SU 7605973

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ХФТИ 75-21

В.Ф.АЛЕКСИН, С.С.РОМАНОВ

ДИФФУЗИЯ СТЕЛЛАРАТОРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПОЛЫЕ КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРЫ

Харьков 1975

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ХФТИ 75-21

В.Ф.АЛЕКСИН, С.С.РОМАНОВ

ДИФФУЗИЯ СТЕЛЛАРАТОРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ПОЛЫЕ КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРЫ

Харьков 1975

УДК 538.551.21 М-19

Методом Лапласа исследована диффузия переменных во времени магнитных полей, распределенных по поверхности цилиндра токов. Способ задания токов позволяет перейти от винтового поля к гофрированному и азимутальному.

Переменные во времени и пространстве магнитные поля находят широкое применение в различных исследованиях. С помощью переменного во времени и однородного магнитного поля определяют проводимость металлов [I], стабилизируют орбиты частиц в ускорителях [2]. Магнитные поля мегаэрстедного диапазона проще создавать переменными [3]. Исследование диффузии переменных магнитных полей в области, ограниченные проводниками, представляется интересным при выборе рациональных конструкций магнитных ловушек, применяемых для удержания плазмы. Используемые в ловушках магнитные поля представляют суперпозицию различных пространственных гармоник, амплитуды и фазы которых существенно влияют на конфигурацию удерживающего поля и, в частности, на структуру магнитных поверхностей, особенно чувствительную к соотношениям между ними. Поэтому при использовании переменных полей необходимо знать зависимость длительности переходного процесса и сдвига фазы поля от типа гармоники. Знание этой зависимости позволяет осуществить программирование магнитного поля во времени для создания магнитных поверхностей необходимой структуры.

Величина и поведение переменных полей зависят от электрических (проводящих) и магнитных свойств применяемых материалов, способа возбуждения поля и геометрии полости, куда диффундирует поле. В связи с этим возникает задача о нахождении переменных полей от заданных источников при известной форме проводников. В качестве модели выбирается прямой круговой цилиндр, по внешней и внутренней сторонам которого текут линейные поверхностные токи, меняющиеся во времени.

Время проникновения поля определяется проводящими и магнитными свойствами материала камеры, частотой внешнего поля и пространственными периодами токов.

В общем случае времена проникновения продольного и поперечного полей различны. Для высоких номеров гармоник компоненты винтового поля имеют одинаковые времена проникновения.

I. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматриваются квазистационарные электромагнитные поля, длина волны которых в вакууме значительно больше характерных размеров камеры. Проводящие и магнитные свойства материала камеры предполагаются однородными и изотропными.

Такие поля в проводящей среде без дисперсии описываются уравнениями Максвелла, в которых пренебрегается током смещения

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E}, \qquad rot\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (I.1)$$

или, исключив $\vec{E}$,

$$rot(rot\,\vec{H}) = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \qquad (I.2)$$

где σ и μ – проводимость и магнитная проницаемость материала камеры.

В вакууме электромагнитные поля определяются теми же уравнениями с $\sigma = 0$ и $\mu = 1$.

Условие квазистационарности ограничивает частоту электромагнитного поля сверху.

Поскольку дисперсия отсутствует, то проводимость и магнитная проницаемость неферромагнитных материалов относятся к постоянному магнитному полю.

Для ферромагнетиков, у которых магнитная проницаемость зависит от поля, приведенные результаты носят качественный характер.

Считается также, что отношение глубины затухания поля к толщине термического скин-слоя много меньше единицы. Это означает, что в рассмотренных задачах диффузии поля теплопроводность играет ограниченную роль [3] и поэтому проводимость материала не зависит от температуры.

В качестве граничных условий считаем, что нормальные компоненты векторов индукции магнитного поля непрерывны

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B} - \vec{B}^{(i,e)} \right) = 0 \tag{I.3}$$

на внутренней (i) и внешней (e) поверхностях цилиндрической оболочки, а касательные компоненты магнитного поля удовлетворяют условию [4]

$$\vec{n} \times \left(\vec{H} - \vec{H}^{(i,e)} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(i,e)} \tag{I.4}$$

учитывающему скачок магнитного поля за счет поверхностного тока $\vec{j}$. Величины без верхнего индекса относятся к значениям компонентов в проводящей среде.

Мы рассмотрим случай, когда в момент времени $t = 0$ происходит включение поверхностных токов, которые с течением времени меняются по определенному закону.

