ФЭИ-516

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б. Д. АБРАМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ ОДНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В МНОГОГРУППОВОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Обнинск — 1974

ФЭИ - 516

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б.Д.Абрамов

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ ОДНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО В МНОГОГРУППОВОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Обнинск - 1974

УДК 519.9:621.039.51.12
И-17

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе исследуются свойства корней одного функционального определителя, возникающего при аналитическом решении системы взаимосвязанных односкоростных (групповых) уравнений переноса нейтронов.

§ I. ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ [3,4,5,6,7], посвящённых решению краевых задач для односкоростного кинетического уравнения, алгоритмы численного счёта строятся на основе использования предварительно найденных простых аналитических решений этого уравнения. Имеются попытки [2,8,9,10,11] такого подхода и к решению краевых задач для системы односкоростных уравнений, например, вида

$$-\vec{\Omega}\vec{\nabla}\psi^{(i)}+\Sigma^{(i)}\psi^{(i)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\int d\vec{\Omega}'\psi^{(j)}(\vec{r},\vec{\Omega}'),\ i=1,2,\dots n \quad (I.1)$$

Но при этом возникает специфическая, присущая только многогрупповой задаче, трудность, заключающаяся в том, что аналитические решения для системы (I.I) носят несколько формальный характер: они содержат в себе ряд параметров, которые трудно определить на практике. Речь идет о корнях из комплексной плоскости z следующего трансцендентного уравнения

$$det(E-A\lambda(z))=0, \qquad (I.2)$$

возникающего при решении системы (I.I).
Здесь E – единичная матрица, A – матрица с элементами a_{ij}, $\lambda(z)$ – диагональная матрица с элементами $\lambda^{(\kappa)}(z)$

$$\lambda^{(\kappa)}(z)=z\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\Sigma^{(\kappa)}z-\mu}=z\ln\frac{\Sigma^{(\kappa)}z+1}{\Sigma^{(\kappa)}z-1}. \qquad (I.3)$$

Задача об исследовании числа, кратности и локализации в комплексной плоскости z корней уравнения (I.2), поставлена ещё в 1955 году Б.Девисоном [2], однако до сих пор в общем не решена. И это является одним из основных препятствий на пути перенесения методов, развитых в односкоростных задачах, на многоскоростные. В самом деле, численный поиск корней уравнения (I.2) без априорной информации об их количестве и приближенном расположении означает, в сущности, исследование каждой точки комплексной плоскости, что, безусловно, лишено практического смысла. Кроме того, в зависимости от кратности корней меняется сама структура решений уравнения (1.1).

В этом плане понятен, по-видимому, интерес, проявляемый рядом авторов к решению двухгрупповых задач – в случае двух групп вопрос с корнями в основном исследован (см., например [2,11]), как, впрочем, и в случае, когда A – треугольная матрица.

В данной работе рассматриваются вопросы о числе корней, их кратности, возможном расположении в комплексной плоскости, а также некоторые другие.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

1. Конкретизируем вид матрицы A в соответствии с физическим содержанием задачи [1,2] :

$$A = \frac{1}{2}\Sigma_s + \frac{1}{2}XY, \tag{2.1}$$

где $(\Sigma_s)_{ij} \equiv \Sigma^{j\to i}$, $(XY)_{ij} = X^{(i)}Y^{(j)}$, $X^{(i)} \equiv \chi^{(i)}$, $Y^{(j)} \equiv \nu^{(j)}\Sigma_f^{(j)}$, $i,j = 1,2,\dots,n$. Пусть также $\Sigma = \mathrm{diag}\{\Sigma^{(i)}\}$. Все матрицы Σ, Σ_s, XY – вещественные, с неотрицательными элементами, причем Σ, Σ_s – невырожденные матрицы, а XY – ненулевая матрица. Часто мы будем также рассматривать Y как матрицу – строку, а X – как матрицу – столбец, так что XY – квадратная матрица ранга единица, а $YX \equiv \sum_{i=1}^{n} Y^{(i)}X^{(i)}$ – скаляр (число).

