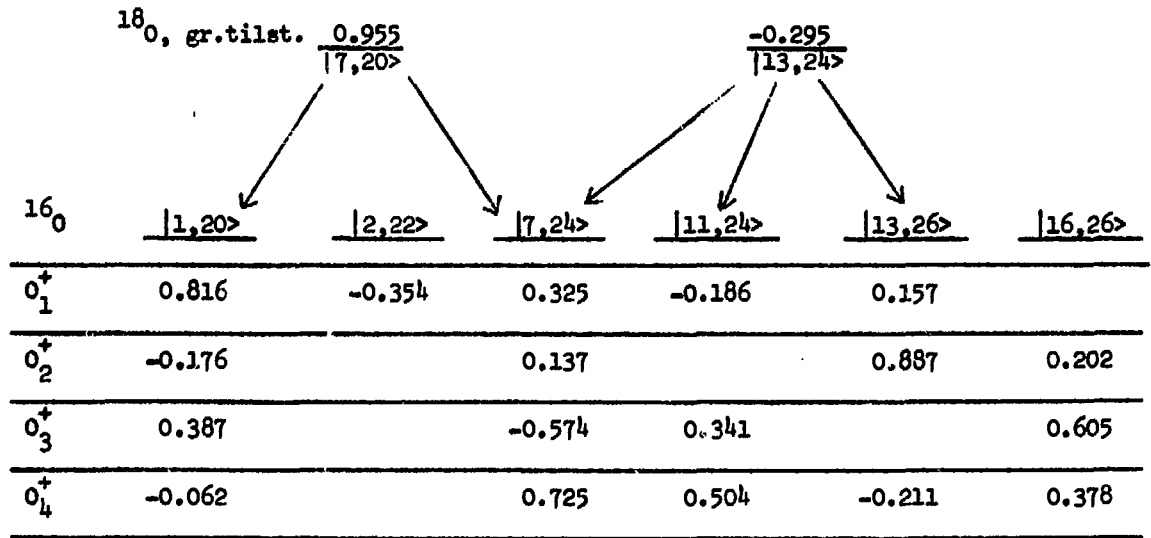


Fig. 8a

Tonøytronoverføring fra grunntilstanden i ^{18}O til 0^+ nivåer i ^{16}O . Piler angir hvilke bølgefunksjonskomponenter overføringene kan skje mellom (jfr. uttrykk (35)). Komponentene er spesifisert med to tall nøyaktig som i kap. 5.3. Bare de viktigste komponentene er tatt med. Amplitudene er tatt fra kap. 5.3.

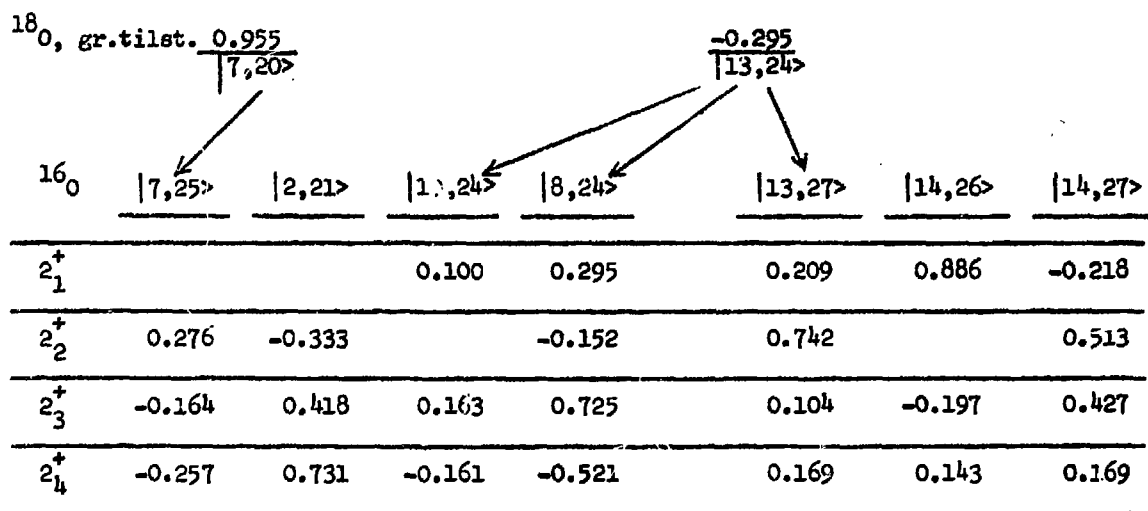


Fig. 8b

Som i fig. 8a, bare at overføringene skjer til 2^+ nivåer i ^{16}O .

justert så den gir rimelige resultater for null impulsoverføring. En kunne forsøke å beregne polarisasjonsladningene fra realistiske vekselvirkninger. Våre beregninger viser imidlertid at q-avhengigheten for polarisasjonsladningene er korrelert med størrelsen av ladningene for $q = 0$, og det på en slik måte at vi får en relativt q-uavhengig polarisasjonsladning når de empiriske verdier for $q = 0$ reproduseres. Da fundamental teori ennå ikke er god nok for $q = 0$ (se f.eks. ref. [21]), kan den heller ikke gi pålitelige resultater for q-avhengigheten. Et eksempel på hvilke problemer som kan oppstå: Vi har kopiert beregningene fra kap. 5.4. ved å bruke Kuo-Brown vekselvirkningen [35]. Vi får da ut det kjente resultat at enpartikkel-polarisasjonene i monopoltilfellet stort sett blir negative for $q = 0$, i strid med data (jfr. kap.5.5.). Dette fører til at vi for de fleste eksitasjoner får sterkt q-avhengige polarisasjonseffekter. I slike tilfeller er det nærmest umulig ut fra enpartikkel-polarisasjonene å slutte seg til hva q-avhengigheten vil bli i sammensatte tilfeller, uten en detaljert gjennomregning. For eksitasjonen til $O_2^+(6.05 \text{ MeV})$ i ^{16}O , f.eks., viser det seg å være konsellasjon mellom enkelte bidrag på en slik måte et nettoresultatet eiendommelig nok blir meget nær det en får for en nær q-uavhengig polarisasjonsladning av rimelig størrelse ($e_{\text{pol}} = 0.3$). Dette spesielle resultat ble funnet av Kaulhus [28] for mange år siden.

Et helt annet poeng er videre at uten relativt konstante polarisasjonsladninger ville argumentene i siste halvdel av kap. 6.1. ikke være gyldige.

Det har vært vanlig å fremskaffe enpartikkelpotensialer for forskjellige kjerner ut fra følgende metode: Grunntilstands-bølgefunksjonen forutsettes å være en Slaterdeterminant. Enpartikkelpotensialet varieres så, innen gitte rammer, til en får overensstemmelse med elastisk elektronsprednings data. Det er noe vanskelig å interpretare de enpartikkelpotensialene som da fremkommer. En vet at bølgefunksjonene også skal inneholde komponenter med partikkel-hull eksitasjoner. Inklusjon av slike vil innvirke på resultatene av analysen (dette ser en meget klart også i ref. [36]). Med mindre man tillater enpartikkelbasisen å deformeres, må man i tillegg ta med polarisasjonseffekter. Dette vil også innvirke på resultatene.

