SU7701074

ФЭИ-506

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Е. М. САПРЫКИН, А. А. ЛУКЬЯНОВ

А33

Решения волнового уравнения для сферического потенциала

Обнинск — 1974

ФЭИ – 506

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Е.М.Сапрыкин, А.А.Лукьянов

РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Обнинск–1974

УДК 539.171.017

М-17

Рец

АННОТАЦИЯ

Решается задача о движении частицы со спином в сферическом потенциале конечной глубины с учетом спинорбитального взаимодействия. Выписан явный вид волновых функций непрерывного и дискретного спектров. Произведено сравнение волновых функций дискретного спектра с соответствующими функциями в потенциале Вудса-Саксона. Найден аналитический вид амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности. Оценен борновский матричный элемент для рассеяния двух частиц, находящихся в сферическом потенциале.

Введение

Задача о движении частицы в сферически симметричной прямоугольной яме конечной глубины является простейшей и в то же время практически единственной задачей данного типа допускающей точное аналитическое решение. Хотя первые исследования этой задачи проведены уже давно [I], авторам неизвестны работы, в которых была бы дана детальная и полная сводка результатов, как для состояний дискретного так и непрерывного спектра часто использующихся в различных микроскопических моделях. С этой точки зрения данная работа может оказаться полезной.

Решение уравнения Шредингера для сферически симметричного прямоугольного потенциала конечной глубины с учетом спинорбитального взаимодействия для состояний нуклона с определенными значениями орбитального момента ℓ, полного момента j и его проекции m_j имеет вид:

$$\varphi_{\ell j m_j}(\vec{r}) = R_{\ell j}(r) \cdot \sum_{m_\ell m_s} (\ell \tfrac{1}{2} m_\ell m_s | j m_j) Y_{\ell m_\ell}(\tfrac{\vec{r}}{r}) \chi_{\frac{1}{2} m_s} \qquad (0.1)$$

где $Y_{\ell m}(\frac{\vec{r}}{r})$ - сферическая, $\chi_{\frac{1}{2}m}$ - спиновая, а $R_{\ell j}(r)$ - радиальная волновые функции. Последняя удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера:

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\right] R_{\ell j}(r) = 0 \qquad (0.2)$$

где потенциал взаимодействия, учитывающий спинорбитальную связь имеет вид:

$$U(r) = \left(1 - \frac{a(\ell,j)}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) V(r) \qquad (0.3)$$

Здесь $V(r)$ - сферически симметричный прямоугольный потенциал

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{для} \quad r < R \\ 0 & \text{для} \quad r > R \end{cases} \qquad (0.4)$$

R - радиус, а V_0 - глубина потенциала.

Решение уравнения (0.2) получается путем сшивания решений и их производных для внутренней ($r < R$) и внешней ($r > R$) областей при $r = R$.

Отметим однако, что спинорбитальный член входящий в потенциал взаимодействия обращается в бесконечность при $r = R$. Чтобы избежать эту трудность делают предельный переход в решении для потенциала с "косой стенкой" [ ] (рис. I).

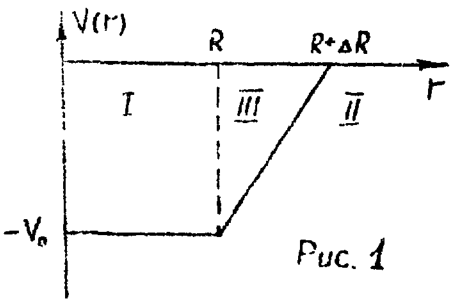

Рис. 1

Вводя обозначения:

$$K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} \;;$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E)} \;; \qquad (0.5)$$

$$\mathcal{V}_0 = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 = K_0^2 - K^2 \;;$$

$$\chi_{ej}(r) = r R_{ej}(r) \;;$$

получаем для трех областей уравнения

$$\text{I} \quad \chi_{ej}^{\prime\prime(I)} + \left(K_0^2 - \frac{e(e+1)}{r^2}\right)\chi_{ej} = 0 \qquad (0.6)$$

$$\text{II} \quad \chi_{ej}^{\prime\prime(II)} + \left(K^2 - \frac{e(e+1)}{r^2}\right)\chi_{ej} = 0 \qquad (0.7)$$

$$\text{III} \quad \chi_{ej}^{\prime\prime(III)} + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{a(ej)}{r} \frac{\partial V(r)}{\partial r} \chi_{ej}^{(III)} = 0 \qquad (0.8)$$

Последнее уравнение справедливо при $\Delta R \to 0$, так как в этом случае $\partial V/\partial r$ велико и остальными членами можно пренебречь. Волновая функция должна быть непрерывна при $r = R$. Таким образом при $\Delta R \to 0$ $\chi_{ej}^{(I)}(R) = \chi_{ej}^{(II)}(R) = \chi_{ej}^{(III)}(R)$. Отметим, что поскольку спинорбитальный член обращается при $r = R$ в бесконечность, то производная волновой функции, вообще говоря, имеет в этой точке разрыв. Уравнение (0.8) непосредственно интегрируется.

$$\chi'^{(I)}_{ej}(R) - \chi'^{(II)}_{ej}(R) = \frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{a(ej)}{R}\,V_0\,\chi^{(II)}_{ej}(R) \qquad (0.9)$$

Таким образом, радиальные волновые функции в прямоугольном потенциале со спинорбитой в точке $r = R$ удовлетворяют соотношению:

$$\frac{R'^{(I)}_{ej}(R)}{R_{ej}(R)} - \frac{R'^{(II)}_{ej}(R)}{R_{ej}(R)} = \frac{a(ej)}{R}\,V_0 \qquad (0.10)$$

§ I. Волновые функции связанных состояний

При отрицательных энергиях уравнение (0.2) имеет решение на некотором дискретном наборе энергий соответствующих связанным состояниям частицы в прямоугольной яме. Определим эти энергии и соответствующие им волновые функции.

Уравнение (0.2) как уравнение второго порядка имеет два линейно независимых решения, причем общее решение является их линейной комбинацией:

$$R_{ej,K}(r) = A_{ej}\,h^{(1)}_e(K'r) + B_{ej}\,h^{(2)}_e(K'r) \quad (*) \qquad (I.1)$$

где K' равно K_0 при $r<R$ и K при $r>R$.

Из требования конечности волновой функции в нуле следует, что в области (I) (при $r<R$)

$$A^{(I)}_{ej} = B^{(I)}_{ej} \qquad (I.2)$$

(*) Встречающиеся здесь и далее сферические функции Бесселя определены в приложении (III).

и решение имеет вид:

$$R^{(I)}_{ej,\kappa}(r) = C^{(I)}_{ej} J_e(K_0 r) \qquad (I.3)$$

При отрицательных энергиях K - мнимое. Поэтому из условия конечности волновой функции на бесконечности следует, что в области (П) ($r > R$)

$$B^{(II)}_{ej} = 0 \qquad (I.4)$$

и

$$R^{(II)}_{ej,\kappa}(r) = C^{(II)}_{ej} h(\varkappa r) \qquad (I.5)$$

где $\varkappa = iK$.

Из требования непрерывности волновой функции при $r = R$ следует:

$$C^{(II)}_{ej} = C^{(I)}_{ej} J_e(K_0 R) \Big/ h(\varkappa R) \qquad (I.6)$$

Волновые функции на границе ядра должны удовлетворять соотношению (0.10). Используя рекурентные соотношения для сферических функций Бесселя (см. Ш) легко записать два эквивалентных выражения.

$$(K_{o(nej)}R)\frac{J_{e-1}(K_{o(nej)}R)}{J_e(K_{o(nej)}R)} + (\varkappa_{nej}R)\frac{h_{e-1}(\varkappa_{nej}R)}{h_e(\varkappa_{nej}R)} = a(ej)V_0 \qquad (I.7)$$

$$(K_{o(nej)}R)\frac{J_{e+1}(K_{o(nej)}R)}{J_e(K_{o(nej)}R)} - (\varkappa_{nej}R)\cdot\frac{h_{e+1}(\varkappa_{nej}R)}{h_e(\varkappa_{nej}R)} = -a(ej)V_0 \qquad (I.8)$$

которые являются трансцендентными уравнениями для определения собственных энергий связанных состояний:

$$\mathcal{E}_{nej} = \frac{\hbar^2}{2m}\varkappa^2_{nej} \qquad (I.9)$$

Здесь n номер состояния с данными ℓ и j. Волновая функция дискретного спектра должна быть нормирована на единицу. Из требования:

$$C_{nej}^{(I)\,2} \int_0^R j_\ell^2 (K_{o(nej)} r) r^2 dr + C_{nej}^{(II)\,2} \int_R^\infty k_\ell^2 (\varkappa_{nej} r) r^2 dr = 1 \qquad (I.10)$$

