СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 9738

A11

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, А.С.Семенов

О ГРАДИЕНТНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СПОНТАННО НАРУШЕННОГО РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1976

Ранг публикаций Объединенного института ядерных исследований

Препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований /ОИЯИ/ являются самостоятельными публикациями. Они издаются в соответствии со ст. 4 Устава ОИЯИ. Отличие препринтов от сообщений заключается в том, что текст препринта будет впоследствии воспроизведен в каком-либо научном журнале или апериодическом сборнике.

Индексация

Препринты, сообщения и депонированные публикации ОИЯИ имеют единую нарастающую порядковую нумерацию, составляющую последние 4 цифры индекса.

Первый знак индекса - буквенный - может быть представлен в 3 вариантах:

"Р" - издание на русском языке;

"Е" - издание на английском языке;

"Д" - работа публикуется на русском и английском языках.

Цифра, следующая за буквенным обозначением, определяет тематическую категорию данной публикации. Перечень тематических категорий изданий ОИЯИ периодически рассылается их получателям.

Индексы, описанные выше, проставляются в правом верхнем углу на обложке и титульном листе каждого издания.

Ссылки

В библиографических ссылках на препринты и сообщения ОИЯИ мы рекомендуем указывать: инициалы и фамилию автора, далее - сокращенное наименование института-издателя, индекс, место и год издания.

Пример библиографической ссылки:

И.Н.Иванов. ОИЯИ, Р2-4985, Дубна, 1971.

Р2 - 9738

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, А.С.Семенов

О ГРАДИЕНТНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СПОНТАННО НАРУШЕННОГО РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

I. Введение.

Хорошо известно /I/, что лагранжиан является удобным средством выражения свойств симметрии динамической системы и построения связанных с ними динамических инвариантов. Помимо преобразований неоднородной группы Лоренца (чему соответствуют инварианты тензора энергии-импульса, момента и спина) $\mathcal{L}$ инвариантен относительно градиентных преобразований, с которыми связаны законы сохранения соответствующих зарядов и токов.

Такие внутренние симметрии присущи лишь определенным взаимодействиям и зачастую нарушаются другими взаимодействиями. Существует, однако, градиентное γ^5-преобразование, относительно которого неинвариантен массовый член любой спинорной теории.

То, что $\mathcal{L}$ содержит члены, не инвариантные относительно определенных преобразований, приводит к существованию в системе некоторого выделенного "направления", фиксирующего снятие вырождения относительно преобразований данной группы. Если при этом нарушение симметрии является неустойчивым относительно "включения" члена, нарушающего симметрию, т.е. уже бесконечно малые члены в $\mathcal{L}$, снимающие вырождение, приводят к конечным значениям соответствующих динамических величин, то последние следует описывать на языке квазисредних /2/ и говорить о спонтанном нарушении симметрии.

Целесообразность использования такого подхода в квантовой теории поля диктуется условием, что релятивистское локальное описание изотопического спина и гиперзаряда требует введения в $\mathcal{L}$ калибровочных полей Янга-Миллса, в то время как в реальных моделях сильных и слабых взаимодействий масса обменного кванта отлична от нуля. Теория со спонтанно-нарушенной симметрией дает метод решения этой проблемы и известна на примерах реализации механизма Хиггса: введения в $\mathcal{L}$ скалярных бозонных полей с отличным от нуля вакуумным средним, которые за счет канонического преобразования (сдвига по полям) объединяются с поперечными компонентами полей Янга-Миллса, образуя массивные векторные мезоны. На этом принципе построено большинство единых моделей электромагнитных и слабых взаимодействий элементарных частиц /3/.

Равным образом спонтанно-нарушенное решение можно получить в исходной нелинейной теории из первоначально безмассового $\mathcal{L}$ за счет динамического механизма спонтанного нарушения симметрии. В применении к моделям с 4-фермионным взаимодействием он сводится к использованию релятивистского аналога процедуры Хартри-Фока-Боголюбова /4/, в котором масса фермиона вводится так, чтобы исключить собственно-энергетические эффекты, вызванные самодействием в $\mathcal{L}$. В таком подходе "хиггсовские" бозоны естественно возникают как коррелированные фермион-антифермионные пары, причем в силу условия минимизации реализуемое ими основное состояние является устойчивым по отношению к тривиальному (безмассовому) состоянию. Нарушение симметрии здесь есть нарушение исходной киральной инвариантности $\mathcal{L}$.

