SU 7705098

ИАЭ-2659

Ордена Ленина
Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

Г.И.Кузнецов, Я.А.Смородинский

F51

T-коэффициенты и $6j$-символы

Москва 1976

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И. В. КУРЧАТОВА

Г. И. Кузнецов, Я. А. Смородинский

T-КОЭФФИЦИЕНТЫ И $6j$-СИМВОЛЫ

Москва
1976

Ключевые слова: система многих тел, теория групп, теория представлений, теория момента.

Показано, что T-коэффициенты метода деревьев представляют собой аналитически продолженные $6j$-символы теории угловых моментов.

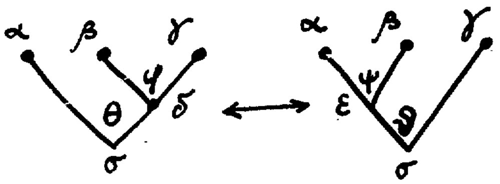
1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] была предложена графическая техника для решений уравнения Лапласа в многомерных пространствах и для представления схем сложения моментов количества движения. Причем как в первом, так и во втором случаях использовались одни и те же графы (деревья). Коэффициенты перехода от одного дерева к другому в теории многомерных гармоник называются T- коэффициентами [3, 4], в теории же угловых моментов - $6j$-символами [2]. Поскольку, работая с деревьями, мы совершаем в обоих случаях одни и те же алгебраические операции, то T-коэффициенты и $6j$-символы должны быть либо связаны друг с другом, либо вообще равняться друг другу с точностью до нормировки. В заметке [5] была указана связь между T- коэффициентами и коэффициентами Рака.

В данной работе мы дадим подробный вывод представлений T-коэффициентов и рассмотрим вопросы, связанные с аналитическим продолжением T- и $6j$-символов.

2. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ T-КОЭФФИЦИЕНТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Согласно рецептам, изложенным в работе [6], связь между функциями, относящимися к деревьям (см. рисунок),



можно представить как

$$2^{\frac{S_\alpha+S_\delta+4}{4}}\left\{N_{N_1}^{l_\delta l_\alpha}\right\}^{-1/2}(1-x)^{\frac{\delta}{2}}(1+x)^{\frac{\alpha}{2}}P_{N_1}^{l_\delta l_\alpha}(x)\,2^{\frac{S_\beta+S_\gamma+4}{4}}\left\{N_{n_1}^{l_\gamma l_\beta}\right\}^{-\frac{1}{2}}(1-x_1)^{\frac{\gamma}{2}}\times$$

$$\times(1+x_1)^{\frac{\beta}{2}}P_{n_1}^{l_\gamma l_\beta}(x_1)\prod\Psi_{\alpha\beta\gamma}=\sum_\varepsilon\left\|\begin{matrix}l_\alpha l_\beta l_\gamma\\ l_\varepsilon l_\sigma l_\delta\end{matrix}\right\|2^{\frac{S_\varepsilon+S_\gamma+4}{4}}\left\{N_{N_2}^{l_\gamma l_\varepsilon}\right\}^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{\gamma}{2}}(1+y)^{\frac{\varepsilon}{2}}P_{N_2}^{l_\gamma l_\varepsilon}(y)\times \qquad (1)$$

$$\times 2^{\frac{S_\alpha+S_\beta+4}{4}}\left\{N_{n_2}^{l_\beta l_\alpha}\right\}^{-\frac{1}{2}}(1-y_1)^{\frac{\beta}{2}}(1+y_1)^{\frac{\alpha}{2}}P_{n_2}^{l_\beta l_\alpha}(y_1)\prod\Psi_{\alpha\beta\gamma}.$$

Здесь $P_\kappa^{\mu\nu}(x)$ – полином Якоби, $N_\kappa^{\mu\nu}$ – квадрат его нормы, $\prod\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ – произведение функций, относящихся к веткам, лежащим выше узлов α, β, γ, $\left\|\begin{matrix}l_\alpha l_\beta l_\gamma\\ l_\varepsilon l_\sigma l_\delta\end{matrix}\right\|$ – T -коэффициент [3, 4],

$$x=\cos 2\theta,\quad x_1=\cos 2\varphi,\quad y=\cos 2\vartheta,\quad y_1=\cos 2\psi,$$

