ФЭИ-601

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б. Д. АБРАМОВ

А31

О некоторых условиях разрешимости краевых задач теории переноса

Обнинск — 1975

ФЭИ-601

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б.Д.Абрамов

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Обнинск - 1975

УДК 519.9:621.039.51.12
М-17

А Н Н О Т А Ц И Я

Показано, что условия разрешимости краевых задач для многогруппового уравнения переноса с анизотропным рассеянием в средах с кусочно-постоянными коэффициентами в классе абсолютно интегрируемых функций эквивалентны условиям разрешимости приводимой в работе системы сингулярных интегральных уравнений с дополнительными условиями, связывающей между собой значения потоков на границах раздела и на внешней поверхности.

I. Введение. Известно [I-4], что решение краевых задач теории переноса нейтронов в ограниченных объемах с кусочно-постоянными по координате сечениями можно свести к решению соответствующих уравнений переноса с постоянными по координате сечениями во всём пространстве, например, путем введения некоторых "фиктивных" источников, сосредоточенных на границах раздела сред с различными сечениями. Если считать эти "фиктивные" источники известными, то часто можно найти аналитические решения полученных уравнений переноса (скажем, методом преобразования Фурье или методами типа Кейза). Но так как источники сами известным образом зависят от (неизвестного пока) решения рассматриваемой краевой задачи, то возникает нетривиальная задача по их определению. Если эта задача имеет решение, то считается, что разрешима и сама краевая задача.

Таким образом, разрешимость последних уравнений, являющихся по сути условиями, которым должно удовлетворять решение краевой задачи на границах раздела и на внешней поверхности рассматриваемого обьема, выступает в качестве критерия разрешимости поставленной краевой задачи.

В связи с этим представляется интересным исследовать для достаточно широкого круга задач меру эквивалентности условий разрешимости таких уравнений условиям разрешимости соответствующих краевых задач, а также предложить способ вывода подобных уравнений, не опирающийся на построение каких-либо решений самих уравнений переноса (ибо построение обобщенных решений уравнений переноса, с одной стороны, зачастую (например, в многогрупповом случае) затруднено отсутствием подходящих формул регуляризации некоторых расходящихся интегралов, а, с другой стороны, не является необходимым в данной задаче). Выяснение простейшего вида этих уравнений важно и с точки зрения построения вычислительных алгоритмов, ибо они позволяют по входящему в данный объем излучению сразу определять излучение, выходящее из объема, не решая уравнения переноса внутри обьема.

2. В ограниченном обьеме V трехмерного эвклидова пространства рассматривается процесс переноса нейтронов, описываемый уравнением

$$\Omega\nabla\psi+\Sigma\psi=\sum_{\ell=0}^{M}\frac{2\ell+1}{4\pi}A_\ell\int_{4\pi}d\Omega' P_\ell(\Omega\Omega')\psi(x,\Omega')+h(x,\Omega), \qquad (I)$$

где Σ, A_ℓ – некоторые квадратные матрицы порядка N, причем $\Sigma=\mathrm{diag}\{\Sigma^{(1)},\Sigma^{(2)},\dots,\Sigma^{(N)}\}$, $\psi(x,\Omega)$ – вектор-столбец с компонентами $\psi^{(i)}(x,\Omega)$, $i=1,2,\dots,N$; $\psi^{(i)}(x,\Omega)$ – поток нейтронов в i-й энергетической группе в точке $x\in V$, $x=\{x_1,x_2,x_3\}$, движущихся в направлении $\Omega=\{\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3\}$, $|\Omega|=\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2}=1$; $P_\ell(\Omega\Omega')$ – полиномы Лежандра; $h(x,\Omega)$ – некоторый вещественный вектор, компоненты которого абсолютно интегрируемы на $V\times V_\Omega$, где V_Ω – множество направлений Ω. Элементы матриц Σ, A_ℓ вещественны и не зависят от x,Ω.

Решение уравнения (I) отыскивается в классе вектор-функций $\psi(x,\Omega)$, компоненты которых абсолютно интегрируемы на $\bar V\times V_\Omega$, и которые при почти всех $x,\Omega\in\Gamma\times V_\Omega$ удовлетворяют краевому условию

$$\psi(x,\Omega)=f(x,\Omega)\ ,\ \Omega n(x)<0\ ,\ x\in\Gamma, \qquad (2)$$

где $n(x)$ – вектор внешней нормали к поверхности $\Gamma=\bar V\setminus V$, f – некоторый вещественный вектор с абсолютно интегрируемыми компонентами. Предполагается, что поверхность Γ объема V состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых поверхностей класса $C^{(1)}$ (см. [5]), так что внешняя нормаль $n(x)$, $x\in\Gamma$ существует во всяком случае почти всюду на Γ.