получаем: $(K_{o(nej)} = K_o\ ;\ \varkappa_{nej} = \varkappa)$

$$C_{nej}^{(I)} = \eta_{nej} \frac{1}{j_\ell(K_o R)} \left[\frac{2}{R^3} \left(\frac{k_{\ell-1}(\varkappa R) k_{\ell+1}(\varkappa R)}{k_\ell^2(\varkappa R)} - \frac{j_{\ell-1}(K_o R) j_{\ell+1}(K_o R)}{j_\ell^2(K_o R)} \right)^{-1} \right]^{1/2} \qquad (I.11)$$

где η_{nej} - фаза волновой функции, которая выбирается либо как $\eta_{nej} = 1$, либо как $\eta_{nej} = (-1)^\ell$. Совершенно ясно, что выбор фазы не должен повлиять на значения наблюдаемых величин. Коэффициент $C_{nej}^{(II)}$ связан с $C_{nej}^{(I)}$ соотношением (I.6). Иногда бывает интересно знать, какая часть квадрата волновой функции бывает сосредоточена вне потенциальной "ямы". Эту величину легко вычислить и она оказывается равной:

$$\mu_{nej} = \frac{R^3}{2} C_{nej}^{(II)} \left[k_{\ell-1}(\varkappa R) k_{\ell+1}(\varkappa R) - k_\ell^2(\varkappa R) \right] \qquad (I.12)$$

Если спинорбитальное взаимодействие не учитывается, то выражения для C_{nej} и μ_{nej} упрощаются:

$$C_{ne}^{(I)} = \eta_{ne} \frac{1}{j_\ell(K_o R)} \left[\frac{2}{R^3} \cdot \frac{V_o - \varkappa^2}{V_o} \cdot \frac{k_\ell^2(\varkappa R)}{k_{\ell-1}(\varkappa R) k_{\ell+1}(\varkappa R)} \right]^{1/2} \qquad (I.13)$$

$$\mu_{ne} = \frac{V_o - \varkappa^2}{V_o} \left[1 - \frac{k_\ell^2(\varkappa R)}{k_{\ell-1}(\varkappa R) k_{\ell+1}(\varkappa R)} \right] \qquad (I.14)$$

На рисунке 2 приведены значения $\varkappa_{n\ell}$ в зависимости от параметра ямы $V_0 R^2$. На рисунке 3 приведены значения $\mu_{n\ell}$ для соответствующих уровней. Интересно отметить, что для состояний, которые являются "верхними" заполненными состояниями по нейтронам для соответствующих атомных номеров величина $\mu \sim 0,15 - 0,3$.

Известно, что прямоугольная яма дает собственных энергий и последовательность уровней ("выше" $1f$ оболочки) несколько иные чем в обычно используемом потенциале Вудса-Саксона. Из уравнений (I.7) и (I.8) видно, что в прямоугольной яме можно получить любой набор собственных энергий, в том числе и набор потенциала Вудса-Саксона,выбирая для каждого уровня свою константу спинорбитального взаимодействия.

Величина $a(\ell,j)$ обычно выбирается в виде:

$$a(\ell j)=\begin{cases} a_0\,\ell & \text{при} \quad j=\ell+\frac{1}{2} \\ -a_0(\ell+1) & \text{при} \quad j=\ell-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (I.15)$$

Величина a_0 согласно [2] $\sim 0,3\,\text{фм}^2$.

В таблице I приведены значения a_0, которые необходимо принять для соответствующих уровней чтобы при A = 60 и $R = R_0 A^{1/3}$ (где R_0 = 1,28) получить спектр собственных энергий в потенциале Вудса-Саксона, приведенный в работе [3] .

На рисунке 4 приведены волновые функции прямоугольной "ямы" при таком выборе a_0 и соответствующие функции работы [3]. Из рисунка видно, что эти функции достаточно хорошо совпадают. Таким образом,волновые функции прямоугольной ямы, взятые при собственных энергиях потенциала Вудса-Саксона и правильно нормированные (см. П2),могут быть с успехом использованы в различных расчетах, использующих модель независимых частиц. Преимущество использования этих функций состоит в том, что их аналитический вид известен,в то время как волновые функции в потенциале Вудса-Саксона получаются путем численного интегрирования уравнения Шредингера. На рисунке 5 приведены спектры собственных энергий для A=60 в потенциале Вудса-Саксона [3] и прямоугольной яме со средним по таблице I значением a_0 =0,4.

§ 2. Волновые функции непрерывного спектра

Рассмотрим теперь случай положительных энергий. При $E>0$ решение уравнения (0.2), ограниченное в нуле, также как и в случае отрицательных энергий имеет вид:

$$R^{(I)}_{ej,K}(r) = A^{(I)}_{ej}\, J_e(K_o r) \tag{2.1}$$

Однако при $r>R$ положение меняется. При положительных энергиях K действительно, и оба решения уравнения Шредингера удовлетворяют условию конечности на бесконечности. Общее решение уравнения (0.2) принято записывать как:

$$R^{(II)}_{ej,K}(r) = A^{(II)}_{ej}\left[h^{(2)}_e(Kr) + S_{ej} h^{(1)}_e(Kr)\right] \tag{2.2}$$

Обычно величина S_{ej} выбирается в виде $e^{2i\delta_{ej}}$ где δ_{ej} - фаза рассеяния. Учитывая соотношения (П1.1), легко переписать (2.2) в виде

$$R^{(II)}_{ej,K}(r) = A^{(II)}_{ej}\, e^{i\delta_{ej}} \cos\delta_{ej}\left[J_e(Kr) - tg\,\delta_{ej} N_e(Kr)\right] \tag{2.3}$$

Поскольку при $r=R$ волновые функции должны удовлетворять соотношению (0.10), то получаем следующее уравнение на фазу рассеяния:

$$(K_oR)\frac{J_{e-1}(K_oR)}{J_e(K_oR)} - (KR)\frac{J_{e-1}(KR) - tg\,\delta_{ej} N_{e-1}(Kr)}{J_e(KR) - tg\,\delta_{ej} N_e(Kr)} = a(ej)V_o \tag{2.4}$$

откуда

$$tg\,\delta_{ej} = \frac{J_{e-1}(KR) - D_{ej} J_e(KR)}{N_{e-1}(KR) - D_{ej} N_e(KR)} \tag{2.5}$$

где

$$D_{ej} = \frac{1}{KR}\left[(K_oR) J_{e-1}(K_oR)/J_e(K_oR) - a(ej)V_o\right] \tag{2.6}$$

Из требования непрерывности волновой функции при $r=R$ получаем:

$$A^{(I)}_{\ell j} = e^{i\delta_{\ell j}}\cos\delta_{\ell j}\,\frac{j_\ell(KR)-tg\delta_{\ell j}\,n_\ell(Kr)}{j_\ell(K_0R)}\,A^{(II)}_{\ell j}\,. \tag{2.7}$$

Совершенно ясно, что $V_0 \to 0$ решение должно переходить в плоские волны. Отсюда находим [4]:

$$A^{(II)}_{\ell j} = 4\pi i^{\ell}\,. \tag{2.8}$$

Легко проверить, что определенные таким образом волновые функции нормированы также, как и плоские волны, а именно [5]:

$$\int\limits_0^\infty R^*_{\ell j,K}(r)\,R_{\ell j,K'}(r)\,r^2dr = (2\pi)^3\frac{1}{KK'}\,\delta(K-K')\,. \tag{2.9}$$

Иногда удобно использовать волновые функции нормированные на дельта-функцию по энергии. В этом случае

$$A^{(II)}_{\ell j} = i^{\ell}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{(KR)^3}{R^3E}\right)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Определенные таким образом волновые функции нормированы как

$$\int\limits_0^\infty R^*_{\ell j,E}(r)\,R_{\ell j,E'}(r)\,r^2dr = \delta(E-E')\,. \tag{2.11}$$

Перейдем теперь к рассмотрению полных волновых функций непрерывного спектра, соответствующих движению частицы со спином 1/2 с определенным волновым вектором $\vec{K}$ и проекцией спина m_s

$$\varphi_{\vec{K},m_s}(\vec{r}) = \sum_{\ell m_\ell j m_j}(\ell\tfrac{1}{2}m_\ell m_s|jm_j)\,\varphi_{\ell j m_j}(\vec{r})\,Y^*_{\ell m_\ell}\left(\tfrac{\vec{K}}{K}\right) = \tag{2.12}$$

$$= \sum_{\ell m_\ell m'_\ell j m_j} R_{\ell j}(r)\,(\ell\tfrac{1}{2}m_\ell m_s|jm_j)(\ell\tfrac{1}{2}m'_\ell m'_s|jm_j)\,Y_{\ell m'_\ell}(\vec{r})\,Y_{\ell m_\ell}\left(\tfrac{\vec{K}}{K}\right)\chi_{\frac{1}{2}m'_s}$$

