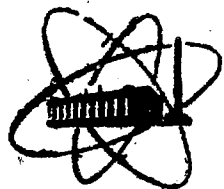


SU7702516

ФЗИ-591



**ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

*В. С. ФЕДOTOVСКИЙ*

*E11*

**ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ  
В ДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ**

**Обинок — 1975**

ФЗИ 591

**ОБННС-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**В.С.Федотовский**

**ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФУЗИЯ ЧАСТИЦ  
В ДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ СО СКОЛЬЖЕНИЕМ**

**ОБНИНСК-1975**

УДК - 532.529.6

И-17

#### Аннотация.

Рассматривается процесс турбулентной диффузии частиц в дисперсном потоке со скольжением. На основе спектральной теории проводится расчет коэффициента радиальной диффузии частиц. Показано, что в случае достаточно больших относительных скоростей частиц, коэффициент диффузии пропорционален квадрату поперечного масштаба для радиальных пульсаций скорости несущей среды, квадрату интенсивности пульсаций скорости, и обратно пропорционален времени релаксации частиц и квадрату относительной скорости. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными.

### Условные обозначения.

- $a$  - радиус частицы,
- $V$  - объем частицы,
- $\rho, \rho_0$  - плотности несущей среды и частицы,
- $u, v$  - скорости несущей среды и частицы,
- $u', v'$  - радиальные пульсации скорости несущей среды и частицы,
- $w$  - относительная скорость,
- $U$  - средняя скорость несущего потока,
- $T_0$  - время релаксации частицы,
- $E^*(\omega), E_0(\omega)$  - спектральные плотности пульсаций скорости несущей среды и частицы,
- $R_E(\tau), R_L(\tau)$  - эйлерова и лагранжева временные корреляции,
- $L_E, L_L$  - эйлеров и лагранжев пространственные макромасштабы,
- $T_E, T_L$  - эйлеров и лагранжев временные макромасштабы,
- $g(x)$  - поперечная корреляция радиальных пульсаций скорости несущей среды,
- $L_g$  - макромасштаб радиальных пульсаций скорости в направлении движения потока,
- $\omega$  - круговая частота.

Аналитические и экспериментальные исследования турбулентной диффузии основываются на связи между коэффициентом турбулентной диффузии  $D$  и дисперсией смещений частиц  $\overline{\sigma^2(t)}$

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \overline{\sigma^2(t)} \quad (1)$$

где

$$\overline{\sigma^2(t)} = 2\overline{u'^2} \int_0^t \int_0^{\tau} R_L(\tau) d\tau dt' \quad (2)$$

а  $R_L(\tau)$  - лагранжев временной коэффициент корреляции.

Соотношения (1) и (2) были получены Тейлором [1] при статистическом описании турбулентной диффузии жидких частиц среды в однородном, изотропном турбулентном потоке. В предельных случаях малых и больших времен диффузии соотношения для дисперсий смещений имеют вид

$$\overline{\sigma^2(t)} = \overline{u'^2} t^2 \quad \text{при } t \ll T_L \quad (3)$$

и

$$\overline{\sigma^2(t)} = 2\overline{u'^2} T_L t \quad \text{при } t \gg T_L \quad (4)$$

Здесь  $\overline{u'^2}$  - дисперсия пульсаций скорости,  $T_L = \int_0^\infty R_L(\tau) d\tau$  - лагранжев временной макромасштаб.

При исследовании турбулентной диффузии сферических частиц, плотность которых отлична от плотности среды, в ряде работ [2,3] использовались соотношения (1-4), где в качестве  $u'$ ,  $R_L$  и  $T_L$  принимали интенсивность пульсаций скорости частиц, лагранжеву временную корреляцию и лагранжев временной масштаб для частиц. В большинстве работ принималось, что частицы движутся со средней скоростью несущего потока.

Для расчета пульсационных характеристик движения частиц обычно используется уравнение движения частицы, находящейся в пространственно неизменном поле скоростей, полученное Ченгом [4] или обобщенное на случай движения частиц в переменном поле скоростей несущей среды нелинейное уравнение Корсинно-Ламли [4].

