ИНТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И Ф В Э
ОТФ 76-5

Г.Г. Волков, В.Л. Рыков

ДИАГОНАЛЬНОСТЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТОКА И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СХЕМЫ В МОДЕЛЯХ ЦВЕТНЫХ КВАРКОВ

Серпухов 1976

Г.Г. Волков, В.Л. Рыков

ДИАГОНАЛЬНОСТЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТОКА И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СХЕМЫ В МОДЕЛЯХ ЦВЕТНЫХ КВАРКОВ

Направлено в ТМФ

Аннотация

Волков Г.Г., Рыков В.Л.

Диагональность нейтрального тока и калибровочные схемы в моделях цветных кварков. Серпухов, 1976.

15 стр. (ИФВЭ ОТФ 76-5).

Библиогр. 7.

В работе рассматриваются $SU(2)$ калибровочные схемы слабых взаимодействий в кварковых моделях: $SU(3)' \times SU(3)''$, $SU(4)' \times SU(3)''$, $SU(4)' \times SU(4)''$. Существенно используется принцип диагональности, обеспечивающий отсутствие нейтральных токов с изменением странности, очарования и цвета.

Abstract

Volkov G.G., Rykov V.L.

Diagonality of Neutral Current and Gauge Schemes in Colour Quark Models. Serpukhov, 1976.

p. 15. (IHEP 76-5).

Refs. 7.

The paper considers $SU(2)$ gauge schemes of weak interactions in quark models: $SU(3)' \times SU(3)''$, $SU(4)' \times SU(3)''$, $SU(4)' \times SU(4)''$. The diagonality principle, which provides the absence of neutral currents with changing of strangeness, charm and colour.

Для непротиворечивого описания слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий в рамках единого калибровочного лагранжиана оказывается необходимым существенно увеличить число кварков. Так, для преодоления трудностей, возникающих в схемах слабых взаимодействий, например для подавления нейтрального тока с изменением странности, наиболее экономным и привлекательным путём является введение в теорию нового кварка /1/, обладающего квантовым числом "очарование", в дополнение к трём обычным кваркам p, n, λ группы $SU(3)$. С точки зрения описания некоторых явлений в сильных взаимодействиях адронов такой лагранжиан должен удовлетворять требованию асимптотической свободы. Этого можно достигнуть приписыванием четырём кваркам p, n, λ, c цветов, тем самым увеличивая число кварков до двенадцати (три цвета /2/) или до шестнадцати (четыре цвета /3/). Таким образом, приходится рассматривать группы симметрии кварков более высокого чем $SU(3)$ ранга, например $SU(4)' \times SU(3)''$, $SU(4)' \times SU(4)''$ /3/. Тогда единый лагранжиан всех трех типов взаимодействия кварков можно строить на основе калибровочной $G(W) \times G(S)$ симметрии /4/, где в качестве $G(W)$ обычно выбирается группа $SU(2) \times U(1)$, а в качестве калибровочной группы симметрии сильных взаимодействий $G(S)$ минимальной выбирается группа $SU(3)$.

Очевидно, что в указанных моделях с таким большим числом кварков имеется значительная степень свободы выбора калибровочных схем, основанных на симметрии $SU(2)\times U(1)$. Классификация этих схем и изучение их свойств имеют важное значение для экстраполяции моделей слабых и электромагнитных взаимодействий, построенных в рамках 4-кварковой структуры p, n, λ, c адронов и кварковые схемы с учётом цвета, что в конечном итоге позволит включить в теорию и сильные взаимодействия.

В данной заметке будут рассмотрены возможные $SU(2)$ калибровочные схемы слабых взаимодействий в моделях кварков с $SU(3)'\times SU(3)''$-; $SU(4)'\times SU(3)''$- и $SU(4)'\times SU(4)''$-симметриями. В работе /5/ был дан анализ на основе общих физических требований одного из интереснейших решений алгебры $SU(2)$ в модели $SU(3)'\times SU(3)''$ (двухтриплетного представления /6/).

Аналогичные схемы существуют и в модели кварков с $SU(4)'\times SU(4)''$-симметрией (4-триплетные решения). Только в таких решениях можно получить слабый нейтральный ток, полностью совпадающий с электромагнитным током. Представляют значительный интерес указанные ниже и смешанные модели с включением кварков в триплеты и дублеты, а также схемы только дублетные. Во всех типах решений $SU(2)$-алгебры мы добиваемся требований диагональности нейтрального тока, т.е. подавления переходов, нейтральных по заряду, но не нейтральных по остальным квантовым числам. Заметим, что требование $SU(2)$-алгебры и диагональности нейтральных токов сильно ограничивает число свободных параметров, характеризующих ту или иную модель, особенно это касается схем, включающих дублеты.