Смысл этой волновой функции легко выяснить, если рассмотреть ее поведение при больших r . Воспользовавшись асимптотикой сферических функций Бесселя (III), запишем:

$$R_{ej,K}(r) \longrightarrow 2\pi i \frac{1}{KR} [(-1)^{e} e^{-iKr} - S_{ej} e^{iKr}] . \qquad (2.13)$$

Учитывая, что

$$\sum_{em} (-1)^{e} Y_{em}(\tfrac{\vec{r}}{r}) Y^{*}_{em}(\tfrac{\vec{K}}{K}) = \delta(\tfrac{\vec{r}}{r} + \tfrac{\vec{K}}{K}) \qquad (2.14)$$

$$\sum_{em} Y_{em}(\tfrac{\vec{r}}{r}) Y^{*}_{em}(\tfrac{\vec{K}}{K}) = \delta(\tfrac{\vec{r}}{r} - \tfrac{\vec{K}}{K}) ,$$

находим асимптотику волновой функции (2.12)

$$\varphi_{\vec{K},m_s}(\vec{r}) \longrightarrow 2\pi i [\delta(\tfrac{\vec{r}}{r} + \tfrac{\vec{K}}{K}) \frac{e^{-iKr}}{Kr} \chi_{\frac{1}{2}m_s} - (\delta(\tfrac{\vec{r}}{r} - \tfrac{\vec{K}}{K}) \chi_{\frac{1}{2}m_s} - 2\pi i\, t_{m_s}(\tfrac{\vec{K}\vec{r}}{Kr})) \frac{e^{iKr}}{Kr}] \qquad (2.15)$$

где

$$t_{m_s}(\tfrac{\vec{K}\vec{r}}{Kr}) = \sum_{em_e m'_e m'_s j m_j} (e\tfrac{1}{2} m_e m_s | j m_j)(e\tfrac{1}{2} m'_e m'_s | j m_j) Y_{em'_e}(\tfrac{\vec{r}}{r}) Y^{*}_{em_s}(\tfrac{\vec{K}}{K}) \chi_{\frac{1}{2}m'_s} \cdot t_{ej,K} \qquad (2.16)$$

и

$$t_{ej,K} = \frac{1 - S_{ej}}{2\pi i} . \qquad (2.17)$$

Смысл (2.15) очевиден: сходящийся поток частиц имеет амплитуду отличную от нуля лишь при $\vec{K}/K = -\vec{r}/r$, что соответствует частицам, движущимся по направлению вектора $\vec{K}$ к началу координат.

Амплитуда расходящихся частиц делится на две части: нерассеянные частицы, движущиеся от центра в направлении вектора $\vec{K}$ и рассеянные во всех направлениях, описываемые членом $t_{m_s}(\frac{\vec{K}\vec{r}}{Kr})$.

Введем функции:

$$\varphi^{(+)}_{\vec{K} m_s}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \varphi_{\vec{K} m_s}(\vec{r}) \qquad (2.18)$$

и

$$\varphi^{(-)}_{\vec{K} m_s}(\vec{r}) = \varphi^{(+)*}_{-\vec{K} m_s}(\vec{r}), \qquad (2.19)$$

которые согласно (2.9) нормированы на дельта функцию $\delta(\vec{K}-\vec{K}')$. Легко видеть, что функции $\varphi^{(-)}_{\vec{K} m_s}$ соответствуют ситуации, когда падающие на силовой центр частицы движутся со всех направлений, однако фазовые соотношения между амплитудами падающих волн таковы, что расходящиеся рассеянные частицы вылетают лишь в направлении вектора $\vec{K}$.

§ 3. Импульсное представление

При рассмотрении волновых функций непрерывного спектра кажется более удобным использовать не координатное, а импульсное представление. О причинах такого предпочтения будет говориться ниже.

Переход к импульсному представлению осуществляется введением вместо волновых функций $\varphi(\vec{r})$, ее фурье образа $\varphi(\vec{q})$:

$$\varphi_{\vec{K}, m_s}(\vec{r}) = 1/(2\pi)^{3/2} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \varphi_{\vec{K} m_s}(\vec{q})\, d\vec{q} \qquad (3.1а)$$

$$\varphi_{\vec{K} m_s}(\vec{q}) = 1/(2\pi)^{3/2} \int e^{-i\vec{q}\vec{r}} \varphi_{\vec{K} m_s}(\vec{r})\, d\vec{r}. \qquad (3.1б)$$

Используя разложение плоской волны:

$$e^{-i\vec{q}\vec{r}} = 4\pi \sum_{LM} i^{-L} j_L(qr) Y^*_{LM}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) Y_{LM}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right), \qquad (3.2)$$

получаем

$$\varphi_{\vec{K} m_s}(\vec{q}) = \sum_{\ell m_\ell m'_\ell m'_s j m_j} R_{\ell j, K}(q) (\ell \tfrac{1}{2} m_\ell m_s | j m_j)(\ell \tfrac{1}{2} m'_\ell m'_s | j m_j) \times Y_{\ell m_\ell}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) Y^*_{\ell m'_\ell}\left(\frac{\vec{K}}{K}\right), \qquad (3.3)$$

где

$$R_{ej,\kappa}(q) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, i^{-\ell} \int_0^\infty j_\ell(qr)\, R_{ej,\kappa}(r)\, r^2 dr \tag{3.4}$$

Интегралы (3.4) вычислены в приложении (П2).
Используя (П2.7) можем записать:

$$\varphi^{(+)}_{\vec{K},m_s}(\vec{q}) = \delta(\vec{q}-\vec{K})\chi_{\frac{1}{2}m_s} - \frac{2}{K}\,\frac{t_{\vec{K},m_s}(\vec{q})}{q^2-(K^2+i\varepsilon)}\,, \tag{3.5}$$

где

$$t_{\vec{K},m_s}(\vec{q}) = \sum_{\ell m_\ell m_s' m_\ell' j m_j} (\ell \tfrac{1}{2} m_\ell m_s | j m_j)(\ell \tfrac{1}{2} m_\ell' m_s' | j m_j)\; t_{ej,\kappa}(q)\times$$
$$\times\, Y_{\ell m_\ell}\left(\tfrac{\vec{q}}{q}\right) Y^*_{\ell m_\ell'}\left(\tfrac{\vec{K}}{K}\right) \chi_{\frac{1}{2} m_s'}\,, \tag{3.6}$$

где

$$t_{ej,K}(q) = \frac{1}{\pi}\, e^{i\delta_{ej}(\kappa)} \sin\delta_{ej}(\kappa)\cdot\frac{1}{K}\left[\frac{\delta_0}{q^2-K_0^2}\,\lambda_{ej,K}(q)\right]. \tag{3.7}$$

При $q=K$

$$t_{ej,K}(K) = -\frac{1}{\pi}\, e^{i\delta_{ej}} \sin\delta_{ej} = \frac{1-S_{ej}}{2\pi i}\,. \tag{3.8}$$

Легко показать, что функция $\varphi^{(-)}_{\vec{K},m_s}(\vec{q})$ имеет вид:

$$\varphi^{(-)}_{\vec{K},m_s}(\vec{q}) = \delta(\vec{q}-\vec{K}) - \frac{2}{K}\,\frac{t^*_{-\vec{K}\,m_s}(\vec{q})}{q^2-(K^2-i\varepsilon)}\,. \tag{3.9}$$

Воспользовавшись выражением (2.5) легко преобразовать (3.8) к виду:

$$t_{ej,K}(K) = -\frac{1}{i\pi}\,\frac{j_{\ell-1}(KR) - D_{ej}\, j_\ell(KR)}{h^{(1)}_\ell(KR)}\cdot\frac{1}{D_{ej} - h^{(1)}_{\ell-1}(KR)/h^{(1)}_\ell(KR)}\,. \tag{3.10}$$

Знаменатель последней дроби совпадает с выражением (I.7) в том случае, когда $K = i\varkappa$. Таким образом функция $t_{ej,K}(K)$ имеет полюса в нижней комплексной полуплоскости при $i\varkappa = \kappa$, соответствующих связанным состояниям частицы в яме.

