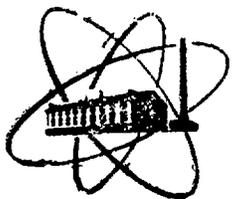


547708158

ФЭИ-642



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

К. А. РЕЗВЫХ

E16

**Экспериментальное исследование
точности расчета электростатических полей
методом последовательной верхней релаксации**

Обнинск — 1975

ФЭИ-642

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

К.А. Резвык

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ВЕРХНЕЙ РЕЛАКСАЦИИ**

Объем-1975

УДК 681.3.06 : 537.213

И - 17

А Н Н О Т А Ц И Я

На основе классификации типов погрешности предложен способ оценки составляющих и полной погрешности численного расчета потенциала методом последовательной верхней релаксации в зависимости от шага квадратной сетки и от кривизны граничных поверхностей. Исследованы погрешность при наличии прямолинейных внутренних границ и возможность повышения точности. Экспериментально оценена погрешность, присущая методу последовательной верхней релаксации в комплексе программ РЭЦ. Погрешность расчета потенциалов в поле электростатического ускорителя ЭГ-2,5 при шаге 0,009 и относительном среднем радиусе кривизны граничных поверхностей, большем или равном 6,5, не хуже $2 \cdot 10^{-3}$.

© - Физико-энергетический институт, 1975

Необходимая и достаточная точность результата численных расчетов имеет существенное значение для конструктора, исследующего поля. Кроме того, это важный параметр, определяющий эффективность расчетов на ЭВМ.

Возникновение и распространение ошибок в сложных вычислениях продолжают оставаться объектом изучения. В.Э.Милн [1] исследовал погрешность усечения итерационного процесса Зейделя и выразил ошибку конечно-разностного метода через производную неизвестного решения. В работе [2] оценивается погрешность конечно-разностного метода (конечно-разностная ошибка), а также ошибки округления машинного числа.

Комплексный подход к изучению эффективности численных расчетов [3] показывает, что строгое решение вопроса об эффективности возможно для конкретных ЭВМ, конкретных алгоритмов и конкретных задач. Проблема точности является более узкой и прежде всего связана с расчетными алгоритмами. Класс инженерных электростатических задач обладает рядом общих свойств: краевые задачи смешанного типа с похожими способами учета граничных условий. Справедливо ожидать, что такие задачи обладают и общими точностными характеристиками. Имеющая точное аналитическое решение поля сферического и цилиндрического конденсаторов позволяют сделать обобщения. Некоторые результаты о распределении ошибки в поле двух соосных цилиндров и о влиянии на точность способов учета граничных условий Неймана представлены в [3].

Комплекс программ РЭП [4] на ЭВМ М-220 решает двумерное уравнение Лапласа со смешанными краевыми условиями в цилиндрических и декартовых координатах при наличии сложной геометрии границ I-го рода. Численное решение задач с криволинейными границами методом последовательной верхней релаксации имеет конечно-разностную ошибку [2] порядка $C_1 \cdot h/\rho$, где C_1 - константа, h - шаг, ρ - радиус круга, описанного вокруг сетки решения. Предполагая размеры сетки 4000 - 10 000 узлов, имеем $h/\rho = 0,02 - 0,01$. Чтобы проверить, гарантирует ли метод последовательной верхней релаксации в комплексе РЭП необходимую точность определения потенциала в заданной конструкции, потребовалось проведение численного эксперимента.

ПОЛНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛОВ И ЕЁ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Погрешности, имеющие место в численном расчете электростатических полей, следует рассматривать как систематические, поскольку они вызваны определенными факторами. В результате работы комплекса РЭП может быть получено поле градиента E потенциала U . Полную погрешность ΔE представим в виде суммы двух слагаемых:

$$\Delta E = \Delta U + ПД, \quad (1)$$

где ΔU - погрешность расчета потенциала, ПД - погрешность алгоритма дифференцирования. Первое слагаемое является предметом настоящего исследования.