Всюду далее мы будем полагать, что вектор-функция f заранее задана. Однако в ряде задач возникает необходимость учета т.н. "прострельных" нейтронов. При этом $f(x,\Omega), x\in\Gamma, \Omega n(x)<0$ становится известным образом [5] зависящей от $\psi(x,\Omega), \Omega n>0, x\in\Gamma$. Для таких задач формулируемые ниже условия разрешимости следует дополнить условиями, обеспечивающими нужную зависимость f от ψ.

Отметим также, что более общая задача о распространении нейтронов в средах с кусочно-постоянными в объеме V коэффициентами Σ, A_ℓ сводится к совокупности рассматриваемых выше задач, если положить, что $f(x,\Omega)$ при $\Omega n<0$ есть либо поток нейтронов из соседнего куска, либо функция, определенная выше. Поэтому для получения условий разрешимости краевых задач в кусочно-однородных средах следует лишь условия, формулируемые ниже для каждого данного куска, дополнить условиями, обеспечивающими нужную непрерывность решения на границах раздела кусков.

3. Решение краевой задачи (I)-(2) удобно свести к решению уравнения переноса (I) во всем пространстве. Из всевозможных [3] продолжений функции $\psi(x,\Omega)$ на $x \notin \bar{V}$, рассмотрим продолжение нулем. Обозначая такую функцию $\bar{\psi}(x,\Omega)$, имеем [4]:

$$\Omega\nabla\bar{\psi} + \Sigma\bar{\psi} = \sum_{l=0}^{M} \frac{2l+1}{4\pi} \Sigma_l \int d\Omega' P_l(\Omega\Omega')\bar{\psi}(x,\Omega') + \theta k + g, \tag{3}$$

где

$$g(x,\Omega) = \psi(x,\Omega)\,\Omega\nabla\theta(V), \quad \theta(V) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{V}, \\ 0, & x \notin \bar{V}. \end{cases}$$

Здесь $\Omega\nabla$ следует понимать как обобщенную производную по направлению Ω [6].

Выберем из множества всех обобщенных решений уравнения (3) такое решение ψ', что при почти всех $\Omega \in V_\Omega$

$$\operatorname{supp} \psi' \in \bar{V}. \tag{4}$$

Тогда $\psi'(x,\Omega)$ является решением поставленной краевой задачи (I)-(2). Действительно, интегрируя уравнение (3) по направлению Ω, получим (вспоминая определение первообразной обобщенной функции)

$$\psi'(x_\Gamma+\Omega 0,\Omega) - \psi'(x_\Gamma-\Omega 0,\Omega) = -\psi(x_\Gamma,\Omega)\,\mathrm{sign}(\Omega n(x_\Gamma)), \tag{5}$$

где $\psi'(x_\Gamma \pm \Omega 0,\Omega) = \lim \psi'(x_\Gamma \pm \xi\Omega,\Omega)$, $\xi \to 0$, $x_\Gamma \in \Gamma$.

Из условий (4),(5) следует, что ψ' удовлетворяет краевому условию (2) на поверхности Γ объема V. Ясно также, что ψ' является (обобщенным) решением уравнения (I) внутри объема V (ибо $(g,\varphi)=0$ для любой основной функции $\varphi(x)$, обращающейся в нуль на Г). Ниже будет показано, что ψ' - суммируемая по модулю функция. Таким образом, можно положить $\psi(x,\Omega) = \psi'(x,\Omega)$ почти всюду в $\bar{V} \times V_\Omega$.

4. Для выяснения условий разрешимости краевой задачи (I)-(2) произведем ряд преобразований над уравнением (3). Прежде всего, используя соотношения [7]

$$P_\ell(\Omega\Omega') = \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{2}{1+\delta_{0m}} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} Y_\ell^m(\Omega) Y_\ell^m(\Omega'),$$

$$Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) = \begin{cases} P_\ell^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi, & m = 0,1,\dots,\ell, \\ P_\ell^{|m|}(\cos\vartheta)\sin|m|\varphi, & m = -1,-2,\dots,-\ell, \end{cases}$$

$$\sum_{\ell=0}^{M} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\cdot) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{\ell=|m|}^{M} (\cdot),$$