§ 4. Вычисление матричных элементов

Рассмотрим матричные элементы вида:

$$\langle \vec{K}' m_s'; e'j'm_j' | \mathcal{V} | \vec{K} m_s; ejm_j \rangle = \int d\vec{r}\, d\vec{r}\,'\, \varphi^{(-)*}_{\vec{K}' m_s'}(\vec{r}\,')\, \varphi_{e'j'm_j'}(\vec{r}) \times \mathcal{V}(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \varphi^{(+)}_{\vec{K} m_s}(\vec{r}\,')\, \varphi_{ejm_j}(\vec{r}), \tag{4.1}$$

где

$$\mathcal{V}(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{4.2}$$

Согласно (3.I) матричный элемент (4.I) можно записать как:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q}\, d\vec{q}\,'\, \varphi^{(-)*}_{\vec{K}' m_s'}(\vec{q}\,') \langle \vec{q}\,', e'j'm_j' | \mathcal{V}^0 | \vec{q}, ejm_j \rangle\, \varphi^{(+)}_{\vec{K} m_s}(\vec{q}), \tag{4.3}$$

где

$$\langle \vec{q}\,', e'j'm_j' | \mathcal{V}^0 | \vec{q}, ejm_j \rangle = \int d\vec{r}\; e^{i(\vec{q} - \vec{q}\,')}\, \varphi_{e'j'm_j'}(\vec{r})\, \varphi_{ejm_j}(\vec{r}) \tag{4.4}$$

Используя выражения (3.5) и (3.9) можем переписать (4.3) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^3} \Big[& \delta_{m_s m_s'} \langle \vec{K}', e'j'm_j' | \mathcal{V}^0 | K, ejm_j \rangle - \\ & - \int d\vec{q}\; \frac{\langle \vec{K}', e'j'm_j' | \mathcal{V}^0 | \vec{K}, ejm_j \rangle}{q^2 - (K^2 + i\varepsilon)} + \\ & - \int d\vec{q}\,'\; \frac{t_{-\vec{K} m_s}(\vec{q}) \langle \vec{q}\,', ejm_j | \mathcal{V}^0 | \vec{K}, ejm_j \rangle}{q'^2 - (K^2 + i\varepsilon)} \\ & + \int d\vec{q}\, d\vec{q}\,'\; \frac{t_{-\vec{K}' m_s}(\vec{q}\,') \langle \vec{q}\,', ejm_j | \mathcal{V}^0 | \vec{q}\, ejm_j \rangle\, t_{\vec{\ } m_s}(\vec{q})}{(q'^2 - (K'^2 + i\varepsilon))(q^2 - (K^2 + i\varepsilon))} \Big]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Проводя суммирование по магнитным квантовым числам матричные элементы $\langle \vec{q}\,', ejm_j | \mathcal{V}^0 | \vec{q}\, ejm_j \rangle$

можно записать как

$$\sqrt{4\pi}\, i^{\ell+\ell'} \sum_{LM} (-1)^{j-\frac{1}{2}-L} (jj'-m_j m_j' | LM) Z(\ell j \ell' j', \tfrac{1}{2} L)\, Y^*_{LM}\left(\frac{\vec{\Delta}}{\Delta}\right) I_L(\Delta)\,, \tag{4.6}$$

где $I_L(\Delta) = \left\{ C^{(\alpha)}_{\ell j} C^{(\alpha)}_{\ell' j'} I^{(\alpha)}_{\ell\ell' L}(K_{\ell j}, K_{\ell' j'}, \Delta) + C^{(\bar\alpha)}_{\ell j} C^{(\bar\alpha)}_{\ell' j'} I^{(\bar\alpha)}_{\ell\ell' L}(\varkappa_{\ell j}, \varkappa_{\ell' j'}, \Delta) \right\}$,

где $\Delta = \vec{q} - \vec{q}'$, $C^{(\alpha)}_{\ell j}$ и $C^{(\bar\alpha)}_{\ell j}$ определяются выражениями (I.6) и (I.II), а интегралы

$$I^{(\alpha)}_{\ell\ell' L}(K_{\ell j}, K_{\ell' j'}, \Delta) = \int_0^R j_L(\Delta r)\, j_\ell(K_{\ell j} r)\, j_{\ell'}(K_{\ell' j'} r)\, r^2 dr$$

и

$$I_{\ell\ell' L}(\varkappa_{\ell j}, \varkappa_{\ell' j'}, \Delta) = \int_R^\infty j_L(\Delta r)\, k_\ell(\varkappa_{\ell j} r)\, k_{\ell'}(\varkappa_{\ell' j'} r)\, r^2 dr$$

вычислены в приложении 3 [ПЗ].

Вычислим теперь интегралы, входящие в (4.5). В целях сокращения записей введем обозначения:

$$t^0(\ell, m_\ell m_\ell' m_s m_s' j m_j; K, q) = t_{\ell j, K}(q) (\ell \tfrac{1}{2} m_\ell m_s | j m_j)(\ell \tfrac{1}{2} m_\ell' m_s' | j m_j)$$

$$U(LM, \ell j m_j\, \ell' j' m_j') = \sqrt{4\pi}\, i^{\ell+\ell'} (-1)^{j-\frac{1}{2}-L} (jj'-m_j m_j' | LM) Z(\ell j \ell' j', \tfrac{1}{2} L). \tag{4.7}$$

Отметим, что основной вклад в интегралы, входящие в (4.5), дает область где $|\vec{q}| \simeq |\vec{K}|$. Если рассмотреть случай небольших K, то выкладки сильно упрощаются, поскольку теперь в области, дающей основной вклад в интеграл, можем разложить $I^{(\alpha)}$ и $I^{(\bar\alpha)}$ в ряд Тейлора и удержать лишь члены с низшими степенями (ΔR). Согласно [ПЗ], **запишем**:

$$I^{(\alpha)}_{\ell\ell' L}(K, K', \Delta) \simeq \frac{R^3 (KR)^\ell (K'R)^{\ell'} (\Delta R)^L}{(2L+1)!!\,(2\ell'+1)!!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (KR)^{2m} {}_2F_1\left(-m, -m-\ell-\frac{1}{2}; \ell'+\frac{3}{2}; \frac{K'^2}{K^2}\right)}{2^m m!\,(2m+\ell+\ell'+L+3)[2(\ell+m)+1]!!} \tag{4.8}$$

$$I^{(\bar\alpha)}_{\ell\ell' L}(\varkappa, \varkappa', \Delta) \simeq \frac{R^2}{\varkappa+\varkappa'} \frac{(\Delta R)^L}{(2L+1)!!} k_\ell(\varkappa R)\, k_{\ell'}(\varkappa' R)\,. \tag{4.9}$$

Воспользовавшись выражением (III.II), получим:

$$\int d\Omega_{\vec{q}}\, |\vec{K}-\vec{q}|^L\, Y^*_{LM}\left(\frac{\vec{K}-\vec{q}}{|\vec{K}-\vec{q}|}\right) Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) = \sum_{m'} \alpha(LM\ell m, m')\, Y_{L-\ell m'}\left(\frac{\vec{K}}{K}\right) \times q^\ell K^{L-\ell}, \tag{4.10}$$

где

$$d(LMemm') = \sqrt{4\pi}\,(-1)^{L-e}\left[\binom{2L}{2e}\frac{2L+1}{(2e+1)(2(L-e)+1)}\right]^{1/2}(e\,L-e\,m\,m'|LM). \quad (4.II)$$

Отметим, что интеграл (4.10) отличен от нуля лишь при $e \leq L$. Совершенно ясно, что:

$$\int d\Omega_{\vec q}\, d\Omega_{\vec q'}\, \Delta^L Y^*_{LM}\left(\frac{\vec\Delta}{\Delta}\right) Y_{em}\left(\frac{\vec q}{q}\right) Y_{em'}\left(\frac{\vec q'}{q'}\right) = \delta_{L,e+e'}\, q^e q'^{e'} d(LMemm'). \quad (\text{П.I2})$$