Постановка задачи получения массивных решений в первоначально безмассовой теории принадлежит Гейзенбергу /5/, однако в предложенной им нелинейной спинорной теории возникают известные трудности, связанные с появлением отрицательных членов в коммутаторах. Динамический механизм спонтанного нарушения симметрии обходит их без потери унитарности.

Отметим аналогию между нарушением γ^5- инвариантности массовым членом и нарушением закона сохранения числа частиц в теории сверхпроводимости. В последнем случае метод компенсации опасных диаграмм /6/ приводит к появлению между основным состоянием и квазичастичными возбуждениями энергетической щели, соответствующей перенормированной "массе" квазичастицы, так что уравнения, определяющие энергию квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике, аналогичны уравнениям свободной массивной дираковской частицы.

2. Каноническое преобразование и нарушение γ^5- инвариантности.

Обычная процедура теории возмущений основана на представлении $\mathcal{L}$ в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \tag{I}$$

где $\mathcal{L}_0$ - квадратичная форма асимптотически свободных полей, а $\mathcal{L}_{int}$ определяет их взаимодействие. Инвариантность $\mathcal{L}$ относительно градиентных преобразований допускает существование, помимо обычного решения, получаемого по теории возмущений, спонтанно-нарушенного решения, описывающего класс динамических величин, не обладающих инвариантностью относительно этих преобразований. Наличие таких величин видно уже для лагранжиана свободного массивного дираковского поля

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} : \left(\bar{\psi}(x) \gamma^{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^{\mu}} \gamma^{\mu} \psi(x) \right) : - m : \bar{\psi}(x) \psi(x) : \quad . \tag{2}$$

Кинетический член (2) инвариантен относительно градиентных преобразований

$$\psi(x) \to e^{i\alpha} \psi(x) , \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha} , \tag{3}$$

$$\psi(x) \to e^{i\gamma^5 \alpha} \psi(x) , \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) e^{i\gamma^5 \alpha} \tag{4}$$

или эквивалентной им группы киральных преобразований

$$\psi(x) \to U_{L,R} \psi(x) , \quad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) U^{+}_{L,R}$$
$$U_{L,R} = \exp \frac{i}{2} (1 \pm \gamma^5) \alpha . \tag{5}$$

Массовый член не инвариантен относительно (5) и преобразуется по представлению $(1, 1) \times (1, 1)$. Последнее означает, что основное состояние безмассовой теории является вырожденным и проявляется в отличии квазисредних от обычных средних /2/. Квазисредняя определяется как средняя по вакууму, вычисленная в присутствии малого, нарушающего симметрию, члена при стремлении последнего к нулю. При этом квазисредняя получает конечное, отличное от нуля, значение. Поэтому целесообразно исходить из более общего, нежели (2), первоначально безмассового $\mathcal{L}$ (1) , обладающего инвариантностью относительно преобразований (5), и искать для него решение, не инвариантное относительно (5).

Наиболее общая форма 4-фермионного взаимодействия, инвариантная относительно собственных преобразований группы Лоренца, обращения времени, пространственного отражения и зарядового сопряжения, генерируется алгеброй γ матриц Дирака и представима в виде

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_i g_i \left(:(\bar{\psi}(x)\, O^i \psi(x):\right)^2, \tag{6}$$

где O^i , включая единичную матрицу 16 линейно независимых комбинаций

$$O^i = I,\ \gamma^5,\ \gamma^n,\ \gamma^n\gamma^5,\ \sigma^{mn} = \frac{i}{2}(\gamma^m\gamma^n - \gamma^n\gamma^m), \tag{7}$$