Hvis en likevel følger denne vanlige analysemåten for elastisk elektronsprednings data, tvinges en til å konkludere at enpartikkelpotensialet trekker seg noe sammen fra ^{16}O til ^{17}O , men at det så utvider seg igjen når vi går til ^{18}O , ref. [5]. En slik ikke-additiv effekt når nøytroner plasseres

utenfor ^{16}O er vanskelig å forklare, og er dessuten ikke i overensstemmelse med de antakelser som ligger til grunn for skallmodellen.

Det er på denne bakgrunn resultatet i artikkelen i kap. 5.5. må ses. Beregningene viser at vi for ladningsradiene får en enhetlig, enkel tolkning ved å holde potensialet fast, men ta hensyn til additive polarisasjoner samt deformerte komponenter. Våre resultater tyder på at polarisasjons- og deformasjonseffektene kan tenkes å være vesentlige også for større impulsoverføringer. I så fall vil det få konsekvenser for de enpartikkelpotensialene som kan finnes fra elektronspredningsdata. Også i et så stort anlagt arbeid som Negeles [37], er det neppe noe rimelig samsvar mellom raffinementene i forbindelse med beregningen av enpartikkel-bølgefunksjoner, og den enkle metoden til sammenlikning med elektronspredningsdata. Det er imidlertid ikke klart hvorvidt våre beregninger i kap. 5.5. uten videre kan generaliseres til høyere impulsoverføringer, med tilstrekkelig nøyaktighet.

6.4. Monopolverganger i ^{18}O

I kap. 5.3. har vi vist hvordan en kan fremskaffe nokså direkte opplysninger om hvor store deformerte komponenter det er i bølgefunksjonene for nivåene $0_2^+(3.63 \text{ MeV})$ og $0_3^+(5.33 \text{ MeV})$ i ^{18}O , ut fra uelastisk elektronspredning. Par-decay av disse nivåene gir de samme opplysninger som elektronspredning for $q = 0$. Souw, Adloff, Dindier og Chevallier [38] har utført slike par-decay eksperimenter og sammenliknet med våre beregninger. Resultatet er at parameteren E i kap. 5.3. ser ut til heller å skulle være nær -0.9 enn nær 0 , som Ellis-Engelands beregninger forutsetter. Det er interessant å merke seg at Pedersens [39] (p,p') -beregninger synes å tyde på det samme. Dette viser nokså tydelig at det er 3.63 MeV nivået i ^{18}O som skal være sterkt deformert, mens 5.33 MeV nivået har små deformerte komponenter. Dessuten tyder det på at innblandingen av deformerte komponenter i grunntilstanden i ^{18}O er større enn de 9% Ellis og Engeland får. Hvis vi antar at parameteren E er nøyaktig -0.9 , får vi av table 10 i artikkelen i kap. 5.3. at innblandingen er på 15%.

6.5. Indirekte overganger i (p,t) -reaksjonene

Bakgrunnen for våre (p,t) -beregninger var de påståtte uoverensstemmelsene [6,7,8] mellom teori og eksperiment for reaksjonene $^{18}\text{O}(p,t)^{16}\text{O}$ og $^{42}\text{Ca}(p,t)^{40}\text{Ca}$. Særlig betones i ref. [8] problemene med første eksiterte 0^+ nivå i ^{16}O og ^{40}Ca . I en ny artikkel av Fleming, Arima, Fulbright og

Blann [40] påvises at overgangen til første eksiterte 0^+ nivå i ^{16}O utmerket kan forstås ut fra Brown-Green modellen innen en DWBA-analyse. Derimot viser disse forfattere at det er laveste 2^+ nivå i ^{16}O som skaper de virkelige problemene. Disse konklusjonene stemmer helt overens med våre. Vi får dette resultatet både i kap. 5.7. når Ellis-Engelands bølgefunksjoner brukes, og i foreløpige beregninger [34] ut fra Brown-Green modellen. Fleming et al. [40] mener at uoverstemmelsen mellom deres resultater og resultatene i ref. [8] skyldes at de bruker triaksialt deformerte SU_3 -funksjoner i stedet for aksialt deformerte Nilsson-funksjoner. De referer i den forbindelse til vårt arbeid, presentert i kap. 5.6., for kalsiumreaksjonen, der innføring av triaksiale deformasjoner er av betydning. Resonnementet er likevel neppe riktig. Årsaken til at innføring av triaksiale deformasjoner fungerer i kalsiumreaksjonen, er at vi da får innblandet $s_{1/2}$ -nivået, som før var utelatt, og som har stor betydning i (p,t)-reaksjonen (se kap. 5.6.). I oksygen-området har vi ikke noen tilsvarende effekt. Videre viser våre beregninger [34] ut fra Brown-Green modellen, som nevnt foran, overensstemmelse med resultatene til Fleming et al. og ikke med resultatene i ref. [8]. Årsaken til uoverensstemmelsen synes heller å bero på at man i ref. [8] bruker Browns opprinnelige ^{18}O -bølgefunksjoner [3] der det er hele 36% innblanding av $4p2h$ komponenter i grunntilstanden. Man får da nesten fullstendig kansellasjon mellom partikkel- og hull-bidragene til overgangen til $0_2^+(6.05 \text{ MeV})$ i ^{16}O . I beregningene til Fleming et al., og i våre, brukes en vesentlig mindre innblanding av $4p2h$ komponenter (< 10%), noe som svekker hull-bidragene og hever kansellasjonen.

At overgangen til nivået $2_1^+(6.92 \text{ MeV})$ i ^{16}O må skape problemer, ses lett av fig. 8b. Ingen bølgefunksjons-komponenter med store amplituder er involvert. Dessuten er det kansellasjon mellom partikkel- og hull-bidragene. (Brukes Brown-Green modellen fås et ekstra hullbidrag av type II i fig. 5, uten at dette endrer situasjonen noe vesentlig, ref. [34].) Den teoretiske overgangsstyrken til dette nivået må derfor bli meget svak, i motsetning til hva eksperimentelle data krever [7]. Selv om vi øker $4p2h$ innblandingen i grunntilstanden i ^{18}O til 15%, som svarer til $E = -0.9$ (se kap. 6.4.), gir dette ingen bedring av betydning.

Vi anser det derfor helt nødvendig å forsøke å ta hensyn til indirekte overføringer, som vi så i kap. 4.2. kunne tenkes å gi store bidrag, for å forklare oksygenreaksjonen. De modifikasjoner av bølgefunksjonene som ble brukt for kalsiumreaksjonen, fungerer ikke i oksygenområdet. Eksperimentene

[7] viser dessuten at overganger til nivåer i ^{16}O med unaturlig paritet kan være ganske sterke. Slike overganger er forbudt innen de vanlige versjoner av DWBA-teorien. Også dette viser at indirekte overføringer må være av betydning i oksygenreaksjonen.