Интегрирование по q и q' проведем используя выражение (П2.6). Пренебрегая интегралами в смысле главного значения, получим матричные элементы (4.I) в виде:

$$\frac{1}{\pi}\Big[\sum_{LM} U(LMej_1m_j\, e'j'm_j') \times \Big\{ Y^*_{LM}\left(\frac{\vec K-\vec K'}{|\vec K-\vec K'|}\right) I(|\vec K-\vec K'|) -$$

$$-I(\sqrt{KK'})\sum_{emm'm''j_1m_{j_1}} d(LMemm')\Big[t^0(emm'm_sm_s',j_1m_{j_1},K,K)\left(\frac{K}{K'}\right)^e\left(\frac{K'}{K}\right)^{L-e} \times \quad (\text{П.I2})$$

$$\times Y^*_{em}\left(\frac{\vec K}{K}\right) Y^*_{L-e\,m'}\left(\frac{\vec K}{K}\right) + (-1)^L t^0(emm'm_sm_s',j_1m_{j_1},K',K')\left(\frac{K'}{K}\right)^e\left(\frac{K}{K'}\right)^{L-e} Y^*_{em}\left(-\frac{\vec K'}{K}\right) Y^*_{L-e\,m'}\left(\frac{\vec K}{K}\right)\Big]$$

$$+(-1)^L \sum_{em_1m_1'm_2m_2'j_1m_{j_1}j_2m_{j_2}m_s''} t^0(e_1m_1m_1'm_sm_s'',j_1m_{j_1},K,K)\, t^0(e_1m_1m_1'm_s'm_s'',j_2m_{j_2},K',K')\, d(LMem_1m_2) \times \left(\frac{K}{K'}\right)^e\left(\frac{K'}{K}\right)^{L-e} Y^*_{em_1}\left(\frac{\vec K}{K}\right) Y^*_{L-e\,m_2}\left(\frac{\vec K}{K}\right) I(\sqrt{KK'})\Big].$$

Отметим в заключение, что учет в (4.8) и (4.9) отброшенных членов не создает принципиальных трудностей в вычислении интегралов, а лишь несколько усложняет вид коэффициентов α.

На рисунке 6 приведена угловая зависимость квадрата модуля матричного элемента 4.I и проведено сравнение угловой зависимости матричных элементов с плоскими волнами, в которых вклад внутренней области потенциала не учитывался.

Заключение

В настоящее время существует целый ряд микроскопических теорий ядерных реакций, использующих в качестве базиса волновые функции частицы в потенциале конечной глубины. Среди обычно используемых потенциалов - сферический потенциал занимает выделенное место, поскольку известен аналитический вид его собственных функций. В то же самое время, как показано в § 2, они близки к наиболее часто используемым собственным функциям потенциала Вудса-Саксона, которые получаются путем численного интегрирования уравнения Шредингера и могут заменить последние в различных оценочных расчетах. Что касается волновых функций непрерывного спектра, то они, по-видимому, мало чувствительны к детальной форме потенциала, но поскольку они не локализованы внутри ядра, как волновые функции связанных состояний, их численный расчет в более сложных потенциалах требует значительного машинного времени.

Кроме того, волновые функции сферического потенциала известны, в аналитическом виде легко вычислить (§ 3) их фурье-образ и таким образом получить амплитуду рассеяния вне энергетической поверхности. Знание точного выражения для амплитуды необходимо при проверке различных приближенных методов ее расчета. Задача рассеяния двух частиц, находящихся в сферическом потенциале (**подробно рассмотренная в §4.**), также играет важную роль в различных микроскопических подходах в ядерных реакциях с нуклонами.

Приложение I. Сферические функции Бесселя

Сферические функции Бесселя определяются как:

$$j_\ell(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{\ell+\frac{1}{2}}(x)\quad;\quad n_\ell(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,N_{\ell+\frac{1}{2}}(x)\;;$$

$$h^{(1,2)}=j_\ell(x)\mp n_\ell(x)\quad;\quad k_\ell(x)=\mp(\pm i)^\ell\,h_\ell^{(1,2)}(\pm ix)\,. \qquad \text{(III.1)}$$

Они могут быть выражены через производные от элементарных функций

$$j_\ell(x)=(-1)^\ell x^\ell\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^\ell\frac{\sin x}{x}\;;\quad n_\ell(x)=(-1)^{\ell+1}x^\ell\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^\ell\frac{\cos x}{x}\;;$$

$$k_\ell(x)=(-1)^\ell x^\ell\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^\ell\frac{e^{-x}}{x}\,. \qquad \text{(III.2)}$$

Сферические функции $j_\ell(x)$, $n_\ell(x)$ и $h_\ell^{(1,2)}(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$(2\ell+1)Z_\ell(x)=x\left(Z_{\ell+1}(x)+Z_{\ell-1}(x)\right),$$

$$Z'_\ell(x)=-\frac{\ell+1}{x}Z_\ell(x)+Z_{\ell-1}(x)\,, \qquad \text{(III.3)}$$

$$Z'_\ell(x)=\frac{\ell}{x}Z_\ell(x)-Z_{\ell+1}(x)\,,$$

а функции $k_\ell(x)$ соотношениям:

$$(2\ell+1)k_\ell(x)=x\left(k_{\ell+1}(x)-k_\ell(x)\right),$$

$$k'_\ell(x)=-\frac{\ell+1}{x}k_\ell(x)-k_{\ell-1}(x)\,, \qquad \text{(III.4)}$$

$$k'_\ell(x)=\frac{\ell}{x}k_\ell(x)+k_{\ell+1}(x)\,.$$

При больших X сферические функции имеют вид:

$$j_\ell(x)\longrightarrow\frac{\sin(x-\ell\pi/2)}{x}\;;\quad n_\ell(x)\longrightarrow-\frac{\cos(x-\ell\pi/2)}{x}\;; \qquad \text{(III.5)}$$

$$k_\ell(x)\longrightarrow\frac{e^{-x}}{x},$$

при малых x $(x \ll 4\ell+6)$ — вид:

$$j_\ell(x) \to \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \; ; \quad n_\ell(x) \to -\frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}} \; . \qquad (\text{III}.6)$$

Сферические функции Бесселя удовлетворяют соотношению:

$$n_{\ell-1}(x)\, j_\ell(x) - n_\ell(x)\, j_{\ell-1}(x) = \frac{1}{x^2} \; . \qquad (\text{III}.7)$$

Разложение функции $j_\ell(x)$ в ряд Тейлора имеет вид:

$$j_\ell(x) = x^\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!\,(2\ell+2k+1)!!}\, x^{2k} . \qquad (\text{III}.8)$$

Сферические функции Бесселя представлены в виде конечных сумм:

$$j_\ell(x) = \frac{1}{2x} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{k!\,(\ell-k)!\,(2x)^k} \left[i^{-\ell+k+1} e^{ix} + (-i)^{-\ell+k+1} e^{-ix} \right], \qquad (\text{III}.9)$$

$$n_\ell(x) = \frac{1}{2x} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)!}{k!\,(\ell-k)!\,(2x)^k} \left[i^{\ell+k} e^{ix} + (-i)^{\ell+k} e^{-ix} \right],$$

$$k_\ell(x) = e^{-x}/x \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(\ell+k)}{k!\,(\ell-k)!\,(2x)^k} \; .$$

Получим теперь одно очень полезное соотношение. Используя разложение плоской волны по парциальным волнам перепишем тождество

$$e^{i\vec{q}\vec{r}} = e^{i\vec{k}_1\vec{r}} \cdot e^{-i\vec{k}_2\vec{r}} ,$$

где $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ в виде:

$$4\pi \sum_{LM} i^L j_L(qr)\, Y^*_{LM}\!\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) Y_{LM}\!\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) =$$

$$= (4\pi)^2 \sum_{\ell_1\ell_2 m_1 m_2} i^{\ell_1-\ell_2} j_{\ell_1}(k_1 r)\, j_{\ell_2}(k_2 r)\, Y^*_{\ell_1 m_1}\!\left(\frac{\vec{k}_1}{k_1}\right) Y^*_{\ell_2 m_2}\!\left(\frac{\vec{k}_2}{k_2}\right) Y_{\ell_1 m_1}\!\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) Y_{\ell_2 m_2}\!\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Умножая обе части $Y_{\ell m}\!\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ и интегрируя по углам, получаем:

$$i^\ell j_\ell(qr)\, Y^*_{\ell m}\!\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) = 4\pi \sum_{\ell_1\ell_2 m_1 m_2} i^{\ell_1-\ell_2} j_{\ell_1}(k_1 r)\, j_{\ell_2}(k_2 r) \times \qquad (\text{III}.10)$$

$$\times \left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi(2\ell+1)}\right]^{1/2} (\ell_1\ell_2 00|\ell 0)(\ell_1\ell_2 m_1 m_2|\ell m)\, Y^*_{\ell_1 m_1}\!\left(\frac{\vec{k}_1}{k_1}\right) Y_{\ell_2 m_2}\!\left(\frac{\vec{k}_2}{k_2}\right).$$