получим

$$\Omega\nabla\bar\Psi + \Sigma\bar\Psi = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{\ell=|m|}^{M} \frac{2\ell+1}{2\pi} \frac{1}{1+\delta_{0m}} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} Y_\ell^m(\Omega) A_\ell \int d\Omega' Y_\ell^m(\Omega')\bar\Psi \tag{6}$$

$$+ \Theta h + g.$$

Уравнение (6) умножим на функцию $e^{\frac{sX}{\omega}}$, где $s = \{s_1, s_2, s_3\}$, $|s| = 1$ - некоторый единичный вектор, $\omega = \nu + i\eta$ - комплексное число, $sX = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3$ и проинтегрируем по всем X. Получим после простых преобразований

$$\psi(s,\omega,\Omega) = \omega(\omega\Sigma - \Omega s E)^{-1} \Big\{ \sum_{m=-M}^{M} \sum_{\ell=|m|}^{M} \frac{2\ell+1}{2\pi} \frac{1}{1+\delta_{0m}} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} Y_\ell^m(\Omega) A_\ell F_\ell^m(s,\omega) \tag{7}$$

$$+ h(s,\omega,\Omega) + g(s,\omega,\Omega) \Big\},$$

где E - единичная матрица порядка N,

$$\psi(s,\omega,\Omega) = \int_V dx\, e^{\frac{sX}{\omega}} \Psi(X,\Omega); \quad F_\ell^m(s,\omega) = \int_V dx\, e^{\frac{sX}{\omega}} \int d\Omega\, Y_\ell^m(\Omega) \Psi(X,\Omega); \tag{8}$$

$$h(s,\omega,\Omega) = \int_V dx\, e^{\frac{sX}{\omega}} h(X,\Omega); \quad g(s,\omega,\Omega) = -\int_\Gamma d\Gamma\, \Omega n(X) e^{\frac{sX}{\omega}} \Psi(X,\Omega).$$

Далее
$$F_l^m(s,\omega)=\sum_{l'=|m|}^{M}\frac{2l'+1}{2}\frac{(l'-|m|)!}{(l'+|m|)!}\,\omega\int_{-1}^{1}d\mu\,(\omega\Sigma-\mu E)^{-1}P_l^{|m|}(\mu)P_{l'}^{|m|}(\mu)A_{l'}F_{l'}^m(s,\omega)$$
$$+\,\omega\int_{-1}^{1}d\mu\,(\omega\Sigma-\mu E)^{-1}P_l^{|m|}(\mu)h_l^{|m|}(s,\omega,\mu)+\omega\int_{-1}^{1}d\mu\,(\omega\Sigma-\mu E)^{-1}P_l^{|m|}(\mu)g_l^m(s,\omega,\mu), \tag{9}$$
где
$$P_l^m(\mu)h_l^m(s,\omega,\mu)=\int_{\Omega\perp S}d\Omega\,Y_l^m(\Omega)h(s,\omega,\Omega), \tag{10}$$
$$P_l^m(\mu)g_l^m(s,\omega,\mu)=\int_{\Omega\perp S}d\Omega\,Y_l^m(\Omega)g(s,\omega,\Omega),$$
$\mu=S\Omega=S_1\Omega_1+S_2\Omega_2+S_3\Omega_3$, $\Omega\perp S$ означает множество направлений Ω, перпендикулярных вектору S.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Введем диагональные матрицы размера } (M-|m|+1)N\\
&E^m=\mathrm{diag}\{E,E,\dots,E\},\\
&\Sigma^m=\mathrm{diag}\{\Sigma,\Sigma,\dots,\Sigma\},\\
&P^m=\mathrm{diag}\{P_{|m|}^{|m|}E,\ P_{|m|+1}^{|m|}E,\ \dots,\ P_M^{|m|}E\},\\
&\text{квадратную матрицу размера } N\\
&A_l^m=\frac{2l+1}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}A_l,\\
&\text{квадратные блочные матрицы размера } (M-|m|+1)N\\
&A^m=\mathrm{diag}\{A_{|m|}^m,\ A_{|m|+1}^m,\ \dots,\ A_M^m\},\\
&J^m=\begin{vmatrix}E & E & \cdots & E\\ E & E & \cdots & E\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ E & E & \cdots & E\end{vmatrix},\\
&\Lambda^m=\omega\int_{-1}^{1}d\mu\,(\omega\Sigma^m-\mu E^m)^{-1}P^m(\mu)J^mP^m(\mu),\\
&B^m=E^m-\Lambda^mA^m,
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

вектора-столбцы размера $(M-|m|+1)N$

$$\left.\begin{aligned}
&F^m = \mathrm{colon}\{F^m_{|m|}, F^m_{|m|+1}, \dots, F^m_M\},\\
&h^m = \mathrm{colon}\{h^m_{|m|}, h^m_{|m|+1}, \dots, h^m_M\},\\
&g^m = \mathrm{colon}\{g^m_{|m|}, g^m_{|m|+1}, \dots, g^m_M\},\\
&H^m = \omega\int_{-1}^{1} d\mu\,(\omega I^m - \mu E^m)^{-1} P^m(\mu)\, h^m(s,\omega,\mu),\\
&G^m = \omega\int_{-1}^{1} d\mu\,(\omega I^m - \mu E^m)^{-1} P^m(\mu)\, g^m(s,\omega,\mu).
\end{aligned}\right\}$$