$$l_\alpha=\alpha+\frac{S_\alpha}{2}=l_1,\quad l_\beta=\beta+\frac{S_\beta}{2}=l_2,\quad l_\gamma=\gamma+\frac{S_\gamma}{2}=l_3,\quad l_\delta=\delta+\frac{S_\delta}{2}=l_{23},$$

$$l_\varepsilon=\varepsilon+\frac{S_\varepsilon}{2}=l_{12},\quad n_1=\frac{\delta-\beta-\gamma}{2},\quad n_2=\frac{\varepsilon-\alpha-\beta}{2},\quad N_1=\frac{\sigma-\delta-\alpha}{2},\quad N_2=\frac{\sigma-\varepsilon-\gamma}{2}.$$

Введя вместо косинусов их выражения через декартовы координаты

$$x_\alpha=\rho\cos\theta,\qquad \cos 2\theta=\frac{x_\alpha^2-x_\beta^2-x_\gamma^2}{x_\alpha^2+x_\beta^2+x_\gamma^2},$$

$$x_\beta=\rho\sin\theta\cos\varphi,$$

$$x_\gamma=\rho\sin\theta\sin\varphi,\qquad \cos 2\varphi=\frac{x_\beta^2-x_\gamma^2}{x_\beta^2+x_\gamma^2},$$

для левого дерева (см. рисунок) и

$$x_\alpha=\rho\cos\vartheta\cos\psi,\qquad \cos 2\vartheta=\frac{x_\alpha^2+x_\beta^2-x_\gamma^2}{x_\alpha^2+x_\beta^2+x_\gamma^2},$$

$$x_\beta=\rho\cos\vartheta\sin\psi,$$

$$x_\gamma=\rho\sin\vartheta,\qquad \cos 2\psi=\frac{x_\alpha^2-x_\beta^2}{x_\alpha^2+x_\beta^2}$$

для правого ($\rho^2=x_\alpha^2+x_\beta^2+x_\gamma^2$), можно сократить левую и правую части соотношения (1) на одинаковые множители и, естественно, на $\prod\Psi_{\alpha\beta\gamma}$, которое мы ввели лишь для полноты. В результате такого сокращения получаем

$$2^{\frac{l_\delta}{2}}(\sin^2\theta)^{n_1} P^{l_\delta l_\alpha}_{N_1}(\cos 2\theta) P^{l_\gamma l_\beta}_{n_1}(\cos 2\psi) = \sum_{\varepsilon} \left\| \begin{matrix} l_\alpha l_\beta l_\gamma \\ l_\varepsilon l_\sigma l_\delta \end{matrix} \right\| 2^{\frac{l_\varepsilon}{2}}(\cos^2\vartheta)^{n_2} \overline{P^{l_\gamma l_\varepsilon}_{N_2}(\cos 2\vartheta)}\, \overline{P^{l_\beta l_\alpha}_{n_2}(\cos 2\psi)}, \tag{2}$$

где $\overline{P^{\mu\nu}_n(x)} = P^{\mu\nu}_n(x) \Big/ \left\{ N^{\mu\nu}_n \right\}^{1/2}$ – нормированный полином Якоби. Это соотношение можно рассматривать как тождество.

Положим $x_\gamma = 0$, т.е. $\vartheta = \varphi = 0$, $\theta = \psi$ и $\cos 2\theta = \cos 2\psi = x$. Тогда формула (2) примет следующий вид:

$$2^{\frac{l_\delta}{2} - n_1}(1-x)^{n_1} P^{l_\delta l_\alpha}_{N_1}(x)\, P^{l_\gamma l_\beta}_{n_1}(1) = \sum_{\varepsilon} 2^{\frac{l_\varepsilon}{2}} \left\| \begin{matrix} l_\alpha l_\beta l_\gamma \\ l_\varepsilon l_\sigma l_\delta \end{matrix} \right\| \overline{P^{l_\gamma l_\varepsilon}_{N_2}(1)\, P^{l_\beta l_\alpha}_{n_2}(x)}. \tag{2'}$$