Подставляя в (П.10) вместо функций $j_\ell(x)$ их разложения в ряд Тейлора (П.8) и собирая члены при X^ℓ, получаем после несложных преобразований:

$$q^\ell Y^*_{\ell m}(\tfrac{\vec q}{q}) = \sqrt{4\pi}\sum_{P=0}^{\ell}\Big[\binom{2\ell}{2P}\frac{(2\ell+1)}{(2P+1)(2(\ell-P)+1)}\Big]^{1/2}(-1)^{\ell-P}K_1^P K_2^{\ell-P} \qquad (\text{П.11})$$

$$\times\sum_{m_1 m_2}(P\,\ell-P\,m_1 m_2|\ell m)\,Y^*_{Pm_1}(\tfrac{\vec K_1}{K_1})\,Y^*_{\ell-P\,m_2}(\tfrac{\vec K_2}{K_2}).$$

<u>Приложение 2</u>

Вычислим интегралы (3.4):

$$R_{\ell j,\kappa}(q) = \frac{(-i)^\ell}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^\infty j_\ell(qr)\,R_{\ell j,\kappa}(r)\,r^2 dr, \qquad (\text{П2.1})$$

$$R_{\ell j,\kappa}(r) = \begin{cases} 4\pi i^\ell e^{i\delta_{\ell j}}\cos\delta_{\ell j}\,\dfrac{j_\ell(\kappa R)-tg\,\delta_{\ell j}\,n_\ell(\kappa R)}{j_\ell(\kappa_0 R)}\,j_\ell(\kappa_0 r), & (r<R) \\ 4\pi i^\ell e^{i\delta_{\ell j}}\cos\delta_{\ell j}\,[\,j_\ell(\kappa r)-tg\,\delta_{\ell j}\,n_\ell(\kappa r)], & (r>R) \end{cases} \qquad (\text{П2.2})$$

$$I_1 = \int_0^R j_\ell(qr)\,j_\ell(\kappa_0 r)\,r^2 dr = R^2\,\frac{\kappa_0 j_{\ell-1}(\kappa_0 R)j_\ell(qR) - q j_{\ell-1}(qR)j_\ell(\kappa_0 R)}{q^2-\kappa_0^2}, \qquad (\text{П2.3})$$

$$I_2 = \int_R^\infty j_\ell(qr)[\,j_\ell(\kappa r)-tg\,\delta_{\ell j}\,n_\ell(\kappa r)]\,r^2 dr = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{q^2-\kappa^2}\,\cdot$$

$$\Big\{\kappa[\,j_{\ell-1}(\kappa r)-tg\,\delta_{\ell j}\,n_{\ell-1}(\kappa r)]\,j_\ell(qr) - q\,j_{\ell-1}(qr)[\,j_\ell(\kappa r)-tg\,\delta_{\ell j}\,n_\ell(\kappa r)]\Big\}\Big|_R^A \qquad (\text{П2.4})$$

Рассмотрим предел, входящий в выражение (П2.4). Используя асимптотические выражения для сферических функций Бесселя (П), получим:

$$\lim_{A\to\infty}\Big\{\frac{1}{2q\kappa}\Big[-\frac{\cos(q-\kappa)A}{q-\kappa} - (-)^\ell\frac{\cos(q+\kappa)A}{q+\kappa}\Big]tg\,\delta_{\ell j} + \qquad (\text{П2.5})$$

$$+\frac{1}{2q\kappa}\Big[\frac{\sin(q-\kappa)A}{q-\kappa} + (-)^\ell\frac{\sin(q+\kappa)A}{q+\kappa}\Big]\Big\}$$

Пределы $\lim\limits_{A\to\infty}\cos(q+\kappa)A/(q+\kappa)$ и $\lim\limits_{A\to\infty}\sin(q+\kappa)A/(q+\kappa)$ эффективно равны нулю в том смысле, что ввиду стремящейся к бесконечности частоте осцилляций этих функций (как функций q и κ) всякий интеграл от произведения этих функций на любую гладкую функцию равен нулю. При этом, конечно, считается что q и κ положительны, т.е. $q+\kappa>0$.

Используя известные соотношения:

$$\lim_{A\to\infty} \frac{\sin Ax}{x} = \pi\delta(x) ,$$
$$\lim_{A\to\infty} \frac{1-\cos Ax}{x} = \mathcal{P}\frac{1}{x} , \qquad (\text{П}2.6)$$
$$\frac{1}{x\pm i\varepsilon} = i\pi\delta(x) \pm \mathcal{P}\frac{1}{x} ,$$

после несложных преобразований можем записать:

$$R_{ej,\kappa}(q) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{q\kappa}\delta(q-\kappa) - 4(2\pi)^{1/2} e^{i\delta_{ej}} \sin\delta_{ej} \times$$
$$\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{S_0}{q^2-\kappa_0^2}\, \lambda_{ej,\kappa}(q)\right] \frac{1}{q^2-(\kappa^2+i\varepsilon)} , \qquad (\text{П}2.7)$$

где

$$\lambda_{ej,\kappa}(q) = \frac{q j_{\ell-1}(qR) - \kappa j_\ell(qR)\left[D_{ej} + a(ej)\frac{q^2-\kappa^2}{(\kappa R)}\right]}{j_{\ell-1}(\kappa R) - j_\ell(\kappa R) D_{ej}} , \qquad (\text{П}2.8)$$

а D_{ej} определены в (2.6) :

при $q = \kappa$

$$\lambda_{ej,\kappa}(q) = 1 . \qquad (\text{П}2.9)$$

При $q \to \infty$

$$\lambda_{ej,\kappa}(q) \to \frac{1}{R}\, \frac{\cos(qR-\ell\pi/2) - \frac{\kappa}{q}\sin(qR-\frac{\ell\pi}{2})\left[D_{ej} - a(ej)\frac{q^2-\kappa^2}{\kappa R}\right]}{j_{\ell-1}(\kappa R) - D_{ej}\, j_\ell(\kappa R)} . \qquad (\text{П}2.10)$$

При $q \to 0$

$$\lambda_{ej,\kappa}(q) \to \frac{1}{(2\ell+1)!!}\, \frac{\frac{2\ell+1}{R} - \kappa\left(D_{ej} - a(ej)\frac{\kappa}{R}\right)}{j_{\ell-1}(\kappa R) - D_{ej}\, j_\ell(\kappa R)}\, (qR)^\ell . \qquad (\text{П}2.11)$$

Приложение 3. Вычисление радиальных интегралов

Здесь будут рассмотрены интегралы вида:

$$1)\ I^{(I)}_{\ell_1\ell_2\ell}(\kappa_1\kappa_2 q) = \int_0^R j_\ell(qr)\, j_{\ell_1}(\kappa_1 r)\, j_{\ell_2}(\kappa_2 r)\, r^2 dr \qquad (П3.1)$$

$$2)\ I^{(II)}_{\ell_1\ell_2\ell}(\varkappa_1\varkappa_2 q) = \int_R^\infty j_\ell(qr)\, k_{\ell_1}(\varkappa_1 r)\, j_{\ell_2}(\varkappa_2 r)\, r^2 dr \qquad (П3.2)$$

Рассмотрим интегралы (П3.1). Поскольку для средних ядер $\kappa R \sim 5$, то произведение функций Бесселя $j_{\ell_1}(\kappa_1 r)\, j_{\ell_2}(\kappa_2 r)$ целесообразно представить в виде быстросходящегося ряда [6] . Пусть $\kappa_2 \le \kappa_1$, тогда:

$$j_{\ell_1}(\kappa_1 r)\, j_{\ell_2}(\kappa_2 r) = \frac{(\kappa_1 r)^{\ell_1}(\kappa_2 r)^{\ell_2}}{(2\ell_2+1)!!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\kappa_1 r)^{2m}\, {}_2F_1\left(-m,-m-\ell_1-\frac{1}{2};\ell_2+\frac{3}{2};\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^2\right)}{2^m m!\,[2(\ell_1+m)+1]!!}, \qquad (П3.3)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция.