2. Рассмотрим некоторые свойства функций $\lambda^{(k)}(z)$, $k=1,2,\dots,n$. Пусть C – плоскость комплексных чисел $z = x+iy$, $\bar{C}$ – её пополнение точкой $z = \infty$, C_k – плоскость C с вырезанным отрезком действительной оси $[-1/\Sigma^{(k)}, 1/\Sigma^{(k)}]$,

$\overline{C}_k$ – плоскость C_k, пополненная точками вида $x \pm i0 = \lim (x+iy)$ при $y \to 0$, $y \gtrless 0$, $x \in (-1/\Sigma^{(k)}, 1/\Sigma^{(k)})$, так, что точки $x+i0$ и $x-i0$ считаются различными, а также точками $z = \pm 1/\Sigma^{(k)}$ и $z = \infty$. Тогда:

а) $\lim\limits_{z \to x,\, y \gtrless 0} \lambda^{(k)}(z) = x \ln \frac{1+\Sigma^{(k)}x}{1-\Sigma^{(k)}x} \mp i\pi x$, $x \in (-\frac{1}{\Sigma^{(k)}}, \frac{1}{\Sigma^{(k)}})$;

б) $\lim\limits_{\rho \to 0} \lambda^{(k)}(z) = a - \frac{i\varphi}{\Sigma^{(k)}}$, $1 - \Sigma^{(k)} z = \rho e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$;

$\lim\limits_{\rho \to 0} \lambda^{(k)}(z) = a - \frac{i(\varphi - \pi)}{\Sigma^{(k)}}$, $1 + \Sigma^{(k)} z = \rho e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$;

$$a = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\Sigma^{(k)}} \ln \frac{2}{\rho} = \infty ;$$

в) $\lambda^{(k)}(z)$ голоморфна в $\overline{C}_k \setminus \{\pm \frac{1}{\Sigma^{(k)}}\}$;

г) $\lambda^{(k)}(z) = \lambda^{(k)}(-z)$, $\lambda^{(k)}(-x+iy) = \overline{\lambda^{(k)}(x+iy)}$, где надчёркивание – знак комплексного сопряжения;

д) пусть S'_k – область на плоскости комплексных чисел $s = \alpha + i\beta$, ограниченная контуром $\Gamma_k = \{s : \alpha = \frac{\beta}{\pi} \ln \frac{\sin((\pi+\Sigma^{(k)}\beta)/2)}{\sin((\pi-\Sigma^{(k)}\beta)/2)}, -\pi < \beta \Sigma^{(k)} < \pi\}$ и $\overline{S}'_k$ – её замыкание (с учетом точки $s = \infty$). Из работы [12] следует, что $\lambda^{(k)}(z)$ осуществляет отображение замкнутой области $\overline{C}_k$ в замкнутую область $\overline{S}'_k$. Это отображение взаимооднозначно (однолистно) на любом подмножестве $\overline{C}_k$, не содержащем одновременно с точкой z точку $-z$. В общем случае для каждого s, $s \in \overline{S}'_k \setminus \{\frac{2}{\Sigma^{(k)}}\}$ найдутся две и только две точки $z_1, z_2 \in \overline{C}_k$ такие, что $\lambda^{(k)}(z_1) = \lambda^{(k)}(z_2) = s$.
Из (г) тогда следует, что $z_1 = -z_2$. Точке $s = 2/\Sigma^{(k)}$ соответствует точка $z = \infty$;

е) из [12] также следует, что если $\operatorname{Im} \lambda^{(k)}(z) = 0$, то либо $x = 0$ (при этом $\lambda^{(k)}(z) = 2y \operatorname{arctg} 1/y\Sigma^{(k)}$), либо $|x| \in (1/\Sigma^{(k)}, \infty)$, $y = 0$ (при этом $\lambda^{(k)}(z) = 2x \operatorname{arth} 1/x\Sigma^{(k)}$).