Når vi så går til beregningene i kap. 5.7. for indirekte overganger ser vi at det mest karakteristiske trekk ved disse nettopp er størrelsen. Dette gjelder særlig overgangene via grunntilstanden i ^{16}O . Når hele styrken til $2_1^+(6.92 \text{ MeV})$ skyldes indirekte overganger. For $0_2^+(6.05 \text{ MeV})$ og $2_3^+(11.52 \text{ MeV})$ gir indirekte overganger dobbelt så store bidrag som direkte-overgangene. Fortegnene er imidlertid motsatte, slik at disse to siste overgangene grovt regnet er uforandret. Styrken av de indirekte overgangene er bestemt via parametrene i table 1 i artikkelen i kap. 5.7., og vil være de samme uansett hvilken versjon som brukes for bølgefunksjonene. Brukes derfor bølgefunksjoner som gir vesentlig anderledes direkte-overganger, sammenliknet med den Ellis-Engelands modell gir, vil de direkte overgangene ødelegge overensstemmelsen med eksperimentelle data. Bruker vi de ^{18}O - bølgefunksjonene som svarer til $E = -0.9$ (se kap. 6.4.), gir ikke dette vesentlige forandringer i resultatene i forhold til hva vi fant i artikkelen i kap. 5.7.

Vår konklusjon i denne sammenheng er da at det for det første er nødvendig å ta med indirekte overganger for oksygenreaksjonen. For det andre har disse nettopp slike styrker at bølgefunksjonene fra Ellis-Engelands modell [11] gir god overensstemmelse med eksperimentene.

To problemer er likevel ubesvart så langt. Hvilken innflytelse har indirekte overganger for kalsiumreaksjonen? Og, er Brown-Green funksjonene i oksygenområdet også i overensstemmelse med data når indirekte overganger innføres? Disse problemene fører egentlig ut over rammen for dette arbeidet. Vi kan likevel nevne enkelte momenter av betydning. Foreløpige beregninger [41] viser at indirekte overganger øker styrken for både $0_2^+(3.35 \text{ MeV})$ og $2_1^+(3.90 \text{ MeV})$ i ^{40}Ca - dette i særlig grad for 2^+ -nivået - slik at overensstemmelsen med data forbedres i forhold til resultatene i kap. 5.6. Og videre, siden Brown-Green modellen som nevnt foran gir direkte-overganger som stemmer bra med Ellis-Engelands modell, for oksygenreaksjonen, i alle fall for de lavere nivåene, må en vente at indirekte prosesser vil bringe også den i god overensstemmelse med data. Dette resonnementet kan likevel være noe tvilsomt for tilstandene over 10 MeV i ^{16}O , da Ellis-Engelands og Brown-Greens bølgefunksjoner der begynner å utvise vesentlige forskjeller

(jfr. artikkelen i kap. 5.3.). Dessuten forutsetter denne sammenlikningen mellom de to modellene at romlige deformasjoner ikke er så store som Brown og Green hevder (kap. 6.2.).

6.6. Høyere eksiterte tilstander i $^{16}_0$

Både elektronsprednings-resultatene (kap. 5.3. og 5.4.) og (p,t)-resultatene (kap. 5.7.) viser at 11.52 MeV nivået i $^{16}_0$ skal ha 2_3^+ strukturen, og ikke 2_4^+ strukturen. Disse bølgefunksjonene har ingen fullstendig analogi i Brown-Green modellen, slik den vanligvis formuleres. Etter at beregningene i kap. 5.3. ble gjort, er det publisert nye data [42] for 11.52 MeV nivået. Disse gir en noe mindre formfaktor enn de eldre resultater (ref. [43]), som vi bygget på i artikkelen i kap. 5.3. Når det gjelder avhengigheten av impuls-overføringsen, er imidlertid de to datasett svært like. Konklusjonen om strukturen av 11.52 MeV nivået endres derfor ikke av de nye data.

Nivået $2_2^+(9.85 \text{ MeV})$ i $^{16}_0$ kommer naturlig frem i Ellis-Engelands modell. I Brown-Green modellen kan en ikke beskrive dette nivået innen den vanlige versjonen av modellen. Det har likevel vært gjort forsøk på å inkludere 9.85 MeV nivået ved å innføre $K = 2$ komponenter (ref. [40] og [44]). Sammenlikning mellom våre resultater for (p,t)-reaksjonen til dette nivået (kap. 5.7.) og de tilsvarende beregninger i ref. [40], viser at Ellis og Engelands beskrivelse av $2_2^+(9.85 \text{ MeV})$ nivået gir bedre resultat enn Brown-Green modellen med $K = 2$ komponenter. Etter at beregningene i kap. 5.3. ble gjort er det publisert eksperimentelle elektronspredningsdata [44] for dette nivået. Slike data er av spesiell betydning da våre beregninger ut fra Ellis-Engelands modell (kap. 5.3. og 5.4.) viser at formfaktoren til 9.85 MeV nivået ikke skal ha noe diffraksjonsminimum mellom 1 fm og 2 fm, noe de andre kvadrupolovergangene har. Målingene i ref. [44] er dessverre ikke ført ut til høye nok impulsoverføringer, men resultatene tyder på minimumet må komme lenger ut enn normalt. Målingene viser at første maksimum kommer ved $q > 1.1 \text{ fm}^{-1}$, noe som ut fra fig. 2 i artikkelen i kap. 5.4. viser at diffraksjonsminimumet kommer ved $q > 2.2 \text{ fm}^{-1}$. Når det gjelder styrken på overgangen til $2_2^+(9.85 \text{ MeV})$ nivået finner vi fra beregningene i kap. 5.3. at vår teoretiske kvadrerte formfaktor er en faktor 3 større enn eksperimentene i ref. [44]. Beregningene [44] ut fra Brown-Green modellen med $K = 2$ komponenter, gir et misforhold på en faktor 3 den andre vegen. Nå skal det bare en litt sterkere blanding til mellom de komponentene i 2_2^+ bølgefunksjonen som vi har brukt, for å redusere overgangsstyrken med det nødvendige beløp. Alt i alt synes da Ellis og Engelands beskrivelse av $2_3^+(9.85 \text{ MeV})$ nivået å være

den beste, (p,t)- og elektronsprednings-data tatt i betraktning.

I ref. [42] og [44] er det også presentert nye data for nivåene 0_3^+ (12.05 MeV) og 4_1^+ (10.34 MeV). De nye data for 0^+ nivået bringer ikke inn nye momenter utover de som er diskutert i kap. 5.3., bortsett fra at diffraksjonsminimumet trolig kommer ved en noe lavere impulsoverføring enn beregningene viser. Den teoretiske formfaktoren (kap. 5.3.) til 4^+ nivået er litt for lav sammenliknet med de nye data (ref. [44]). Eksperimentene er heller ikke her ført til høy nok impulsoverføringer slik at det er mulig å se om maksimumet for formfaktoren kommer for så høy impulsoverføring som teorien (kap. 5.3.) gir.