Умножая (2') на $\overline{P^{l_\beta l_\alpha}_{n_2}(x)}$ и интегрируя полученное выражение от –1 до 1, получаем

$$\left\| \begin{matrix} l_\alpha l_\beta l_\gamma \\ l_\varepsilon l_\sigma l_\delta \end{matrix} \right\| = 2^{\frac{l_\delta - l_\varepsilon}{2} - n_1} \left\{ N^{l_\delta l_\alpha}_{N_1} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ N^{l_\gamma l_\beta}_{n_1} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ N^{l_\gamma l_\varepsilon}_{N_2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ N^{l_\beta l_\alpha}_{n_2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \binom{n_1 + l_\gamma}{n_1} \times$$

$$\times \binom{N_2 + l_\gamma}{N_2}^{-1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n_1 + l_\beta} (1+x)^{l_\alpha} P^{l_\delta l_\alpha}_{N_1}(x)\, P^{l_\beta l_\alpha}_{n_2}(x)\, dx. \tag{3}$$

Учитывая значение интеграла [7] и вводя новое обозначение $2j_i + 1 = l_i$, находим для T-коэффициента следующее представление:

$$\left\| \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j & j_{23} \end{matrix} \right\| = \frac{\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\,\Gamma(j+j_3-j_1-j_2)}{\Gamma(2j_2+2)\,\Gamma(j+j_1+j_2-j_3+2)} \left[\frac{\Gamma(j-j_{23}+j_1+1)\,\Gamma(j+j_1+j_{23}+2)}{\Gamma(j+j_{23}-j_1+1)\,\Gamma(j-j_2-j_{23})} \times \right.$$

$$\times \frac{\Gamma(j_{23}+j_2-j_3+1)\,\Gamma(j_{23}+j_2+j_3+2)\,\Gamma(j+j_{12}-j_3+1)\,\Gamma(j-j_3-j_{12})\,\Gamma(j_{12}-j_1+j_2+1)}{\Gamma(j_{23}-j_2+j_3+1)\,\Gamma(j_{23}-j_2-j_3)\,\Gamma(j-j_{12}+j_3+1)\,\Gamma(j+j_3+j_{12}+j_2)\,\Gamma(j_{12}-j_1-j_2)} \times$$

$$\times\frac{\Gamma(j_{12}+j_1+j_2+2)}{\Gamma(j_{12}+j_1-j_2+1)}\Bigg]^{1/2} {}_4F_3\left(\begin{matrix} -j_{12}+j_1+j_2+1,\ j_1+j_2+j_{12}+2,\ j_{23}+j_2-j_3+1,\ j_2-j_3-j_{23}; \\ 2j_2+2,\ j_1+j_2+j-j_3+2,\ j_1+j_2-j-j_3+1; \end{matrix}\ 1\right) \qquad (4)^*$$

Принимая во внимание связь "моментов" j_i между собой, легко показать, что ни множитель перед ${}_4F_3$ (.......... 1), ни сама гипергеометрическая функция ${}_4F_3$ (........ 1) не обращаются в бесконечность, т.е. T -коэффициент есть конечная величина. Известно, что коэффициент Рака ($6j$ -символ) тоже выражается через ${}_4F_3$ (....... 1), см.[8]:

$$W(abcd;ef)=\Delta(abe)\Delta(cde)\Delta(acf)\Delta(bdf)\left[\Gamma(e+f+1-b-c)\right]^{-1}\times$$
$$\times\Gamma\left(\begin{matrix} a+b+c+d+2, \\ a+b+1-e,\ c+d+1-e,\ a+c+1-f,\ b+d+1-f,\ e+f+1-a-d \end{matrix}\right)\times$$
$$\times\,{}_4F_3\left(\begin{matrix} e-a-b,\ e-c-d,\ f-c-a,\ f-b-d; \\ -a-b-c-d-1,\ e+f+1-a-d,\ e+f+1-b-c; \end{matrix}\ 1\right), \qquad (5)$$

где

$$\Delta(xyz)=\left[\Gamma\left(\begin{matrix} x+y+1-z,\ x+z+1-y,\ y+z+1-x \\ x+y+z+2 \end{matrix}\right)\right]^{1/2},\quad \Gamma\left(\begin{matrix} a,b,\ldots \\ p,q,\ldots \end{matrix}\right)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\ldots}{\Gamma(p)\Gamma(q)\ldots}$$

Это означает, что T -коэффициент и коэффициенты Рака связаны между собой. Для установления этой связи необходимо одни параметры (набор j) выразить через другие (набор a , b , . . . , f). Из формул (4) и (5) находим

$$a=\frac{j_{12}-j_{23}-j_2-j}{2}-1,\quad b=\frac{j_{12}-j_2+j_{23}+j}{2},$$

---

* Отметим, что в работах [3, 4] в формулах для этого коэффициента содержится лишний множитель $2^{\frac{l_2+l_3-l_1}{2}+n_1}$.