Главными причинами, вызывающими погрешность ΔU , являются следующие: дискретизация исходной задачи вследствие замены производных конечными разностями; усечение бесконечного процесса сходимости от начального приближения к решению конечно-разностной задачи; использование конечного количества знаков в машинном числе. Считая названные факторы хотя бы в первом приближении не зависящими, представим погрешность расчета потенциала в виде суммы:

$$\Delta U = C_1 \cdot КРО + C_2 \cdot ПУ + C_3 \cdot ПУМ, \quad (2)$$

где C_1, C_2, C_3 - константы, КРО - конечно-разностная ошибка, ПУ - погрешность усечения итерационного процесса, ПУМ - погрешность укорачивания мантиссы.

Конечно-разностная ошибка. Назовём конечно-разностной ошибкой (КРО) максимальную разность между точным решением дифференциальной задачи и точным решением конечно-разностной задачи. КРО не зависит от продолжительности итерационного процесса и в методе Зейделя [1], с. 231, может быть оценена как

$$КРО \leq \frac{M_4 \cdot h^4}{6}, \quad (3)$$

где h - шаг конечно-разностной сетки, M_4 - максимум абсолютного значения производных четвёртого порядка функции U в круге радиуса h с центром (r, z) по переменным r и z для всех значений

в интервалах $r \pm h, z \pm h$. Из (3) следует, что при $h \rightarrow 0$ стремимся к нулю, КРО стремится к нулю, если значение M_4 ограничено внутри области и на её границе. Величина КРО зависит от способа конечно-разностной аппроксимации в регулярных и нерегулярных узлах и в принятом пятиточечном алгоритме имеет соответственно порядок малости $O(h^2)$ и $O(h)$ [2,4].

Погрешность усечения. Пусть наибольшая разность между приближенными решениями задачи в каждом узле сетки в N -ой и $(N+1)$ -ой итерациях не превосходит ϵ . Тогда максимальную погрешность численного решения относительно точного решения конечно-разностной задачи назовем погрешностью усечения итерационного процесса (ПУ). В итерационном процессе Зейделя для пятиточечной схемы существует оценка [1]

$$ПУ \leq \frac{\epsilon \cdot \rho^2}{4h^2}, \tag{4}$$

где h - шаг квадратной сетки, ρ - радиус круга, описанного вокруг заданной области.

Появление ПУ в итоге обязано конечно-разностному представлению задачи, подобно ошибке метода КРО. Согласно (4), ограничение итерационного процесса величиной ϵ всегда обеспечивает ПУ, превышающую ϵ . Изменение шага противоположным образом воздействует на КРО и на ПУ.

Погрешность укорачивания мантиссы машинного числа (ПУМ) имеет оценку [2], с. 357,

$$ПУМ \leq C_2 \cdot h^2 \cdot \rho^{-S}, \tag{5}$$

где $C_2 \approx 2,5$, h - относительный шаг сетки, $\rho = 2$, S - количество сохраняемых знаков мантиссы. Для $S = 32$ [4] и шага $0,02$ имеем $ПУМ \leq 2,5 \cdot 10^{-6}$. Согласно методике [5], для 2 500 узлов при восьми арифметических операциях, необходимых для получения нового значения потенциала в каждом узле сетки, вычисляем оценку $ПУМ \leq 10^{-5}$.

Погрешность метода. Каждый разностный метод имеет свою конечно-разностную ошибку. Методом последовательной верхней релаксации с ускоряющим параметром 1,5 было рассчитано поле плоского конден-

сатора на сетке из 6×6 узлов, ограниченное двумя прямыми с заданными потенциалами 1 и 0 и двумя прямыми, на которых выполнены граничные условия Неймана. $h/\rho = 0,28$; $\epsilon = 10^{-5}$; наибольшая погрешность

$$\Delta U = U_{\text{числ}} - U_{\text{точн}}$$

составила $1,3 \cdot 10^{-5}$. В тех же условиях был испытан метод Зейделя. Число итераций возросло втрое, а наибольшая ошибка оказалась $5 \cdot 10^{-5}$. Поскольку в обоих расчетах ПУ и ПУМ оставались неизменными, здесь проявляется погрешность метода. Этот результат подтверждает замечание [3] о том, что при заданной величине ϵ наибольшая точность обеспечивается тем методом, который обладает большей скоростью сходимости. Кроме того, погрешности КРО в методах Зейделя и последовательной верхней релаксации близки.