Для решения уравнения (I.2) с такими начальными условиями удобно воспользоваться преобразованием Лапласа

$$\bar{U}(\vec{r}, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}\, U(\vec{r}, t)\, dt\,, \tag{I.5}$$

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{U}(\vec{r}, p)\, e^{pt}\, dp\,, \tag{I.6}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор "точки наблюдения", $\bar{U}(\vec{r}, p)$ - трансформация Лапласа функции $U(\vec{r}, t)$. Применив преобразование Лапласа к уравнениям (I.I-I.3) и граничным условиям (I.3) и (I.4) находим

$$rot\, \vec{\bar{H}} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{\bar{E}}\,, \tag{I.7}$$

$$rot\, \vec{\bar{E}} = - \frac{\mu p}{c} \vec{\bar{H}}\,, \tag{I.8}$$

$$rot(rot\, \vec{\bar{H}}) = -q^2 \vec{\bar{H}}\,, \tag{I.9}$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B} - \vec{B}^{(i,e)} \right) = 0, \tag{I.10}$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{H} - \vec{H}^{(i,e)} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}^{(i,e)}, \tag{I.11}$$

где

$$q^2 = \frac{p}{\chi^2}, \qquad \chi^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

В рассматриваемых нами случаях решение уравнений Максвелла для какого-либо из компонентов магнитного поля может быть сведено к виду

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\bar{V}(\vec{r}, p) \bar{f}(p)}{D(p)} e^{pt} dp, \tag{I.12}$$

где $\bar{V}(\vec{r}, p)$ – трансформация Лапласа, которая находится из решения уравнения (I.9) с соответствующими граничными условиями, $\bar{f}(p)$ – трансформация Лапласа функции $f(t)$, описывающей изменение со временем внешних токов, $D(p)$ – детерминант системы (I.10) и (I.11).

Используя выражение (I.12), решение для компонентов магнитного поля в общем случае можно представить в виде

$$U(\vec{r}, t) = \sum_{p_s} \frac{\bar{V}(\vec{r}, p_s) \operatorname{Res} \bar{f}(p_s)}{D(p_s)} e^{p_s t} + \sum_{p_m} \frac{\bar{V}(\vec{r}, p_m) \bar{f}(p_m)}{\left(\frac{\partial D}{\partial p} \right)_{p = p_m}} e^{p_m t} \tag{I.13}$$

Здесь первая сумма по p_s учитывает полюсы функции $\bar{f}(p)$ и описывает "установившийся" процесс, вторая сумма по корням детерминанта $D(p_m) = 0$ – переходной процесс, устанавливающийся за время $\tau_m = p_m^{-1}$.

Как правило, вторая сумма в выражении (I.13) содержит бесконечное число слагаемых. В случае, когда скиновая глубина затухания поля значительно больше толщины оболочки, во второй сумме достаточно сохранить одно слагаемое для удовлетворения начального условия. Тогда промежуток времени τ, по истечении которого переходной процесс закончится, назовем временем проникновения поля в полость; это время определяется наименьшим корнем уравнения $D(p_m) = 0$.

В случае, когда скиновая глубина значительно меньше толщины оболочки, дают вклад все слагаемые. Наименьший корень уравнения $\mathcal{D}(p_m) = 0$ будет в основном определять время проникновения поля.

2. РЕШЕНИЯ ДЛЯ ВИНТОВЫХ ТОКОВ

Исследуем диффузию магнитного поля, создаваемого пространственно-периодическими квазистационарными токами, текущими по внешней $(r = a)$ и внутренней $(r = b)$ поверхностями проводящего полого цилиндра. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) с осью z, направленной по оси цилиндра, компоненты напряженностью магнитного поля токов, с периодами $\frac{2\pi}{\ell}$ по φ и L вдоль z, можно представить двухкратным рядом Фурье. Мы ограничимся случаем винтовой симметрии, когда компоненты токов являются периодическими функциями 2π относительно комбинации $\theta = \ell\varphi + hz$, где $h = \frac{2\pi}{L}$.

Несмотря на эти ограничения, рассматриваемый случай представляет возможность рассмотреть практически интересные случаи гофрированного магнитного поля ($\ell = 0$) и поля периодически распределенных продольных токов ($h = 0$).

Представим компоненты винтовых поверхностных токов рядом Фурье в комплексной форме

$$
\begin{aligned}
j_z(\theta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j_{nz}(t)\, e^{in\theta}, \\
j_\varphi(\theta, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j_{n\varphi}(t)\, e^{in\theta}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Из условия непрерывности плотности тока ($\operatorname{div}\vec{j} = 0$) следует, что

$$
j_{n\varphi}(t) = \frac{ha}{\ell} j_{nz}(t) \equiv j_n(t), \tag{2.2}
$$

т.е. винтовые токи можно задавать одной компонентой. Отношение $\frac{ha}{\ell}$ представляет тангенс угла между направлением тока и образующей цилиндра ($\operatorname{tg} v = \frac{ha}{\ell}$).