6.7. Avsluttende bemerkninger.

Dette arbeidet er et innlegg i den pågående diskusjon om polarisasjons- og deformasjonseffekter i skallmodellen. Arbeidet kan derfor nødvendigvis ikke danne en helt avsluttet enhet. En del nye ideer er kastet frem og diskutert, men ikke alle implikasjoner av disse kan forfølges på det nåværende tidspunkt.

Likevel er arbeidet avsluttet i den forstand at vi har fått tilfredsstillende svar på de nært beslektede hovedspørsmål vi satte oss som mål å undersøke.

Appendiks A

Utleddning av formel (3) i kapittel 5.5.

Vi kopierer utledningen i appendix A i artikkelen i kap. 5.3., men tillater ladningene i p-skallet og i sd-skallet å være forskjellige. Bidraget til p-skall og sd-skall delene av den elastiske formfaktoren fra grunntilstandskomponenten $\langle T_p T_{sd}; T M_T \rangle$ er, i grensen $q = 0$:

$$F(0) = \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \sum_{T=0,1} \{a(1,T)e_T^p \sqrt{3} + a(2,T)e_T^{sd} \sqrt{6}\} \quad (A.1)$$

når likning (A.2) i kap. 5.3. brukes.

Alternativt brukes likning (A.3) i kap. 5.3.:

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{\sqrt{4\pi}}{Z} \langle T_p T_{sd}; T M_T | \frac{1}{\sqrt{4\pi}} (e_o^p n_p + e_o^{sd} n_{sd} + e_1^{p2T} e_1^{sd2T}) \rangle \langle T_p T_{sd}; T M_T \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \{e_o^p n_p + e_o^{sd} n_{sd} + e_1^p M_T (2-f) + e_1^{sd} M_T f\} \end{aligned} \quad (A.2)$$

der f er definert som i kap. 5.3.

Sammenliknes formlene (A.1) og (A.2) fås uttrykk for $a(1,T)$ og $a(2,T)$.

Disse settes så inn i likning (A.2) i kap. 5.3. og vi får

$$F(q) = e^{-x} (A + Bx + Cx^2) \quad (A.3)$$

der

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{Z} [12e_o^p - e_o^p n_h + e_o^{sd} n_{sd} + e_1^p M_T (2-f) + e_1^{sd} M_T f] \\ B &= \frac{1}{Z} [-8e_o^p + \frac{2}{3}e_o^p n_h - \frac{4}{3}e_o^{sd} n_{sd} - \frac{2}{3}e_1^p M_T (2-f) - \frac{4}{3}e_1^{sd} M_T f] \\ C &= \frac{1}{Z} [\frac{1}{3}e_o^{sd} n_{sd} + \frac{1}{3}e_1^{sd} M_T f + C'] \end{aligned} \quad (A.4)$$

Vi har her satt $n_p = 12 - n_h$, der n_h er antall hull i p-skallet. Videre er C' bidraget fra $Q(3,T)$ (se kap. 5.3.).

Formfaktoruttrykket (A.3) generaliseres så til å gjelde for Woods-Saxon funksjoner. Følges metoden i Appendix C i kap. 5.3., fås for elastisk spredning

$$F(q) = \left[2(p) + \frac{2}{3}(2s) - \frac{5}{3}(d) \right] \cdot A + \left[\frac{3}{2}(p) + (2s) - \frac{5}{2}(d) \right] \cdot B + \left[\frac{5}{2}(2s) - \frac{5}{2}(d) \right] \cdot C \quad (A.5)$$

der A, B og C er gitt i uttrykkene (A.4). Radialintegralet $\langle p | j_0(qr) | p \rangle$ er for enkelthets skyld notert som (p), osv. Ser vi bort fra mindre forandringer i skrivemåten, er formel (A.5) en generalisering av formel (C.3) fra kap. 5.3., til elastisk spredning.

Rekkeutvikles alle sfæriske Besselfunksjoner, får en på samme måte som i kap. 3.2. dette uttrykket for ladningsradien i kvadrat:

$$(r_{rms})^2 = \left[2(p) + \frac{2}{3}(2s) - \frac{5}{3}(d) \right] \cdot A + \left[\frac{3}{2}(p) + (2s) - \frac{5}{2}(d) \right] \cdot B + \left[\frac{5}{2}(2s) - \frac{5}{2}(d) \right] \cdot C + \frac{2}{2}(1s) \quad (A.6)$$

Her betyr nå (p) radialintegralet av r^2 , osv. Videre har vi tatt med bidraget fra de to 1s-protonene, som ikke har vært med i uttrykkene foran.

Uttrykkene (A.4) for A, B og C innføres så i likning (A.6). Vi sørger samtidig for å sette inn verdien $e_p^0 = \frac{1}{2}$ i leddene $12 e_p^0$ og $-8 e_p^0$ i uttrykkene (A.4). Dette gjøres da de nevnte leddene representerer bidraget fra p-coren, der partiklene ifølge bl.a. appendix B i kap. 5.3. ikke skal tillegges noen polarisasjonsladning. Vi får

$$(r_{rms})^2 = \frac{1}{2} \left[2(1s) + 6(p) - n_h e_0^p(p) + M_T(2-f)e_1^p(p) + n_{sd} e_0^{sd} \left(\frac{1}{6}(2s) + \frac{5}{6}(d) \right) + M_T f e_1^{sd} \left(\frac{1}{6}(2s) + \frac{5}{6}(d) \right) + \frac{5}{2}((2s) - (d))C' \right] \quad (A.7)$$

som, med enkel endring av skrivemåten gir formel (3) i artikkelen i kap.5.5.

Merk at alle leddene, bortsett fra det siste, stammer fra $O(1,T)$ og $O(2,T)$ i appendix A i kap. 5.3. Leddet som inneholder C' stammer fra $O(3,T)$. På grunn av SU_3 tensor karakteren for disse leddene, er det bare siste ledd som kan gi ikkediagonale bidrag mellom bølgefunksjonskomponentene. Det er disse bidragene det siktes til i diskusjonen etter likning (3) i kap. 5.5.

Appendiks B

Beregning av størrelsene $\beta(j_g j_b L)$ for
Brown - Green - Gerace modellen.