так что квадратичные формы $\bar{\psi} O^i \psi$ преобразуются относительно преобразований несобственной группы Лоренца соответственно как скаляр, псевдоскаляр, вектор, аксиальный вектор и тензор. Простейший $\mathcal{L}$, инвариантный относительно градиентных преобразований (5), имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} :\left(\bar{\psi}(x)\gamma^n \frac{\partial \psi}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^n}\gamma^n \psi(x)\right): - g\left((:\bar{\psi}(x)\psi(x):)^2 - (:\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x):)^2\right). \tag{8}$$

Для нахождения спонтанно нарушенного решения следует прежде всего выделить из $\mathcal{L}_{int}$ наиболее сингулярную часть $\mathcal{L}_S$, соответствующую самодействию полей, и включить ее в $\mathcal{L}_0$

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S) + (\mathcal{L}_{int} - \mathcal{L}_S) = \mathcal{L}_0' + \mathcal{L}_{int}', \tag{9}$$

$\mathcal{L}'_{int}$ тогда описывает только взаимодействие без учета самодействия, которое полностью содержится в $\mathcal{L}'_0$. Поскольку $\mathcal{L}'_0$ должен приводить к линейным уравнениям поля, то $\mathcal{L}'_0$ должен представляться квадратичной по полям формой, так что для случая 4-фермионного взаимодействия члены $\mathcal{L}_S$ войдут в $\mathcal{L}'_0$ уже в частично просуммированной форме и даже для бесконечно малой константы взаимодействия дадут конечный вклад в $\mathcal{L}'_0$.

Конечный вклад собственной энергии определяет отличную от нуля массу фермиона, а так как массовый член нарушает киральную инвариантность, то при частичном суммировании следует учитывать γ^5 - неинвариантные аномальные спаривания пар операторов рождения фермионов и антифермионов с одинаковой киральностью. Последнее приводит к появлению в аппроксимирующем лагранжиане членов с выделенным "направлением" киральности, т.е. к снятию вырождения относительно преобразований (4). Записанный в импульсном представлении через операторы спинорных полей, нормированных на конечный объем, соответствующий аппроксимирующий гамильтониан для основных частиц имеет вид

$$H'_0 = \sum_{\vec{p},\nu} |\vec{p}|\, a^{*+}_{\vec{p},\nu} a^{-}_{\vec{p},\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{p},\nu} g(\vec{p}) \left(C \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu} a^{+}_{-\vec{p},\nu} + \overset{*}{C} a^{-}_{\vec{p},\nu} \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec{p},\nu} \right) + \frac{|C|^2}{2} V. \tag{10}$$

Здесь C определяется как нетривиальное решение уравнения

$$C = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p},\nu} g(\vec{p}) \left\langle a^{*-}_{-\vec{p},\nu} a^{-}_{\vec{p},\nu} \right\rangle^{V}_{H'_0}, \tag{11}$$

V -нормировочный объем: куб с центром в начале координат

$$V = L^3, \quad \vec{p} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}. \tag{12}$$

Спинорные поля ψ выражены через операторы рождения и уничтожения частиц и античастиц

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\pm,\vec{p},\nu} e^{\pm ipx} a^{\pm}_{\vec{p},\nu} v^{\pm}_{\vec{p},\nu}, \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\pm,\vec{p},\nu} e^{\pm ipx} \overset{*}{a}{}^{\pm}_{\vec{p},\nu} \bar{v}^{\pm}_{\vec{p},\nu}, \end{aligned} \tag{13}$$

удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{\overset{*}{a}{}^{-}_{\vec{p},\mu}, a^{+}_{\vec{p}',\nu}\} &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \\ \{a^{-}_{\vec{p},\mu}, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p}',\nu}\} &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\vec{p}\vec{p}'}. \end{aligned} \tag{14}$$

H_0' приводится к диагональному виду посредством канонических преобразований Боголюбова /7/:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec{p},\nu} &= u_{\vec{p}}\,\overset{*}{a}{}^{-}_{\vec{p},\nu} - v_{\vec{p}}\,\overset{*}{a}{}^{+}_{-\vec{p},\nu}, \quad & \alpha^{+}_{\vec{p},\nu} &= u_{\vec{p}}\,a^{+}_{\vec{p},\nu} - v_{\vec{p}}\,a^{-}_{-\vec{p},\nu}, \\ \alpha^{-}_{\vec{p},\nu} &= u_{\vec{p}}\,a^{-}_{\vec{p},\nu} + v_{\vec{p}}\,a^{+}_{-\vec{p},\nu}, \quad & \overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec{p},\nu} &= u_{\vec{p}}\,\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu} + v_{\vec{p}}\,\overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec{p},\nu}. \end{aligned} \tag{15}$$