Компоненты напряженности магнитного поля, имеющие винтовую симметрию, могут быть также представлены рядом Фурье

$$H_r(r,\theta,t) = \sum_n f_n(r,t) e^{in\theta}, \tag{2.3}$$

$$H_\varphi(r,\theta,t) = \sum_n g_n(r,t) e^{in\theta},$$

$$H_z(r,\theta,t) = \sum_n q_n(r,t) e^{in\theta}.$$

Трансформации Лапласа относительно времени t для коэффициентов Фурье компонентов магнитного поля $\bar{f}_n(r)$, $\bar{g}_n(r)$, $\bar{q}_n(r)$ находим из решений уравнений Максвелла (I.7–I.9), удовлетворяющих граничным условиям (I.10) и (I.11).

Рассматриваем для определенности случай положительных значений $n (n > 0)$. Вследствие вещественности компонентов магнитного поля коэффициенты Фурье с отрицательными значениями n должны быть комплексно сопряженными соответствующим коэффициентам с положительными n.

Решения уравнений Максвелла для коэффициентов Фурье во внутренней полости цилиндра, конечные на оси, и снаружи цилиндра, конечные на бесконечности, представим в виде

$$\bar{f}_n^{(i)}(r) = i C_n^{(i)}(p) I'_{ne}(nhr), \tag{2.4}$$

$$\bar{q}_n^{(i)}(r) = -\frac{hr}{e} \bar{g}_n^{(i)}(r) = C_n^{(i)}(p) I_{ne}(nhr),$$

$$\bar{f}_n^{(e)}(r) = i C_n^{(e)}(p) K'_{ne}(nhr), \tag{2.5}$$

$$\bar{q}_n^{(e)}(r) = -\frac{hr}{e} \bar{g}_n^{(e)}(r) = C_n^{(e)}(p) K_{ne}(nhr),$$

где штрихом обозначены производные функции Бесселя $I_{ne}(x)$, $K_{ne}(x)$ по аргументу. Коэффициенты $C_n^{(i,e)}(p)$ представляются выражениями

$$C_n^{(i)}(p) = -\frac{4\pi}{c} \bar{j}_n^{(i)} \alpha G_n^{(i)}(p) \mathcal{D}_n^{-1}(p) K'_{ne}(\alpha), \tag{2.6}$$

$$C_n^{(e)}(p) = -\frac{4\pi}{c} \bar{j}_n^{(i)} \alpha G_n^{(e)}(p) \mathcal{D}_n^{-1}(p) I'_{ne}(\alpha), \tag{2.7}$$

где

$$G_n^{(i)}(\rho)=\frac{1}{2\alpha\beta}\Big\{\varepsilon\Big(\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}+\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+\frac{2n^2\ell^2}{\alpha\beta}\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}\Big)-$$

$$-\frac{2n\ell}{x_n^2 ab}-x_n b\big(\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell-1}\big)N_{n\ell,n\ell+1}-2\frac{x_n b n^2\ell^2}{\beta^2}\Big(N_{n\ell-1,n\ell}-\tag{2.8}$$

$$-\frac{n\ell}{x_n a}\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}\Big)\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}+2\mu\beta\Big[\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+$$

$$+\frac{x_n a n^2\ell}{\alpha^2}\Big(\frac{\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}-\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell-1}}{2}N_{n\ell,n\ell+1}+\frac{\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}-\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell+1}}{2}N_{n\ell-1,n\ell}+$$

$$+\frac{n^2\ell^3}{x_n a\beta^2}\mathcal{M}^2_{n\ell,n\ell}\Big)\Big]\frac{K_{n\ell}(\alpha)}{K'_{n\ell}(\alpha)}\Big\},$$

$$G_n^{(e)}(\rho)=\frac{I_{n\ell}(\alpha)}{\alpha^2 I'_{n\ell}(\alpha)}\Big\{\varepsilon x_n a\Big[\frac{1}{2}\big(\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell+1}\big)N_{n\ell+1,n\ell}-$$

$$-\frac{n\ell}{x_n^3 a^2 b}+\frac{n^2\ell^2}{\alpha^2}\Big(N_{n\ell,n\ell+1}-\frac{n\ell}{x_n b}\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}\Big)\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}\Big]-\frac{1}{2}\Big(\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+\tag{2.9}$$

$$+\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\Big)-\frac{n^2\ell^2}{\alpha\beta}\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}+\mu\alpha\Big[\varepsilon\Big(\frac{2n^3\ell^3}{\alpha\beta}\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}+\Big(\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+$$