B.1. Indre bølgefunksjoner

Indre bølgefunksjoner formuleres som i likning (4):

$$|2p2h, \text{indre}\rangle = \alpha_{kx_1}^+ \alpha_{-kx_2}^+ \beta_{k'x_3}^+ \beta_{-k'x_4}^+ |0\rangle$$

$$|4p2h, \text{indre}\rangle = \alpha_{kn}^+ \alpha_{-kn}^+ \alpha_{kp}^+ \alpha_{-kp}^+ \beta_{k'p}^+ \beta_{-k'p}^+ |0\rangle \quad (\text{B.1})$$

$$|4p4h, \text{indre}\rangle = \alpha_{kn}^+ \alpha_{-kn}^+ \alpha_{kp}^+ \alpha_{-kp}^+ \beta_{k'p}^+ \beta_{-k'p}^+ \beta_{k'n}^+ \beta_{-k'n}^+ |0\rangle$$

Operatorene α^+ og β^+ er definert i likningene (1) og (3). Indeks k og k' representerer positiv k -verdi for Nilsson-banene for hhv. partikler og hull. De tidsreverserte tilstander med negativ k eller k' finnes ved å bruke faserelasjonen (2). Vi har brukt indeks p og n for proton og nøytron. For $2p2h$ tilstanden får vi egentlig en sum av ledd av den typen som er angitt, med ulik fordeling av protoner og nøytroner. I våre beregninger for kalsium-området har vi forutsatt (jfr.ref. [10]) at partikkelgruppen og hullgruppen begge har isospinn 1 og at disse er koplet slik at total $T = 0$ fremkommer. I så fall vil komponentene med $x_1=x_2=p$, $x_3=x_4=n$ og komponenten med $x_1=x_2=n$, $x_3=x_4=p$ begge forekomme med amplitude $+\frac{1}{\sqrt{3}}$. Bare disse komponentene kan gi bidrag til overgangene II og III i fig. 5.

B.2. Utprojeksjon av god J og M

Vi studerer $4p2h$ tilstanden som et eksempel. Ved å utnytte likningene (B.1), (1), (2), (3) samt symmetrier i de uttrykkene som fremkommer, fås

$$\begin{aligned}
 |4p2h, \text{indre} \rangle &= \sum_J 2^3 \cdot \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \quad j_3 \geq j_4 \quad j_5 \geq j_6 \\ J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4}} (1+\delta_{j_1 j_2})^{-\frac{1}{2}} (1+\delta_{j_3 j_4})^{-\frac{1}{2}} (1+\delta_{j_5 j_6})^{-\frac{1}{2}} \\
 &\times X(j_1 k) X(j_2 -k) X(j_3 k) X(j_4 -k) X(j_5 k') X(j_6 -k') \langle j_1 k \quad j_2 -k | J_1 0 \rangle \\
 &\times \langle j_3 k \quad j_4 -k | J_2 0 \rangle \langle j_5 k' \quad j_6 -k' | J_3 0 \rangle \langle J_2 0 \quad J_3 0 | J_4 0 \rangle \langle J_1 0 \quad J_4 0 | J_0 \rangle \quad (B.2) \\
 &\times \left[\begin{array}{c} [a_{j_1 n}^+ \quad a_{j_2 n}^+]_{J_1} [a_{j_3 p}^+ \quad a_{j_4 p}^+]_{J_2} [b_{j_5 p}^+ \quad b_{j_6 p}^+]_{J_3} \\ J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4 \end{array} \right]_{J_0} |0\rangle .
 \end{aligned}$$

Hakeparantesene angir kopling av angulære momenter. Topartikkeluttrykkene er normaliserte slik som i likning (32).

Utprojeksjon av god J og M fås nå ved å plukke ut den komponenten i likning (B.2) som har den ønskede J , samt å skrive JM i den siste vektor-koplingen i stedet for $J 0$ (jfr. ref. [45]).

Dermed:

$$\begin{aligned}
 |4p2h, K = 0, JM \rangle &= \frac{2^3}{n_J^{4/2}} \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \quad j_3 \geq j_4 \quad j_5 \geq j_6 \\ J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4}} U(j_1 j_2 J_1) U(j_3 j_4 J_2) V(j_5 j_6 J_3) \\
 &\times \langle J_2 0 \quad J_3 0 | J_4 0 \rangle \langle J_1 0 \quad J_4 0 | J_0 \rangle \quad (B.3) \\
 &\times \left[\begin{array}{c} [a_{j_1 n}^+ \quad a_{j_2 n}^+]_{J_1} [a_{j_3 p}^+ \quad a_{j_4 p}^+]_{J_2} [b_{j_5 p}^+ \quad b_{j_6 p}^+]_{J_3} \\ J_1 \quad J_2 \quad J_3 \quad J_4 \end{array} \right]_{JM} |0\rangle .
 \end{aligned}$$

Her er

$$\begin{aligned}
 U(j_1 j_2 J) &\equiv (1+\delta_{j_1 j_2})^{-\frac{1}{2}} X(j_1 k) X(j_2 -k) \langle j_1 k \quad j_2 -k | J 0 \rangle \\
 V(j_1 j_2 J) &\equiv (1+\delta_{j_1 j_2})^{-\frac{1}{2}} X(j_1 k') X(j_2 -k') \langle j_1 k' \quad j_2 -k' | J 0 \rangle .
 \end{aligned} \quad (B.4)$$

Normaliseringsfaktorene $n_J^{4/2} > 0$, for $4p2h$ -tilstandene med ulike J , fås ved å kreve $\langle 4p2h, K=0, JM | 4p2h, K=0, JM \rangle = 1$. Vi finner

$$\begin{aligned}
 (n_J^{42})^2 &= 2^6 \sum_{\substack{j_1 \geq j_2 \quad j_3 \geq j_4 \quad j_5 \geq j_6 \\ J_1 J_2 \quad J_3 J_4}} \left[U(j_1 j_2 J_1) \right]^2 \left[U(j_3 j_4 J_2) \right]^2 \left[V(j_5 j_6 J_3) \right]^2 \\
 &\times \langle J_2 0 J_3 0 | J_4 0 \rangle^2 \langle J_1 0 J_4 0 | J_0 \rangle^2 .
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

Tilstandene $|2p2h, K=0, JM\rangle$, $|4p4h, K=0, JM\rangle$ og de tilhørende normaliseringsfaktorene kan skrives ut på tilsvarende måte. For ordens skyld noterer vi også at

$$|2p, JM\rangle = \sum_{j_1 \geq j_2} d_{j_1 j_2}^J [a_{j_1 n}^+ a_{j_2 n}^+]_{JM} |0\rangle . \tag{B.6}$$

B.3. Uttrykk for $\beta(j_a j_b L)$

De spektroskopiske amplitudene $\beta(j_a j_b L)$ er definert i likning (31). Dette uttrykket kan skrives

$$\beta(j_a j_b L) = \langle \overbrace{JM}^{\leftarrow} | [a_{j_a n}^+ a_{j_b n}^+]_L | \bar{J} \rangle . \tag{B.7}$$

Separate koeffisienter $\beta(j_a j_b L)$ for hver overgangstype I til IV i fig. 5 kan nå regnes ut ved å bruke likning (B.7) og uttrykkene av typen (B.3) og (B.5) samt (B.6). Etter noe regning fås de enkle uttrykkene

$$\begin{aligned}
 \beta_I(j_a j_b L) &= a A d_{j_a j_b}^J \delta_{LJ} \\
 \beta_{II}(j_a j_b L) &= a B (-)^{L+1} \frac{\hat{J}^2 \cdot 2}{\hat{J}^2 \cdot \sqrt{3} n_J^{22}} \langle \bar{J} 0 0 | J 0 \rangle V(j_a j_b L) \\
 &\times \sum_{j_1 \geq j_2} d_{j_1 j_2}^J U(j_1 j_2 J) \\
 \beta_{III}(j_a j_b L) &= b B \frac{2 \cdot n_J^{22}}{\sqrt{3} \cdot n_J^{42}} \langle \bar{J} 0 0 | J 0 \rangle U(j_a j_b L) \\
 \beta_{IV}(j_a j_b L) &= b C (-)^{L+1} \frac{\hat{J}^2 \cdot 2 \cdot n_J^{42}}{\hat{J}^2 \cdot n_J^{44}} \langle \bar{J} 0 0 | J 0 \rangle V(j_a j_b L)
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Faktorene $\frac{1}{\sqrt{3}}$ i β_{II} og β_{III} skyldes isospinn-koblingen i $2p2h$ -tilstanden, jfr. appendiks B.1.