ж) при

$$z \to \infty \quad \lambda^{(k)}(z) \sim \frac{2}{\Sigma^{(k)}} + \frac{2}{3\Sigma^{(k)}} \left(\frac{1}{\Sigma^{(k)} z}\right)^2 + \dots .$$

3. Обратимся к уравнению (1.2). Введем в рассмотрение плоскость C_0, представляющую собой плоскость $\overline{C}$ с вырезанными отрезками $(-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min})$, $\Sigma_{min} = \min\limits_{1\le k\le n} \Sigma^{(k)}$ и дополненную точками вида $x \pm i0$, $x \ne 1/\Sigma^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, а также плоскость $\tilde{C}_0$ – пополнение плоскости C_0 точками $x = +1/\Sigma^{(k)} \pm i0$, $-1/\Sigma^{(k)} \pm i0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Справедливы следующие утверждения:

а) функция $\delta(z) \equiv \det(\Sigma - A\lambda(z))$ голоморфна в C_0;

б) в точке $z = 0$ уравнение (2.1) не имеет решения (ибо $\lambda(0) = 0$);

в) если $\det(\Sigma - 2A) = 0$, то $z = \infty$ – корень;

г) пусть элементы диагональной матрицы Σ попарно-различны. Раскрывая определитель $\delta(z)$ по элементам к-го столбца, получим

$$\lambda^{(k)}(z) \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}(z) = A_{kk}(z),$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента (i, k) определителя $\delta(z)$. Если мы требуем удовлетворения уравнения (1.2) в точке $z = 1/\Sigma^{(k)}$, то, вследствии (δ) п. 2, необходимо, чтобы в этой точке выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}(z) = 0,$$

а, следовательно, как легко показать, и условие

$$A_{kk}(z) = 0.$$

Таким образом, корень определителя в точке ветвления является корнем голоморфных в этой точке функций (в $\tilde{C}_0$). Аналогичное заключение справедливо и в случае совпадения нескольких элементов матрицы Σ;

д) если $z_k \in C_0$ – корень, то матрица $\lambda(z_k)$ невырождена (это следует из невырожденности Σ и из подпункта (б) данного пункта);

е) пусть $z_k, z_j \in \tilde{C}_0$ – корни. Тогда из условия $0 = \det(\lambda(z_k) - \lambda(z_j))$ следует $\lambda(z_k) = \lambda(z_j)$, $z_k = \pm z_j$.

В самом деле: $\det(\lambda(z_k)-\lambda(z_j)) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda^{(i)}(z_k)-\lambda^{(i)}(z_j))$,
откуда по (е) пункта 2 получаем утверждение

ж) пусть $x_k \in (-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min})$ – корень уравнения (1.2).
Это означает, что $\delta_+(x_k) = \delta_-(x_k) = 0$, где $\delta_\pm(x) = \lim_{y\to 0,\, y\gtrless 0} \delta(x+iy) = Re\,\delta(x) \pm i Im\,\delta(x)$, т.е. что функция $\delta(z)$ непрерывна на любой линии, проходящей через точку $x = x_k$ в окрестности этой точки, и не совпадающей с осью $Im\, z = 0$ (где она неопределена в C). Если при этом корень уравнения (I.2) кратный, то $\delta(z)$ непрерывно дифференцируема на всякой такой линии (но не аналитична в точке x_k в смысле аналитичности в C). Очевидно, что если x_k – корень m – кратности, то в некоторой окрестности точки x_k имеем $\delta(z) \sim (z-x_k)^m h(z)$, где $h^\pm(x_k) \neq 0$, $h^\pm = \lim_{y\to 0,\, y\gtrless 0} h(x+iy) = Re\, h(x) \pm i Im\, h(x)$.