$$+\frac{n^2\ell^2}{\alpha\beta}\mathcal{M}_{n\ell,n\ell}\Big)\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}+\frac{x_n a n\ell}{2\alpha^2}\big(\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell-1}-\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\big)N_{n\ell,n\ell+1}+$$

$$+\frac{n^2\ell^2}{x_n^2\alpha^2\beta^2}+\frac{n^4\ell^4}{\alpha^2\beta^2}\mathcal{M}^2_{n\ell,n\ell}\Big)+\frac{n\ell}{\alpha\beta}\big(\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}-\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\big)\Big]\frac{I_{n\ell}(\beta)}{I'_{n\ell}(\beta)}\Big\},$$

$$\mathcal{D}_n(\rho)=\mu\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}I_{n\ell}(\beta)K_{n\ell}(\alpha)+$$

$$+\frac{x_n a}{2\alpha}\Big[N_{n\ell,n\ell+1}I_{n\ell}(\beta)K_{n\ell+1}(\alpha)+N_{n\ell+1,n\ell}I_{n\ell+1}(\beta)K_{n\ell}(\alpha)\Big]\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1}+\tag{2.10}$$

$$+\frac{x_n a}{2\alpha}\Big[N_{n\ell,n\ell-1}I_{n\ell}(\beta)K_{n\ell-1}(\alpha)+N_{n\ell-1,n\ell}I_{n\ell-1}(\beta)K_{n\ell}(\alpha)\Big]\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}+$$

$$+\frac{x_n^2 a^2}{4\mu\lambda^2}\Big\{\Big[-\frac{\mu^2-1}{4}(\mathcal{M}_{nl-1,nl+1}+\mathcal{M}_{nl+1,nl-1})+\frac{(\mu-1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl-1,nl-1}+$$

$$+\frac{(\mu+1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl+1,nl+1}\Big]I_{nl-1}(\beta)K_{nl-1}(\alpha)+\Big[\frac{(\mu+1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl-1,nl+1}+\frac{(\mu-1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl+1,nl-1}-$$

$$-\frac{\mu^2-1}{4}(\mathcal{M}_{nl-1,nl-1}+\mathcal{M}_{nl+1,nl+1})\Big]I_{nl-1}(\beta)K_{nl+1}(\alpha)+\Big[\frac{(\mu-1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl-1,nl+1}$$

$$-\frac{\mu^2-1}{4}(\mathcal{M}_{nl-1,nl-1}+\mathcal{M}_{nl+1,nl+1})+\frac{(\mu+1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl+1,nl-1}\Big]I_{nl+1}(\beta)K_{nl-1}(\alpha)+$$

$$+\Big[-\frac{\mu^2-1}{4}(\mathcal{M}_{nl-1,nl+1}+\mathcal{M}_{nl+1,nl-1})+\frac{(\mu+1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl-1,nl-1}+\frac{(\mu-1)^2}{4}\mathcal{M}_{nl+1,nl+1}\Big]I_{nl+1}(\beta)K_{nl+1}(\alpha)\Big\}\mathcal{M}_{nl,nl},$$

$$\mathcal{M}_{n,m}\equiv\mathcal{M}_{n,m}(a,b)=I_n(x_n a)K_m(x_n b)-I_m(x_n b)K_n(x_n a),$$

$$N_{n,m}\equiv N_{n,m}(a,b)=I_n(x_n a)K_m(x_n b)+I_m(x_n b)K_n(x_n a), \qquad (2.11)$$

$$x_n^2=q^2+n^2h^2,\quad \varepsilon=\frac{j_n^{(e)}}{j_n^{(i)}},\quad \alpha=nha,\quad \beta=nhb$$

При $a=b$, или $\sigma=0$ $(x_n=nh)$ произведения функций $G_n^{(i)}(\rho)\mathcal{D}_n^{-1}(\rho)$ и $G_n^{(e)}(\rho)\mathcal{D}_n^{-1}(\rho)$ обращаются в единицу, и значения коэффициентов $C_n^{(i)}$ и $C_n^{(e)}$, как и следовало ожидать, равны их значениям в отсутствие проводящей среды [5].

3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИФФУЗИИ ПОЛЯ

Детерминант (2.10) составлен из коэффициентов при неизвестных полях в вакууме и в проводящей среде левых частей уравнений системы (I.10), (I.11). Поэтому в выражение для детерминанта не входят функции, в соответствие с которыми меняются со временем внешние токи, возбуждающие поля. Следовательно, коэффициент диффузии поля одним и тем же при любом конкретном виде функции $f(t)$. Без предположения о малости каких-либо параметров коэффициент диффузии зависит от распределения поверхностных токов. Например, вид детерминанта для поперечного однородного поля отличается от детерминанта при индуцировании поля вдоль цилиндра [6] .

