

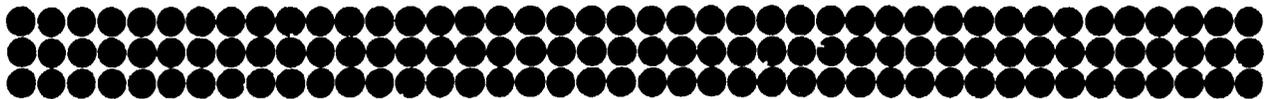
IT 7800350

Comitato Nazionale Energia Nucleare

IT 7800350

Calcolo della frazione di vuoto  
in un canale contenente refrigerante bol'ente

F. NORELLI



**Comitato Nazionale Energia Nucleare**

**Calcolo della frazione di vuoto  
in un canale contenente refrigerante bollente**

F. NORELLI

**RT/FI(78)9**

*Testo pervenuto nel giugno 1.78*

Riprodotta in offset presso il Laboratorio Tecnografico della Direzione Centrale Relazioni Esterne del CNEN - Viale Regina Margherita 125, Roma

## INDICE

	pag.
1. Generalità	1
2. Il bilancio energetico in un canale	3
3. Il calcolo della funzione $\psi_0(x)$	7
4. Soluzione delle equazioni di bilancio in condizioni transitorie	9
5. Analisi qualitativa dell'andamento della funzione $\alpha(x,t)$	13
6. Calcolo della funzione $\alpha(x,t)$	17
7. Nota sulla scelta di una condizione iniziale stazionaria	27
8. Osservazioni conclusive	31
9. Bibliografia	33
10. Appendice	35

## 1. GENERALITÀ

Lo studio del problema del moto di un fluido riguarda, come è noto, la determinazione delle 5 funzioni scalari rappresentate da velocità  $\underline{u}$ , densità  $\rho$  e pressione  $p$ . L'equazione vettoriale del moto e quella di continuità (esprime la conservazione della massa) costituiscono un sistema di 4 equazioni scalari, sicchè il pareggiamento tra numero di equazioni e numero di incognite deve essere ottenuto mediante un'altra equazione. Questa è un'equazione di stato, cioè una relazione, tipica della natura del fluido,  $\rho = \rho(H, p)$ , tra densità, entalpia  $H$  e pressione. Una tipica equazione di stato è espressa nell'assunzione, frequentemente usata, che sia  $\rho = \text{costante}$ , come si può ritenere corretto nei casi in cui ci siano escursioni termiche non elevate e non intervengano effetti sonici di rilievo.

Nel caso di un canale di un reattore nucleare, nel quale il liquido refrigerante può mescolarsi a una parte di vapore e le due fasi sono tra loro in equilibrio termico (sicchè gli scambi entalpici corrispondono a cambiamenti di stato), si usano di solito equazioni nelle quali la sola variabile spaziale è la quota  $x$  determinata lungo l'asse del canale. Una evidente complicazione è nel fatto che, in condizioni bifasiche, si introducono le nuove incognite costituite dalla densità e dalla velocità del vapore.

Un espediente empirico per ridurre di una unità il numero delle incognite, è l'introduzione del rapporto  $S = u_v / u_l$  tra la velocità (nella

direzione assiale del canale) del vapore e quella del liquido, rapporto per il quale si danno relazioni empiriche con la percentuale di vapore presente nel canale.

Se si indica con  $\alpha(x, t)$  la frazione di vuoti, cioè la frazione di area di una sezione trasversa del canale occupata dai gas, si hanno, tra le altre, le correlazioni

$$S = \frac{1 - \alpha}{c - \alpha}$$

con  $c = c_0 = \text{costante}$  (Bankoff /3/) e con  $c = c_0 + (1 - c_0) \alpha^N$  (Jones /4/) essendo  $c_0$  una funzione lineare e  $N$  una funzione quadratica della pressione  $P$ .

## 2. IL BILANCIO ENERGETICO IN UN CANALE

Esaminiamo il caso di un canale nel quale il refrigerante sia riscaldato dalla barretta del combustibile mediante un flusso di calore  $q(x, t)$  (quantità di calore per unità di area e di tempo).

Analizziamo separatamente il bilancio energetico delle due fasi presenti nel canale, con lo scopo di giungere a determinare la funzione  $\alpha(x, t)$ , facendo uso del rapporto di slip.