Коэффициенты преобразования $u_{\vec{p}}, v_{\vec{p}}$ удовлетворяют условию

$$u^2_{\vec{p}} + v^2_{\vec{p}'} = \delta_{\vec{p}\vec{p}'}, \tag{16}$$

так что операторы α подчиняются тем же перестановочным соотношениям (I4), что и операторы a .

Для возрастающей последовательности объемов $\{V_i\}$ при $V_i \to \infty$

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \to d\vec{p}\,, \quad \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{p}} \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \ldots d\vec{p}\,. \tag{I7}$$

При предельном переходе (I7) коэффициенты канонических преобразований $u_{\vec{p}}$, $v_{\vec{p}}$ как коэффициентные функции квазилокальных операторов /I/ являются обобщенными функциями, т.е. их следует рассматривать как результат несобственного предельного перехода.

Канонические преобразования (I5) позволяют непосредственно выделить в H члены, не инвариантные относительно градиентных преобразований (4). Гамильтониан для основных частиц

$$H = \int d\vec{p}\left(|\vec{p}|\sum_{\nu} \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu} a^{-}_{\vec{p},\nu} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\, g(\vec{q}) \sum_{\nu} \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p}+\vec{q},\nu}\, a^{+}_{-\vec{p}-\vec{q},\nu}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec{p},\nu}\, a^{-}_{\vec{p},\nu}\right), \tag{I8}$$

после перехода к α-представлению и приведения к нормальной форме имеет вид

$$\begin{aligned} H = \int d\vec{p}\Big(&|\vec{p}|v^2_{\vec{p}} - \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\, g(\vec{q})\, u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}\, u_{\vec{p}+\vec{q}} v_{\vec{p}+\vec{q}} + \\ &+\Big(|\vec{p}|(u^2_{\vec{p}} - v^2_{\vec{p}}) + 2u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\, g(\vec{q})\, u_{\vec{p}+\vec{q}} v_{\vec{p}+\vec{q}}\Big)\left(\overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec{p},\nu}\alpha^{-}_{\vec{p},\nu} - \alpha^{+}_{\vec{p},\nu}\overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec{p},\nu}\right) + \\ &+\Big(2|\vec{p}|u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} - (u^2_{\vec{p}} - v^2_{\vec{p}})\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\, g(\vec{q})\, u_{\vec{p}+\vec{q}} v_{\vec{p}+\vec{q}}\Big)\left(\alpha^{+}_{\vec{p},\nu}\alpha^{+}_{-\vec{p},\nu} + \alpha^{-}_{\vec{p},\nu}\alpha^{-}_{-\vec{p},\nu}\right)\Big) + \end{aligned} \tag{I9}$$

+ члены 4-ой степени по операторам α ,

т.е. H_0' приводится к диагональному виду при условии выполнения уравнения компенсации

$$2|\vec{p}|u_{\vec{p}}v_{\vec{p}}-(u_{\vec{p}}^2-v_{\vec{p}}^2)\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\, g(\vec{q})\, u_{\vec{p}+\vec{q}}v_{\vec{p}+\vec{q}}=0, \qquad (20)$$

интегральный член в (20) возникает из H_s и определяет вклад в собственно энергетическую часть

$$m=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\; g(\vec{q})\, u_{\vec{p}+\vec{q}}v_{\vec{p}+\vec{q}}. \qquad (21)$$

Из (15),(16),(20),(21) следует

$$u_{\vec{p}}^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\vec{p}|}{(m^2+|\vec{p}|^2)^{1/2}}\right),$$
$$v_{\vec{p}}^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{|\vec{p}|}{(m^2+|\vec{p}|^2)^{1/2}}\right) \qquad (22)$$

