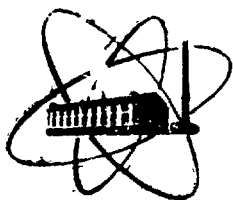


547605984

ФЭИ-618



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н. С. РАБОТНОВ, А. А. СЕРЕГИН

A33

**Проницаемость N - горбого барьера
в квазиклассическом приближении**

Обнинск — 1975

ФЭИ-618

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Н.С.Работнов, А.А.Сергин

ПРОНИЦАЕМОСТЬ \mathcal{N} - ГОРБОГО БАРЬЕРА
В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Обнинск-1975

УДК 530.145

М- 17

А н н о т а ц и я

Рассматривается проицаемость N -горбого потенциального барьера произвольной формы в квазиклассическом приближении. Получены аналитические выражения для коэффициентов проицаемости P_N и отражения R_N для случая одинаковых барьеров. Вычисляется среднее значение коэффициента проицаемости \bar{P}_N в зависимости от энергии.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в физике деления атомного ядра с большим успехом используется представление о двугорбом барьере деления, выдвинутое Струтинским [1]. Согласно этой модели барьер деления состоит из двух горбов, разделенных ямой. Наличие такой структуры у барьера деления приводит к ряду интересных следствий. Квазиклассические формулы для проницаемости двугорбого барьера произвольной формы получены в работе [2]. Поэтому представляет интерес обобщить полученные результаты на N -горбый потенциальный барьер. Результаты могут быть полезны также в физике твердого тела.

В данной работе в квазиклассическом приближении рассматривается проницаемость произвольного N -горбого барьера (горбы разные) и детально рассчитывается случай N одинаковых горбов.

ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО N -ГОРБОГО БАРЬЕРА (БАРЬЕРЫ РАЗНЫЕ)

Как уже упоминалось во введении, нас интересует вероятность проникновения частицы массой μ и энергией E через сложный барьер $V(x)$, изображенный на рис. 1. Мы предполагаем, что применимо квазиклассическое рассмотрение.

Пусть на барьер $V(x)$, изображенный на рис. 1, справа налево движется поток частиц. Волновую функцию частицы в квазиклассическом приближении легко записать в каждой отдельной области, ограниченной точками поворота a_i и b_i , определяемыми из условия $V(x)=E$.

В области $x < a_1$ волновая функция описывает частицу, прошедшую сквозь барьер, и имеет вид

$$\psi_0 = \frac{c_0}{\sqrt{p}} \exp \left\{ i/\hbar \int_x^{a_1} p(x') dx' \right\} \quad (1)$$

где $p(x) = \sqrt{2\mu(E - V(x))}$

В области $x > b_N$ имеем суперпозицию падающей и отраженной волны

$$\Psi_N = \frac{C_N}{\sqrt{p}} \exp\left\{-i/k \int_{b_N}^x p(x') dx'\right\} + \frac{D_N}{\sqrt{p}} \exp\left\{i/k \int_{b_N}^x p(x') dx'\right\} \quad (2)$$

В этих выражениях C_0 , C_N и D_N - постоянные коэффициенты, которые "сшиваются" связываются между собой. Для нахождения этой связи отметим, что в любой области, ограниченной b_i и a_{i+1} , волновую функцию можно представить в виде суперпозиции двух волн, движущихся в разные стороны с коэффициентами C_i и D_i . Так волновая функция в области b_{N-1} и a_N имеет вид

$$\Psi_{N-1} = \frac{C_{N-1}}{\sqrt{p}} \exp\left\{-i/k \int_{b_{N-1}}^x p(x') dx'\right\} + \frac{D_{N-1}}{\sqrt{p}} \exp\left\{i/k \int_{b_{N-1}}^x p(x') dx'\right\} \quad (3)$$