Для группы $SU(4)'\times SU(4)''$ введем следующие матрицы кварковых состояний и их зарядов:

$$T=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Вид соответствующих матриц для групп $SU(4)'\times SU(3)''$ и $SU(3)'\times SU(3)''$ получается последовательным вычеркиванием в формуле (1) четвертого столбца и четвёртой строки.

Потребуем теперь, чтобы триплет токов $J^a_\mu = \bar{\psi} M^a O_\mu \psi$, $a = \Delta Q = +1, -1, 0$ удовлетворял бы $SU(2)$-алгебре. Для случая $SU(4)' \times SU(4)''$ ψ является шестнадцатимерным вектором с компонентами в порядке очередности $p_1, n_1, \lambda_1, c_1, p_2, \ldots, \lambda_4, c_4$; $M^+, M^-, M^3 = \frac{1}{2}[M^+, M^-]$ являются матрицами размерности 16x16 с 64 неизвестными коэффициентами. Для группы $SU(4)' \times SU(3)''$ M^a есть матрицы размерностью 12x12 с 36 неизвестными, соответственно для группы $SU(3)' \times SU(3)''$ размерность матриц 9x9, а число неизвестных параметров равно 20. Заметим, что в формуле (1) роль кварков p_4, n_4, λ_4, c_4 могут играть известные лептоны $\nu_\mu, \mu^-, e^-, \nu_e$.

Для удобства записи системы уравнений алгебры $SU(2)$ и её решений можно ввести полезные обозначения, общие для групп $SU(4)' \times SU(4)''$, $SU(4)' \times SU(3)''$, $SU(3)' \times SU(3)''$. Введем вектора, число которых будет совпадать с числом заряженных кварков в формуле (1), соответственно для рассматриваемых трёх случаев, размерность этих трех векторов будет устанавливаться по числу нейтральных кварков в матрице T и Q. Так, для группы $SU(3)' \times SU(3)''$ мы рассматриваем четыре вектора $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$, $\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1$ размерности 5, для группы $SU(4)' \times SU(3)''$ рассматривается шесть векторов $\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1, \vec{p}_2, \vec{c}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_3$ размерности 6 и, наконец, для группы $SU(4)' \times SU(4)''$ мы имеем восемь восьмимерных векторов $\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1, \vec{n}_4, \vec{\lambda}_4$, $\vec{p}_2, \vec{c}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_3$. Координаты этих векторов $(\vec{n}_1)_i, (\vec{\lambda}_1)_i \ldots$ и являются коэффициентами, входящими в матрицы M^+, M^-, которые необходимо определить в соответствии с требованиями $SU(2)$-алгебры. Так, например, в двойной $SU(4)$-симметрии восемь слабых переходов с $\Delta Q = +1$ кварка n_1 в кварки $p_1, c_1, n_2, \lambda_2, n_3$, λ_3, p_4, c_4 характеризуются восемью коэффициентами матрицы M^+, совпадающими соответственно с координатами вектора $(\vec{n}_1)_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 8$. Аналогично координаты вектора $\vec{\lambda}_1$ определяют переходы λ_1-кварка в восемь нейтральных кварков матрицы (1) и т.д.

Тогда на языке этих векторов уравнения $SU(2)$-алгебры можно записать в виде

$$2 \Sigma |i\rangle\langle i|j\rangle - \sum_a |a\rangle\langle a|j\rangle = 2|j\rangle,$$

$$2\sum_{\beta}^{i}|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle - \sum_{i}|i\rangle\langle i|\alpha\rangle = 2|\alpha\rangle, \qquad (2)$$

где латинские буквы i, j пробегают совокупность векторов, описывающих переходы отрицательно заряженных кварков, т.е. $|i\rangle, |j\rangle \in (\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1)$ для групп $SU(3)' \times SU(3)''$ и $SU(4)' \times SU(3)''$; для группы $SU(4)' \times SU(4)''$ вектора $|i\rangle, |j\rangle \in (\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1, \vec{n}_4, \vec{\lambda}_4)$ греческие буквы α, β пробегают совокупность векторов, относящихся к переходам положительно заряженных кварков из формулы (1), так, $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in (\vec{p}_2, \vec{p}_3)$ для группы $SU(3)' \times SU(3)''$, $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in (\vec{p}_2, \vec{c}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_3)$ для групп $SU(4)' \times SU(3)''$ и $SU(4)' \times SU(4)''$. Для наглядности распишем систему (2) для двойной $SU(3)$-симметрии:

$$\begin{aligned}
&2(\vec{n}_1 \vec{n}_2)\vec{n}_1 + 2(\vec{n}_1 \vec{\lambda}_1)\vec{\lambda}_1 - (\vec{n}_1 \vec{p}_2)\vec{p}_2 - (\vec{n}_1 \vec{p}_3)\vec{p}_3 = 2\vec{n}_1,\\
&2(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1)\vec{\lambda}_1 + 2(\vec{\lambda}_1 \vec{n}_1)\vec{n}_1 - (\vec{\lambda}_1 \vec{p}_2)\vec{p}_2 - (\vec{\lambda}_1 \vec{p}_3)\vec{p}_3 = 2\vec{\lambda}_1,\\
&2(\vec{p}_2 \vec{p}_2)\vec{p}_2 + 2(\vec{p}_2 \vec{p}_3)\vec{p}_3 - (\vec{p}_2 \vec{n}_1)\vec{n}_1 - (\vec{p}_2 \vec{\lambda}_1)\vec{\lambda}_1 = 2\vec{p}_2,\\
&2(\vec{p}_3 \vec{p}_3)\vec{p}_3 + 2(\vec{p}_3 \vec{p}_2)\vec{p}_2 - (\vec{p}_3 \vec{n}_1)\vec{n}_1 - (\vec{p}_3 \vec{\lambda}_1)\vec{\lambda}_1 = 2\vec{p}_3.
\end{aligned} \qquad (3)$$

Нас будут интересовать решения системы, удовлетворяющие условию диагональности M^3, так как именно эти решения будут отвечать физическим требованиям подавления нейтральных токов с изменением странности.

Если выписать матрицу M^3, то легко заметить, что присутствующие в ней ненулевые элементы можно расклассифицировать в соответствии с матрицей распределения зарядов Q у кварков (см. формулу (1)). Так, для группы $SU(4)' \times SU(4)''$ матрица M^3 имеет восемь истинно нейтральных (диагональных) переходов между заряженными кварками (например, $p_2 \leftrightarrow p_2$, $p_3 \leftrightarrow p_3$ и т.д.), восемь диагональных переходов между нейтральными кварками (типа $p_1 \leftrightarrow p_1$, $\lambda_2 \leftrightarrow \lambda_2$ и т.д.), 12 недиагональных переходов между заряженными кварками (типа $p_2 \leftrightarrow p_3$, $c_2 \leftrightarrow p_2$) и 28 недиагональных переходов между нейтральными кварками ($p_1 \leftrightarrow c_1, \ldots$). Аналогичные цифры для групп $SU(3)' \times SU(3)''$ и $SU(4)' \times SU(3)''$ выглядят, соответственно, следующим образом: 4; 5; 2; 10 и 6; 6; 7; 15. Заметим, что все коэффициенты матрицы M^3 довольно естественно выражаются через введенные нами вектора. Так для группы $SU(4)' \times SU(4)''$ восемь диагональных переходов между заряженными кварками есть просто плюс/минус квадраты норм соответствующих векторов (переходу $n_1 \leftrightarrow n_1$ отвечает квадрат нормы вектора $\vec{n}_1$, $(\vec{n}_1 \vec{n}_1)$, переходу $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_1$ отвечает квадрат нормы $(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1)$ и т.д.). Двенадцать недиагональных переходов между заряженными кварками выражаются также через недиагональные скалярные произведения векторов (переходу $n_1 \leftrightarrow \lambda_1$ отвечает коэффициент $(\vec{n}_1 \vec{\lambda}_1)$, переходу $p_2 \leftrightarrow p_3$ отвечает коэффициент $(\vec{p}_2 \vec{p}_3)$ и т.д.). Остальные коэффициенты, связанные с переходами между нейтральными кварками, имеют следующий вид:

$$H_{ij} = (\vec{n}_4)_i (\vec{n}_4)_j + (\vec{\lambda}_4)_i (\vec{\lambda}_4)_j + (\vec{n}_1)_i (\vec{n}_1)_j + (\vec{\lambda}_1)_i (\vec{\lambda}_1)_j - \tag{4}$$
$$-(\vec{p}_2)_i (\vec{p}_2)_j - (\vec{p}_3)_i (\vec{p}_3)_j - (\vec{c}_2)_i (\vec{c}_2)_j - (\vec{c}_3)_i (\vec{c}_3)_j, \quad i, j = 1,2 \ldots 8,$$

причём $i = j$ отвечают нейтральным диагональным переходам (всего в формуле (4) содержится 36 выражений).

Потребуем диагональности нейтрального тока M^3. Положим для этого равными нулю недиагональные переходы между заряженными кварками, т.е. для группы $SU(4)' \times SU(4)''$ это условие будет выглядеть следующим образом:

$$(\vec{n}_1 \vec{\lambda}_1) = (\vec{n}_1 \vec{n}_4) = (\vec{n}_1 \vec{\lambda}_4) = (\vec{\lambda}_1 \vec{n}_4) = (\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_4) = (\vec{n}_4 \vec{\lambda}_4) = 0,$$
$$(\vec{p}_2 \vec{c}_2) = (\vec{p}_2 \vec{p}_3) = (\vec{p}_2 \vec{c}_3) = (\vec{c}_2 \vec{p}_3) = (\vec{c}_2 \vec{c}_3) = (\vec{p}_3 \vec{c}_3) = 0. \tag{5}$$