### a) Fase liquida

Consideriamo un volume finito tra due sezioni trasverse del canale a distanza  $\Delta x$  tra loro. Se  $\underline{n}$  è la normale esterna alla superficie  $\Sigma$  che delimita il volume in esame e  $d\sigma$  un elemento infinitesimo di essa si ha

$$\text{Liquido entrante per unità di tempo} = - \int_{\Sigma} \rho_l (1-\alpha) \underline{u}_l \cdot \underline{n} d\sigma$$

$$\text{Liquido evaporato per unità di tempo} = \int_{\Delta x} \frac{2\pi R}{c_v} q dx$$

$$\text{Variazione del contenuto di liquido nell'unità di tempo} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x} \rho_l (1-\alpha) S dx$$

essendo:

- $c_v$  il calore latente di evaporazione
- $\rho_l$  la densità del liquido

-  $S$  l'area della Sezione trasversa del canale

-  $R$  il raggio della camicia

Il bilancio fornisce allora

$$-\int_{\Sigma} \rho_e (1-\alpha) \underline{u}_e \cdot \underline{n} d\sigma - \int_{\Delta x} \frac{2\pi R}{c_v} q dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta x} \rho_e (1-\alpha) S dx$$

donde, applicando il teorema di Gauss, segue

$$-\nabla \cdot [\rho_e (1-\alpha) \underline{u}_e] - \frac{2\pi R}{S c_v} q = -\rho_e \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

ovvero, nelle ipotesi poste all'inizio,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [ (1-\alpha) u_e ] = \frac{2\pi R}{S c_v \rho_e} q = f(x,t) \quad (1)$$

Un analogo ragionamento porta, per il vapore, all'equazione

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha u_v) = \frac{\rho_e}{\rho_v} f(x,t) \quad (2)$$

Eliminando  $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$  tra (1) e (2) si trova

$$\frac{\partial}{\partial x} [\alpha u_v + (1-\alpha) u_e] = \frac{\rho_e - \rho_v}{\rho_v} f(x,t)$$

e quindi

$$\alpha u_v + (1-\alpha) u_e = \frac{\rho_e - \rho_v}{\rho_v} \int f(x,t) dx$$

dove l'integrale a secondo membro include un'eventuale funzione di  $t$ .

Utilizzando un coefficiente generico di slip  $u_v/u_e = (1-\alpha)/(c-\alpha)$  segue al-

lora

$$\alpha u_v + (c-\alpha) u_v = u_v c = \frac{\rho_e - \rho_v}{\rho_v} \int f(x,t) dx$$

Imponendo che alla quota  $x = \bar{x}$  di ebollizione la velocità  $u_v$  si riduca a quella  $v$  del liquido in condizioni monofasiche si ha

$$u_v c = v + \frac{\rho_e - \rho_v}{\rho_v} \int_{\bar{x}}^x f(x', t) dx'$$

[essendo  $\alpha(\bar{x}, t) = 0$  e  $c(0) = c_0$ ]

In definitiva

$$u_v = \frac{v}{c} + \frac{1}{c} \int_{\bar{x}}^x g(x', t) dx' \quad (3)$$

dove si è posto

$$g(x, t) = \frac{\rho_e - \rho_v}{\rho_v} f(x, t) = \frac{1}{z-1} f(x, t)$$

con  $z = \frac{\rho_e}{\rho_e - \rho_v}$

Se riesaminiamo ora la (1), tenuto conto che è, per definizione di  $\alpha$ ,

$$u_v (c - \alpha) = u_e (1 - \alpha)$$

si trova

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} [u_v (c - \alpha)] = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{\partial (c u_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha u_v)}{\partial x} = f(x, t)$$

cioè, per la (3),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha u_v)}{\partial x} = f(x, t) + \frac{\partial (c u_v)}{\partial x} = f(x, t) + \frac{1}{z-1} f(x, t) = z g(x, t)$$

In definitiva si ha la

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u_v \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u_v}{\partial x} = z g(x, t) \quad (4)$$

Il problema da risolvere è allora, ricordando ancora la (3),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(1 - \frac{u}{c} \frac{dc}{dx}\right) u v \frac{\partial u}{\partial x} = g \left(1 - \frac{u}{c}\right) \quad (5)$$

e le condizioni associate (L = altezza del canale)

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \} \leq x \leq L$$

$$u[\xi(t), t] = 0$$

essendo  $\xi = \xi(t)$  un'assegnata funzione del tempo.

### 3. IL CALCOLO DELLA FUNZIONE $\alpha_0(x)$

In condizioni stazionarie si ha da (2)

$$\frac{d(\alpha u_v)}{dx} = \frac{\rho_e}{\rho_v} f(x, 0)$$

e, quindi, essendo  $\alpha[\xi(0), 0] = 0$

$$\alpha u_v = \frac{\rho_e}{\rho_v} \int_{\xi}^x f(x', 0) dx'$$

con  $u_v$  rappresentato da (3). Segue allora

$$\alpha(x, 0) = \frac{1}{u_v} \frac{\rho_e}{\rho_v} \int_{\xi}^x f(x', 0) dx'$$

Ricordando che è  $z = \frac{\rho_e}{\rho_e - \rho_v}$  e  $g = \frac{\rho_e - \rho_v}{\rho_v} f = \frac{1}{z-1} f$

si trova facilmente

$$\alpha_0(x) = c(\alpha_0) r \frac{\int_{\xi}^x g(x', 0) dx'}{v + \int_{\xi}^x g(x', 0) dx'} \quad (6)$$

se si pone  $c(\alpha) = c_0 = \text{costante}$  (correlazione di Bankoff) il calcolo è evidentemente immediato. Nel caso si usi la correlazione di Jones occorre far ricorso ad algoritmi iterativi, p. es. del tipo Newton-Raphson per ricavare  $\alpha_0(x)$ .