Эту волновую функцию "сошьем" с волновой функцией в N -ой области. Для этого сначала продолжим (3) под барьер, воспользовавшись для этого формулами из приложения I [3], а затем продолжим ее в область справа от точки поворота b_N . В этой области она будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \Psi_{N-1}(x > b_N) = & \frac{1}{\sqrt{p}} (C_{N-1} e^{-i\bar{\sigma}_{N-1} a} + i D_{N-1} e^{i\bar{\sigma}_{N-1} b}) \exp\left\{-i/k \int_{b_N}^x p(x') dx'\right\} \quad (4) \\ & + \frac{1}{\sqrt{p}} (-i C_{N-1} e^{-i\bar{\sigma}_{N-1} b} + D_{N-1} e^{i\bar{\sigma}_{N-1} a}) \exp\left\{i/k \int_{b_N}^x p(x') dx'\right\}. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{N-1} &= \frac{1}{k} \int_{b_{N-1}}^{a_N} \sqrt{2\mu(E-V(x))} dx, \\ \bar{\tau}_{N-1} &= \frac{1}{k} \int_{a_{N-1}}^{b_{N-1}} \sqrt{2\mu(V(x)-E)} dx, \\ a &= e^{\bar{\tau}_N} + 1/4 e^{-\bar{\tau}_N}, \\ b &= e^{\bar{\tau}_N} - 1/4 e^{-\bar{\tau}_N}. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны в области $x > b_N$ волновая функция, как уже упоминалось выше, имеет вид (2). Сравнивая эти выражения можем установить связь между C_{N-1} , D_{N-1} , C_N и D_N

$$\begin{cases} C_N = C_{N-1} e^{-i\sigma_{N-1}} a + i D_{N-1} e^{i\sigma_{N-1}} b \\ D_N = D_{N-1} e^{+i\sigma_{N-1}} a - i C_{N-1} e^{-i\sigma_{N-1}} b. \end{cases} \quad (6)$$

Эти соотношения удобно переписать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_N e^{-i\sigma_{N-1}} & i b_N e^{i\sigma_{N-1}} \\ -i b_N e^{-i\sigma_{N-1}} & a_N e^{i\sigma_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{pmatrix} = A_N \begin{pmatrix} C_{N-1} \\ D_{N-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Аналогичные соотношения можно получить между любыми двумя соседними областями и таким образом найти связь между C_0, D_0, C_N и D_N

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = A_N A_{N-1} \dots A_1 \begin{pmatrix} C_0 \\ D_0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где A_i - матрица, связывающая коэффициенты i -й области с $i-1$.

По условию задачи в области $x < a_1$ имеется только прошедшая волна, поэтому $D_0 = 0$, а C_0 можно положить равным 1, т.к. волновая функция определяется с точностью до постоянной. Тогда C_N и D_N определяются из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = A_N A_{N-1} \dots A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Зная связь между коэффициентами C_i и D_i , мы полностью определим волновые функции частицы во всей области и найдем коэффициенты отражения R_N и прохождения P_N

$$R_N = \frac{D_N^* D_N}{C_N^* C_N}, \quad (10)$$

$$P_N = \frac{1}{C_N^* C_N},$$

где C_N^* и D_N^* определяются следующим матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} C_N^* \\ D_N^* \end{pmatrix} = (1 \ 0) (A_1^+ A_2^+ \dots A_N^+).$$

Если частица может удерживаться полем, так что образуются квази-стационарные состояния, то эти квазистационарные состояния определяются уравнением

$$C_N = (A_N A_{N-1} \dots A_1)_{11} = 0. \quad (II)$$

Проверим полученные общие соотношения на примере случая, когда все N горбов одинаковы и сравним с результатами работы [4], в которой подробно рассматриваются результаты именно для этого частного случая.

ПРОНИЦАЕМОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ N ГОРБОВ ОДИНАКОВОЙ ФОРМЫ

В этом случае $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_N = \sigma$ и $\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_N = \tau$, а коэффициенты C_N и D_N определяются согласно (9) из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} C_N \\ D_N \end{pmatrix} = A^N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$(C_N) = (A^N)_{11}, \quad (D_N) = (A^N)_{21}, \quad (I2)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-i\sigma} (\tau + 1/4 e^{-\tau}) & i e^{i\sigma} (e^{-\tau} - 1/4 e^{-\tau}) \\ -i e^{-i\sigma} (e^{-\tau} - 1/4 e^{-\tau}) & e^{i\sigma} (\tau + 1/4 e^{-\tau}) \end{pmatrix}$$

Таким образом, для нахождения C_N и D_N нужно уметь вычислять матричные элементы от различных степеней матрицы A . Для этой цели воспользуемся методом, предложенным в задаче II, § 2 [3]:

Рассмотрим матрицу

$$S(t) = 1 + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \dots + \frac{t^N}{N!} A^N + \dots = e^{tA},$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS}{dt} = AS \quad (I3)$$

с начальным условием $S(0)=I$.