и интегральное уравнение для m

$$m=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int d\vec{p}\; g(\vec{p})\frac{m}{(m^2+|\vec{p}|^2)^{1/2}}. \qquad (23)$$

Помимо тривиального решения при $u_{\vec{p}}=1$, $v_{\vec{p}}=0$, уравнение (23) имеет нетривиальное решение, определяемое интегралом

$$1=\frac{1}{2(2\pi)^3}\int_0^{\lambda} d\vec{p}\,\frac{g(\vec{p})}{(m^2+|\vec{p}|^2)^{1/2}}. \qquad (24)$$

Для упрощенной формы взаимодействия

$$g(\vec{p})=\begin{cases} g, & 0<|\vec{p}|<\lambda \\ 0, & |\vec{p}|>\lambda \end{cases} \qquad (25)$$

$$\frac{8\pi^2}{g\lambda^2}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{x^2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|, \qquad (26)$$
$$x=\frac{\lambda}{m}.$$

Поскольку правая часть (26) ограничена 1 , нетривиальное решение существует для $g > 0$ и реальных x в области

$$0 < \frac{8\pi^2}{g\lambda^2} < 1 . \qquad (27)$$

Из (26) вытекает неаналитический по константе связи характер решения, так что приближение к нему не может быть получено суммированием конечного числа диаграмм ряда теории возмущений.

3. Инвариантные свойства спонтанно-нарушенного решения.

Введенные через канонические преобразования (I5) операторы α диагонализуют H_0' , определяющий новое основное состояние и спектр фермионов. Поскольку коэффициенты $u_{\vec{p}}, v_{\vec{p}}$ удовлетворяют условию (I6), для вещественных преобразований

$$u_{\vec{p}} = \cos\varphi_{\vec{p}} , \quad v_{\vec{p}} = \sin\varphi_{\vec{p}} , \qquad (28)$$

канонические преобразования (I5) представимы в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{p},\nu} &= U_{\vec{p}}\, a_{\vec{p},\nu}\, U_{\vec{p}}^{-1} , \\ U_{\vec{p}} &= \exp\left(-A_{\vec{p}}\varphi_{\vec{p}}\right) , \\ A &= a^{+}_{\vec{p},\nu}\, a^{+}_{-\vec{p},\nu} - a^{-}_{-\vec{p},\nu}\, a^{-}_{\vec{p},\nu} . \end{aligned} \qquad (29)$$

Основное состояние $|\phi\rangle$ для H_0' , определяемое как состояние с нулевыми числами заполнения операторов α , выраженное через операторы a , имеет вид

$$|\Phi\rangle = \prod_{\vec{p},\nu} \left(u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec{p},\nu}\, a^{+}_{-\vec{p},\nu} \right) |0\rangle \, . \qquad (30)$$

В случае нормировки на конечный объем (дискретное импульсное представление (12)), норма оператора U как функция объема, ограничена, так что $|0\rangle$ и $|\Phi\rangle$ связаны унитарным преобразованием

$$|\Phi\rangle = \prod_{\vec{p}} U_{\vec{p}} |0\rangle \, . \qquad (31)$$

Тогда из фоковского представления для a

$$a^{-}_{\vec{p},\nu} |0\rangle = 0 \, , \quad \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec{p},\nu} |0\rangle = 0 \, , \qquad (32)$$

следует фоковское представление для α

$$\alpha^{-}_{\vec{p},\nu} |\Phi\rangle = 0 \, , \quad \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec{p},\nu} |\Phi\rangle = 0 \, . \qquad (33)$$

При нормировке на бесконечный объем последнее уже не имеет места

$$\langle 0|\Phi\rangle = \prod_{\vec{p}} u_{\vec{p}} = \exp \sum_{\vec{p}} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\vec{p}|}{(m^2 + |\vec{p}|^2)^{1/2}} \right) \right| \xrightarrow[V \to \infty]{} \infty \, , \qquad (34)$$

т.е. оператор U неограничен, и не существует унитарного преобразования, связывающего тривиальное и спонтанно-нарушенное решения: представления a и α ортогональны.