В настоящей работе исследуем один, довольно распространенный метод - последовательную верхнюю релаксацию с постоянным или переменным [6] ускоряющим параметром.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Результаты. Эксперименты основаны на допущениях, что ПУМ мала по сравнению с КРО, что при стремящейся к нулю величине ϵ ПУ стремится к нулю, в то время как общая погрешность приближается к величине КРО. В качестве критерия погрешности принимаем абсолютную погрешность, наибольшую во всей области решения

$$\Delta U_{\text{аб}} = \max_{i,j} (U_{\text{числ}} - U_{\text{точн}}).$$

Абсолютная погрешность, в отличие от относительной погрешности, прямо характеризует процесс сходимости. Вместе с тем, наибольшая погрешность имеет место в области максимального градиента потенциала, т.е. в области, представляющей наибольший интерес.

На квадратной сетке из $\ell \times m$ узлов отношение шага сетки h к радиусу ρ области решения выражается формулой

$$\frac{h}{\rho} = \frac{2}{\sqrt{(e-1)^2 + (r-1)^2}}$$

Кроме шага, на величину погрешности воздействуют оба главных радиуса кривизны граничной поверхности: $R_{\text{рад}}$ - в радиальном и $R_{\text{ос}}$ - в осевом сечениях. Будем характеризовать осесимметричную конструкцию средней кривизной H поверхности и средним радиусом кривизны $R_{\text{ср}}$, а расчетное поле - отношением среднего радиуса кривизны к шагу

$$\frac{R_{\text{ср}}}{h} = \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{h} = \frac{2}{h \left(\frac{1}{R_{\text{ос}}} + \frac{1}{R_{\text{рад}}} \right)}$$

Оценка погрешности производилась на разных этапах счета с помощью сервизной подпрограммы, сравнивавшей численные результаты с точными значениями потенциала в цилиндрическом или шаровом конденсаторах. Цилиндрическое поле, состоящее только из регулярных узлов, показано на рис. 1. В обозначении $\Pi/h/R_{\text{рад}}$ h - шаг, $R_{\text{рад}}$ - радиус кривизны внутреннего электрода в радиальном сечении.

Наибольшая абсолютная погрешность (табл. 1) получена методом последовательной верхней релаксации для цилиндрических полей. Результаты работы [3] ($\Pi/1/2,5$) относятся к методу последовательной верхней релаксации с прогонкой по линиям; соосные цилиндры имели граничные условия, близкие показанным на рис. 2, т.е. образовывали нерегулярные околограничные узлы. Задача $\Pi/1/21$ Вн иллюстрирует погрешность при наличии в поле внутренней границы (см. ниже).

Поле четвертушки шарового конденсатора (рис. 2) $\text{Ш}/h/R_{\text{рад}}$ ограничено двумя кривыми с граничными условиями Дирихле (на внутреннем электроде потенциал равен единице, на внешнем - нулю), а также горизонтальной и вертикальной прямыми с граничными условиями Неймана.

Как в шаровых, так и в цилиндрических полях наибольшая погрешность располагается на прямых с граничными условиями Неймана. Табл. 3 иллюстрирует абсолютную погрешность вдоль горизонтальной оси в задаче $\text{Ш}/16/80$ при $\varepsilon = 10^{-5}$, а также смену знака погрешности. Наибольшая погрешность задачи $\Delta \text{Ш}/\text{Вн}$ имеет место на верти-