$$c=\frac{j-j_{23}-j_{12}-j_2}{2}-1, \qquad d=\frac{j_{23}-j-j_{12}-j_2}{2}-1, \tag{6}$$

$$e=j_1, \qquad f=-j_3-1.$$

Итак, мы связали T – и $6j$ –символы между собой. Однако у нас получились $6j$ –символы от сложных комбинаций моментов. Представляет несомненный интерес попытка упростить эти комбинации. Если учесть формулы (22.22) и (22.19) из монографии [9]:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}=i(-)^{\psi_3}\begin{Bmatrix} a & b & e \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{f} \end{Bmatrix}, \quad \psi_3=a+b+e=j_{12}+j_1-j_2-1,$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{f} \end{Bmatrix}=(-)^{\psi}\begin{Bmatrix} \bar{a} & b & e \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{f} \end{Bmatrix}, \quad \psi=b-\bar{c}+\bar{f}-e=j-j_2+j_3-j_1,$$

(где $\bar{a}=-a-1$, $\bar{d}=-d-1$, $\bar{c}=-c-1$, $\bar{f}=-f-1$), то можно написать следующее выражение:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}=i(-)^{j_{12}+j_3+j-2j_2-1}\begin{Bmatrix} \bar{a} & b & e \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{f} \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

Если же еще учесть формулы (22.11) и (22.10) из [9]:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} S_3-d, & S_3-c, & e \\ S_3-a, & S_3-b, & f \end{Bmatrix}, \quad 2S_3=a+b+c+d,$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ l_2 & l_1 & l_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & j_3 \\ j_1 & j_2 & l_3 \end{Bmatrix},$$

то $6j$ –символ, стоящий в правой части формулы (7), легко приводится к нормальному виду, а именно:

$$\begin{Bmatrix} \frac{j+j_2+j_{23}-j_{12}}{2} & \frac{j_{12}+j_{23}+j-j_2}{2} & j_1 \\ \frac{j+j_2+j_{12}-j_{23}}{2} & \frac{j_2+j_{12}+j_{23}-j}{2} & j_3 \end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix} S-j_{12} & S-j_2 & j_1 \\ S-j_{23} & S-j & j_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} j_{23} & j & j_1 \\ j_{12} & j_2 & j_3 \end{Bmatrix}=$$

$$=\begin{Bmatrix} j_{12} & j_2 & j_1 \\ j_{23} & j & j_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

здесь $2S = j + j_2 + j_{23} + j_{12}$.

Таким образом,

$$W(abcd;ef) = (-)^{-(a+b+c+d)} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} =$$

$$= i(-)^{j_{12}+j_3+j+2} \begin{Bmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{e} \\ \bar{d} & \bar{c} & \bar{f} \end{Bmatrix} = i(-)^{j_{12}+j_3+j} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}. \tag{9}$$

При написании этой формулы мы приняли во внимание (7) и соотношение $a+b+c+d = -2j_2-3$.

Подставляя теперь (5) и (9) в (4) и учитывая формулу для Γ -функций $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin\pi x$ и то, что $j_{ik} - j_i - j_k$ - целое число, находим

$$\left\| \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_{12} & j & j_{23} \end{matrix} \right\| = (-)^{j_1+j_2+j_3+j} \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix} \Phi^{j_1 j_3}_{j j_{12} j_{23}} =$$

$$= \left[((j_1 j_2) j_3 j \,|\, j_1 (j_2 j_3) j \right] \Phi^{j_1 j_3}_{j j_{12} j_{23}}, \tag{10}$$

где $[(j_1 j_2) j_3 j / j_1 (j_2 j_3) j]$ - матрица перехода от одной схемы связи моментов к другой, а множитель Φ равен

$$\Phi^{j_1 j_3}_{j j_{12} j_{23}} = (-)^{j_{12}+j_3-j} \left[\frac{\sin\pi(-j+j_1+j_{23}) \times (-)^{j-j_1-j_{23}} \sin 2\pi j}{\sin 2\pi j_{12} \; \sin 2\pi j_3} \right]^{1/2}. \tag{11}$$