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} = & \frac{3\rho}{2\rho_0 + \rho} \left[ \frac{d}{dt} u_i - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right] + \frac{2\rho}{2\rho_0 + \rho} \left( \frac{g\nu}{2a^2} [u_i - v_i] + \right. \\ & \left. + [u_k - v_k] \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{18\rho}{2\rho_0 + \rho} \frac{\sqrt{\nu}}{\pi} \int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} [u_i - v_i] \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} \end{aligned} \quad (5)$$

Рассматривая движение частиц в турбулентном потоке, Ламли предположил, что а) эйлерово поле скоростей однородно, изотропно и стационарно, б) размеры частиц меньше микромасштаба турбулентности, в) время релаксации частиц меньше временного микромасштаба турбулентности.

При таких предположениях уравнение Ламли [5], записанное в дифференциальной форме имеет вид

$$T_0 \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} + \frac{d \xi_i}{dt} = u_i(\xi_i, t) \quad (6)$$

где  $T_0 = \frac{2 \rho_0 a}{9 \nu \rho}$  - время релаксации частицы,  $\xi_i$  - лагранжева координата частицы,  $u_i$  - эйлерово поле скоростей несущей среды.

Гинзберг [5] применил уравнение (6) для случая движения частиц с некоторой скоростью осаждения  $W$  в вертикальном турбулентном потоке.

При скорости осаждения  $W$  намного большей интенсивности пульсаций скорости несущей среды  $u'$ , в [5] было получено соотношение для коэффициента радиальной турбулентной диффузии частиц в виде

$$D_0 = \frac{\overline{u'^2}}{W} \frac{L_E}{2} \quad (7)$$

где  $L_E$  - эйлеров пространственный макромасштаб.

В работе Крамера и Делья [6] рассчитывалось отношение коэффициентов радиальной диффузии частиц и несущей среды. Исходя из предположения о том, что лагранжева скорость несущей среды определяется единственной характерной частотой турбулентных пульсаций скорости, а временной макромасштаб движения частиц равен  $\Lambda_L / u' + W$ , в [6] было получено

$$\frac{D_0}{D} = \frac{1}{S} \left[ \frac{1}{1 + \frac{K^2}{4} S^2} \right] \quad (8)$$

где  $S = 1 + \frac{W}{u'}$ ,  $K = \frac{4 u' T_0}{\Lambda_L}$ .

Во многих практических задачах требуется знать коэффициенты турбулентной диффузии частиц, времена релаксации которых относятся к временной микромасштаб и даже макромасштаб турбулентности.

Соотношение Гинзберга ( 7 ) , полученное в предположении о том, что время релаксации частиц мало по сравнению с временным микромасштабом турбулентности неприменимо в таких случаях. Соотношение же Крамера и Делью (8) не учитывает спектрального распределения энергии турбулентных пульсаций скорости несущей среды по частотам.

В настоящей работе на основе спектральной теории проводится расчет коэффициента радиальной турбулентной диффузии частиц, имеющих большие времена релаксации, при достаточно больших относительных скоростях движения частиц.

Рассмотрим пульсационное движение частиц в направлении нормальном к средней скорости турбулентного потока. Пусть частицы движутся вдоль по потоку с относительной скоростью  $W$ . Примем, что концентрация частиц достаточно мала и соударениями частиц можно пренебречь. Будем считать также, что частицы не влияют на турбулентные характеристики несущего потока.

На частицы воздействуют пульсации скорости несущей среды, характеризующиеся некоторой спектральной плотностью. Под действием случайных пульсаций скорости несущей среды, частицы будут совершать пульсационные движения со скоростями, являющимися случайными функциями времени.

Если движение частицы можно описать линейным дифференциальным уравнением, то спектральная плотность пульсаций скорости частиц легко определяется. Так как случайную функцию можно представить в виде канонического разложения по координатным (неслучайным) функциям (например по синусам) [ 7 ] , то в таком случае достаточно знать реакцию частицы на воздействие пульсаций скорости несущей среды, изменяющихся с некоторой частотой по гармоническому закону.

Определим для этих условий отношение квадратов амплитуд пульсаций скорости частиц и несущей среды в зависимости от частоты пульсаций скорости среды.

Выражение для силы сопротивления, действующей на сферическую частицу, движущуюся со скоростью  $v$  (  $t$  ) в вязкой жидкости имеет вид [ 8 ] .

$$F_1(t) = 2\pi \rho a^3 \left\{ \frac{1}{3} \frac{dv}{dt} + \frac{3\nu}{a^2} v + \frac{3}{a} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{dv}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\} \quad (9)$$

Здесь первый член в правой части соответствует инерционной силе при потенциальном обтекании сферы, второй член -

сила вязкого трения Стокса и третий член учитывает нестационарность движения частицы (сила Бассе). При движении частицы по гармоническому закону  $v(t) = v_0 \sin \omega t$ , сила сопротивления будет [8]

$$F_1(t) = 6\pi\gamma r a \left(1 + \frac{a}{\delta}\right) + 3\pi\gamma r a^2 \left(\delta + \frac{2}{3}a\right), \quad (10)$$

где  $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  - толщина пограничного слоя, образующегося на поверхности колеблющейся сферы.