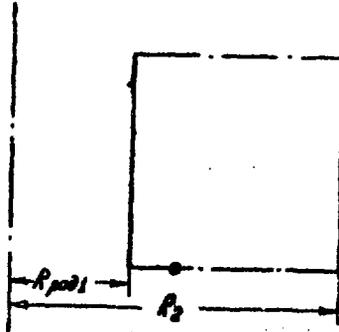


Рис. 1. Граничная задача II/10/350.
○ - область наибольшей погрешности

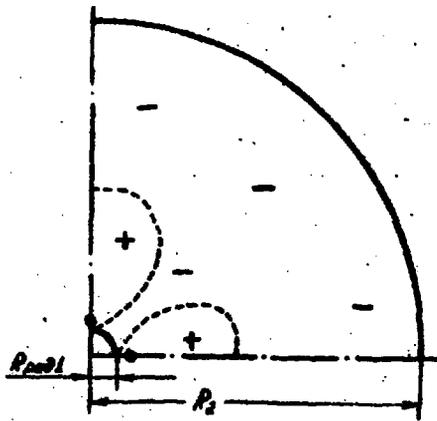


Рис. 2. Граничная задача III/16/80.
+ - область положительной ошибки ($\epsilon = 10^{-5}$);
- - область отрицательной ошибки ($\epsilon = 10^{-5}$);
○ - область наибольшей погрешности

кальной оси симметрии; с удалением от осей погрешность падает. Диапазон изменения величины погрешностей составляет не менее двух порядков.

Таблица 1

Задача	$\Delta U_{NS}(\varepsilon=10^{-5})$	$\Delta U_{NS}(\varepsilon=10^{-9})$	h/ρ	R_{cp}/h
Ц/0,05/0,5	$+1,0 \cdot 10^{-4}$	$+8,0 \cdot 10^{-5}$	0,1085	20
Ц/10/350	$-8,6 \cdot 10^{-4}$	$+6,6 \cdot 10^{-6}$	0,0262	70
Ц/1/2,5 [3]	$-5,9 \cdot 10^{-4}$	-	0,0162	5
Ц/1/2I вв	-	$+1,1 \cdot 10^{-5}$ I)	0,0742	42

I) $\varepsilon = 10^{-7}$.

Представляет интерес распределение знака погрешности. В задаче Ц/0,05/0,5 погрешность становится положительной при $\varepsilon < 10^{-2}$, в

Таблица 2

Задача	$\Delta U_{NS}(\varepsilon=10^{-5})$	$\Delta U_{NS}(\varepsilon=10^{-9})$	h/ρ	R_{cp}/h	k_H
Ц/0,05/0,2	$+5,10 \cdot 10^{-3}$	-	0,1570	4	-
Ц/16/80	$+2,16 \cdot 10^{-3}$	$+2,3 \cdot 10^{-3}$ I)	0,0224	5	12,40
Ц/16/350	$+8,50 \cdot 10^{-4}$	-	0,0224	22	2,83
Ц/10/350	-	$+6,6 \cdot 10^{-6}$	0,0262	70	1,78

I) $\varepsilon = 10^{-6}$.

задаче Ц/10/350 - при $\varepsilon < 10^{-5}$. Что касается задачи Ц/1/2,5 [3] при $\varepsilon = 1,5 \cdot 10^{-5}$, то около внутреннего электрода погрешность положительна, в остальных узлах отрицательна. В шаровых полях отрицательные погрешности при $\varepsilon \approx 10^{-5}$ сконцентрированы в середине

области и примыкает к обегм кривым с граничными условиями Дирихле (рис. 2). Вдоль границ с условиями Неймана погрешность положитель-

Таблица 3

Номер узла.	8	9	10	15	20	26	27	36	45
$\Delta U_{\text{н.д.}} \cdot 10^4$	+9,9	+11,0	+9,9	+3,8	+1,3	+0,07	-0,01	-0,28	-0,20

на. Продолжение итераций до 10^{-6} в задаче Ш /16/80 привело к тому, что отрицательная погрешность сохранилась только около внутреннего электрода. При этом наибольшее значение положительной погрешности немного возросло, а наибольшая по абсолютному значению отрицательная погрешность осталась в 3 - 4 раза меньше положительной.