Не зависит коэффициент диффузии поля и от того диффундирует оно снаружи внутрь или наоборот.

В общем случае произвольных a и $\Delta = a - b$ корни детерминанта могут быть найдены численными методами.

Для тонких стенок, когда выполняются условия $nh\Delta \ll 1$, минимальный корень детерминанта, удовлетворяющий условию $x_n\Delta \ll 1$ находится из разложения детерминанта по степеням $nh\Delta$ и $x_n\Delta$

Воспользовавшись разложением функций Бесселя, для детерминанта получим выражение

$$\mathcal{D}_n(p) = \frac{\Delta}{\alpha^2 a}\left\{1 + \frac{\ell^2}{h^2a^2} - 2\frac{a\Delta}{\mu x^2} I'_{n\ell}(\alpha) K'_{n\ell}(\alpha)\right\}. \qquad (3.1)$$

Единственный корень детерминанта в этом приближении равен [7]

$$p = \frac{c^2}{4\pi\sigma a\Delta}\left(1 + \frac{\ell^2}{h^2a^2}\right)\frac{1}{I'_{n\ell}(\alpha) K'_{n\ell}(\alpha)}. \qquad (3.2)$$

Как видно из выражения (3.2), коэффициент диффузии поля не зависит от магнитных свойств проводящей среды.

Из условия применимости разложения по степеням $x_n\Delta \ll 1$ находим ограничение на отношение $\frac{\Delta}{a}$ вида

$$\frac{\Delta}{a} \ll -\frac{h^2a^2}{\mu(\ell^2 + h^2a^2)} I'_{n\ell}(\alpha) K'_{n\ell}(\alpha). \qquad (3.3)$$

При нарушении условия (3.3) появляются другие корни уравнения $\mathcal{D}_n(p) = 0$, однако минимальный корень (3.2), определяющий длительность переходного процесса, остается неизменным.

В дальнейшем удобно ввести формфактор

$$F_n = -\frac{2h^2a^2}{\ell^2 + h^2a^2} I'_{n\ell}(\alpha) K'_{n\ell}(\alpha). \qquad (3.4)$$

Физический смысл формфактора (3.4) очевиден. Умноженный на размерный коэффициент он дает время проникновения поля

$$\tau_n = \frac{2\pi\sigma a\Delta}{c^2} F_n. \qquad (3.5)$$

Формула (3.4) справедлива при произвольных α. Если $\alpha \ll 1$, то

$$F_n = \frac{1}{n\ell} \tag{3.6}$$

Поэтому гармоники с большим номером проникают быстрее.

В области больших значений $n\ell$ и произвольных углов формфактор (3.4) равен

$$F_n = \frac{ha}{n\ell\sqrt{h^2a^2+\ell^2}}. \tag{3.7}$$

Поскольку величина формфактора меньше единицы, то наличие распределенных поверхностных токов приводит к увеличению диффузии по сравнению с однородным полем.

4. КОЭФФИЦИЕНТЫ ЗАТУХАНИЯ ПОЛЯ

В качестве примера рассмотрим случай, когда внешний ток меняется со временем как

$$j_n(t) = j_{n0}\sin\omega t, \quad t > 0, \tag{4.1}$$

где ω – частота, j_{n0} – амплитуда тока.

Если толщина оболочки цилиндра мала по сравнению со скиновой глубиной ($\Delta \ll \delta = \frac{c}{(2\pi\mu\sigma\omega)^{1/2}}$) и периодом поля ($nh\Delta \ll 1$) то компоненты Фурье магнитного поля с учетом переходного процесса запишутся в виде

$$\left.\begin{array}{l} f_n^{(i)}(r,t) \\ q_n^{(i)}(r,t) = -\dfrac{hr}{\ell}g_n^{(i)}(r,t) \end{array}\right\} = -\frac{4\pi}{c}j_{n0}^{(i)}\alpha(\varepsilon-1)\Psi_n(t)K'_{n\ell}(\alpha)\begin{array}{l} iI'_{n\ell}(nhr) \\ I_{n\ell}(nhr), \end{array} \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_n^{(e)}(r,t) \\ q_n^{(e)}(r,t) = -\dfrac{hr}{\ell}g_n^{(e)}(r,t) \end{array}\right\} = -\frac{4\pi}{c}j_{n0}^{(i)}\alpha(\varepsilon-1)\Psi_n(t)I'_{n\ell}(\alpha)\begin{array}{l} iK'_{n\ell}(nhr) \\ K_{n\ell}(nhr), \end{array} \tag{4.3}$$

где

$$\Psi_n(t) = \left[\sin(\omega t - \Phi_n) + e^{-\frac{t}{\tau_n}}\sin\Phi_n\right]\cos\Phi_n - \tag{4.4}$$

универсальная функция, у которой длительность переходного процесса определяется выражением (3.5), фаза находится из уравнения

$$\operatorname{tg}\Phi_n = \omega\tau_n = \frac{a\Delta}{\mu\delta^2} F_n . \qquad (4.5)$$

Коэффициенты затухания внутреннего и внешнего поля, вносимого проводящей средой, равны $\cos\Phi_n$.