При этом из уравнения (9) можно получить

$$B^m(\omega)F^m(s,\omega) = H^m(s,\omega) + G^m(s,\omega),\quad m=0,\pm1,\dots,\pm M. \tag{12}$$

Из уравнений (12) имеем формально

$$F^m(s,\omega) = [B^m(\omega)]^{-1}[H^m(s,\omega) + G^m(s,\omega)],\quad m=0,\pm1,\dots,\pm M. \tag{13}$$

5. Введем в рассмотрение плоскость C комплексных чисел $\omega = \nu + i\eta$, плоскость $\overline{C}$ - пополнение плоскости C точкой $\omega = \infty$, плоскость $\overline{C}\setminus\{0\}$ - плоскость $\overline{C}$ с "выколотой" точкой $\omega = 0$. Справедлива следующая

Теорема I. Необходимое и достаточное условие разрешимости краевой задачи (I)-(2) в классе абсолютно интегрируемых на $V \times V_\Omega$ вектор-функций заключается в голоморфности вектор-функции $\Psi(s,\omega,\Omega)$ в плоскости $\overline{C}\setminus\{0\}$ при почти всех Ω и каждом S.

Необходимость условий теоремы непосредственно следует из определения (8) и из теоремы о дифференцировании под знаком интеграла Лебега [7]. Пусть теперь функция $\Psi(s,\omega,\Omega)$ удовлетворяет условиям теоремы.
Введем комплексный вектор $p=\{p_1,p_2,p_3\}$, $p = s/2\pi i\omega$ и рассмотрим функцию $\Psi'(p,\Omega) = \Psi(s,\omega,\Omega)$. Оценивая поведение компонент вектора $\Psi'(p,\Omega)$, определяемого правой частью формулы (7), убеждаемся, что $\Psi'(p,\Omega)$ при почти всех $\Omega \in V_\Omega$ удовлетворяет

условиям обратной теоремы Винера-Пэли [8] и что, таким образом, существует функция $\psi'(x,\Omega)$, суммируемая с квадратом при почти всех $\Omega \in V_\Omega$, удовлетворяющая условию (4), являющаяся обратным преобразованием Фурье функции $\psi'(P,\Omega)$. Эта функция $\psi'(x,\Omega)$ по своему построению является (обобщенным) решением уравнения (3) и, в силу результатов пункта 3, есть решение краевой задачи (I)-(2). Таким образом, при выполнении условий теоремы существует решение поставленной задачи.

Здесь следует заметить, что из теоремы Винера-Пэли непосредственно следует, что носитель функции ψ' содержится лишь в некотором брусе, содержащем объем V. Можно, однако, в нашем случае применить эту теорему к каждому элементарному брусу, на которые разбивается объем V при составлении интегральной суммы. Тогда в результате предельного перехода мы и получим условие (4).

6. Что же означают требования теоремы I ?
Для выяснения этого введем $\Sigma_{min} = min\, \Sigma^{(k)}$ по $1 \le k \le N$, $\theta(x)$ – функцию, равную I при $x \geq 0$ и нулю при прочих x, диагональную матрицу $\theta(E^m - N/\Sigma^m)$, элементы которой – соответствующие θ -функции. По формулам Сохоцкого-Племеля имеем

$$
\begin{aligned}
&(B^m)^{\pm} = B^m(\nu) \pm i\pi\nu\theta(E^m - N/\Sigma^m)P^m(\nu\Sigma^m)J^m P^m(\nu\Sigma^m)A^m,\\
&B^m(\nu) = E^m - \nu\int_{-1}^{1} d\mu(\nu\Sigma^m - \mu E^m)^{-1}P^m(\mu)JP^m(\mu)A^m,\\
&(H^m)^{\pm} = H^m(s,\nu) \mp i\pi\nu\theta(E^m - N/\Sigma^m)P^m(\nu\Sigma^m)h^m(s,\nu,\nu\Sigma^m),\\
&H^m(s,\nu) = \nu\int_{-1}^{1} d\mu(\nu\Sigma^m - \mu E^m)^{-1}P^m(\mu)h^m(s,\nu,\mu),\\
&(G^m)^{\pm} = G^m(s,\nu) \mp i\pi\nu\theta(E^m - N/\Sigma^m)P^m(\nu\Sigma^m)g^m(s,\nu,\nu\Sigma^m),\\
&G^m(s,\nu) = \nu\int_{-1}^{1} d\mu(\nu\Sigma^m - \mu E)^{-1}P^m(\mu)g^m(s,\nu,\mu),
\end{aligned}
\tag{I4}
$$

где символ $(\ )^{\pm}$ означает предельные значения соответствующих величин при $\omega \to \nu$, $\eta \gtrless 0$, интегралы рассматриваются в смысле главного значения, матричная запись аргумента означает зависимость компонент векторов от соответствующих диагональных элементов матрицы $\nu\Sigma^m$.