Если же движение сферической частицы вызвано движением элемента среды, содержащего эту частицу, то кроме силы сопротивления на частицу действует и "выталкивающая" сила, связанная с градиентом давления в элементе среды. Градиент давления в элементе среды определяется ускорением этого элемента и силой трения, действующий на элемент со стороны окружающей жидкости

$$-\frac{dP}{dx_i} = \rho \frac{du_i}{dt} - \mu \frac{d^2 u_i}{dx_j^2}. \quad (11)$$

Рассматривая движение частицы в турбулентном потоке, заметим, что основную роль в пульсационном движении частиц играют высокочастотные (крупномасштабные) движения несущей среды, для которых членом  $\mu \frac{d^2 u_i}{dx_j^2}$  можно пренебречь. Поэтому, силу, связанную с градиентом давления в элементе среды, приблизительно можно записать в виде

$$F_2 \approx V \rho \frac{du}{dt}, \quad (12)$$

где  $V$  - объем частицы.

Уравнение движения частицы, находящейся в одном и том же элементе среды, движущемся по гармоническому закону, будет

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{V_0 + \beta} v = \left(\frac{V_0 + \beta}{V_0 + \beta}\right) \frac{du}{dt} + \frac{\alpha}{V_0 + \beta} u, \quad (13)$$

где  $\alpha = 6\pi\gamma r a \left(1 + \frac{a}{\delta}\right)$  - коэффициент трения,

$\beta = \frac{2}{3}\pi\gamma r a^2 \left(1 + \frac{2}{3}\frac{a}{\delta}\right)$  - присоединенная масса частицы.

В стационарном и пространственно неоднородном (неоднородность изменяется по гармоническому закону) поле скоростей на частицу, движущуюся в направлении неоднородности с некоторой скоростью, будет действовать только сила сопротивления. ("Выталкивающая" сила равна нулю). В этом случае уравнения движения частицы будет иметь вид



$$\frac{dv}{dt} + \frac{a}{V_{p0} + \beta} v = \frac{F}{V_{p0} + \beta} \frac{dU}{dt} + \frac{a}{V_{p0} + \beta} U. \quad (14)$$

В этом уравнении  $U(t)$  является полем скорости несущей среды в системе координат, движущейся со средней скоростью частицы, и изменяется по закону  $U(t) = U_0 \sin \omega t$ .

Из уравнения (14) следует, что отношение квадратов амплитудных значений скоростей частицы и среды равно

$$\frac{v_0^2}{U_0^2} = f(\omega) = \frac{1 + \left(\frac{\beta}{a}\right)^2 \omega^2}{1 + \left(\frac{V_{p0} + \beta}{a}\right)^2 \omega^2}. \quad (15)$$

В предельном случае при  $\rho_0 \gg \rho$  и, когда присоединенная масса частицы пренебрежимо мала, а сила сопротивления выражается законом Стокса, уравнение движения частицы имеет простой вид

$$\frac{dv}{dt} = \frac{9\nu\rho}{2a^2\rho_0} (U - v) = \frac{U - v}{T_0}. \quad (16)$$

В этом случае отношение квадратов амплитудных значений скорости частицы и несущей среды равно

$$\frac{v_0^2}{U_0^2} = f^*(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T_0)^2}. \quad (17)$$

Функции  $f(\omega)$  и  $f^*(\omega)$  для частиц, времена релаксации которых составляют  $5 \cdot 10^{-3}$ ,  $5 \cdot 10^{-2}$ ,  $5 \cdot 10^{-1}$ , 5 сек, представлены на рис. 1. Как видно из рисунка, отличие функций  $f(\omega)$  и  $f^*(\omega)$  наиболее существенно для частиц, имеющих малые времена релаксации ( $T_0 < 0,5$  сек.) Кроме того, это различие является наибольшим в области высоких частот.

Таким образом, для частиц, времена релаксации которых достаточно велики, вместо функции  $f(\omega)$  можно использовать  $f^*(\omega)$ .