Тогда систему восьми векторных уравнений можно записать в виде

$$2\vec{n}_1[(\vec{n}_1 \vec{n}_1) - 1] = (\vec{n}_1 \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{n}_1 \vec{p}_3)\vec{p}_3 + (\vec{n}_1 \vec{c}_2)\vec{c}_2 + (\vec{n}_1 \vec{c}_3)\vec{c}_3 \quad (6.1)$$
$$2\vec{\lambda}_1[(\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1) - 1] = (\vec{\lambda}_1 \vec{p}_2)\vec{p}_2 + (\vec{\lambda}_1 \vec{p}_3)\vec{p}_3 + (\vec{\lambda}_1 \vec{c}_2)\vec{c}_2 + (\vec{\lambda}_1 \vec{c}_3)\vec{c}_3 \quad (6.2)$$

. . . .

$$2\vec{p}_2[(\vec{p}_2 \vec{p}_2) - 1] = (\vec{p}_2 \vec{n}_1)\vec{n}_1 + (\vec{p}_2 \vec{\lambda}_1)\vec{\lambda}_1 + (\vec{p}_2 \vec{n}_4)\vec{n}_4 + (\vec{p}_2 \vec{\lambda}_4)\vec{\lambda}_4 \quad (6.5)$$

. . . .

$$2\vec{c}_3[(\vec{c}_3 \vec{c}_3) - 1] = (\vec{c}_3 \vec{n}_1)\vec{n}_1 + (\vec{c}_3 \vec{\lambda}_1)\vec{\lambda}_1 + (\vec{c}_3 \vec{n}_4)\vec{n}_4 + (\vec{c}_3 \vec{\lambda}_4)\vec{\lambda}_4. \quad (6.8) \quad (6)$$

Для решения системы (6) положим сначала, что ни один из искомых восьми векторов не равен ни нулю, ни единице по норме:

$$(\vec{n}_1 \vec{n}_1) \neq 1, 0; \; (\vec{\lambda}_1 \vec{\lambda}_1) \neq 1, 0; \ldots; (\vec{c}_3 \vec{c}_3) \neq 1, 0. \tag{7}$$

Требование $(\vec{n}_1 \vec{n}_1) \neq 1$ эквивалентно условию того, что вектор $\vec{n}_1$ не может быть ортогональным одновременно четырём векторам $\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3$. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно скалярно умножить первое уравнение из формулы (6) на вектор $\vec{n}_1$. Таким образом можно проверить, что условие (7) эквивалентно утверждению, что каждый из векторов ($\vec{n}_1$, $\vec{\lambda}_1, \vec{n}_4, \vec{\lambda}_4$) должен быть неортогонален хотя бы одному вектору из совокупности ($\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3$) и каждый из векторов ($\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3$), в свою очередь, должен быть неортогонален хотя бы одному вектору из совокупности ($\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1, \vec{n}_4, \vec{\lambda}_4$), чего можно достигнуть, например, следующим способом:

$$(\vec{n}_1 \vec{p}_2) \neq 0, \quad (\vec{\lambda}_1 \vec{c}_2) \neq 0, \quad (\vec{n}_4 \vec{p}_3) \neq 0, \quad (\vec{\lambda}_4 \vec{c}_3) \neq 0. \tag{8}$$

Теперь можно найти одно из решений системы (6). Помножим скалярно первое уравнение системы (6) на $\vec{p}_2$, а пятое – на $\vec{n}_1$:

$$(2-2(\vec{n}_1\vec{n}_1)+(\vec{p}_2\vec{p}_2))(\vec{n}_1\vec{p}_2) = 0 \quad \text{и} \quad (2-2(\vec{p}_2\vec{p}_2)+(\vec{n}_1\vec{n}_1))(\vec{n}_1\vec{p}_2) = 0. \tag{9}$$

Используя первое условие из (8), легко получить, что

$$(\vec{n}_1 \vec{n}_1) = (\vec{p}_2 \vec{p}_2) = 2. \tag{10}$$

Аналогичной процедурой и ссылкой на условие (8) мы получаем решение (10) и для всех остальных векторов.

Итак, решения типа (10) совместно с условием (5) определяют две четверки векторов $\vec{A}_i = (\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1, \vec{n}_4, \vec{\lambda}_4)$ и $\vec{F}_i = (\vec{p}_2, \vec{c}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_3)$

$$(\vec{A}_i \vec{A}_j) = 2\delta_{ij}, \quad (\vec{F}_i \vec{F}_j) = 2\delta_{ij}. \tag{11}$$