#### 4. SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI BILANCIO IN CONDIZIONI TRANSITORIE

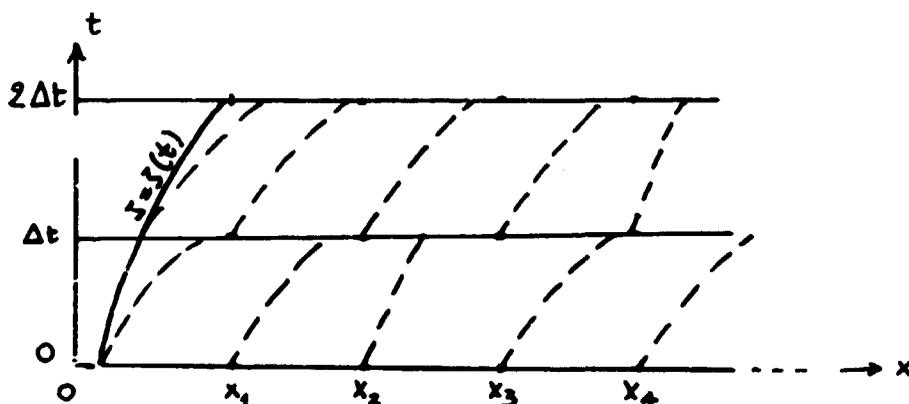
Il problema (5) è riconducibile, come è noto, al sistema differenziale ordinario delle caratteristiche

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= g \left( r - \frac{x}{c} \right) \\ \frac{dx}{dt} &= \left( 1 - \alpha \frac{c'}{c} \right) u_v \end{aligned} \quad (7)$$

a cui sono associate le condizioni precedentemente espresse.

Fissata una discretizzazione della quota  $x$  nel canale, si potrà risolvere il sistema (7) con il metodo delle caratteristiche. Tuttavia due ordini di problemi si presentano in questa procedura: la corretta integrazione delle equazioni (7), non riconducibili, in generale, a quadrature elementari; e il trasferimento degli andamenti della funzione  $\alpha(x, t)$  determinati lungo le linee caratteristiche, ai nodi del reticolo prefissato.

Un numero assai elevato di esperienze numeriche è stato condotto per indagare i diversi aspetti del problema, utilizzando la correlazione di Jones, che rendeva il problema non elementarmente integrabile. Ad esempio l'equazione nella  $\alpha$  è stata risolta con integrazione a trapezio lungo la caratteristica e successiva applicazione del metodo di Newton-Raphson per ricavare il valore di  $\alpha$  al tempo  $t_0 + \Delta t$  a partire da quello al tempo  $t_0$ .



Altri metodi usati furono, ad esempio, i seguenti:

- a) metodi del tipo predictor-corrector di Eulero
- b) metodo di Picard
- c) sviluppo in serie di Taylor fino al terzo ordine.

Questi ultimi calcoli mostravano come fosse lenta la convergenza della serie per gli ordini più bassi nel caso di  $c(\alpha)$  di Jones, sicchè la difficoltà da superare era proprio nel fatto che si dovevano evitare tutti i metodi corrispondenti ad errori di troncamento di ordine troppo basso.

d) soluzione analitica con correzione. Si tratta di utilizzare la posizione

$y = \frac{c - c_0}{1 - c_0}$  che conduce, con  $c(\alpha)$  di Jones, alla equazione

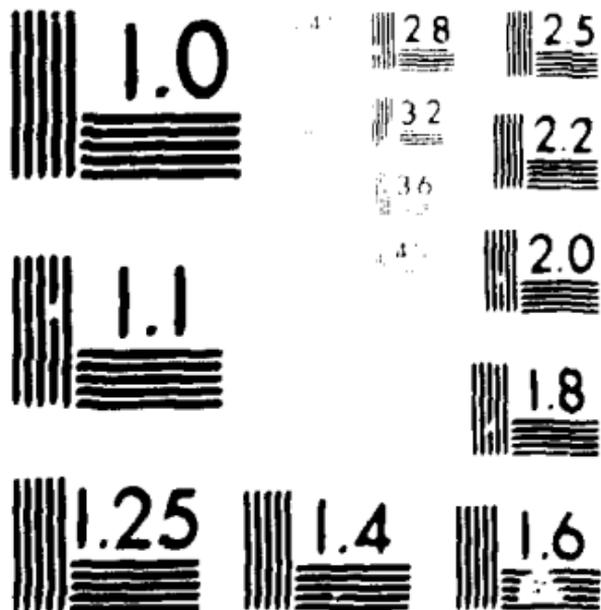
$$\frac{dy}{dt} = Nr g(t) \left[ y^{1 - \frac{1}{N}} - \frac{y}{r(c_0 + c_1 y)} \right] \quad (c_1 = 1 - c_0)$$