Подставляя (П3.3) в (П3.1) и последовательно используя формулу [6]:

$$\int^z z^{\mu+2} j_\ell(z)\,dz = -(\mu-\ell)(\mu+\ell+1)\int^z z^{\mu} j_\ell(z)\,dz \; +$$
$$+ \left[z^{\mu+2} j_{\ell+1}(z) + (\mu-\ell) z^{\mu} j_\ell(z) \right], \qquad (П3.4)$$

получим:

$$I^{(I)}_{\ell_1\ell_2\ell}(\kappa_1\kappa_2 q) = \left(\frac{\kappa_1}{q}\right)^{\ell_1}\left(\frac{\kappa_2}{q}\right)^{\ell_2} \frac{1}{q^3(2\ell_2+1)!!} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\kappa_1}{q}\right)^{2m}}{2^m m!\,[2(\ell_1+m)+1]!!} \times$$
$$\times\, {}_2F_1\left(-m,-m-\ell_1-\frac{1}{2};\ell_2+\frac{3}{2};\frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2}\right) \times \lambda_{m+\Delta;\ell}(qR), \qquad (П3.5)$$

где $\Delta = \frac{\ell_1+\ell_2-\ell}{2}$ – целое положительное число, а

$$\lambda_{s,\ell}(x) = \int^x x^{\ell+2s+2} j_\ell(x)\,dx =$$
$$= x^{\ell+2} j_{\ell+1}(x) \sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^p 2^p s!\,[2(\ell+s)+1]!!\; x^{2(s-p)}}{(s-p)!\,[2(\ell+s-p)+1]!!} + \qquad (П3.6)$$
$$+ x^{\ell+1} j_\ell(x) \sum_{p=0}^{s-1} \frac{(-1)^p 2^{2p+1}(s!)^2\,[2(\ell+s)+1]!!\; x^{2(s-p)}}{(s-p-1)!\,(s-p)!\,[2(\ell+s-p)+1]!!}$$

При $x \to \infty$ —

$$\lambda_{s,\ell}(x) \to -x^{\ell+2s+1}\cos(x-\ell\pi/2) . \qquad (\text{П3.7})$$

При $x \to 0$ — $\lambda_{s,\ell}(x) = \frac{1}{[2(\ell+s)+3](2\ell+1)!!} x^{2(\ell+s)+3}$.

В том случае, когда $\varkappa_1 \simeq \varkappa_2$, выражение (П3.5) можно несколько упростить, заменяя функцию ${}_2F_1$ ее значением при $\varkappa_1/\varkappa_2 = 1$:

$$I^{(1)}_{\ell\ell_2\ell}(\varkappa_1\varkappa_2 q) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\left(\frac{\varkappa_1}{q}\right)^{\ell_1+m}\left(\frac{\varkappa_2}{q}\right)^{\ell_2+m}(\ell_1+\ell_2+2m+1)!\,\lambda_{m+a,\ell}(qR)}{m![2(\ell_1+m)+1]!![2(\ell_2+m)+1]!!(\ell_1+\ell_2+m+1)!} . \qquad (\text{П3.8})$$

Рассмотрим интегралы (П3.2). Сферические функции $k_\ell(x)$ согласно (П1.9) имеют вид:

$$k_\ell(x) = e^{-x}/x \sum_{p=0}^{\ell} \frac{(\ell+p)!}{p!(\ell-p)!(2x)^p} .$$

Характерное значение $\varkappa R \sim 3$, а ℓ_1 и ℓ_2 обычно ≤ 4 . Тогда во всей области интегрирования можно считать e^{-x}/x убывает гораздо быстрее чем $\sum(\ell+p)!/p!(\ell-p)!(2x)^p$, и в области, дающей основной вклад в интеграл, принять:

$$k_\ell(\varkappa r) \approx \frac{e^{-\varkappa r}}{\varkappa r} \sum_{p=0}^{\ell} \frac{(\ell+p)!}{p!(\ell-p)!(2\varkappa R)^p} ,$$

тогда (П3.9)

$$I^{(2)}_{\ell_1\ell_2\ell}(\varkappa_1\varkappa_2 q) \simeq R^2 e^{(\varkappa_1+\varkappa_2)R} k_{\ell_1}(\varkappa_1 R)\, k_{\ell_2}(\varkappa_2 R) \int_R^{\infty} j_\ell(qr) e^{-(\varkappa_1+\varkappa_2)r} dr .$$

Интеграл, входящий в (П3.9) вычислен в работе [7] :

$$\mathcal{X}^{(2)}_\ell(\varkappa,q) = q e^{\varkappa R} \int_R^{\infty} j_\ell(qr)\, e^{-\varkappa r} dr =$$

$$= \sum_{p_1p_2} i^{p_1+p_2-\ell} \frac{(2p_1+1)(2p_2+1)}{(2\ell+1)} (p_1p_2 00|\ell 0)^2 j_{p_2}(qR)\, \tilde{Q}_{p_1}\left(\frac{\varkappa}{q}\right) , \qquad (\text{П3.10})$$

где функции $\tilde{Q}_p$ определяются через функции Лежандра второго рода от мнимого аргумента Q_p

$$\tilde{Q}_p(z) = (-i)^{p+1} Q_p(-iz) . \qquad (\text{П3.11})$$

Таким образом:

$$I^{(a)}_{\ell_1\ell_2\ell}(\varkappa,\varkappa_2,q) \simeq \frac{R^2}{q} k_{\ell_1}(\varkappa,R)\, k_{\ell_2}(\varkappa_2 R)\, \lambda^{(2)}_{\ell}(\varkappa,\varkappa_2,q). \quad (\text{П3.I2})$$

При малых q $(\frac{\varkappa}{q} \geq 0.5)$ функции $\tilde{Q}_p(\frac{\varkappa}{q})$ быстро убывают с ростом p, и можно записать:

$$\lambda^{(2)}_{\ell}(\varkappa,q) \simeq j_\ell(qR)\, \operatorname{arctg}\frac{q}{\varkappa} \quad (\text{П3.I3})$$

При $q \to \infty$ —

$$\lambda^{(a)}_{\ell}(\varkappa,q) \to -\frac{\cos(qR) - \ell\pi/2)}{qR} \quad (\text{П3.I4})$$

ЛИТЕРАТУРА

I. В.Гейзенберг. Теория атомного ядра. И.Л., М., 1953.

2. В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. "Наука". М., 1971.

3. С.А.Фаянс. Одночастичные уровни сферических ядер. Препринт ИАЭ-1593, М., 1968.

4. А.Г.Ситенко. Лекции по теории рассеяния. "Вища Школа", Киев, 1971.

5. А.И.Базь, Я.Б. Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции, распады в нерелятивистской квантовой механике. "Наука", М., 1971.

6. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевских функций. И.Л., М., 1949.

7. А.А.Лукьянов, О.А.Сальников, Е.М.Сапрыкин. Оценка вклада прямого процесса в спектры неупруго рассеянных нейтронов. Препринт ФЭИ- 472,1974.

Таблица I. Значения $a_\circ$, использованные в расчетах.

Состояние	$1p_{3/2}$	$1p_{1/2}$	$1d_{5/2}$	$1d_{3/2}$	$1f_{7/2}$	$2p_{3/2}$	$1f_{5/2}$	$2p_{1/2}$	$1g_{9/2}$
$a_\circ$	0,56	0,55	0,87	0,58	0,10	0,43	0,50	0,15	0,12

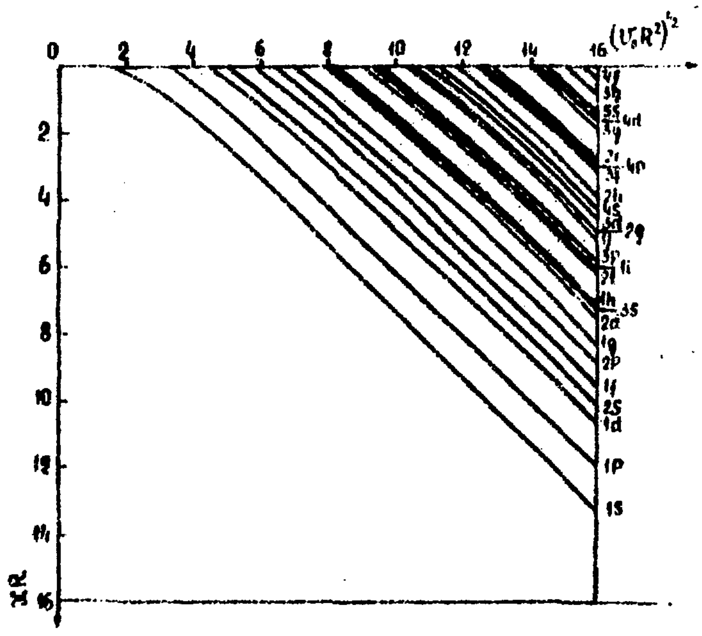

Рис.2 Зависимость собственных значений $\chi_{n\ell}$ от параметра прямоугольного потенциала $(V_0R^2)^{1/2}$.