Normaliseringsfaktorene n_J^{22} , n_J^{42} og n_J^{44} regnes lettest ut fra disse formlene

$$(n_J^{20})^2 = 2^2 \sum_{j_1 \geq j_2} [U(j_1 j_2 J)]^2$$

$$(n_J^{02})^2 = 2^2 \sum_{j_1 \geq j_2} [V(j_1 j_2 J)]^2$$

$$(n_J^{22})^2 = \sum_{J_1 J_2} \langle J_1 0 J_2 0 | J 0 \rangle^2 (n_{J_1}^{20})^2 (n_{J_2}^{02})^2 \quad (B.9)$$

$$(n_J^{42})^2 = \sum_{J_1 J_2} \langle J_1 0 J_2 0 | J 0 \rangle^2 (n_{J_1}^{20})^2 (n_{J_2}^{22})^2$$

$$(n_J^{44})^2 = \sum_{J_1 J_2} \langle J_1 0 J_2 0 | J 0 \rangle^2 (n_{J_1}^{22})^2 (n_{J_2}^{22})^2 .$$

Fasene for de deformerte tilstandene slik de er definert foran, stemmer ikke overens med Gerace og Green's konvensjon idet $2p2h$ - og $4p2h$ -tilstandene har motsatte fortegn. Dette skyldes den tilsynelatende umotiverte endring av fortegnet for matriseelementet M_1 Gerace og Green foretar når de setter inn verdiene fra Table 2 i eq. (2) i ref. [10]. Disse faseforskjellene har vi tatt hensyn til ved å bruke Gerace og Green's verdier for amplitudene a, b, A, B og C (jfr. fig. 5), men endre fortegnet på β_{II} og β_{III} over.

I beregningene har vi også multiplisert uttrykket for β_{II} med 0.8, jfr. diskusjonen i kap. 2.3.

B.4. Triaksialt deformerte hulltilstander

For hulltilstandene brukes nå utviklingen (7) istedet for utviklingen (3). Indre bølgefunksjoner formuleres som i appendiks B.1., men med de triaksialt deformerte hullbanene. Utprojeksjon av god J og M gjøres som foran. Men nå må vi også projisere ut god total $K = 0$. Da vi i uttrykket (7) har en sum over k , må vi da i de indre tilstandene bare ta med de delene der alle k -ene adderes opp til null.

Uttrykkene (B.8) generaliseres nå, etter en god del regning, til:

$\beta_I(j_a j_b L)$ er uforandret

$$\beta_{II}(j_a j_b L) = a B (-)^{L+1} \frac{\hat{J}^2 \cdot 2}{\hat{J}^2 \cdot \sqrt{3} \cdot n_J^2} \langle JOLO | JO \rangle$$

$$\times [V(j_a j_b LO) - (-)^{j_a + j_b - L} V(j_b j_a LO)]$$

$$\times \sum_{j_1 \geq j_2} d_{j_1 j_2}^J U(j_1 j_2 J) \quad (B.10)$$

$\beta_{III}(j_a j_b L)$ er uforandret

$$\beta_{IV}(j_a j_b L) = -b C \frac{\hat{J}^2 \cdot 2}{\hat{J} \cdot n_J^{42} \cdot n_J^{44}} \sum_{K \geq 0} (1 + \delta_{K 0})^{-1} N_{J - K 0}^{42}$$

$$\times \langle LK J - K | JO \rangle [V(j_a j_b LK) - (-)^{j_a + j_b - L} V(j_b j_a LK)] .$$

Her er

$$V(j_1 j_2 JK) \equiv (1 + \delta_{j_1 j_2})^{-\frac{1}{2}} \sum_{k_1 k_2} \bar{X}_+(j_1 k_1) \bar{X}_-(j_2 k_2) \langle j_1 k_1 j_2 k_2 | JK \rangle, \quad (B.11)$$

der koeffisientene \bar{X} er definert i kap. 2.2.

Faktoren $N_{J - K 0}^{42}$ og normaliseringsfaktorene - også de som skal brukes i uttrykkene for β_I og β_{III} - regnes ut fra formlene

$$N_J^{20} = 2^2 \sum_{j_1 \geq j_2} [U(j_1 j_2 J)]^2$$

$$N_{J K K'}^{02} = \sum_{j_1 j_2} (1 + \delta_{j_1 j_2}) \cdot V(j_1 j_2 JK) \cdot [V(j_1 j_2 JK') - (-)^{j_1 + j_2 - J} V(j_2 j_1 JK')]$$

$$N_{J_1 J_2}^{22} = \sum_{J_1 J_2} \langle J_1 0 J_2 K | JK \rangle \langle J_1 0 J_2 K' | JK' \rangle N_{J_1}^{20} N_{J_2}^{02} \quad (B.12)$$

$$N_{J K K'}^{42} = \sum_{J_1 J_2} \langle J_1 0 J_2 K | JK \rangle \langle J_1 0 J_2 K' | JK' \rangle N_{J_1}^{20} N_{J_2}^{22}$$

(Forts.)

(B.12) fortsatt):

$$N_J^{44} = \sum_{J_1 J_2 K_1 K_2} \langle J_1 K_1 J_2 - K_1 | J_0 \rangle \langle J_1 K_2 J_2 - K_2 | J_0 \rangle N_{J_1 K_1 K_2 J_2 - K_1 - K_2}^{02} N_J^{42}$$

$$(n_J^{22})^2 = N_{J00}^{22}, \quad (n_J^{42})^2 = N_{J00}^{42}, \quad (n_J^{44})^2 = N_J^{44}.$$

Disse formlene representerer generaliseringen av formlene (B.9) til triaksialt deformerte hullfunksjoner.

I alle summene foran forutsettes at J_1, J_2 og J er partall.

Appendiks C

Behandling av romlig deformasjon for
valenspartiklene i kapittel 5.7.

I kap. 5.7. har vi hatt behov for å innføre romlig deformerte valensfunksjoner. Følgende grove, men enkle metode til et overslag over størrelsen av effektene, er brukt.