4. Иногда распределение корней уравнения (2.1) может быть установлено элементарным образом:

а) пусть $A = \frac{1}{2}\Sigma_S$, где Σ_S – треугольная матрица. Тогда $\det(E - A\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{2}\Sigma_S^{(i)}(z))$. Таким образом, задача эта, в сущности, сводится к совокупности одногрупповых задач. Из результатов п. 2 сразу следует, что имеется ровно $2n$ корней, каждый из которых веществен (ибо в реакторно-физических задачах $\Sigma^{(i)}/\Sigma_S^{(i)} > 1$). Часть из этих корней может располагаться на разрезе, возможны кратные корни и корни в точках ветвления;

б) пусть $\Sigma = \sigma E$, где σ – число. Из (1.2) при этом получаем

$$\det(\alpha E - A) = 0, \quad 1/\alpha = z \ln\frac{\sigma z+1}{\sigma z-1}. \qquad (2.2)$$

Сопоставим уравнению (2.2) алгебраическое уравнение

$$\det(\nu E - A) = 0. \qquad (2.3)$$

Ясно, что каждому корню ν_k, $k = 1, 2, \dots, n$, уравнения (2.3) будут соответствовать два корня $\pm z_k$ уравнения (2.2), если величина $1/\nu_k$ попадает в область значений функции $1/\varkappa$, и уравнение (2.2) не имеет решения в противном случае. Итак, в этой задаче возможно наличие не более чем $2n$ корней (может быть меньше). Возможны комплексные, кратные корни, и корни, лежащие на разрезе.

5. Важным является вопрос о числе корней уравнения (1.2): Легко установить, что число их конечно.

<u>Теорема 2.1.</u> Число корней уравнения (1.2) (с учётом их кратностей) конечно в $\widetilde{C}$.

<u>Доказательство</u>. Число нулей аналитической функции не более, чем счётно, причем, если оно счётно, то на границе области аналитичности должны существовать точки накопления этих нулей. В нашем случае такими точками могут быть лишь точки ветвления $\pm 1/\Sigma^{(k)}, k=1,2,\dots,n$. Но, согласно (г) п. 3, эти точки должны тогда явиться точками накопления нулей аналитических в них функций, что невозможно, если только эти функции не равны тождественно нулю в $\widetilde{C}_0$. Теорема доказана. Конкретно число корней можно вычислить, используя, например, принцип аргумента, как это и было сделано для случая одной и двух групп. Следует отметить, что с увеличением числа групп n процедура существенно усложняется и доступна, по-видимому, лишь машинному расчёту. При этом различным матрицам A и Σ может соответствовать различное число корней.

6. Очевидным является следующий факт: каждому корню $z_k \in C_0$ уравнения (1.2) соответствует ненулевое решение $f_k \in R_n$ уравнения

$$(E - A\lambda_k) f_k = 0, \quad \lambda_k \equiv \lambda(z_k). \tag{2.4}$$

<u>Лемма 2.1.</u> Если два нетривиальных решения f_k и f_j уравнения (2.4) линейно зависимы, то $z_k = \pm z_j$.

<u>Доказательство</u>. Если f_k и f_j линейно зависимы, то их можно нормировать так, что $f_k = f_j = f$. Пусть при этом $\lambda_k \neq \lambda_j$. Тогда из (2.4) можно получить $0 = A(\lambda_k - \lambda_j) f$, откуда, в силу (е) п.3 и невырожденности A следует утверждение.

Следствие. Если $z_k \neq \pm z_j$, то f_k и f_j линейно независимы.

Поскольку в n-мерном комплексном эвклидовом пространстве R_n не существует более n линейно независимых векторов, то справедлива следующая.

Теорема 2.2. Пусть все решения уравнения (2.4) линейно независимы. Тогда уравнение (I.2) имеет не более n пар различных корней $\pm z_k$, $k=1,2,\dots,n$. Если же имеется более n пар корней, то среди решений уравнения (2.4) есть линейно зависимые.

Приведенная теорема может послужить критерием числа корней, если удастся показать линейную независимость всех решений уравнения (2.4). В общем случае это неочевидно. Однако справедливо.