Матричное уравнение (13) перепишем в явном виде

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

а затем распишем компоненты

$$\begin{cases} \frac{dS_{11}}{dt} = \alpha S_{11} + \beta S_{21} \\ \frac{dS_{21}}{dt} = \gamma S_{11} + \delta S_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dS_{12}}{dt} = \alpha S_{12} + \beta S_{22} \\ \frac{dS_{22}}{dt} = \gamma S_{12} + \delta S_{22} \end{cases} \quad (14)$$

Как окажется в дальнейшем для нас представляет интерес первая пара уравнений (14). Будем искать решение в виде

$$S_{11} = f e^{\lambda t}, \quad S_{21} = g e^{\lambda t}$$

Подставляя эти значения в (14), получаем характеристическое уравнение для определения λ

$$\lambda^2 - 2\lambda(e^{\sigma} + 1/4 e^{-\sigma}) \cos \sigma + 1 = 0,$$

в которое подставлены явные значения компонент матрицы A .

Так как $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, то $\lambda_{1,2} = e^{\pm i x}$, причем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos x = 2(e^{\sigma} + 1/4 e^{-\sigma}) \cos \sigma.$$

Отсюда найдем, что

$$S_{11} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [(\lambda_1 - a e^{i\sigma}) e^{\lambda_1 t} - (\lambda_2 - a e^{i\sigma}) e^{\lambda_2 t}],$$

$$S_{21} = -i \frac{b e^{-i\sigma}}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Поскольку коэффициенты C_N и D_N выражаются через N -ые производные от S_{11} и S_{21} по t , то

$$C_N = \left(\frac{d^N S_{11}}{dt^N} \right)_{t=0} = \frac{1}{\sin x} [\sin(N+1)x - a e^{i\sigma} \sin Nx], \quad (15)$$

$$D_N = \left(\frac{d^N S_{21}}{dt^N} \right)_{t=0} = -i \frac{b e^{-i\sigma}}{\sin x} \sin Nx.$$

Зная C_N и D_N по формулам (10) найдем

$$P_N = \left[1 + \left(e^{\tau} + \frac{1}{4} e^{-\tau} \right)^2 \left(\frac{\sin N x}{\sin x} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$R_N = \left(e^{\tau} - \frac{1}{4} e^{-\tau} \right) \left(\frac{\sin N x}{\sin x} \right)^2 / \left[1 + \left(e^{\tau} + \frac{1}{4} e^{-\tau} \right)^2 \left(\frac{\sin N x}{\sin x} \right)^2 \right], \quad (16)$$

причем легко показать, что $P_N + R_N = 1$.

Для $N = 1$, если ввести обозначения $\rho = e^{-2\tau}$, получаем общеизвестные формулы

$$P_1 = \frac{16\rho}{(4+\rho)^2} \approx \rho, \quad R_1 = \frac{(4-\rho)^2}{(4+\rho)^2} \approx 1.$$

Формулы (16) можно переписать через P_1 и R_1 следующим образом

$$P_N = \left[1 + \frac{R_1}{P_1} \frac{\sin^2 N x}{\sin^2 x} \right]^{-1}, \quad (17)$$

$$R_N = \frac{R_1}{P_1} \frac{\sin^2 N x}{\sin^2 x} / \left[1 + \frac{R_1}{P_1} \frac{\sin^2 N x}{\sin^2 x} \right].$$

Найдем теперь квазистационарные состояния в данной задаче. Для этого согласно (II) нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos \sigma = \sqrt{P_1} \cos x \\ \frac{1}{\sin x} \left[\sin(N+1)x - \frac{1}{\sqrt{P_1}} e^{i\sigma} \sin N x \right] = 0. \end{cases}$$