Laveste Nilsson-funksjon i sd-skallet regnes ut med og uten $\Delta N = 2$ kobling (se kap. 2.2.) for den aktuelle, store deformasjon. For å kunne utnytte tilgjengelige, utregnede Nilsson-funksjoner har vi brukt $\epsilon = 0.7$ når $\Delta N = 2$ kobling er utelatt, og $\delta = 0.6$ når den er med. Deformasjonsparametrene δ og ϵ er definert slik:

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3} \delta\right) \quad (C.1)$$

$$\omega_3^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \delta\right)$$

og
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon\right) \quad (C.2)$$

$$\omega_3 = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{3} \epsilon\right),$$

der oscillatorfrekvensene ω_1 er definert som hos Chi [18]. En vil kunne se at $\epsilon = 0.7$ og $\delta = 0.6$ uttrykker omtrent samme deformasjon.

Laveste Nilsson-funksjon i sd-skallet blir da:

Uten $\Delta N = 2$ kobling:

$$|\psi\rangle = -0.56|2s \ 1/2 \ 1/2\rangle - 0.40|1d \ 3/2 \ 1/2\rangle + 0.79|1d \ 5/2 \ 1/2\rangle \quad (C.3)$$

der de sfæriske funksjonene er spesifisert ved å gi kvantetallene $n \ l \ j \ k$.

Med $\Delta N = 2$ kobling:

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle = & (-0.26|1s \ 1/2 \ 1/2\rangle - 0.51|2s \ 1/2 \ 1/2\rangle + 0.15|3s \ 1/2 \ 1/2\rangle) \\ & + (-0.35|1d \ 3/2 \ 1/2\rangle + 0.17|2d \ 3/2 \ 1/2\rangle) \\ & + (+0.61|1d \ 5/2 \ 1/2\rangle - 0.25|2d \ 5/2 \ 1/2\rangle) \\ & + (-0.13|1g \ 7/2 \ 1/2\rangle + 0.22|1g \ 9/2 \ 1/2\rangle). \end{aligned} \quad (C.4)$$

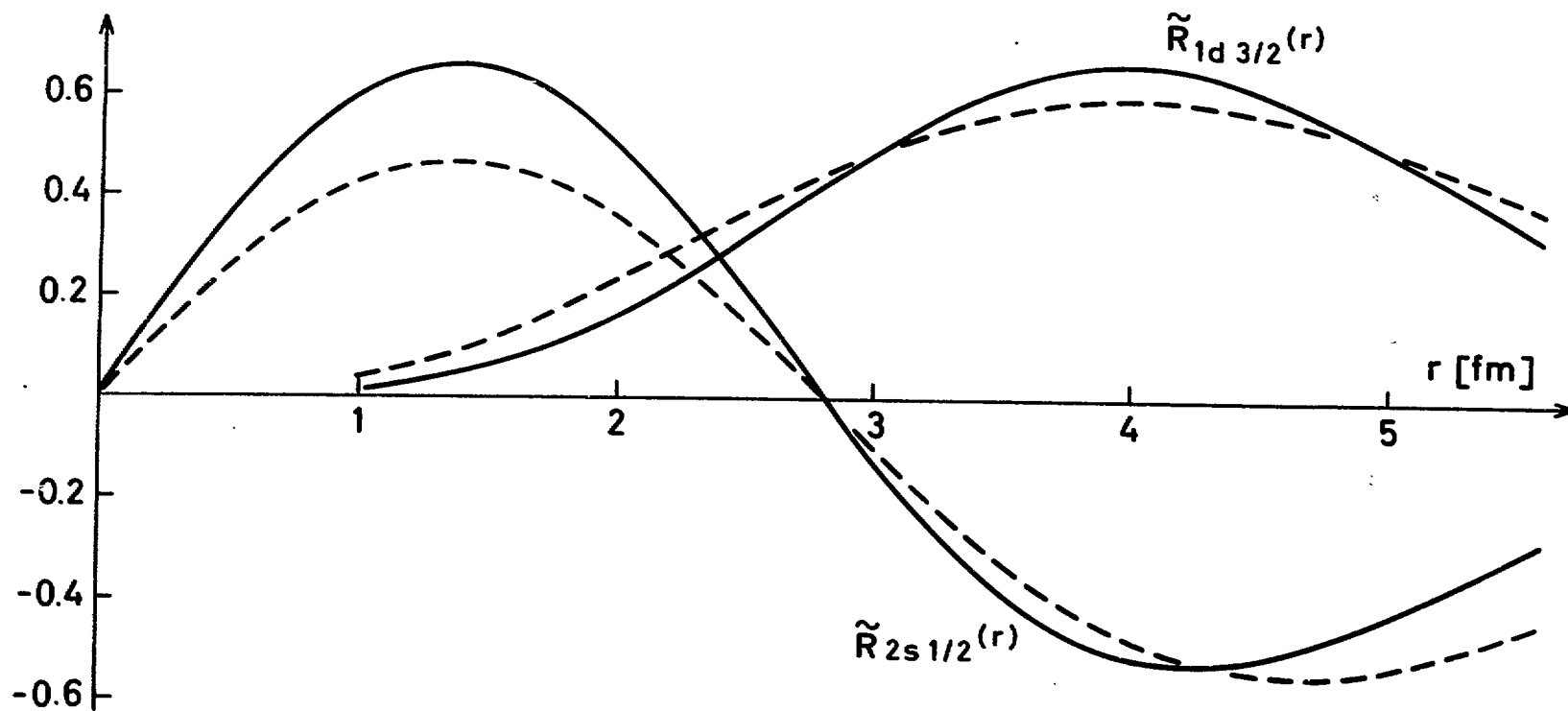


Fig. 9

De modifiserte radialfunksjonene $\tilde{R}_{2s\ 1/2}(r)$ og $\tilde{R}_{1d\ 3/2}(r)$ fra uttrykk (C.5) med $b=1.80\text{fm}$ (hel strek), sammenliknet med de tilsvarende umodifiserte funksjoner med $b=2.29\text{fm}$ (brutte linjer). Funksjonen $\tilde{R}_{1d\ 5/2}(r)$ avviker ikke mye fra $\tilde{R}_{1d\ 3/2}(r)$ og er derfor ikke tegnet opp.

Tillater vi oss å sløyfe siste parantes i uttrykket (C.4), ser vi at funksjonen $|\psi'\rangle$ kan skrives på samme form som $|\psi\rangle$, hvis radialfunksjonene i uttrykk (C.3) modifiseres slik:

$$R_{2s\ 1/2}(r) + \tilde{R}_{2s\ 1/2}(r) \equiv \frac{1}{-0.56}(-0.26R_{1s}(r) - 0.51R_{2s}(r) + 0.15R_{3s}(r))$$

$$R_{1d\ 3/2}(r) + \tilde{R}_{1d\ 3/2}(r) \equiv \frac{1}{-0.40}(-0.35R_{1d}(r) + 0.17R_{2d}(r)) \quad (C.5)$$

$$R_{1d\ 5/2}(r) + \tilde{R}_{1d\ 5/2}(r) \equiv \frac{1}{0.79}(0.61R_{1d}(r) - 0.25R_{2d}(r)) .$$

For de umodifiserte radialfunksjonene gjelder som vanlig at $R_{2s\ 1/2}(r) = R_{2s}(r)$ og $R_{1d\ 3/2}(r) = R_{1d\ 5/2}(r) = R_{1d}(r)$.