Рассмотрим установившийся процесс для случая тока, меняющегося в соответствии с выражением (4.I).

Компоненты Фурье $\tilde{f}_n(r,t)$, $\tilde{g}_n(r,t)$ и $\tilde{q}_n(r,t)$, описывающие установившийся процесс, согласно общему выражению (I.I3), можно представить в виде

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{f}_n^{(i)}(r,t)\\ \tilde{q}_n^{(i)}(r,t) = -\frac{hr}{\ell}\tilde{g}_n^{(i)}(r,t)\end{array}\right\} = -\frac{4\pi}{c} j_{n0}^{(i)} \alpha \mathcal{A}_n^{(i)} K_{n\ell}'(\alpha)\sin(\omega t - \Phi_n^{(i)}) \begin{array}{l} iI_{n\ell}'(nhr)\\ I_{n\ell}(nhr),\end{array} \qquad (4.6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{f}_n^{(e)}(r,t)\\ \tilde{q}^{(e)}(r,t) = -\frac{hr}{\ell}\tilde{g}_n^{(e)}(r,t)\end{array}\right\} = -\frac{4\pi}{c} j_{n0}^{(i)} \alpha \mathcal{A}_n^{(e)} I_{n\ell}'(\alpha)\sin(\omega t - \Phi_n^{(e)}) \begin{array}{l} iK_{n\ell}(nhr)\\ K_{n\ell}(nhr),\end{array} \qquad (4.7)$$

где величины

$$\mathcal{A}_n^{(i,e)} = |G_n^{(i,e)}(i\omega)|\,|\mathcal{D}_n(i\omega)|^{-1}, \quad \Phi_n^{(i,e)} = \arg\left[G_n^{(i,e)^{-1}}(i\omega)\,\mathcal{D}_n(i\omega)\right] \qquad (4.8)$$

показывают во сколько раз изменяется амплитуда поля и на какую величину смещается фаза по отношению к амплитуде и фазе поля без проводящей среды. При $\Delta = 0$ или $\sigma = 0$ $\mathcal{A}_n^{(i,e)} = 1$, $\Phi_n^{(i,e)} = 0$. Формулы (4.8) позволяют численно находить коэффициенты и фазы поля.

В случае малой скиновой глубины, когда $\frac{\Delta}{\delta} = \xi \gg 1$, $n^2h^2\delta^2 \ll 1$

$$\mathcal{A}_n^{(i)} = 2\sqrt{2}\mu(\varepsilon - 1)\frac{\delta e^{-\xi}}{\sqrt{a\,b}\,F_n}, \qquad \Phi_n^{(i)} = \xi + \frac{\pi}{4}, \qquad (4.9)$$

$$\mathcal{A}_n^{(e)} = 2\sqrt{2}\mu(\varepsilon - 1)\frac{\delta}{aF_n}, \qquad \Phi_n^{(e)} = \frac{\pi}{4}. \qquad (4.10)$$

5. ДИФФУЗИЯ ГОФРИРОВАННОГО ПОЛЯ

Рассмотрим диффузию поля, создаваемого кольцевым азимутальным током. По-видимому, этот случай в литературе не рассматривался. Результаты решения граничной задачи (I.IO), (I.II) следующие:

$$\left.\begin{matrix} f_n^{(i)}(r,\rho) \\ q_n^{(i)}(r,\rho) \end{matrix}\right\} = -\frac{4\pi}{c} j_n^{(i)} \alpha\, G_n^{(i)}(\rho)\mathcal{D}_n^{-1}(\rho) K_0'(\alpha) \quad \begin{matrix} i I_0'(nhr) \\ I_0(nhr), \end{matrix} \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{matrix} f_n^{(e)}(r,\rho) \\ q_n^{(e)}(r,\rho) \end{matrix}\right\} = -\frac{4\pi}{c} j_n^{(e)} \alpha\, G_n^{(e)}(\rho)\mathcal{D}_n^{-1}(\rho) \text{[illegible]} \quad \begin{matrix} i K_0'(nhr) \\ K_0(nhr), \end{matrix} \tag{5.2}$$