Следует отметить, что вследствие симметрии T - и $6j$ -коэффициентов в [10] относительно замены $j_1 \rightleftarrows j_3$ и $j_{12} \rightleftarrows j_{23}$ в формуле (10) вместо функции $\Phi^{j_1 j_3}_{j j_{12} j_{23}}$ следует поставить Φ_{sym}

$$\Phi_{sym} = \frac{1}{2} \left[\Phi^{j_1 j_3}_{j j_{12} j_{23}} + \Phi^{j_3 j_1}_{j j_{23} j_{12}} \right].$$

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ $6j$-СИМВОЛОВ И T-КОЭФФИЦИЕНТЫ

Итак, мы установили связь между T-коэффициентами и $6j$-символами. Однако если мы вспомним, что в методе деревьев "суммарный" момент задается в области $j_{ik} \geq j_i + j_k$, а в теории угловых моментов - в области $|j_i - j_k| \leq j_{ik} \leq j_i + j_k$, то функции слева и справа в соотношении (10) заданы одна в "физической" области, другая же в "нефизической". И выход в эту "нефизическую" область мы совершили при помощи операции замены $j \to j-1$.

Таким образом, оказывается, что T-коэффициент есть аналитически продолженный $6j$-символ.

Попробуем теперь разобраться с множителем $\Phi_{j j_{12} j_{23}}^{j_1 j_3}$. Напомним, что $j_i = \frac{\alpha_i}{2} + \frac{s_i - 2}{4}$, α_i, s_i - целые числа, т.е. в случае нечетных значений s_i моменты j_i становятся четвертьцелыми. Из формулы (11) видно, что при целых и полуцелых значениях j множитель Φ имеет конечное значение. Рассматривая вместо отношений синусов отношения вычетов Γ-функций, из которых возникли эти синусы $\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi / \sin \pi x\right)$ (см., например, [11]), в случае целых и полуцелых значений j имеем

$$\Phi = (-)^{j_{12}+j_3-j} \left[\frac{(-)^{-j+j_1+j_{23}} (-)^{j-j_1-j_{23}} (-)^{2j}}{(-)^{2j_{12}} (-)^{2j_3}} \right]^{1/2} = 1 .$$

В случае же четвертьцелых значений моментов (например, j_{12}, j_3 и j_{23}, j_1 - четвертьцелые, а j - целое или полуцелое число) фактор Φ обращается в нуль (бесконечности он никогда не равен), а $\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{Bmatrix}$ - в бесконечность, давая тем самым конечное значение T-коэффициенту.

Исходя из сказанного выше, мы заключаем, что для целых и полуцелых значений моментов j T-коэффициент есть аналитически продолженная матрица пересвязывания моментов, не содержащая никакого множителя. Для четвертьцелых значений j T-коэффициент конечен, а $6j$-символ бесконечен. Поэтому для четвертьцелых j вместо общепринятого представления для $6j$-символов [8] необходимо использовать выражение T-коэффициентов через гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$ (. . . . . . . 1) в форме (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я., Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. – ЯФ, 1965, т. 2, с. 906.
2. Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. – ЯФ, 1975, т. 21, с. 1135.
3. Кильдюшов М.С. – ЯФ, 1972, т. 15, с. 197.
4. Кильдюшов М.С., Кузнецов Г.И. Препринт ИАЭ-2263, 1973.
5. Кузнецов Г.И., Смородинский Я.А. – Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 378.
6. Кильдюшов М.С., Кузнецов Г.И. Препринт ИАЭ-2257, 1973.
7. Бейтмен Г., Эрден А. Таблицы интегральных преобразований, т. 2, "Наука", 1970.
8. Смородинский Я.А., Шелепин Л.А. – УФН, 1972, т. 106, с. 1.
9. Юцис А.П., Бандзайтис А.А. Теория момента количества движения в квантовой механике. Вильнюс, "Минтис", 1965.
10. Кильдюшов М.С., Кузнецов Г.И. – ЯФ, 1973, т. 17, с. 1330.
11. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, 1, ИЛ, М., 1958.

Технический редактор Н.И. Мазаева. Корректор Н.Н. Черемных

Т-03278. 21.03.76 г. Формат 60x90/8. Уч.-изд. л. 0,45
Тираж 130 экз. Заказ 563. Цена 5 коп. ОНТИ. ИАЭ

5 коп.