Funksjonene (C.5) er tegnet opp i fig. 9 for $b = 1.80$ fm. En ser at en med rimelig nøyaktighet, unøyaktighetene i metoden for øvrig tatt i betraktning, kan erstatte dem med harmonisk oscillator funksjoner med $b = 2.29$ fm.

På grunn av den sterke $\Delta N = 2$ koblingen har vi gjort analoge overslag der også $\Delta N = 2$ koblingen tas med. Sluttresultatet blir nær det samme som foran.

Samme metode er også brukt for høyeste p-skall bane. Forandringene som skyldes $\Delta N = 2$ kobling blir der så små at de helt kan overses.

Sluttresultatet er dermed: For et overslag over effekten av romlig deformasjon av valensbanene i oksygenområdet, kan en regne som vanlig, men øke oscillatorparameteren til $b = 2.29$ fm når partikler overføres mellom deformerte komponenter i bølgefunksjonene, dvs. i overgang III i fig. 5. Overgang I i fig. 5 skjer mellom sfæriske tilstander slik at den vanlige $b = 1.80$ fm skal brukes. For overgangene II og IV i fig. 5 er det p-skall partikler som overføres, slik at vi også der skal la oscillatorparameteren være $b = 1.80$ fm.

Referanser

- [1] P. Hewka, R. Middleton og J. Wiza, *Phys. Lett.* 10 (1964) 93.
- [2] T. Engeland, *Nucl. Phys.* 72 (1965) 68.
- [3] G.E. Brown, *Congrès International de Physique Nucléaire*, Vol. 1 (Paris, 1964) 129.
- [4] W. Bertozzi, i konferanserapport fra "Advanced Institute on Electron Scattering and Nuclear Structure" Sardinia, 1970, upublisert.
- [5] R.P. Singhal, J.R. Moreira og H.S. Caplan, *Phys. Rev. Lett.* 24 (1970) 73.
- [6] P.T. Debevec, Ph.D. Thesis, Princeton 1972, upublisert.
- [7] R.S. Ohanian, Ph.D. Thesis, Princeton 1973, upublisert.
- [8] E.G. Adelberger, P.T. Debevec, G.T. Garvey og R.S. Ohanian, *Phys. Rev. Lett.* 29 (1972) 883.
- [9] G.E. Brown og A.M. Green, *Nucl. Phys.* 75 (1966) 401
- [10] W.J. Gerace og A.M. Green, *Nucl. Phys. A* 93 (1967) 110.
- [11] P.J. Ellis og T. Engeland, *Nucl. Phys. A* 144 (1970) 161.
- [12] V. Horsfjord, Hovedoppgave, Universitetet i Oslo, 1969, upublisert.
- [13] S. Lie, Weak Coupling Calculations for $A = 14$ and $A = 15$ Nuclei, Doktoravhandling, Universitetet i Oslo 1973.
- [14] S.G. Nilsson, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 29, No 16 (1955).
- [15] T.D. Newton, Rapport CRT-886, Chalk River 1960.
- [16] K.T. Hect, i *Selected Topics in Nuclear Spectroscopy*, ed. B.J. Verhaar, North-Holland Publishing Company (Amsterdam 1964).
- [17] M. Harvey, i *Advances of Nuclear Physics*, Vol. 1.
- [18] B.E. Chi, *Nucl. Phys.* 83 (1966) 97.
- [19] G. Ripka, i *Advances of Nuclear Physics*, Vol. 1.
- [20] T. de Forest, jr. og J.D. Walecka, *Advan. Phys.* 15 (1966) 1.

- [21] P.J. Ellis og E. Osnes, Phys. Lett. 49B (1974) 23.
- [22] I.S. Towner og J.C. Hardy, Advan. Phys. 18 (1969) 401.
- [23] N.K. Glendenning, Phys. Rev. 137 (1965) B102.
- [24] B.F. Bayman og A. Kallio, Phys. Rev. 156 (1967) 1121.
- [25] R.L. Jaffe og W.J. Gerace, Nucl. Phys. A 125 (1969) 1.
- [26] R.J. Ascutto og N.K. Glendenning, Phys. Rev. 181 (1969) 1396;
R.J. Ascutto og N.K. Glendenning, Phys. Rev. C2 (1970) 415.
- [27] R.J. Ascutto, personlig meddelelse.
- [28] O. Kaalhus, Nucl. Phys. A 130 (1969) 146.
- [29] G.R. Bishop, Phys. Lett. 25B (1967) 499.
- [30] J.C. Bergstrom, W. Bertozzi, S. Kowalski, X.K. Maruyama,
J.W. Lightbody, jr., S.P. Firozinsky og S. Penner,
Phys. Rev. Lett. 24 (1970) 152.
- [31] F. Ajzenberg - Selove, Nucl. Phys. A 166 (1971) 1 ;
F. Ajzenberg - Selove, Nucl. Phys. A 190 (1972) 1 ;
J.H. Bjerregaard, Ole Hansen, O. Nathan, R. Chapman,
S. Hinds og R. Middleton, Nucl. Phys. A 103 (1967) 33 ;
W.J. Kossler, J. Winkler og C.D. Kavaloski, Phys. Rev. 177
(1969) 1725.
- [32] W.J. Gerace og A.M. Green, Nucl. Phys. A 113 (1968) 641.
- [33] T. Erikson, Nucl. Phys. A 170 (1971) 513.
- [34] T. Erikson, V. Horsfjord og B. Nilsson, upublisert.
- [35] T.T.S. Kuo og G.E. Brown, Nucl. Phys. 85 (1966) 40.
- [36] L.R.B. Elton, S.J. Webb og R.C. Barrett, i High-Energy Physics
and Nuclear Structure, Ed. Samuel Devons, Plenum Press
(New York - London 1970).
- [37] J.W. Negele, Phys. Rev. C1 (1970) 1260.
- [38] K.H. Souw, J.C. Adloff, D. Disdier og P. Chevallier,
preprint, skal publiseres i Phys. Rev. C.
- [39] T. Pedersen, Hovedoppgave, Universitetet i Oslo 1972, upublisert.
- [40] D.G. Fleming, A. Arima, H.W. Fulbright og M. Blann,
Phys. Rev. C 10 (1974) 1350.

- [41] T. Erikson, V. Horsfjord og B. Nilsson, upublisert.
- [42] J.C. Bergstrom og I.P. Auer, Nucl. Phys. A 215 (1973) 232.
- [43] G.R. Bishop, C. Betourne og D.B. Isabelle, Nucl. Phys. 53 (1963) 366.
- [44] J.C. Bergstrom, I.P. Auer, F.J. Kline og H.S. Caplan, Nucl. Phys. A 213 (1973) 609.
- [45] I. Unna, Phys. Rev. 132 (1963) 2225 ;
P. Federman, Nucl. Phys. A95 (1967) 443.

H/rf/saa/vb/18/7/75