Внутри каждой четверки вектора линейно независимы, зато всякий вектор из одной четверки есть линейная комбинация всех четырёх векторов из другой четверки и наоборот, т.е., согласно (6) и (11), имеем

$$\vec{A}_i = R_{ij} \vec{F}_j, \quad \vec{F}_i = R_{ij}^T \vec{A}_j, \tag{12}$$

где $R_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{A}_i \vec{F}_j)$ представляется, согласно (10), ортогональной матрицей размерности 4x4:

$$R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\vec{n}_1\vec{p}_2) & (\vec{n}_1\vec{c}_2) & (\vec{n}_1\vec{p}_3) & (\vec{n}_1\vec{c}_3) \\ (\vec{\lambda}_1\vec{p}_2) & (\vec{\lambda}_1\vec{c}_2) & (\vec{\lambda}_1\vec{p}_3) & (\vec{\lambda}_1\vec{c}_3) \\ (\vec{n}_4\vec{p}_2) & (\vec{n}_4\vec{c}_2) & (\vec{n}_4\vec{p}_3) & (\vec{n}_4\vec{c}_3) \\ (\vec{\lambda}_4\vec{p}_2) & (\vec{\lambda}_4\vec{c}_2) & (\vec{\lambda}_4\vec{p}_3) & (\vec{\lambda}_4\vec{c}_3) \end{pmatrix}, \quad R\cdot R^T = 1. \tag{13}$$

Ортогональное преобразование в четырёхмерном пространстве определяется шестью параметрами-углами поворота в шести плоскостях. Для наглядности приведем аналогичное решение для $SU(3)$"x $SU(3)$"-модели кварков:

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{\lambda}_1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \vec{p}_2 \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Отметим теперь, что условия (5) являются достаточными для зануления всех недиагональных нейтральных переходов в решениях, ограниченных соотношениями (7). Действительно, из формулы (12) следует, что

$$(\vec{A}_i)_j = \sum_\ell R_{i\ell}(\vec{F}_\ell)_j . \tag{15}$$

Тогда, используя ортогональность матрицы $R_{i\ell}$, легко получить искомое

$$\sum_i (\vec{A}_i)_j (\vec{A}_i)_k = \sum_\ell (\vec{F}_\ell)_j (\vec{F}_\ell)_k . \tag{16}$$

В результате нейтральный ток приобретает очень простой вид

$$J^3_\mu = -\bar{n}_1 0_\mu n_1 - \bar{\lambda}_1 0_\mu \lambda_1 - \bar{n}_4 0_\mu n_4 - \bar{\lambda}_4 0_\mu \lambda_4 + \bar{p}_2 0_\mu p_2 + \bar{p}_3 0_\mu p_3 + \bar{c}_2 0_\mu c_2 + \bar{c}_3 0_\mu c_3, \tag{17}$$

где

$$0_\mu = V_\mu \pm A_\mu .$$

И это решение, основанное на выполнении условий (7), в соответствии с формулами (11), (12), (13) дает из 64 коэффициентов, определяющих слабый адронный ток с $\Delta Q = \pm 1$, всего 28 параметров плюс дискретный параметр, определяющий $\det R = \pm 1$.

Обратим внимание на то, что это решение образует приводимое представление группы $SU(2)$ с диагональной M^3, которое содержит четыре триплета и четыре синглета. Действительно, любой собственный вектор матрицы M^3 с собственным значением -1 можно последовательным действием M^+ перевести в собственный вектор с собственным значением сначала равным нулю, затем +1 и наоборот.

В дальнейшем для конкретизации все рассуждения будут проводиться в рамках модели кварков $SU(4)' \times SU(4)''$. Переход к рассмотрению низших симметрий $SU(4)' \times SU(3)''$, $SU(3)' \times SU(3)''$ очевиден.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда условие (7) нарушается, причём минимальным способом. Например, пусть

$$(\vec{n}_1 \vec{n}_1) = 1, \tag{18}$$

тогда вектор $\vec{n}_1$ обязан быть ортогональным вектором $\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3$, т.е.:

$$(\vec{n}_1 \vec{p}_2) = (\vec{n}_1 \vec{p}_3) = (\vec{n}_1 \vec{c}_2) = (\vec{n}_1 \vec{c}_3) = 0. \tag{19}$$

Используя систему уравнений (6), нетрудно показать, что существует, по крайней мере, еще один вектор, нарушающий условие (7). Из условия $Sp M^3 = 0$ следует, что этот вектор надо выбирать из совокупности $(\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$. Пусть это будет вектор $\vec{p}_2$, тогда

$$(\vec{p}_2 \vec{p}_2) = 1 \tag{20}$$

или

$$\vec{p}_2 = 0. \tag{21}$$

Условие (20) эквивалентно ортогональности вектора $\vec{p}_2$ векторам $\vec{n}_1$, $\vec{\lambda}_1$, $\vec{n}_4$, $\vec{\lambda}_4$:

$$(\vec{p}_2 \vec{n}_1) = (\vec{p}_2 \vec{\lambda}_1) = (\vec{p}_2 \vec{n}_4) = (\vec{p}_2 \vec{\lambda}_4) = 0. \tag{22}$$