Пусть также $\Delta_m(\omega) = \det B^m(\omega)$, а $D^m(\omega)$ – матрица, союзная к $B^m(\omega)$, т.е. $(B^m)^{-1} = D^m/\Delta_m$.

Справедлива

<u>Теорема 2.</u> Разрешимость краевой задачи (I)–(2) в классе абсолютно интегрируемых на $\overline{V} \times V_\Omega$ вектор-функций $\psi(x,\Omega)$ эквивалентна разрешимости при всех $\nu \neq 0$ и каждом s следующей системы уравнений

$$\theta(E^m - \nu\Sigma^m) P^m(\nu\Sigma^m) J^m P^m(\nu\Sigma^m) A^m [B^m(\nu)]^{-1} [G^m(s,\nu) + H^m(s,\nu)] =$$

$$= -\theta(E^m - \nu\Sigma^m) P^m(\nu\Sigma^m) [g^m(s,\nu,\nu\Sigma^m) + h^m(s,\nu,\nu\Sigma^m)], \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm M; \qquad (15)$$

рассматриваемых совместно с условиями

а) функции $F^m(s,\nu) = [B^m(\nu)]^{-1} [G^m(s,\nu) + H^m(s,\nu)]$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm M$, голоморфны при всех s и $\nu \neq 0$;

б) пусть ω_0 – нуль кратности $\varkappa$ функции $\Delta_m(\omega)$ не лежащий на отрезке $[-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min}]$. Тогда при $\omega_0 \neq \infty$ и каждом s

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{d^k}{d\omega^k} \{ D^m(\omega) [G^m(s,\omega) + H^m(s,\omega)] \} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \varkappa - 1,$$

а в случае $\omega_0 = \infty$

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{d^k}{d\xi^k} \{ D^m(1/\xi) [G^m(s, 1/\xi) + H^m(s, 1/\xi)] \} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \varkappa - 1,$$

в)

$$\theta(E - \nu\Sigma) \{ h^m_e(s,\nu,\nu\Sigma) + g^m_e(s,\nu,\nu\Sigma) \} \equiv 0 \quad \text{при} \quad |m| > M.$$

<u>Доказательство.</u> Согласно теореме I, следует доказать, что условия данной теоремы необходимы и достаточны для голоморфности $\psi(s,\omega,\Omega)$ в $\bar{C}\setminus\{0\}$ при почти всех Ω и каждом s. Итак, пусть $\psi(s,\omega,\Omega)$ такова. Ясно, что при этом все моменты $F_\ell^{m}(s,\omega)$ функции $\psi(s,\omega,\Omega)$ голоморфны в $\bar{C}\setminus\{0\}$ при всех s. Тогда предельные значения $(F^{m})^{\pm}$ совпадают между собой и голоморфны при всех $\nu\neq 0$. Из уравнения (I2) получаем, следовательно $(B^{m})^{\pm}F=(H^{m})^{\pm}+(G^{m})^{\pm}$, или, с учетом (I4)

$$B^{m}(\nu)F^{m}(s,\nu)=G^{m}(s,\nu)+H^{m}(s,\nu), \tag{I6}$$

$$\begin{aligned}&\theta(E^{m}-\nu\Sigma^{m})P^{m}(\nu\Sigma^{m})J^{m}P^{m}(\nu\Sigma^{m})A^{m}F^{m}(s,\nu)=\\&=-\theta(E^{m}-\nu\Sigma^{m})P^{m}(\nu\Sigma^{m})\left[g^{m}(s,\nu,\nu\Sigma^{m})+h^{m}(s,\nu,\nu\Sigma^{m})\right],\end{aligned} \tag{I7}$$

где $m=0,\pm1,\ldots,\pm M$. Отсюда вытекают уравнения (I5) и условие (а). Условие (б) следует также из уравнения (I2), переписанного в виде $\Delta_m F^{m}=\mathcal{D}^{m}[G^{m}+H^{m}]$. Условие (в) необходимо для устранения особенностей функции $\psi(s,\omega,\Omega)$, определяемой правой частью соотношения (7), в точках ν, для которых $\det(\nu\Sigma-\Omega s E)=0$. Т.е. вообще-то необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned}&\theta(E-\nu\Sigma)\Big\{\sum_{m=-M}^{M}\sum_{\ell=|m|}^{M}\frac{2\ell+1}{2\pi}\frac{1}{1+\delta_{0m}}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}Y_\ell^{m}(\nu\Sigma,\varphi)A_\ell F_\ell^{m}(s,\nu)\\&+h(s,\nu;\nu\Sigma,\varphi)+g(s,\nu;\nu\Sigma,\varphi)\Big\}\equiv 0,\end{aligned} \tag{I8}$$