Вследствие этого вектор $|\Phi\rangle$ не существует в пространстве a представления, но $|\Phi\rangle$ – все еще циклический вектор в пространстве α представления.

Физический смысл подобной ситуации в том, что $|\Phi\rangle$ описывает основное состояние с отличной от нуля плотностью в бесконечном объеме, т.е. для него не существует фоковского состояния с нулевым числом частиц. В реальных случаях поэтому существен учет граничных эффектов.

Аналогичная ситуация имеет место для представлений α с различными фиксированными калибровками. В a-представлении градиентные преобразования (4) приводят к

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu} \to e^{\pm i\alpha}\,\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}, \qquad a^{-}_{\vec p,\nu} \to e^{\mp i\alpha}\,a^{-}_{\vec p,\nu}, \\
&a^{+}_{\vec p,\nu} \to e^{\pm i\alpha}\,a^{+}_{\vec p,\nu}, \qquad \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu} \to e^{\mp i\alpha}\,\overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu},
\end{aligned}
\tag{35}
$$

и

$$
|\Phi\rangle \to |\Phi'\rangle = \prod_{\vec p,\nu}\left(u_{\vec p} - v_{\vec p}\, e^{\pm 2i\alpha}\,\overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu}\, a^{+}_{-\vec p,\nu}\right)|0\rangle. \tag{36}
$$

Спонтанно-нарушенное решение (по своему построению) не обладает инвариантностью исходного $\mathcal{L}$: не инвариантно соответствующее ему основное состояние (36). Поскольку

$$
\begin{aligned}
\langle\Phi|\Phi'\rangle &= \prod_{\vec p,\nu}\left(u^2_{\vec p} - e^{\pm 2i\alpha} v^2_{\vec p}\right) = \\
&= \exp\left(\sum_{\vec p} \ln\left(1+\left(e^{\pm 2i\alpha}-1\right) v^2_{\vec p}\right)\right) \\
&\xrightarrow[V\to\infty]{} \infty, \quad \alpha \neq 2\pi n,
\end{aligned}
\tag{37}
$$

то не существует унитарного преобразования, связывающего представления α в разных калибровках. В каждом из пространств $\mathcal{H}_\alpha$ с фиксированной калибровкой существует единственный циклический вектор $|\Phi_\alpha\rangle$. Тогда инвариантной относительно (4) будет прямая сумма гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\pi}\int \oplus \mathcal{H}_\alpha d\alpha \qquad (38)$$

и калибровочно- инвариантное основное состояние

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int \oplus |\Phi_\alpha\rangle d\alpha \, . \qquad (39)$$

Бесконечное произведение в (30) - суперпозиция различного числа пар операторов $N = 2n$ с определенной киральностью

$$|\Phi\rangle = \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_N |\Phi_N\rangle \qquad (40)$$

$$C_N|\Phi_N\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iN\alpha} |\Phi_\alpha\rangle d\alpha \, . \qquad (41)$$

При преобразовании (4)

$$C_N \to e^{-iN\alpha} C_N \, . \qquad (42)$$

Поэтому $|C_N| = C$

$$\text{для любого } N , \qquad (43)$$

т.е. все состояния $|\Phi_N\rangle$ физически эквивалентны (имеют одинаковую плотность энергии).

Четность состояния $|\Phi_N\rangle$ определяется четностью числа пар, поэтому $|\Phi_N\rangle$ не имеет определенной четности. Последнее обстоятельство тесно связано с градиентной инвариантностью: исходный $\mathcal{L}$ инвариантен относительно преобразований (4), и потому полная картина для спонтанно-нарушенного решения должна быть градиентно-инвариантной. Поэтому в эффективный лагранжиан, описывающий спонтанно-нарушенное решение, в фиксированной калибровке следует включить компенсирующие бозонные поля, восстанавливающие исходную симметрию. Введение таких бозонных полей не является, по существу, формальным приемом и связано с тем обстоятельством, что локальное 4-фермионное взаимодействие не учитывает эффектов запаздывания в системе: его можно трактовать как предельную форму для процессов 2-го порядка в модели с массивным промежуточным мезоном. Тогда остаточные эффекты, связанные с последействием, приводят к отщеплению от $|\Phi\rangle$ бозонной ветви возбуждений, связанной с коллективными флуктуациями плотности фермион-антифермионных пар. В терминах $\mathcal{L}_{eff}$ - это бозонные поля, взаимодействующие с массивными фермионами, что приводит к эффективной перенормировке масс фермионов и восстанавливает исходную градиентную инвариантность решения. Поскольку преобразование (4) меняет четность $|\Phi_N\rangle$, $\mathcal{L}_{eff}$ включает скалярные и псевдоскалярные бозонные поля и в фиксированной калибровке $\alpha = 0$ имеет вид