Учитывая условия зануления скалярных произведений (19) и (22) и принимая во внимание ослабленное условие (8)

$$(\vec{\lambda}_1 \vec{c}_2) \neq 0; \ (\vec{n}_4 \vec{p}_3) \neq 0, \ (\vec{\lambda}_4 \vec{c}_3) \neq 0, \tag{8'}$$

можно получить следующее решение системы (6):

$$(\vec{A}_i \vec{A}_j) = 2\delta_{ij}, \quad (\vec{F}_i \vec{F}_j) = 2\delta_{ij},$$
$$\vec{A}_i = R_{ij} \vec{F}_j, \quad \vec{F}_i = R_{ji} \vec{A}_j, \quad R \cdot R^T = 1, \tag{23}$$

где через $\vec{A}_i$ и $\vec{F}_i$ обозначены уже тройки векторов $\vec{\lambda}_1, \vec{n}_4, \vec{\lambda}_4$ и $\vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ соответственно. Матрица $R_{ij} = \frac{1}{2} (\vec{A}_i \vec{F}_j)$ определяет ортогональное преобразование в трёхмерном пространстве и характеризуется тремя параметрами (см. формулы (12), (13)).

Требование диагональности M^3, а именно обращение в нуль выражений (4) при $i \neq j$, с учётом формулы (23) принимает вид

$$H_{ij} = (\vec{n}_1)_i (\vec{n}_1)_j - (\vec{p}_2)_i (\vec{p}_2)_j = 0, \quad i \neq j. \tag{24}$$

Для случая $\vec{p}_2 = 0$ (24) будет выполняться, если только

$$(\vec{n}_1)_i = \delta_{ai}, \quad a = 1, 2, \dots, 8 \rightarrow p_1, c_1, n_2, \lambda_2, n_3, \lambda_3, p_4, c_4, \tag{25}$$

т.е. только одна компонента вектора $\vec{n}_1$ отлична от нуля и равна единице.

Нейтральный ток в этом решении можно представить в виде $(a = 1)$

$$J^3_\mu = -\frac{1}{2}\bar{n}_1 O_\mu n_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_1 O_\mu p_1 - \bar{\lambda}_1 O_\mu \lambda_1 - \bar{n}_4 O_\mu n_4 - \bar{\lambda}_4 O_\mu \lambda_4 + \bar{p}_3 O_\mu p_3 + \tag{26}$$
$$+ \bar{c}_2 O_\mu c_2 + \bar{c}_3 O_\mu c_3 .$$

Это решение отражает калибровочную модель, в которой кварки $(\lambda_1, n_4, \lambda_4)$ и (p_3, c_2, c_3) или соответствующие их комбинации распределяются в качестве заряженных компонент по трём триплетам (+0 –), (+0 –), (+0 –), а кварки n_1 и p_1 являются образующими дублета (0, –). Действительно, собственное состояние M^3 с собственным значением $-\frac{1}{2}$(n_1– кварк) действием на него повышающим оператором M^+, согласно условию (19), можно перевести только в состояние с собственным значением $+\frac{1}{2}$(p_1 – кварк). Число независимых параметров в этом решении легко подсчитывается и равно 18. При подсчёте мы учли, что у векторов $\vec{p}_3, \vec{c}_2, \vec{c}_3$, в силу ортогональности с вектором $\vec{n}_1$, из формул (25) следует, что могут быть отличными от нуля максимум семь компонент.

Если мы наложим на вектор $\vec{p}_2$ условие (20), то таким путём мы придём к модели, в которой дополнительно к трём триплетам и дублету добавляется еще один дублет (+, 0), построенный из p_2-кварка и еще какого-нибудь нейтрального кварка (например, n_2).

Для этого решения соотношения (23) остаются в силе, а условие диагональности (24) будет выполнено, если дополнительно к (25)

$$(\vec{p}_2)_i = \delta_{\beta i}, \tag{27}$$

где $\beta \neq a$. В этом случае нейтральный ток можно записать в виде

$$J^3_\mu = -\frac{1}{2}\bar{n}_1 O_\mu n_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_1 O_\mu p_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 O_\mu p_2 - \frac{1}{2}\bar{n}_2 O_\mu n_2 - \bar{n}_4 O_\mu n_4 -$$
$$- \bar{\lambda}_4 O_\mu \lambda_4 - \bar{\lambda}_1 O_\mu \lambda_1 + \bar{p}_3 O_\mu p_3 + \bar{c}_2 O_\mu c_2 + \bar{c}_3 O_\mu c_3 . \qquad (28)$$

Решение содержит 15 независимых параметров. При подсчёте числа независимых параметров надо принять во внимание, что у векторов ($\vec{p}_3$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$) и ($\vec{\lambda}_1$, $\vec{n}_4$, $\vec{\lambda}_4$) только шесть компонент могут быть отличными от нуля.

Анализ трехтриплетных моделей будет полным, если рассмотреть еще одну возможность, не включающую дублеты (независимых параметров будет 21).