Спектральную плотность пульсаций скорости частиц, движущихся в турбулентном потоке, найдем как

$$E_0(\omega) = E^*(\omega) f^*(\omega). \quad (18)$$

Здесь  $E^*(\omega)$  - спектральная плотность пульсаций скорости несущей среды в системе координат, движущейся со средней скоростью частиц. Строго говоря, воздействие пульсаций скорости

среды, характеризующихся спектральной плотностью  $E^*(\omega)$ , будет иметь место, если частицы движутся прямолинейно вдоль по потоку. Однако, для частиц, имеющих времена релаксации существенно превосходящие временной макромасштаб турбулентности, и движущихся почти прямолинейно, такой подход может быть использован.

Пусть радиальные пульсации скорости несущего потока характеризуются э. лерсвой временной корреляцией [ 4 ] .

$$R_E(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau}{T_E}\right), \quad (19)$$

где  $T_E$  - эйлеров временной макромасштаб. Для турбулентного потока, в котором пульсационные скорости существенно меньше средней скорости, может быть принята гипотеза "замороженной" турбулентности [ 4 ] . Согласно этой гипотезе, между эйлерсвой временной корреляцией и поперечной корреляцией для радиальных пульсаций скорости существует связь

$$R_E(\tau) = g(x), \quad (20)$$

где  $x = U\tau$ .

При движении частиц вдоль по потоку с относительной скоростью  $W$ , существенно большей пульсационных скоростей потока  $U$ , в системе координат, движущейся со скоростью частиц, может быть также использована гипотеза о "замороженной" турбулентности и "эйлерова" временная корреляция в этой системе координат будет иметь вид

$$R_E^*(\tau) = \exp\left(-\frac{W\tau}{\Lambda_g}\right), \quad (21)$$

где  $\Lambda_g = \int_0^\infty g(x) dx$  - поперечный макромасштаб радиальных пульсаций скорости несущей среды.

Одномерная спектральная плотность, определяемая через косинус-преобразование Фурье от  $R_E^*(\tau)$ , будет иметь вид

$$E^*(\omega) = \frac{2\bar{u}^2}{\pi} \int_0^\infty R_E^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2\bar{u}^2 W}{\pi \Lambda_g \left[ \left(\frac{W}{\Lambda_g}\right)^2 + \omega^2 \right]} \quad (22)$$

Подставляя (22) в (18), получим спектральную плотность пульсаций скорости частиц

$$E_o(\omega) = \frac{2\bar{u}^2 W}{\pi \Lambda_g \left[ \left(\frac{W}{\Lambda_g}\right)^2 + \omega^2 \right] \left[ 1 + (T_o \omega)^2 \right]} \quad (23)$$

Дисперсия пульсации скорости частиц будет равна

$$\overline{v'^2} = \int_0^{\infty} E_0(\omega) d\omega = \frac{\overline{u'^2}}{1 + \frac{wT_0}{\Lambda_0}} \quad (24)$$

Определяя временной макромасштаб движения частиц как время взаимодействия частицы с турбулентными вихрями, размеры которых равны поперечному масштабу  $\Lambda_0$  (время пролета через вихрь), получим

$$T^* = \frac{\Lambda_0}{w} \quad (25)$$

Исходя из соотношений (I - 4), для коэффициента турбулентной диффузии, коэффициент диффузии частиц запишем в виде

$$D_0 = \overline{v'^2} T^* = \frac{\overline{u'^2} \Lambda_0}{w(1 + \frac{wT_0}{\Lambda_0})} \quad (26)$$

В предельном случае, когда  $\frac{wT_0}{\Lambda_0} \gg 1$ , соотношение (26) можно записать в виде

$$D_0 = \frac{\overline{u'^2} \Lambda_0^2}{w^2 T_0} \quad (27)$$

Из-за известных трудностей экспериментального определения поперечной корреляции для радиальных пульсаций скорости  $Q(x)$  и интегрального масштаба  $\Lambda_0$ , для оценки  $\Lambda_0$  часто используется соотношение (20) между поперечной корреляцией  $Q(x)$  и эйлеровой временной корреляцией для радиальных пульсаций скорости  $R_E(\tau)$ , или соответствующее соотношение для макромасштабов:  $\Lambda_0 = U T_E$ .

Используя экспериментальные данные по эйлеровым временным макромасштабам в турбулентном потоке в круглой трубе [9], величину  $\Lambda_0$  приближенно оценим как  $0,1 R$  ( $R$  - радиус трубы).