Обсуждение. В направлении вертикальной оси в цилиндрических полях (рис. 1) при $\varepsilon \geq 10^{-5}$ наибольшая на строке погрешность уменьшается примерно в 1,5 раза, тогда как в случае $\varepsilon = 10^{-9}$ величина ошибки не зависит от вертикальной координаты узла.

В горизонтальном направлении при разных ε как в цилиндрических, так и в шаровых полях погрешность достигает максимума тем ближе к внутреннему электроду, чем выше средняя кривизна его поверхности: для задач Ц/10/350, Ц/0,05/0,5, Ц/1/2,5 и Ш /16/80 соответственно на 15-ом, 4-ом, 2-3-ем и 2-ом шагах от внутреннего электрода.

Во всех рассмотренных случаях погрешность имеет наибольшую величину на границах с условиями Неймана, хотя учет граничных условий второго рода с помощью ряда фиктивных узлов и центральной разности, принятый в [4], обеспечивает наивысшую точность [3]. Два фактора связывают наивысшую погрешность с граничными условиями Неймана: максимум ПУ, соответствующий минимальной скорости сходимости около таких границ, и максимум КРО на координатной линии, где нелинейность поля наибольшая.

Относительно знака погрешности можно предположить, что в методе последовательной верхней релаксации погрешность ПУ отрицательна, а погрешность КРО положительна, как это имело место во всех рассмотренных задачах. Тогда возможен итерационный процесс, когда за счет снижения ПУ погрешность сначала падает, достигает минимума, а

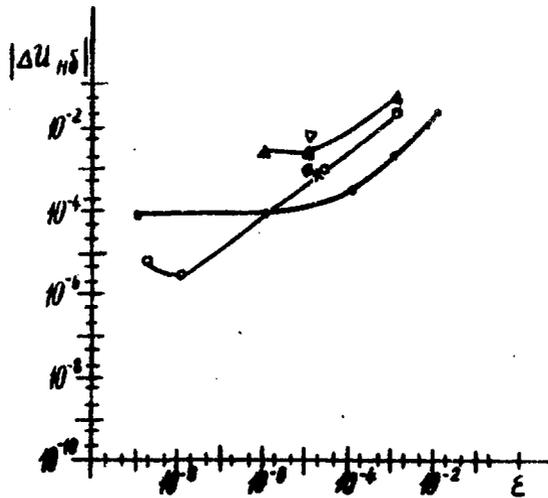


Рис. 3. Зависимость погрешности от максимальной разности между соседними приближениями в итерационном процессе.

•	Ц/0,05/0,5	$h/p = 0,109$	$R_{cp}/h = 20$
○	Ц/10/350	$h/p = 0,026$	$R_{cp}/h = 70$
+	Ц/1/2,5 [3]	$h/p = 0,016$	$R_{cp}/h = 6$
▽	Ш/0,05/0,2	$h/p = 0,157$	$R_{cp}/h = 4$
△	Ш/16/80	$h/p = 0,022$	$R_{cp}/h = 5$
◇	Ш/16/350	$h/p = 0,022$	$R_{cp}/h = 32$

затем возрастает. Такое возрастание отмечено в задачах Ц/10/350 и Ш/16/80 (рис. 3).

Средний радиус кривизны R_{cp}/h не входит в оценки (2), (3), но именно он существенно влияет на наибольшую погрешность задачи. При большом радиусе кривизны в задачах с регулярными узлами (кривые Ц/0,05 и Ц/10/350 рис. 3) КРО пропорциональна, ПУ обратно пропорциональна квадрату шага; в задачах с нерегулярными узлами (Ш/0,05/0,2 и Ш/16/350) погрешность уменьшается, как первая степень шага. При малых радиусах кривизны (Ш/0,05/0,2 и Ш/16/80) эта

зависимость нарушается; значительное изменение шага слабо сказывается на общей погрешности (рис. 4).

Если шаг сетки остается постоянным, с изменением среднего радиуса кривизны на порядок погрешность падает почти на три порядка (рис. 5). Коэффициент неоднородности поля (отношение максимального градиента поля к среднему градиенту межэлектродного промежутка) и наибольшая погрешность возрастают с ростом кривизны, но обе зависимости имеют различный характер (рис. 5). Этим обосновывается справедливость проведенного анализа погрешностей для осесимметричных полей с произвольными границами.