Следствие I. В задаче (а) п. 4 имеется не более n пар различных корней. Это - следствие линейной независимости векторов треугольной матрицы, которыми исчерпываются все решения уравнения (2.4);

Следствие 2. в задаче (б) п. 4 имеется не более n пар различных корней. Это - следствие линейной независимости собственных векторов матрицы A и того, что все решения уравнения (2.4) являются этими векторами.

Отметим, что из уравнения (2.4) и из определения (2.I) следует

$$f_k = \frac{1}{2}\left(E - \frac{1}{2} Z_s \lambda_k\right)^{-1} X Y \lambda_k f_k . \qquad (2.5)$$

И, если выбрать следующее условие нормировки

$$Y \lambda_k f_k \equiv \sum_{i=1}^{n} Y^{(i)} \lambda_k^{(i)} f_k^{(i)} = 1, \qquad (2.6)$$

то

$$f_k = \frac{1}{2}\left(E - \frac{1}{2} Z_s \lambda_k\right)^{-1} X . \qquad (2.5')$$

Если же вектор $\lambda_k f_k$ ортогонален вектору Y, то f_k - решение уравнения

$$\left(E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda_k\right)f_k=0. \qquad (2.7)$$

7. Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\delta(z,\varepsilon)\equiv\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}Y\lambda\left(E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda\right)^{-1}X\right)\det\left(E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda\right)=0. \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) при $\varepsilon=0$ совпадает с уравнением

$$\Delta(z)\equiv\det\left(E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda\right)=0. \qquad (2.9)$$

Покажем, что при $\varepsilon=1$ оно совпадает с уравнением [illegible]

<u>Лемма 2.2.</u> $\delta(z,\lambda)\equiv\det\left(E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda-\tfrac{\varepsilon}{2}XY\lambda\right).$

<u>Доказательство</u>. Обозначив через u_{ik}, $i,k=1,2,\dots,n$, элементы матрицы $E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda$ и используя свойства определителей, приходим к выражению

$$\begin{vmatrix} u_{11}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(1)}Y^{(1)}\lambda^{(1)} & u_{12}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(1)}Y^{(2)}\lambda^{(2)} & \cdots & u_{1n}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(1)}Y^{(n)}\lambda^{(n)} \\ u_{21}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(2)}Y^{(1)}\lambda^{(1)} & u_{22}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(2)}Y^{(2)}\lambda^{(2)} & \cdots & u_{2n}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(2)}Y^{(n)}\lambda^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(n)}Y^{(1)}\lambda^{(1)} & u_{n2}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(n)}Y^{(2)}\lambda^{(2)} & \cdots & u_{nn}-\frac{\varepsilon}{2}X^{(n)}Y^{(n)}\lambda^{(n)} \end{vmatrix}=\det\left(E-\tfrac{1}{2}Z_s\lambda\right)$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}Y^{(1)}\lambda^{(1)}\begin{vmatrix} X^{(1)} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ X^{(2)} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X^{(n)} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}-\frac{\varepsilon}{2}Y^{(2)}\lambda^{(2)}\begin{vmatrix} u_{11} & X^{(1)} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & X^{(2)} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & X^{(n)} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}-\dots-\frac{\varepsilon}{2}Y^{(n)}\lambda^{(n)}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & X^{(1)} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & X^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & X^{(n)} \end{vmatrix}$$

Все прочие, не выписанные, здесь, слагаемые равны нулю, ибо каждое из них содержит по крайней мере пару столбцов X. Дальнейшее тривиально. Лемма доказана.

Вообще же уравнение (2.8) определяет z как неявную функцию параметра ε. Действительно, если в некоторой точке $\{z_0, \varepsilon_0\}$ уравнение (2.8) удовлетворено, а функция $\delta(z,\varepsilon)$ голоморфна по совокупности переменных и $\partial\delta/\partial z \neq 0$ в этой точке, то в некоторой окрестности точки $\{z_0, \varepsilon_0\}$ может быть определена функция $z = z(\varepsilon)$, такая, что $z(\varepsilon_0) = z_0$ и $\delta(z(\varepsilon),\varepsilon) \equiv 0$.