В таблице I приведены экспериментальные данные [5] по радиальной диффузии частиц и результаты расчета по формуле (26).

Результаты расчета, по порядку величин, согласуются с экспериментальными данными для частиц, имеющих размеры 150 и 200 мкм. Для частиц размером 80 мкм, имеющих малые относительные скорости, по сравнению с интенсивностью турбулентных пульсаций скорости несущей среды, формула (26) становится неприменимой.

Таким образом, можно считать, что результаты расчета по формуле (26) качественно подтверждаются экспериментальными данными [5]. Однако, для проверки зависимости коэффициента

диффузии частиц от всех величин, входящих в соотношение (26), требуются более обширные экспериментальные данные по диффузии частиц и по характеристикам турбулентности несущего потока ( $L_0$ ).

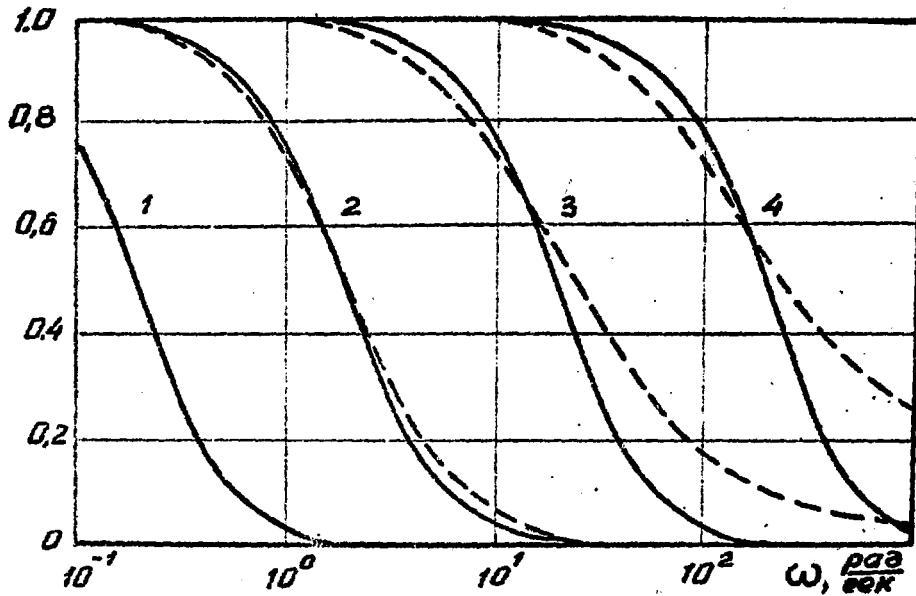


Рис. I.

Отношение квадратов амплитудных значений скоростей частицы и несущей среды в зависимости от частоты.

—  $f(\omega)$  ----  $f^*(\omega)$  1 -  $T_0 = 5$ , 2 -  $5 \cdot 10^{-1}$ ,  
3 -  $5 \cdot 10^{-2}$ , 4 -  $5 \cdot 10^{-3}$  сек.



**Интература.**

1. Taylor G.I. "Diffusion by Continuous Movement" Proc. Lond. Math. Soc. 20 196 - 212 ( 1922 ).
2. Fridleaver S.K. "Behavior of Suspended Particles in a Turbulent Fluid" A.I.Ch.E.J. 3 ( 3 ) ( Sept. 1957 ).
3. Soo S.L. "Fully Developed Turbulent Pipe Flow of a Gas - Solid Suspension" Ind Eng. Chem Fund. 1 ( 1 ) ( Feb. 1962 ).
4. Хинце М.О. Турбулентность. М., Физмат, 1963.
5. Ginsberg T. AML - 7694 "Droplet Transport in Turbulent pipe flow" ( -Nov. 1971 ).
6. Крамер Т.Д., Дерев О.А. "Analysis of Mean Flow Characteristics of Gas - Solids Suspensions". Trans. ASME, ser: D., 4, v. 94, 1972.
7. Пугачев В.С. Теория случайных функций. М., Гос.изд-во техн.-теор. лит., 1957.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М., Изд-во техн.-теор.лит., 1954.
9. Таранов Г.С. Автореферат канд.диссер. "Исследование статистических характеристик скоростного и температурного поля в турбулентном потоке с поперечным сдвигом" М., 1970.

884-891 Т-11108 от 3/VI-1975 г. Объем 0,6 уч.-изд.л. Тираж 101 экз.  
Цена 6 коп. Заказ № 369

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, июль 1975 г.