Аналогично можно изучить классы моделей с одним и двумя триплетами при различных вариантах включения в схемы дублетов. Построение их не представляет труда, поэтому в заключение мы остановимся на одной интересной модели, не включающей триплеты и построенной на максимально возможном числе дублетов (8).

Тогда условие (7) будет нарушаться также максимальным способом, и восемь векторов ($\vec{n}_1$, $\vec{\lambda}_1$, . . . , $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$) должны удовлетворять условиям ортонормированности и взаимной ортогональности. Условие диагональности нейтрального тока в этом варианте (обращение в нуль выражения (4) $H_{ij} = 0$ при $i \neq j$) тривиально удовлетворяется, если эти вектора направить вдоль Декартовых осей координат:

$$(\vec{n}^o_1)_i = \delta_{a_1 i} , \dots , (\vec{\lambda}^o_4)_i = \delta_{a_4 i} ; \ (\vec{p}^o_2)_i = \delta_{a_5 i} , \dots , (\vec{c}^o_3)_i = \delta_{a_8 i} , \qquad (29)$$
$$a_m \neq a_n , \text{ если } m \neq n .$$

Обобщение этого решения можно получить, если представить восьмимерное пространство в виде прямой суммы двух ортогональных четырёхмерных подпространств в соответствии с разбиением базиса (29) на два подбазиса ($\vec{n}^o_1$, $\vec{\lambda}^o_1$, $\vec{n}^o_4$, $\vec{\lambda}^o_4$) и ($\vec{p}^o_2$, $\vec{p}^o_3$, $\vec{c}^o_2$, $\vec{c}^o_3$).

В каждом из 4-мерных подпространств можно ввести ортогональные преобразования R и $\tilde{R}$, при этом имеем

$$(R\vec{n}^o_1)_i (R\vec{n}^o_1)_j + \dots + (R\vec{\lambda}^o_4)_i (R\vec{\lambda}^o_4)_j = \sum_{k=1}^{4} R_{i a_k} R_{j a_k} = \delta_{ij} ; \ i,j = a_1, \dots, a_4 ,$$
$$(\tilde{R}\vec{p}^o_2)_i (\tilde{R}\vec{p}^o_2)_j + \dots + (\tilde{R}\vec{c}^o_3)_i (\tilde{R}\vec{c}^o_3)_j = \sum_{k=1}^{4} \tilde{R}_{i a_k} \tilde{R}_{j a_k} = \delta_{ij} ; \ i, j = a_5 , \dots, a_8 ,$$

$$H_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = a_1, \ldots, a_4 \\ -1, & \text{если} \quad i = a_5, \ldots, a_8, \end{cases} \tag{30}$$

и, следовательно, мы получаем произвол, выраженный в виде 12 параметров (каждому ортогональному преобразованию в 4-мерном пространстве отвечают шесть параметров). Во всех векторах могут быть выбраны не равными нулю не более четырёх компонент. Две четвёрки векторов с отрицательно и положительно заряженными частицами вращаются в своих 4-мерных ортогональных друг другу подпространствах, т.е. из 32 ненулевых коэффициентов только 12 независимые. Нейтральный ток имеет в этом случае симметричную форму. Так, если $a_1 \leftrightarrow p_1$, $a_2 \leftrightarrow c_1$, $a_3 \leftrightarrow p_4$, $a_4 \leftrightarrow c_4$, $a_5 \leftrightarrow n_2$, $a_6 \leftrightarrow n_3$, $a_7 \leftrightarrow \lambda_2$, $a_8 \leftrightarrow \lambda_3$, то

$$\begin{aligned} J_\mu^3 = &-\frac{1}{2}\bar{n}_1 0_\mu n_1 + \frac{1}{2}\bar{p}_1 0_\mu p_1 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_1 0_\mu \lambda_1 + \frac{1}{2}\bar{c}_1 0_\mu c_1 - \frac{1}{2}\bar{n}_4 0_\mu n_4 + \\ &+ \frac{1}{2}\bar{p}_4 0_\mu p_4 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_4 0_\mu \lambda_4 + \frac{1}{2}\bar{c}_4 0_\mu c_4 + \frac{1}{2}\bar{p}_2 0_\mu p_2 - \frac{1}{2}\bar{n}_2 0_\mu n_2 + \\ &+ \frac{1}{2}\bar{p}_3 0_\mu p_3 - \frac{1}{2}\bar{n}_3 0_\mu n_3 + \frac{1}{2}\bar{c}_2 0_\mu c_2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_2 0_\mu \lambda_2 + \frac{1}{2}\bar{c}_3 0_\mu c_3 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_3 0_\mu \lambda_3. \end{aligned} \tag{31}$$