Кроме того, в этой окрестности определена производная

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = -\frac{\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}}{\frac{\partial\delta}{\partial z}} = \frac{\frac{1}{z}Y\lambda\left(E-\frac{\varepsilon}{z}\Sigma_s\lambda\right)^{-1}X\,\det\left(E-\frac{\varepsilon}{z}\Sigma_s\lambda\right)}{\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{z}Y\lambda\left(E-\frac{\varepsilon}{z}\Sigma_s\lambda\right)^{-1}X\right)\det\left(E-\frac{\varepsilon}{z}\Sigma_s\lambda\right)\right]}, \quad (2.10)$$

и, следовательно, $z(\varepsilon)$ является голоморфной функцией ε в некоторой окрестности точки ε_0. Рассматриваемая нами функция $z(\varepsilon)$ является одной из ветвей многозначной аналитической функции $Z(\varepsilon)$ (т.е. функции, которая каждому значению ε сопоставляет несколько различных (возможно-совпадающих) точек z).

Интересным свойством уравнения (2.8) является то, что число его корней может меняться при изменении ε. Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий подобную ситуацию: уравнение $\varepsilon = z\ln((z+1)/(z-1))$ имеет два корня при $\varepsilon \in \overline{S}$ (см. (д) п. 2) и совсем не имеет их в противном случае (т.е. корни ушли на другие листы римановой поверхности многозначной функции $\ln$). Явления рождения и исчезновения корней могут разыгрываться только на линии $[-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min}]$ т.е. там, где функция $\delta(z,\varepsilon)$ неаналитична (по z в смысле C

Ясно, что если при $\varepsilon \neq 0$ уравнения (2.8), (2.9) имеют совпадающие корни, то все они - корни уравнения

$$2B(z) \equiv Y\lambda\left(E-\frac{\varepsilon}{z}\Sigma_s\lambda\right)^{-1}X\,\det\left(E-\frac{\varepsilon}{z}\Sigma_s\lambda\right) = 0 \quad (2.1$$

... что все корни уравнения (2.11) не зависят от ε .

Будем называть корни уравнения (2.8), несовпадающие с корнями уравнения (2.11), зависящими от ε корнями. Для таких корней уравнение (2.8) можно переписать в виде

$$\varepsilon = \frac{A(z)}{B(z)} \tag{2.12}$$

и, если ε – вещественное число, то

$$\frac{\varepsilon}{2}\rho(z) \equiv \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{Re} Y\lambda\left(E-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma_s\lambda\right)^{-1}K = 1, \tag{2.13}$$

$$\varphi(z) \equiv \operatorname{Im} Y\lambda\left(E-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma_s\lambda\right)^{-1}K = 0. \tag{2.14}$$

Отсюда можно видеть, что при перемещении ε по вещественной оси корни уравнения (2.8) движутся по линиям нулевого уровня гармонической функции $\varphi(z)$.

Таким образом, корни могут возникать или исчезать при изменении ε лишь в точках пересечения таких линий с отрезком $[-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min}]$ и, так как число таких точек пересечения конечно, то возникающие корни – обязательно комплексные числа (иначе говоря, корни не могут двигаться по линии разреза). Эволюция корней необратима:

<u>Лемма 2.3</u>. Пусть $z(\varepsilon)$ – некоторый корень уравнения (2.12). Тогда из $z(\varepsilon_1) = z(\varepsilon_2)$ следует $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Утверждение леммы следует из линейности по ε уравнения (2.12).

<u>Лемма 2.4</u>. Пусть при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0$ уравнение (2.12) имеет на отрезке $(-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min})$ простой корень. Тогда при всех $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ уравнение (2.12) этого корня не имеет (т.е. он исчезает).