Совпадение результатов близких по параметрам задач III/16/80 и IV/1/2,5 [3] можно признать хорошим, поскольку погрешность $-6 \cdot 10^{-4}$ [3] при $\epsilon = 1,5 \cdot 10^{-5}$ является максимумом среди узлов одной горизонтальной оси, в то время как в задаче III/16/80 погрешность во всей области не хуже $+2,16 \cdot 10^{-3}$ (при $\epsilon = 10^{-5}$), а на горизонтальной оси погрешность не превышает $+1,1 \cdot 10^{-3}$. Разница в знаках ошибки, вероятно, вызвана довольно высоким значением IV в [3].

Погрешность в неоднородной среде при наличии внутренней границы, параллельной электродам цилиндрического конденсатора (рис. I): $R_1 = 21$, $R_{вн} = 30$, $R_2 = 40$, - и при диэлектрических постоянных $\epsilon_1 = 5$ и $\epsilon_2 = 1$ была определена на квадратной сетке из 20×20 узлов, шаг 0,0742, итерационная граница $\epsilon = 10^{-7}$, $R_{эф}/h = 42$. Абсолютная погрешность оказалась от $+2 \cdot 10^{-6}$ до $+1,03 \cdot 10^{-5}$, причем большая величина - около внутренней границы в области с меньшей диэлектрической постоянной. Присутствие диэлектрика с $\epsilon_1 = 5$ вблизи электрода с наименьшей кривизной снижает степень неоднородности поля и тем самым ошибку конечно-разностного метода КРО. Иное расположение диэлектриков может повысить КРО.

Понижение погрешности. Метод "луга", или целочисленное сокращение шага к образованию искусственной границы вокруг области интереса, применяется в моделировании на сплошных средах или сетках сопротивлений. Этим методом можно понизить КРО численного решения. Основательную погрешность определяют три фактора: КРО исходной задачи, интерполяция, удаление искусственной границы от области интереса. КРО обсуждалась выше. Абсолютная ошибка, вызванная линейной интерполяцией [7], имеет максимум на середине "0" между двумя точками "1" и "3" с заданным потенциалом и выражается в виде

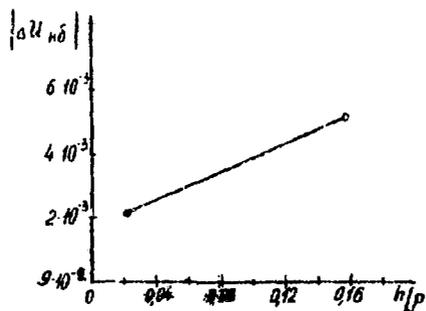


Рис. 4. Зависимость погрешности от шага при $R_{cp}/h \cong 5$, $\varepsilon = 10^{-5}$

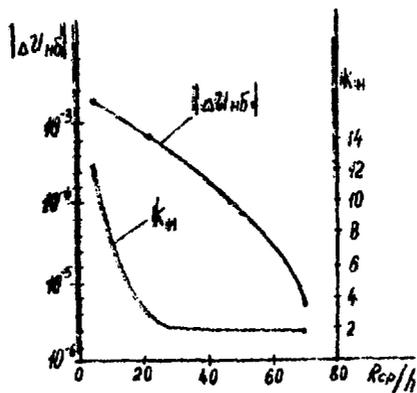


Рис. 5. Зависимость погрешности и коэффициента неоднородности поля от среднего радиуса кривизны; $h/\rho \cong 0,02$; погрешность ПУ мала

$$|\Delta U|_{\text{инт}} \leq \frac{\Delta x^2}{\rho} \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|, \quad (6)$$

где Δx - шаг вдоль координаты x . Вычисляя вторую производную численно как

$$(u_1 + u_3 - 2u_0) / \Delta x^2,$$

находим, в частности, при шаге 0,035 в задаче ЭГ2,5/16 (см. пример), что оценка (6) составляет $0,91 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, ошибка, обязанная интерполяции, примерно на порядок меньше КРО (рис. 4).