Так как в квазиклассическом приближении $\rho_1 \ll 1$, то с учетом малости ρ_1 можно получить

$$\begin{aligned} \sigma &= \pi \left(s + \frac{1}{2} \right) + (-1)^{s+1} \arcsin \left(\sqrt{\rho_1} \cos x \right), \\ x &= \frac{\pi n}{N} + \frac{i}{N} \operatorname{Arsh} \left(\sqrt{\frac{R_1}{P_1}} \sin \frac{\pi n}{N} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $S = 0, 1, \dots$ нумерует энергетические состояния в отдельной яме, а $n = 1, 2, \dots, N-1$ нумерует $N-1$ подуровня, на которые расщепляется каждый S -ый уровень в яме. Таким образом, происходит расщепление каждого уровня в яме на $N-1$ подуровня, которые составляют зону. Из уравнения (18) можно получить как условия квантования подуровня

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E_s^n - V(x))} dx = \hbar \left(s + \frac{1}{2} \right) + (-1)^{s+1} \arcsin \left(\sqrt{P_2} \cos \frac{\pi n}{N} \right) = \pi \left(s + \frac{1}{2} \right) + (-1)^{s+1} \sqrt{P_2} \cos \frac{\pi n}{N}$$

так и их ширину

$$\Gamma = \frac{\hbar \omega}{\pi N} \frac{\sqrt{P_2} \sin \frac{\pi n}{N}}{\sqrt{1 - P_2 \cos^2 \frac{\pi n}{N}}} \operatorname{Arsh} \left(\sqrt{\frac{P_1}{R_1}} \sin^2 \frac{\pi n}{N} \right) \approx \frac{\hbar \omega}{\pi N} \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{R_1}} \sin^2 \frac{\pi n}{N}$$

где

$$\frac{\pi}{\omega} = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - V(x))}}$$

Так как подуровни образуют зону, то ширина этой зоны $\Delta E_s = E_s^{N+1} - E_s^N$ определяется выражением

$$\Delta E_s = \frac{2}{\pi} \hbar \omega \arcsin \left(\sqrt{P_2} \cos \frac{\pi}{N} \right)$$

Из (17, 18) видно, что при $E = E_s^N$, $P_N = 1$, т.е. наблюдается резонансная проницаемость N -горбого барьера. Внутри зоны проницаемость резко меняется. Так в середине зоны $P_N = P_1$, а по краям при $N \gg 1$, $P_N \approx \left[1 + \frac{2}{N^2} \right]^{-1}$. Наименьшая проницаемость наблюдается в середине между зонами, в этом случае

$$P_N \approx P^N / 2^{N-2}$$

На рис. 2 показана энергетическая зависимость проницаемости N -горбого барьера, которая дает наглядное представление о изменении проницаемости. Выражение (17) по проницаемости N -горбого барьера совпадает с результатами, полученными другим методом в опубликованной недавно работе [4].

СРЕДНЯЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ N -ГОРБОГО БАРЬЕРА

Выше мы вычисляли проницаемость N -горбого барьера как функцию E . Однако представляет интерес средняя проницаемость, т.е. проницаемость усредненная по интервалу энергии

$$\bar{P}_N(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E - \frac{\Delta E}{2}}^{E + \frac{\Delta E}{2}} P_N(E) dE \quad (19)$$

Вычисление этого интеграла уже для $N = 3$ представляет большую трудность. Поэтому представляет интерес оценить эту величину, без вычисления интеграла. Это можно сделать, предполагая, что известна проницаемость каждого барьера $P^{(i)}(E)$.

Пусть средняя вероятность частицы пройти N -! барьер и попасть в первую (см. рис 1)

ему будет $\bar{P}_{N-1}(E)$. Из первой ямы он может вернуться назад с вероятностью $\bar{P}_{N-1}(E)$ или же пройти барьер с вероятностью $P^{(N)}$. Таким образом, средняя вероятность пройти N горбов можно представить следующим образом

$$\bar{P}_N(E) = \frac{P^{(N)} \cdot \bar{P}_{N-1}(E)}{P^{(N)} + \bar{P}_{N-1}(E)} \quad (20)$$

Повторяя рассуждения для $N-1$ барьера, можно найти \bar{P}_{N-1} через $\bar{P}_{N-2}(E)$ и $P^{(N-1)}$ и т.д. В результате получаем, что

$$\bar{P}_N(E) = \left[\frac{1}{P^{(1)}} + \frac{1}{P^{(2)}} + \dots + \frac{1}{P^{(N)}} \right]^{-1} \quad (21)$$

Для случая 2-х горбого барьера эта формула совпадает с формулой, полученной интегрированием (17) по интервалу $k\omega$, где $k\omega$ - расстояние между уровнями в яме.