где введены сферические координаты ϑ и φ так, что $\mu=\Omega s\cdot\cos\vartheta$, а угол φ характеризует направления, перпендикулярные направлению вектора s. Однако частично условия (I8) удовлетворяются уравнениями (I7), которые можно переписать в виде

$$\theta(E-\nu\Sigma)\Big\{\sum_{\ell'=|m|}^{M}P_{\ell\ell'}^{|m|}(\nu\Sigma)A_{\ell'}^{m}F_{\ell'}^{m}(s,\nu)+h_\ell^{m}(s,\nu,\nu\Sigma)+g_\ell^{m}(s,\nu,\nu\Sigma)\Big\}\equiv 0, \tag{I9}$$

где $m=0,\pm 1,\dots,\pm M$. Сравнивая уравнения (18) и (19), видим, что последние - просто уравнения для первых $(2M+1)$ моментов в разложении уравнения (18) в ряд Фурье по переменной φ. Все остальные моменты также обязаны равняться нулю, что и обеспечивается условием (в). Покажем достаточность. Из условия (а) и из определения функций $B^m(\omega)$, $G^m(s,\omega)$, $H^m(s,\omega)$ следует, что функции $g(s,\omega,\Omega)$, $h(s,\omega,\Omega)$ - голоморфны в $\bar{C}\setminus\{0\}$ при почти всех Ω и каждом s. Остается показать достаточность условий (15), (а)и(б) для голоморфности $F^m(s,\omega)$. Рассмотрим выражение $[B^m(\omega)]^{-1}[H^m(s,\omega)+G^m(s,\omega)]$. Эта функция голоморфна вне отрезка $[-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min}]$, ибо она представляет собой комбинацию интегралов типа Коши, а в нулях функции $\Delta_{m}(\omega)$ её разложение в ряд Лорана не содержит, в силу условия (б), главной части. Находя предельные значения её на берегах разреза вдоль $[-1/\Sigma_{min}, 1/\Sigma_{min}]$, убеждаемся, что при выполнении (15) они равны друг другу и равны функции, указанной в условии (а), а значит, голоморфны. Теорема доказана полностью.

Отметим, что число нулей функций $\Delta_m(\omega)$, $m=0,\pm 1,\dots,\pm M$ в $\bar{C}$ с учетом их кратности конечно. При $M=0$ доказательство этого факта содержится, например, в работе [9]. Аналогичное доказательство можно провести и для случая $M\neq 0$.

Заметим также, что из условия (в) следует что функция $h(s,\omega,\Omega)+g(s,\omega,\Omega)$ при $\omega=\Sigma^{-1}(\Omega s)$ определяется лишь нейтронами, испытавшими хотя бы одно столкновение с ядрами среды, т.е. не содержит нейтронов первого пробега.

7. Рассмотрим в качестве примера вид требований теоремы 2 в простейшем случае одногруппового уравнения с изотропным рассеянием. Положим также $h=0$, $A_0=C\neq 1$, $\Sigma=1$. Тогда для разрешимости этой краевой задачи в классе абсолютно интегрируемых функций необходимо и достаточно, чтобы при каждом s и всех $\Omega s\neq 0$ было разрешимо уравнение

$$g(s,\Omega s,\Omega)-\frac{c}{4\pi}\Omega s\int\frac{d\Omega'}{(\Omega-\Omega')s}\left[g(s,\Omega s,\Omega)-g(s,\Omega s,\Omega')\right]=0, \quad (20)$$

рассматриваемое совместно с условиями

а). $g(s,\Omega s,\Omega)$ – голоморфная функция $\Omega s \neq 0$ при всех s ;

б) в нулях $\pm\omega_0$ функции $\Delta = 1 - \frac{c\omega}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\omega-\mu}$

$$\int\frac{d\Omega'}{\pm\omega_0-\Omega' s}\, g(s,\pm\omega_0,\Omega') = 0 ,$$

в) $g(s,\Omega s,\Omega)$ есть функция лишь s и Ωs .

В теории переноса часто рассматриваются идеализированные задачи, в которых $\psi(x,\Omega)$ не зависит от части пространственных переменных, что соответствует как бы бесконечной протяженности объема V в направлении этих переменных. Развитые выше положения будут справедливы и для таких задач, если под V понимать конечные объемы в соответствующих пространствах меньшей размерности. Аналогичные результаты мы получим, работая в трехмерном эвклидовом пространстве, если правильно учтем дельта-функции, возникающие при интегрировании $\psi(x,\Omega)\exp(\xi x)$ по таким переменным. С учетом этого замечания выпишем вид функций $g(s,\omega,\Omega)$ для ряда модельных задач.