Численный эксперимент с полем Ц/10/350 при $h/\rho = 0,026$ и двойном сокращении шага показал, что для шагов 0,026 и 0,013 наибольшая погрешность остается практически неизменной: при $\xi = 10^{-9}$ $6,6 \cdot 10^{-6}$ и $6,3 \cdot 10^{-6}$. Ошибка у поверхности электрода с наибольшей кривизной в первом случае была $1,1 \cdot 10^{-6}$, во втором - $3,1 \cdot 10^{-7}$. Очевидно, эта погрешность подчиняется квадратичному закону от шага. В задачах с криволинейными границами КРО в области интереса снижается пропорционально первой степени шага.

Пример. Поле электростатического ускорителя ЭГ-2,5 [4] было рассчитано с серией шагов: 16, 8, 4 и 2 мм; $h/\rho = 0,035$; 0,0175; 0,009; 0,0045 при R_{cp}/h , равных 1,62; 3,25; 6,5; 13. Погрешность в области градиентных колец при $h/\rho = 0,009$ и $R_{cp}/h = 6,5$, согласно рис. 4,5, не хуже чем $2 \cdot 10^{-3}$. Действительно, пессимистическая оценка погрешности по паровому полю Ш/16/80 составляет $1,9 \cdot 10^{-3}$; оптимистическая оценка по цилиндрическому полю с малой неоднородностью (Ц/10/350) при $\xi = 10^{-5}$ около $5 \cdot 10^{-4}$. При шаге 0,005 погрешность в области интереса не превосходит 10^{-3} .

ВЫВОДЫ

I. На основе классификации типов погрешности, связанных с приближенным решением смешанной краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка, аналитически и экспериментально оценены основные составляющие и полная погрешность численного расчета

потенциалов методом последовательной верхней релаксации.

2. Экспериментально подтверждена обусловленность погрешности величиной шага сетки. При постоянном шаге количественно оценена резкая зависимость погрешности от среднего радиуса кривизны поверхности электрода с наибольшим градиентом поля. Указанных двух параметров достаточно, чтобы предсказать необходимую границу итерационного процесса ($\epsilon \leq KPO$) и достижимую наибольшую погрешность численного решения.

3. Погрешность в задаче с прямолинейной внутренней границей близка погрешности в аналогичной задаче с однородным диэлектриком.

4. Расчетную погрешность в окрестностях границы, на которой задано распределение потенциала, с помощью метода "лупа" в случае криволинейных границ удаётся понизить пропорционально шагу сетки.

5. Комплекс РЭП при шаге сетки около 0,02 и среднем радиусе кривизны 5 - 70 имеет достаточную для целей высоковольтного проектирования точность расчета электростатических полей.

Автор благодарен В.А.Романову за внимание к работе, И.Г. Ярмахову за ценную дискуссию.



Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. М., изд-во "Иностран. лит.", 1955, с.291.
- 2 Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., изд-во "Иностран. лит.", 1963, с. 487.
- 3 Ильин В.П., Петров В.Н., Вопросы эффективности численного моделирования электростатических полей. Труды III-го Всесоюзного семинара "Методы расчета электронно-оптических систем", Новосибирск, 1970, с. 181-191.
- 4 Резвых К.А. Универсальная программа РЭП численного расчета осесимметричных электростатических полей. Препринт ФЭМ-552, Обнинск, 1974, с. 20.
- 5 Форсайт Дж., Мошер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., изд-во "Мир", 1969, с. 169.
6. Garthé V.A. The determination of the optimum accelerating factor for successive over-relaxation, The computer journal, 1961, v. 4, p. 73-78.
7. Ford L.R. Differential equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., N.Y., 1933, p. 113-146.

Препринт ФЭМ-642. Т-15712 от 22.08.75 г. Объем 0,7 уч.-изд. л.

Тираж 101 экз. Цена 7 коп. Заказ № 529.

Отпечатано на ротационной машине ФЭМ, октябрь 1975 г.