где

$$G_n^{(i)}(\rho) = \frac{1}{\alpha\beta}\left\{\varepsilon - x_n b N_{01} - \mu\beta \mathcal{M}_{11}\frac{K_0(\alpha)}{K_1(\alpha)}\right\}, \tag{5.3}$$

$$G_n^{(e)}(\rho) = \frac{\text{[illegible]}}{\alpha^2 I_0(\alpha)}\left\{1 - \varepsilon\left[x_n a N_{10} + \mu\alpha \mathcal{M}_{11}\frac{I_0(\beta)}{I_1(\beta)}\right]\right\}. \tag{5.4}$$

Выражение для детерминанта может быть получено из формулы (2.IO), если положить $\ell = 0$.

$$\mathcal{D}_n(\rho) = \mu \mathcal{M}_{11} I_0(\beta) K_0(\alpha) + \frac{x_n^2 a^2}{\mu\alpha^2}\mathcal{M}_{00} I_1(\beta) K_1(\alpha) + \frac{x_n a}{\alpha}\left[N_{10} I_1(\beta) K_0(\alpha) + N_{01} I_0(\beta) K_1(\alpha)\right]. \tag{5.5}$$

В условиях, когда $x_n \Delta \ll 1$ и $nh\Delta \ll 1$, формфактор находится из выражения (3.4)

$$F_n = 2 I_1(\alpha) K_1(\alpha). \tag{5.6}$$

При $\alpha \ll 1$ время проникновения гофрированного поля совпадает со временем проникновения однородного продольного поля [8].

При $\alpha \gg 1$ время диффузии поля

$$\tau_n = \frac{2\pi\sigma a \Delta}{c^2 n h} \tag{5.7}$$

не зависит от геометрии полости, в которую оно проникает.

В другом предельном случае малой скиновой глубины коэффициенты затухания и фазы поля равны

$$\mathcal{A}_n^{(i)} = \frac{2\sqrt{2}\mu\delta}{\sqrt{ab}\,F_n}\left\{\varepsilon^2 e^{-2\xi} - \sqrt{\frac{b}{a}}\,\varepsilon e^{-\xi}\cos\xi + \frac{b}{4a}\right\}^{1/2}, \tag{5.8}$$

$$tg\,\Phi_n^{(i)} = \frac{\varepsilon e^{-\xi}(\sin\xi + \cos\xi) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{\varepsilon e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{A}_n^{(e)} = \frac{2\sqrt{2}\mu\delta}{a F_n}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(e^{-2\xi} - \varepsilon e^{-\xi}\sqrt{\frac{b}{a}}\cos\xi + \frac{\varepsilon^2 a}{4b}\right)^{1/2}, \tag{5.10}$$

$$tg\,\Phi_n^{(e)} = \frac{e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi) - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) - \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}}. \tag{5.11}$$

6. ПРОНИКНОВЕНИЕ АЗИМУТАЛЬНОГО ПОЛЯ

Диффузия однородного поперечного поля в полый цилиндр рассмотрена в работе [6]. Здесь мы рассмотрим проникновение поля продольных поверхностных токов. Решения для поля можно найти, положив $h = 0$ в выражениях (2.4–2.10) для винтового поля

$$f_n^{(i)}(r,p) = i g_n^{(i)}(r,p) = -\frac{4\pi i}{c}\bar{j}_{nz}^{(i)}\mathcal{D}_n^{-1}(p)\frac{n G_n^{(i)}(p)}{q^2 b^2}\left(\frac{r}{b}\right)^{n-1}, \tag{6.1}$$

$$f_n^{(e)}(r,p) = i g_n^{(e)}(r,p) = \frac{4\pi i}{c}\bar{j}_{nz}^{(i)}\mathcal{D}_n^{-1}(p)\frac{n G_n^{(e)}(p)}{q^2 a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, \tag{6.2}$$

где

$$G_n^{(i)}(p) = \varepsilon - n(\mu-1)\mathcal{M}_{n\ell,n\ell} - qa\,N_{n\ell-1,n\ell}, \tag{6.3}$$

$$G_n^{(e)}(p) = \varepsilon\left[n(\mu-1)\mathcal{M}_{n\ell,n\ell} + qb\,N_{n\ell,n\ell+1}\right] - 1, \tag{6.4}$$

$$\mathcal{D}_n(p) = \frac{(\mu+1)^2}{4\mu}\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell+1} - \frac{\mu^2-1}{4\mu}\left(\mathcal{M}_{n\ell-1,n\ell-1} + \mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell+1}\right) + \frac{(\mu-1)^2}{4\mu}\mathcal{M}_{n\ell+1,n\ell-1}. \tag{6.5}$$