<u>Доказательство</u>. Пусть $x_0 \in (-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min})$ и в точке $\{x_0, \varepsilon_0\}$ уравнение (2.12) удовлетворяется. В окрестности

этой точки тогда имеем из (2.12):

$$z = x_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{h(z)}$$

где $h(z) = (A(z)/B(z) - \varepsilon_0)/(z - x_0)$ и $h'(x_0) \neq 0$.
В силу того, что на линиях нулевого уровня функции $\varphi(z)$ функция $h(z)$ всюду однозначна (включая точки отрезка $[-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min}]$), то последнее уравнение однозначно разрешимо и каждому ε из некоторой окрестности точки ε_0 оно сопоставляет одну точку z из некоторой окрестности точки x_0. Но корни уравнения (2.8), если они комплексны, должны группироваться в комплексно-сопряженные пары, а, следовательно, при всяком $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ рассматриваемый нами корень не может существовать. Лемма доказана.

Приведенные выше соображения могут оказаться полезными при численном поиске корней уравнения (1.2). Отметим также следующие положения:

<u>Теорема 2.3.</u> Пусть $N(\varepsilon)$ - число корней из $\bar{C}$ уравнения (2.8). Тогда

а) если уравнение (2.9) имеет на $(-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min})$ простые корни, не являющиеся корнями уравнения (2.11), то уравнение (1.2) этих корней не имеет (они исчезают в разрезе);

б) если при $\varepsilon \in [0,1]$ корни уравнения (2,8) локализованы на осях координат плоскости C (будем говорить - не комплексны), то $N(1) \geqslant N(0)$;

в) если при всех $\varepsilon \in [0,1]$ корни уравнения (2,8) на $(-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min})$ просты, то $N(1) \geqslant N(0)$;

г) если корни уравнения (2.8) из $\bar{C}_0 \setminus \{\infty\}$ просты при всех $\varepsilon \in [0,1]$, то $N(1) \geqslant N(0)$, и, если при этом среди корней уравнения (2.9) не было комплексных, то корни уравнения (1.2) также некомплексны.

8. Рассмотрим вопрос о числе и кратности корней уравнения (1.2), расположенных на мнимой оси. Будем считать, что справедливо

<u>Предположение 2.1.</u> $\Sigma^{(j)} > \sum_{i=1}^{n} \Sigma_i^{j \to i}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

При этом матрица $\Sigma-\Sigma_s$ обладает диагональным преобладанием по столбцам (т.е. $\Sigma^{(1)}\text{-}\Sigma > \sum_{(*)} \Sigma$), и, следовательно, невырождена. Кроме того $(\Sigma-\Sigma_s)^{-1} > 0$. Справедлива

Теорема 2.4. Уравнение (I.2) имеет корни на мнимой оси лишь при выполнении условия

$$Y(\Sigma-\Sigma_s)^{-1}X > 1 \tag{2.I5}$$

При этом имеется всего два корня: $\pm i y_0$, эти корни простые и им соответствует неотрицательное решение f_0 уравнения (2.4).

Доказательство. Рассматривая формулу (2.8) при ε =I, мы видим, что на мнимой оси $\det(E-\frac{1}{2}\Sigma_s\lambda)\neq 0$, а выражение $Y\lambda(E-\frac{1}{2}\Sigma_s\lambda)^{-1}X$ является суммой неотрицательных слагаемых, величина которой монотонно возрастает от нуля при y =0 до $2Y(\Sigma-\Sigma_s)^{-1}X$ при $y\to\infty$ (см (е), (ж) п. 2). Отсюда следует единственность упомянутой пары корней. Простота - из соотношения $\frac{d}{dy}Y(\lambda^{-1}-\frac{1}{2}\Sigma_s)^{-1}X = Y(\lambda^{-1}-\frac{1}{2}\Sigma_s)^{-1}\lambda^{-1}(\frac{d\lambda}{dy})\lambda^{-1}(\lambda^{-1}-\frac{1}{2}\Sigma_s)^{-1}X > 0,\ 0<y<\infty$. Неотрицательность собственного вектора - из формулы (2.5). Теорема доказана.

Следствие. Если $0<Y(\Sigma-\Sigma_s)^{-1}X<1$, то на вещественной оси имеется пара простых корней, причем модуль их больше модулей всех других вещественных корней и им соответствует неотрицательный вектор - решение уравнения (2.4).