Пусть V – пластина, ограниченная плоскостями $z=a$, $z=b$, $a<b$, $z=x_1$ и пусть $f(x,\Omega)=f(z,\mu)$, где $\mu=(\Omega z)/|z|$. Тогда

$$g(s,\omega,\Omega)=\delta\left(\frac{s_2}{i\omega}\right)\delta\left(\frac{s_3}{i\omega}\right)g(s_1,\omega,\mu),$$

$$g(s_1,\omega,\mu)=\mu\psi(a,\mu)e^{\frac{s_1 a}{\omega}}-\mu\psi(b,\mu)e^{\frac{s_1 b}{\omega}},$$

условие (2) принимает вид

$$\begin{aligned}\psi(a,\mu)&=f(a,\mu),\ \mu>0,\\ \psi(b,\mu)&=f(b,\mu),\ \mu<0,\end{aligned} \qquad (21)$$

а условие (в) выполняется автоматически.

Таким образом, в уравнение (20) и условие (б) следует подставить функцию $g(s_1,\omega,\mu)$ и положить $s_2=s_3=0$, а, значит, $s_1=1$ либо $s_1=-1$.

Пусть V – сферический слой $a<r<b$ и пусть $f(x,\Omega)=f(r,\mu)$, где $r=|x|$, $\mu=\Omega x/r$. Тогда $\psi(x,\Omega)=\psi(r,\mu)$,

$$g(s,\omega,\Omega)=2\pi a^2\int_{-1}^{1}d\mu\,\mu\,\psi(a,\mu)\,e^{\frac{a\mu(s,\Omega)}{\omega}}I_0\left[\frac{a}{\omega}\sqrt{(1-\mu^2)(1-(s,\Omega)^2)}\right]$$

$$-2\pi b^2\int_{-1}^{1}d\mu\,\mu\,\psi(b,\mu)\,e^{\frac{b\mu(s,\Omega)}{\omega}}I_0\left[\frac{b}{\omega}\sqrt{(1-\mu^2)(1-(s,\Omega)^2)}\right],$$

где I_0 – модифицированная бесселева функция первого рода, условие (2) имеет вид (21), условие (в) удовлетворено автоматически.

Пусть – V – цилиндрический слой $a<\rho<b$ и пусть $f(x,\Omega)=f(\rho,\mu,\varphi)$, где $\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\mu=\Omega x_3/|x_3|$, φ – угол между векторами $\{x_1,x_2\}$ и $\{\Omega_1,\Omega_2\}$.

Тогда $\psi(x,\Omega)=\psi(\rho,\mu,\varphi)$,

$$g(s,\omega,\Omega)=\delta\left(\frac{s_3}{i\omega}\right)g(s_1,s_2,\omega,\mu),$$

$$g(s_1,s_2,\omega,\mu)=a\int_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\,e^{\frac{a}{\omega}\cos(\varphi_s-\varphi)}\psi(a,\mu,\varphi)$$

$$-b\int_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\,e^{\frac{b}{\omega}\cos(\varphi_s-\varphi)}\psi(b,\mu,\varphi),$$

где φ_s – угол между векторами $\{\Omega_1,\Omega_2\}$ и $\{s_1,s_2\}$, условие (2) имеет вид

$$\psi(a,\mu,\varphi)=f(a,\mu,\varphi),\quad \frac{\pi}{2}>\varphi>-\frac{\pi}{2},$$

$$\psi(b,\mu,\varphi)=f(b,\mu,\varphi),\quad \frac{3\pi}{2}>\varphi>\frac{\pi}{2},\qquad \mu\in(-1,1).$$

Итак, в уравнение (20) и условия (б),(в) следует подставить функцию $g(s_1,s_2,\omega,\mu)$, положив $s_3=0$.

8. Исследование свойств системы уравнений пункта 6 для случая многогрупповой задачи с изотропным рассеянием в плоском слое, проведенное в работе [10], показало, что в общем такая система не является нормально разрешимой, хотя в одногрупповом случае это так. Это обстоятельство, а также некоторые другие, в частности – трудности поиска в C корней уравнения $\Delta_M(\omega)=0,\ m=0,\pm 1,\dots,\pm M$, приводят к мысли о целесообразности применения при численной реализации уравнений пункта 6 методов типа метода итераций источников деления. Этот метод, широко используемый в расчётах быстрых реакторов, требует обычно знания решения во всех точках рассматриваемого объема. Применяемый нами подход позволяет так сформулировать подобный метод, что решение на границе объема в данной энергетической группе будет выражаться через значения решений в верхних группах также на границе объема, так что знания решения во всем объеме не требуется.