В области $q\Delta \ll 1$ и $\frac{\Delta}{a} \ll 1$ для тока гармонически изменяющегося во времени компоненты поля можно представить в виде

$$f_n^{(i)}(r,t) = -i g_n^{(i)}(r,t) = -\frac{2\pi i}{c} j_{nz0}^{(i)}(\varepsilon - 1)\psi_n(t)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}, \tag{6.6}$$

$$f_n^{(e)}(r,t) = i g_n^{(e)}(r,t) \cdot \frac{2\pi i}{c} j_{nz0}^{(i)}(\varepsilon - 1)\psi_n(t)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}. \tag{6.7}$$

Легко заметить, что радиальная и азимутальная компоненты проникают за оболочку одновременно, а внешнее и внутреннее поля изменяются во времени синфазно.

При малых $(q b)^{-1} \ll 1$ и $\frac{\delta}{\Delta} \ll 1$ поля описываются выражениями

$$f_n^{(i)}(r,t) = -i g_n^{(i)}(r,t) = -\frac{4\pi i}{c} j_{nz0}^{(i)} A_n^{(i)} \sin\left[\omega t - \varphi_n^{(i)}\right]\left(\frac{r}{b}\right)^{n-1}, \tag{6.8}$$

$$f_n^{(e)}(r,t) = i g_n^{(e)}(r,t) = \frac{4\pi i}{c} j_{nz0}^{(i)} A_n^{(e)} \sin\left[\omega t - \varphi_n^{(e)}\right]\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}, \tag{6.9}$$

а коэффициенты затухания и фазы полей есть

$$A_n^{(i)} = \sqrt{2}\mu e^{-\xi}\sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{\delta}{b}\left(\varepsilon^2 + \frac{a}{4b}e^{2\xi} - \varepsilon\sqrt{\frac{a}{b}}\,e^{\xi}\cos\xi\right)^{1/2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n^{(i)} = \frac{\varepsilon(\cos\xi + \sin\xi) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,e^{\xi}}{\varepsilon(\cos\xi - \sin\xi) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}\,e^{\xi}}, \tag{6.10}$$

$$A_n^{(e)} = \sqrt{2}\mu e^{-\xi}\sqrt{\frac{b}{a}}\,\frac{\delta}{a}\left(\varepsilon^2 \frac{b}{4a}e^{2\xi} - \varepsilon\sqrt{\frac{b}{a}}\,e^{\xi}\cos\xi + 1\right)^{1/2}, \tag{6.11}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n^{(e)} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,e^{\xi} - \cos\xi - \sin\xi}{\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\,e^{\xi} - \cos\xi + \sin\xi}.$$

Без внутреннего поверхностного тока амплитуда $A_n^{(i)}$ является экспоненциально малой величиной. В случае, когда $j_{nz}^{(e)} = 0$ малой величиной будет коэффициент затухания внешнего поля.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Bean C.P., De Blois R.W. and Nesbitt L.B. Eddy-Current Method for Measuring the Resistivity of Metals. - "Journ. Appl. Phys.", v.30, p.1976-1980, 1959.

2. Ананьев Л.М., Воробьев А.А., Горбунов В.И. Индукционный ускоритель электронов - бетатрон. М., Госатомиздат, 1961, 350 с.

3. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М., "Мир", 1972, 392 с.

4. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.-Л., Гостехиздат, 1948, 539 с.

5. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Геометрия магнитного поля. - - В кн.: Вопросы теории плазмы . Вып. 2., М., Госатомиздат, 1963, с. 264.

6. Jaeger J.C. Magnetic Screening by Hollow Circular Cylinders. - "Phil. Mag.", v. 29, p.18-31, 1940.

7. Алексин В.Ф., Романов С.С. Диффузия квазистационарных винтовых магнитных полей внутрь цилиндрических камер. - "ЖТФ", 1974, т. 44, с. 1877-1882.

8. Алексин В.Ф., Романов С.С. Проникновение квазистационарных магнитных полей внутрь проводящих камер. - "ЖТФ", 1973, т. 43, с. 1153-1162.

ДИФФУЗИЯ СТЕЛЛАРАТОРНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ
В ПОЛЫЕ КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРЫ

В.Ф.Алексин, С.С.Романов

Ответственный за выпуск С.С.РОМАНОВ

Подписано к печати 22 апреля 1975 г., Т-06945, формат 60х84/16
I уч.-изд. л. Тираж 300. Заказ 546. Цена 10 коп.

Харьков - 108, ротапринт ХФТИ АН УССР