Модели с меньшим числом дублетов строятся в соответствии с обращением в нуль некоторых из векторов $(\vec{n}_1, \vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{c}_3)$. Заряженный ток с ΔQ +1 в восьмидублетной схеме с нейтральным током (31) выглядит следующим образом:

$$J_\mu^+ = (\bar{p}_2, \bar{c}_2, \bar{p}_3, \bar{c}_3)\, R\, 0_\mu \begin{pmatrix} n_2 \\ \lambda_2 \\ n_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + (\bar{p}_1, \bar{c}_1, \bar{p}_4, c_4)\, \tilde{R} 0_\mu \begin{pmatrix} n_1 \\ \lambda_1 \\ n_4 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Отождествляя четвёртый столбец кварков из матрицы $T - p_4 \leftrightarrow \nu_e$, $c_4 \leftrightarrow \nu_\mu$, $n_4 \leftrightarrow e^-$, $\lambda_4 \leftrightarrow \mu^-$ и выбирая ортогональные преобразования из формулы (30)

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c & 0 & 0 \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

и

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c & 0 & 0 \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ 0 & 0 & -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix}, \qquad (34)$$

можно получить для кварков ток Кабиббовского вида, соответствующий в схеме $SU(4)$ модели ГИМ, а для лептонов

$$J^{+}_{\mu} = \bar{\nu}_e O_{\mu} e^{-} + \bar{\nu}_{\mu} O_{\mu} \mu^{-}. \qquad (35)$$

Более общий анализ представлений надеемся провести в дальнейшем.

При изучении представлений $SU(2)$-алгебры в моделях с цветными кварками мы существенным образом пользовались принципом диагональности нейтрального тока. Экспериментальное подтверждение этого принципа имеется только для перехода $n \leftrightarrow \lambda$. В модели кварков $SU(4)$ есть два решения алгебры $SU(2)$, в которых вид токов не противоречит эксперименту. В одном из них (ГИМ) диагональность нейтрального тока получается автоматически. Другое решение, вообще говоря, не диагонально, правда, в схеме, основанной на обоих решениях, подавление тока $n \leftrightarrow \lambda$, а также требование Кабиббовского вида для заряженных переходов приводит к подавлению второго недиагонального тока $p \leftrightarrow c$ /7/.

Из проведенного анализа по исследованию видов калибровочных схем слабых взаимодействий, основанных на $SU(2)$-симметрии, в моделях кварков с учётом новых квантовых чисел очарование и цвет можно выделить два класса решений. К первому классу надо отнести только триплетные схемы, ко второму - только дублетные. Между этими классами решений лежат промежуточные так называемые смешанные схемы, включающие как триплеты, так и дублеты.

В триплетных решениях нейтральные слабые взаимодействия происходят между заряженными частицами. Так, в рамках этих схем нейтральные взаимодействия между нейтрино в первом порядке по константе связи отсутствуют. В решениях с максимальным числом триплетов (в $SU(3)' \times SU(3)''$

2 триплета, в $SU(4)' \times SU(4)''$ 4 триплета) может быть достигнуто отождествление нейтрального тока с электромагнитным, так как оператор O_μ может с одинаковым успехом быть носителем как $(V_\mu + A_\mu)$; так и $(V_\mu - A_\mu)$-структуры слабого тока. Дублетные схемы, напротив, представляют возможность включать взаимодействие через нейтральный векторный Z-бозон и между нейтральными кварками. Так, 8-дублетная схема в $SU(4)' \times SU(4)''$ учитывает нейтральные взаимодействия между всеми видами кварков.

В заключение мы выражаем благодарность Л.Д.Соловьёву за постоянное внимание и интерес к работе, а также В.В.Ежеле, Е.П. Кузнецову, А.Г.Липартелиани, В.А.Монич, Ю.П.Никитину, Г.П.Пронько за ряд полезных обсуждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.L.Glashow, I.Iliopoulos, L.Maiani. Phys.Rev., D2, 1285 (1970).
2. Н.Н.Боголюбов и др. Препринт ОИЯИ Р-2141, Дубна, 1965; M.Y.Han, Y.Nambu. Phys.Rev., 139B, 1006 (1965).
3. I.C.Pati, A.Salam. Phys.Rev., D8, 1240 (1973); Phys.Rev.Lett., 31, 661 (1973).
4. S.Weinberg. Proc. of I Intern.Conf. on Elementary Particle Physics, Aix-en-Provence, 1973 .
5. Г.Г.Волков, А.Г.Липартелиани, В.А.Монич. Препринт ИФВЭ 75-153, Серпухов, 1975.
6. H.Georgi, S.L.Glashow. Phys.Rev., D7, 561 (1973).
7. Г.Г.Волков, А.Г.Липартелиани, Ф.Ф.Тихонин. Препринты ИФВЭ 75-103, 75-110, Серпухов, 1975; "Письма в ЖЭТФ", 22, 523 (1975).

Рукопись поступила в издательскую группу
11 января 1976 года.

Цена 8 коп.

Издательская группа И Ф В Э
Заказ 91. Тираж 290. 0,7 уч.-изд.л. Т-04007.
Январь 1976. Редактор Н.В. Ежела.