Представим матрицы A_ℓ в виде

$$A_0 = \Sigma_{s0} + \chi(\nu\Sigma_f),\quad A_\ell = \Sigma_{s\ell},\quad \ell = 1,2,\dots,M, \tag{22}$$

где $\Sigma_{s\ell},\ \ell=0,1,\dots,M$ – нижние треугольные матрицы с элементами $\Sigma_{s\ell}^{j\to i},\ i,j=1,2,\dots,N$, $\chi(\nu\Sigma_f)$ – матрица с элементами $\chi^{(i)}(\nu\Sigma_f)^{(j)}$.

Уравнение (I) представим в виде

$$\Omega\nabla\psi^{(i)} + \Sigma^{(i)}\psi^{(i)} = \sum_{\ell=0}^{M}\frac{2\ell+1}{4\pi}\Sigma_{s\ell}^{i\to i}\int d\Omega' P_\ell(\Omega\Omega')\psi^{(i)} + h^{(i)}, \tag{23}$$

где положим

$$h^{(i)}(x,\Omega) = \sum_{\ell=0}^{M}\frac{2\ell+1}{4\pi}\sum_{j=1}^{i-1}\Sigma_{s\ell}^{j\to i}\int d\Omega' P_\ell(\Omega\Omega')\psi^{(j)}(x,\Omega') + \frac{1}{4\pi}\chi^{(i)} q(x), \tag{24}$$

$$q(x) = \sum_{j=1}^{N}(\nu\Sigma_f)^{(j)}\int d\Omega\, \psi^{(j)}(x,\Omega).$$

Повторяя для уравнения (23) с источником (24) выкладки предыдущих пунктов, мы получим соответствующие уравнения и условия теоремы 2. Рассмотрим теперь одну итерацию. Задаем $q(x)$. Тогда при $i=1$ известна $h^{(1)}(x,\Omega)=\chi^{(1)}q(x)/4\pi$. Используя формулы (8),(9) и уравнения пункта 6, найдем $F^{(1)m}_{e}(s,\omega)$, затем, используя „Фурье-аналог" формулы (24), находим $h^{(2)}(s,\omega,\Omega)$ и повторяем процесс далее. Доходя до $i=N$, определяем $F^{(N)m}_{e}(s,\omega)$, определяем новое значение $q(s,\omega)$, после чего переходим к новой итерации. Можно утверждать, что если обычный процесс итераций источников (в пространстве $V\times V_{\Omega}$) сходится, то сходится и наш процесс (т.сказать процесс итераций в пространстве Фурье-образов).
В результате такого итеративного процесса можно определить значения многогрупповых потоков на границах раздела и на внешней поверхности, а также собственное число задачи (Кэфф либо критический размер). При желании, конечно, можно восстановить и решение $\psi(x,\Omega)$ почти всюду внутри объема.

9. Заключение. Программа исследования, сформулированная в пункте I, реализована в пунктах 2-6, основными результатами которых являются теоремы пунктов 5 и 6. Пункт 7 содержит иллюстративные примеры, а пункт 8 - описание одного возможного алгоритма решения многогрупповых задач типа метода итераций источников деления.

Автор благодарен С.Б.Шихову и Г.Я.Румянцеву за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Девисон. Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
2. И.Н.Лалетин. Метод поверхностных псевдоисточников для решения переноса нейтронов. В сб. "Вычислительные методы в теории переноса", под ред. Г.И.Марчука, М., Атомиздат, 1969.
3. Г.Я.Румянцев. Принцип граничных источников в теории переноса нейтронов. "Атомная энергия", 26, 447, 1969.
4. Ю.И.Ершов, С.Б.Шихов. Применение метода интегральных преобразований к решению граничных задач теории переноса нейтронов. ЖВМ и МФ, т. 12, 3, 639, 1972.
5. В.С.Владимиров. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды Математического института им. В.А. Стеклова, LXI, 1961.
6. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. М., 1958.
7. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М., Наука, 1971.
8. С.Л.Соболев. Введение в теорию кубатурных формул. М., Наука, 1974.
9. Б.Д.Абрамов. Исследование корней одного определителя, возникающего в многогрупповой теории переноса. Препринт ФЭИ-516, Обнинск, 1974.
10. Б.Д.Абрамов. Об одной краевой задаче многогрупповой теории переноса. Препринт ФЭИ-600, Обнинск, 1975.

ФЭИ-601 Т-11882 от 13/УII-1975 г. Объем 0,8 авт.л. Тираж 101 экз.
Цена 8 коп. Заказ № 233

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, октябрь 1975 г.