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{i}{2} : \left(\bar{\Psi}(x) \gamma^n \frac{\partial \Psi}{\partial x^n} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x^n} \gamma^n \Psi(x) \right) : + \frac{1}{2} : \frac{\partial \sigma}{\partial x^n} \frac{\partial \sigma}{\partial x_n} : -$$
$$- \frac{\mu^2}{2} : \sigma^2 : + \frac{1}{2} : \frac{\partial \pi}{\partial x^n} \frac{\partial \pi}{\partial x_n} : + g_s : \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \sigma(x) : + \tag{44}$$
$$+ i g_\pi : \bar{\Psi}(x) \gamma_5 \Psi(x) \pi(x) : + h : \left(\sigma^2(x) + \pi^2(x) \right)^2 :$$

Величины масс фермионов и бозонов являются функциями α, однако физическая перенормированная масса фермиона не зависит от α. В двумерном пространстве скалярных и псевдоскалярных полей преобразования (4) индуцируют унитарные преобразования

$$\varphi = \binom{\sigma}{\pi} \to \varphi' = U_\alpha \varphi, \tag{45}$$
$$j = \binom{\bar{\Psi}\Psi}{i\bar{\Psi}\gamma^5\Psi},$$
$$U_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{L}_{int}$ можно записать в инвариантной форме

$$\mathcal{L}_{int} = g j \varphi . \tag{46}$$

Указанные обстоятельства, связанные с градиентной инвариантностью, являются следствием общего требования для спонтанно-нарушенного решения /2/ при введении квазисредней следует зафиксировать определенное "направление", снимающее вырождение, так что в отличие от обычных средних, которые инвариантны относительно соответствующей группы преобразований, квазисредние обладают лишь свойством ковариантности. При преобразовании соответствующей квазисредней следует подвергнуть такому же преобразованию вектор, фиксирующий "направление", с тем чтобы значение квазисредней не менялось.

Нарушение градиентной инвариантности спонтанно-нарушенного решения непосредственно связано с использованием канонических преобразований в форме (I5), что отражается в изменении коэффициентов $u_{\vec p}, v_{\vec p}$ при преобразованиях (4).

Градиентно-инвариантная форма модели сохраняется при использовании обобщенных канонических преобразований, в которых коэффициенты $u_{\vec p}, v_{\vec p}$ уже не являются с-числами, а операторами, действующими в пространстве $\oplus|\varphi_N\rangle$. В силу (4),(I5),(35) для операторов α

$$\overset{*}{\alpha}{}^{+}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{\vec p,\nu} + v_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{-\vec p,\nu}, \quad \alpha^{-}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha}\, a^{-}_{\vec p,\nu} + v_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha}\, a^{+}_{-\vec p,\nu},$$

$$\alpha^{+}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha}\, a^{+}_{\vec p,\nu} - v_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha}\, a^{-}_{-\vec p,\nu}, \quad \overset{*}{\alpha}{}^{-}_{\vec p,\nu} \to u_{\vec p}\, e^{\mp i\alpha}\, \overset{*}{a}{}^{-}_{\vec p,\nu} - v_{\vec p}\, e^{\pm i\alpha}\, \overset{*}{a}{}^{+}_{-\vec p,\nu}, \tag{47}$$

коэффициенты обобщенного канонического преобразования определяются равенствами

$$\hat u_{\vec p} = u_{\vec p}, \quad \hat u^{*}_{\vec p} = u_{\vec p},$$
$$\hat v_{\vec p} = R\, v_{\vec p}, \quad \hat v^{*}_{\vec p} = R^{*} v_{\vec p}, \tag{48}$$