Замечание. Условие (2.I5) эквивалентно условию $\det(\Sigma-\Sigma_s-XY)<0$. При выполнении условия (в) п. 3 (или же $Y(\Sigma-\Sigma_s)^{-1}X=1$) имеем корень $y=\infty$. Покажем, что его кратность равна двум. В самом деле, из (ж) п. 2 при $z\to\infty$ имеем $\lambda^{-1}(\xi)\sim\frac{1}{2}(\Sigma-\frac{1}{3}\Sigma^{-1}\xi^2+\dots)$, $\xi=1/z$, $\xi\to 0$, откуда $\frac{d}{d\xi}Y(\lambda^{-1}-\frac{1}{2}\Sigma_s)^{-1}X\sim(\xi/6)Y(\lambda^{-1}-\frac{1}{2}\Sigma_s)^{-2}X \longrightarrow 0$; т.е. в ∞ имеется корень второй кратности. Чтобы его кратность была равна трём, должно ещё выполняться условие $Y(\Sigma-\Sigma_s)^{-1}\Sigma^{-1}(\Sigma-\Sigma_s)^{-1}X=0$, что невозможно, ибо все члены в этой сумме неотрицательны. Итак, кратность корня в ∞ равна двум.

§ 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже указывалось во введении, проблема исследования корней уравнения (I.2), поставленная ещё в 1955 году [2] , до сих пор полностью не решена. И, вообще говоря, не совсем ясно, на каком пути можно получить её решение. В этом плане данная работа может рассматриваться как отправная точка для дальнейших исследований.

С другой стороны, в работе содержатся некоторые окончательные результаты и различные критерии, которые могут оказаться полезными при численном поиске корней.

Автор выражает благодарность С.Б.Шихову, Г.И.Румянцеву, Ю.И.Ершову за интерес к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.И.Марчук, В.И.Лебедев. Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971.
2. Б.Девисон. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
3. И.Н.Лалетин. Метод поверхностных псевдоисточников для решения уравнения переноса нейтронов. В сб. "Вычислительные методы в теории переноса", под ред. Г.И.Марчука, М., Атомиздат, 1969.
4. Г.Я.Румянцев. Принцип граничных источников в теории переноса нейтронов. "Атомная энергия" 26, 447, 1969.
5. Ю.И.Ершов, С.Б.Шихов. Применение метода интегральных преобразований к решению граничных задач теории переноса нейтронов, ЖВМ и МФ, т. 12 № 3, 639-665, 1972.
6. Т.А.Гермогенова и др. Перенос быстрых нейтронов в плоских защитах. М., Атомиздат, 1971.
7. К.Кейз, П.Цвейфель. Линейная теория переноса. М., "Мир", 1967.
8. R. Zelazny, A. Kuszell, "Multi-Group Neutron Transport Theory", в сб. "Physics of Fast and Intermediate Reactors", II, 55-71, Vienna, 1962.
9. Л.Д.Иванов. Критический размер плоского реактора. В сб. "Инженерно-физические вопросы ядерных реакторов", Атомиздат, МИФИ, 142, 1966.
10. В.Л.Блинкин, В.Б.Троянский. Обобщенный волновой метод решения многогрупповых краевых задач теории переноса нейтронов. В сб. "Физика ядерных реакторов", М., МИФИ, вып. 2, 1970.
11. C.E. Siewert, P.S. Shieh, " Two-Group Transport Theory", Journ. of Nucl. Energy, 21, 383-392, 1967.
12. R. Bowden, C. Williams, "Solution of the Initial-Value Transport Problem for Monoenergetic Neutrons in Slab Geometry", J. Math. Phys., 11, 1527-1540, 1964.

ФЭИ-516 Т-18144 от 16/XI-74 г. Объем 0,8 уч.-изд.л. Тираж 101 экз.
Цена 8 коп. Заказ № [illegible]

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, декабрь 1974 г.