Для случая N одинаковых горбов получаем

$$\bar{P}_N(E) = \frac{P_1}{N} \quad (22)$$

т.е. проницаемость падает обратно пропорционально числу горбов.

Представляет интерес случай, когда проницаемость одного барьера много меньше проницаемости всех других барьеров. Например, $P_1 \ll P_2, P_1 \ll P_3, \dots$ и т.д. Тогда проницаемость такого N - горбого барьера определяется проницаемостью одного этого барьера.

$$\bar{P}_N(E) \approx P_1$$

В заключение авторы выражают благодарность за полезные дискуссии А.В.Игнатьку и Д.В.Соколову.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М.Струтинский. Nucl.Phys. A95, 420, 1967.
Nucl.Phys. A122,1, 1968.
2. А.В.Игнатюк, Н.С.Работнов, Г.Н.Смиренин. Phys.Lett., 29B,
209, 1969.
3. И.И.Гольдман, В.Д.Кривченков. Сборник задач по квантовой ме-
ханике. Гостехиздат, Москва, 1957.
4. В.В.Ульянов. УФЖ, 19, 2046, 1974

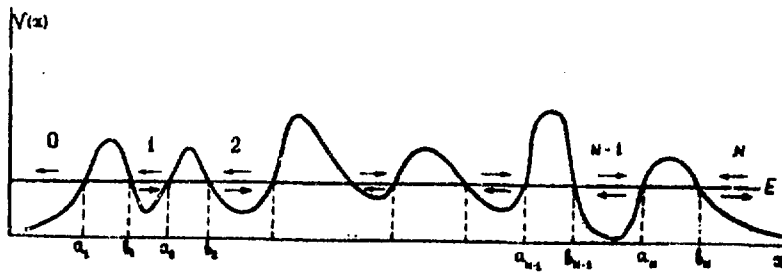


Рис.1. Форма потенциальной энергии $V(x)$, проницаемость которой мы интересуемся.

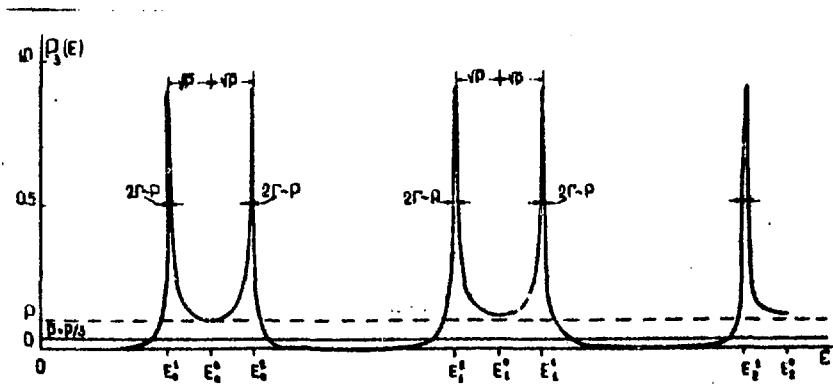


Рис.2. Проницаемость 3-х горбого барьера в зависимости от энергии падающей частицы. Здесь $\rho = 0.1$ - проницаемость одного барьера; $\hbar\omega = 1$ - энергия между зонами, $\bar{\rho} = \rho/3$ - средняя проницаемость, E_1^o - энергия уровня в отдельной яме, E_1^c - энергия подуровня.

Препринт ФЭИ-618. Т-10375 от 30.07.75 г. Объем 0,6 уч.-изд. л.
Тираж 105 экз. Цена 6 коп. Заказ № 574.

Отпечатано на ротационной машине ФЭИ, август 1975 г.