где
$$R\,|0,N\rangle = |0,N-1\rangle,$$
$$R^{*}|0,N\rangle = |0,N+1\rangle,$$

так что преобразования (47) заменятся на

$$\alpha^{*+}_{\vec p,\nu}=\hat u_{\vec p}\, a^{*+}_{\vec p,\nu}+\hat v_{\vec p}\, a^{*-}_{-\vec p,\nu}\to e^{\pm i\alpha}\alpha^{*+}_{\vec p,\nu},\quad \alpha^{-}_{\vec p,\nu}=\hat u_{\vec p}\, a^{-}_{\vec p,\nu}+\hat v_{\vec p}\, a^{+}_{-\vec p,\nu}\to e^{\mp i\alpha}\alpha^{-}_{\vec p,\nu}, \tag{47}$$

$$\alpha^{+}_{\vec p,\nu}=\hat u_{\vec p}\, a^{+}_{\vec p,\nu}-\hat v_{\vec p}\, a^{-}_{-\vec p,\nu}\to e^{\pm i\alpha}\alpha^{+}_{\vec p,\nu},\quad \alpha^{*-}_{\vec p,\nu}=\hat u_{\vec p}\, a^{*-}_{\vec p,\nu}-\hat v_{\vec p}\, a^{*+}_{-\vec p,\nu}\to e^{\mp i\alpha}\alpha^{*-}_{\vec p,\nu},$$

т.е. операторы α преобразуются аналогично операторам a.

Указанные подходы к вопросу о градиентной инвариантности являются альтернативными. Целесообразность использования их диктуется рамками рассматриваемых вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Введение в теорию квантованных полей". "Наука", М., 1973.
2. Н.Н.Боголюбов, "Квазисредние в задачах статистической механики". Препринт ОИЯИ, 1451, Дубна 1963.
   Сб. "Статистическая физика и квантовая теория поля". Москва, "Наука", 1973.
3. А.А.Славнов, "Перенормировка калибровочно-инвариантных теорий". ЭЧАЯ т.5 № 3 (1974).
4. Y.Nambu.G.Jonua-Lasinio Phys.Rev.122, 345,(1961)
   Phys.Rev.124, 246,(1961)
   J.C.Fisher Phys.Rev.129, 1414,(1963)
   Б.А.Арбузов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов, ДАН 139, 345, 1961.
5. В.Гейзенберг и др. сб. "Нелинейная квантовая теория поля". М., 1959.
6. Н.Н.Боголюбов, В.В.Толмачев, Д.В.Ширков. "Новый метод в теории сверхпроводимости". М., 1958.
   Н.Н.Боголюбов. "Избранные труды", т.III, Киев, "Наукова думка", 1971.
7. Н.Н.Боголюбов. ЖЭТФ 34, 58 (1958)
   Nuovo Cim. 7, 794 (1958)

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1976 года.

Условия обмена

Препринты и сообщения ОИЯИ рассылаются бесплатно, на основе взаимного обмена, университетам, институтам, лабораториям, библиотекам и научным группам более 50 стран.

Помимо регулярной рассылки в порядке обмена, издательский отдел ежегодно выполняет около 4000 отдельных запросов на высылку препринтов и сообщений ОИЯИ. В таких запросах следует обязательно указывать индекс запрашиваемого издания.

Адреса

Письма по всем вопросам обмена публикациями, а также запросы на отдельные издания следует направлять по адресу:

101000 Москва,
Главный почтамт, п/я 79,
Издательский отдел
Объединенного института
ядерных исследований.

Адрес для посылки всех публикаций в порядке обмена, а также для бесплатной подписки на научные журналы:

101000 Москва,
Главный почтамт, п/я 79.
Научно-техническая библиотека
Объединенного института
ядерных исследований.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Заказ 21294. Тираж 680. Уч.-изд. листов 0,9.
Редактор Б.Б. Колесова. Подписано к печати 7.5.76 г.
Корректор Т.Е.Жильцова