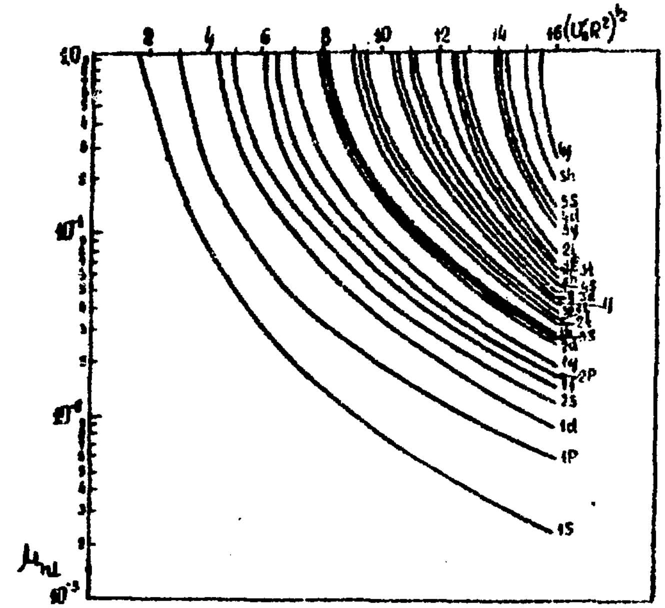

Рис.3. Зависимость части квадрата модуля волновой функции связанного состояния сосредоточенной вне потенциальной "ямы" μ_{nl} от параметра прямоугольного потенциала $(U_0 R^2)^{1/2}$.

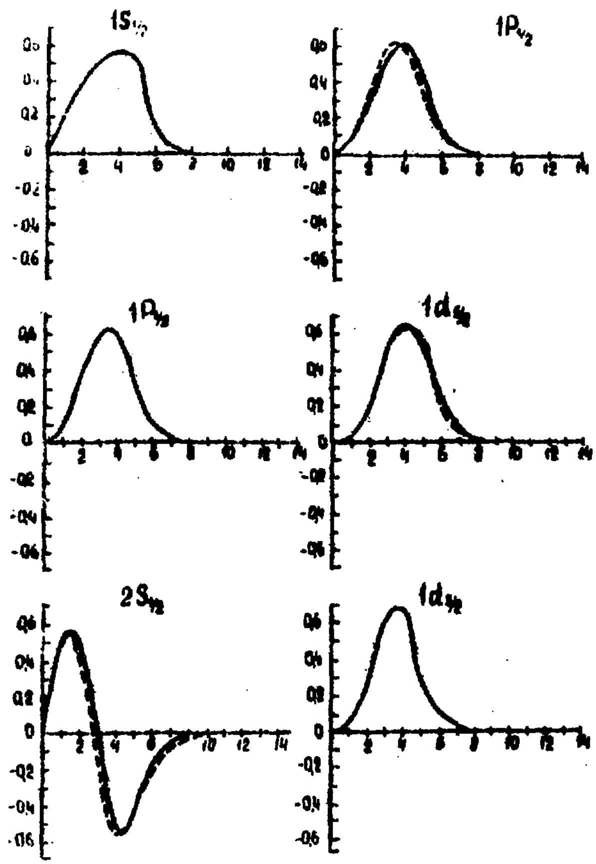

Рис. 4а.

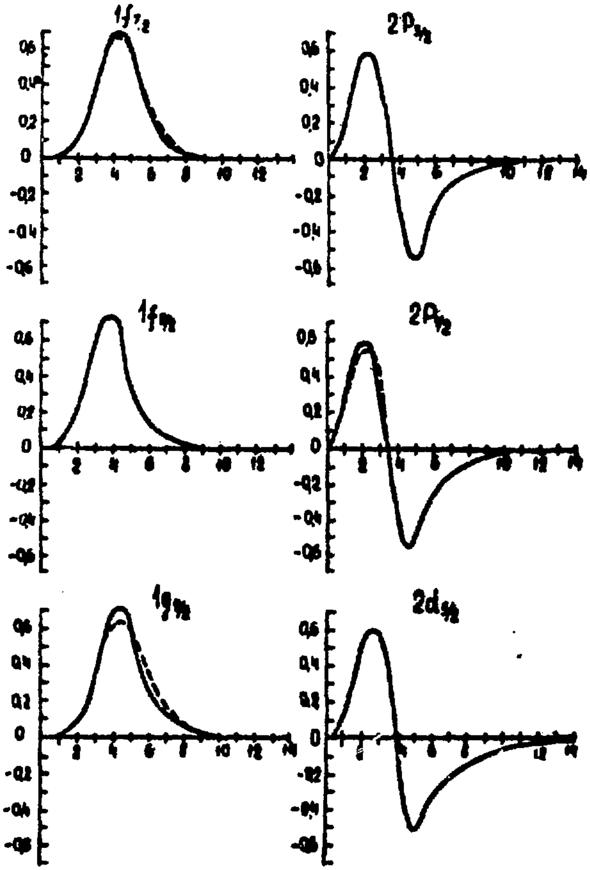

Рис. 4б. Волновые функции связанных состояний в прямоугольной "яме" (сплошная кривая) для V_o =47.5 Мэв. , R =1.28$A^{1/3}$ и A =60 с a_o приведёнными в табл.I и соответствующие волновые функции в потенциале Вудса-Саксона [3].

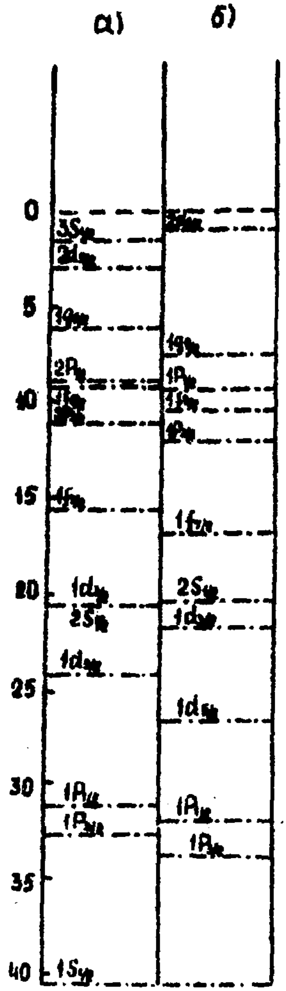

Рис. 5 Спектр уровней в потенциале Вудса-Саксона [9] (а) и в прямоугольном потенциале с a_o=0.4 (б).
(V_o =47.5Мэв, R =1.28 $\cdot A^{1/3}$, A =60)

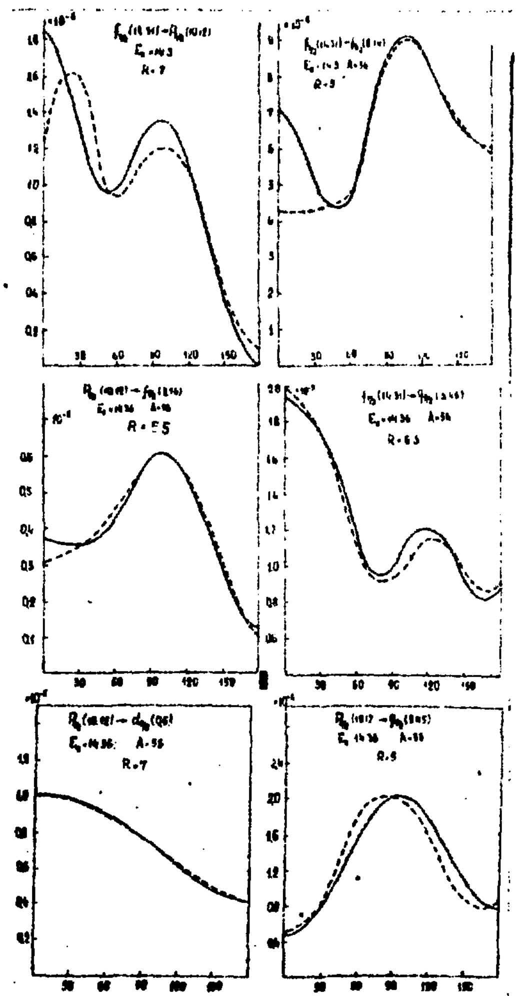

Рис. 6. Угловая зависимость квадрата модуля матричного элемента (4.I) (сплошная кривая) и угловая зависимость квадрата модуля матричного элемента с плоскими волнами (пунктирная кривая), в которых вклад от внутренней области не учитывался.

(V_0 =47.5Мэв. , R =1.28 $A^{1/3}$, A =56).

ФЭИ-506 Т-15549 от 27/VIII-74 г. Объем 1,5 уч.-изд.л. Тираж 96 экз.
Цена 13 коп. Заказ № 477

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, сентябрь 1974 г.