che per  $c_1 = 0$  si ridurrebbe ad una equazione di Bernoulli. Allora, quando  $c_1 y \ll c_0$ , essa può essere risolta cercando di "correggere" la soluzione di quest'ultima equazione.

Anche il problema della interpolazione dei valori di  $\alpha(x, t_0 + \Delta t)$  a partire dai valori  $\alpha^*(x^*, t_0 + \Delta t)$  sulle caratteristiche è stato studiato con diversi metodi, tra i quali i seguenti:

- a) interpolazione mediante funzioni razionali del tipo

$$\alpha(x, t) = \frac{1 + kx}{a + bx}$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS-1963-A

- b) interpolazione mediante formule del tipo Newton-Gregory per intervalli di ampiezza non costante
- c) interpolazioni di primo e secondo ordine tra coppie o terne di punti contigui
- d) estrapolazione, a partire dal valore  $\alpha^+$  corrispondente al punto  $x^+$  più vicino al punto  $x$  in esame, o a partire dai valori relativi ai due punti  $x^+$  ad esso più vicini e non posti tutti e due dalla stessa parte. Questo metodo consiste nell'effettuare il rapporto, membro a membro, tra le due equazioni di (7) per ottenere

$$\frac{d\alpha(x, t^*)}{dx} = \frac{g}{u_v} \frac{z - \frac{\alpha}{c}}{1 - \alpha \frac{c'}{c}} = \frac{g}{u_v} \frac{cz - \alpha}{c - \alpha c'} = \left. \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial x} \right|_{t=t^*}$$

dove, intendendosi prefissato un istante  $t^*$ , la derivata  $d\alpha/dx$  sarà evidentemente il coefficiente angolare della tangente alla curva  $\alpha = \alpha(x, t^*)$  nel punto corrente  $(x, t^*)$ . Servendosi dei valori  $\alpha^+, x^+$  a disposizione, si può costruire allora il valore  $\alpha(x, t^*)$ , o mediante l'extrapolazione lineare dal punto di caratteristica più vicino, o mediando le due estrapolazioni con pesi che tengono conto delle distanze, o, ancora, correggendo l'extrapolazione del primo ordine mediante un termine del secondo ordine, che può essere ottenuto valutando la  $d^2\alpha/dx^2$  tramite differenze tra le derivate prime precedentemente ottenute.

- e) Il fatto che la funzione  $\alpha(x, t^*)$  è (come capita di regola, a parte casi particolari, cfr § 5) una funzione non decrescente di  $x$ , produce una sopravvalutazione dei valori estrapolati con il metodo di cui al punto precedente, se è  $d^2\alpha/dx^2 < 0$  nell'intervallo in esame, mentre i valori interpolati linearmente (cioè valutati sulla corda che collega punti di caratteristiche consecutivi e posti da parti opposte rispetto al punto in esame) sono sotto valutati.

Il contrario accade se è invece  $d^2\alpha/dx^2 > 0$ .

Per questi motivi è stata esaminata la possibilità di mediare i valori estrapolati e quelli interpolati.

Sulla base delle esperienze numeriche precedentemente descritte, è parso opportuno utilizzare espressioni che consentissero l'integrazione della prima delle (7) mediante quadrature elementari. Questo vuol dire che la funzione  $c(\alpha)$  deve essere espressa per mezzo di una relazione analitica che consenta questa integrazione. A parte il caso banale  $c(\alpha) = \text{costante}$ , le espressioni razionali costituite dal rapporto di due funzioni lineari e le funzioni quadratiche soddisfano, per esempio, a questo requisito. E' ben evidente che questa scelta non deve rappresentare una limitazione eccessiva in rapporto alla legge empirica di slip ratio che si vuole adottare. Se, ad esempio, si adotta la formula di slip ratio di Jones e una legge  $c(\alpha)$  quadratica, o razionale, questa deve intendersi come un fit (ad esempio secondo il criterio dei minimi quadrati) della formula di Jones. Alcune prove numeriche effettuate danno ragione di questa possibilità. Per esempio, per  $c_0 = .8$  e  $N = 3.5$ , una buona approssimazione di  $c(\alpha)$  è la funzione

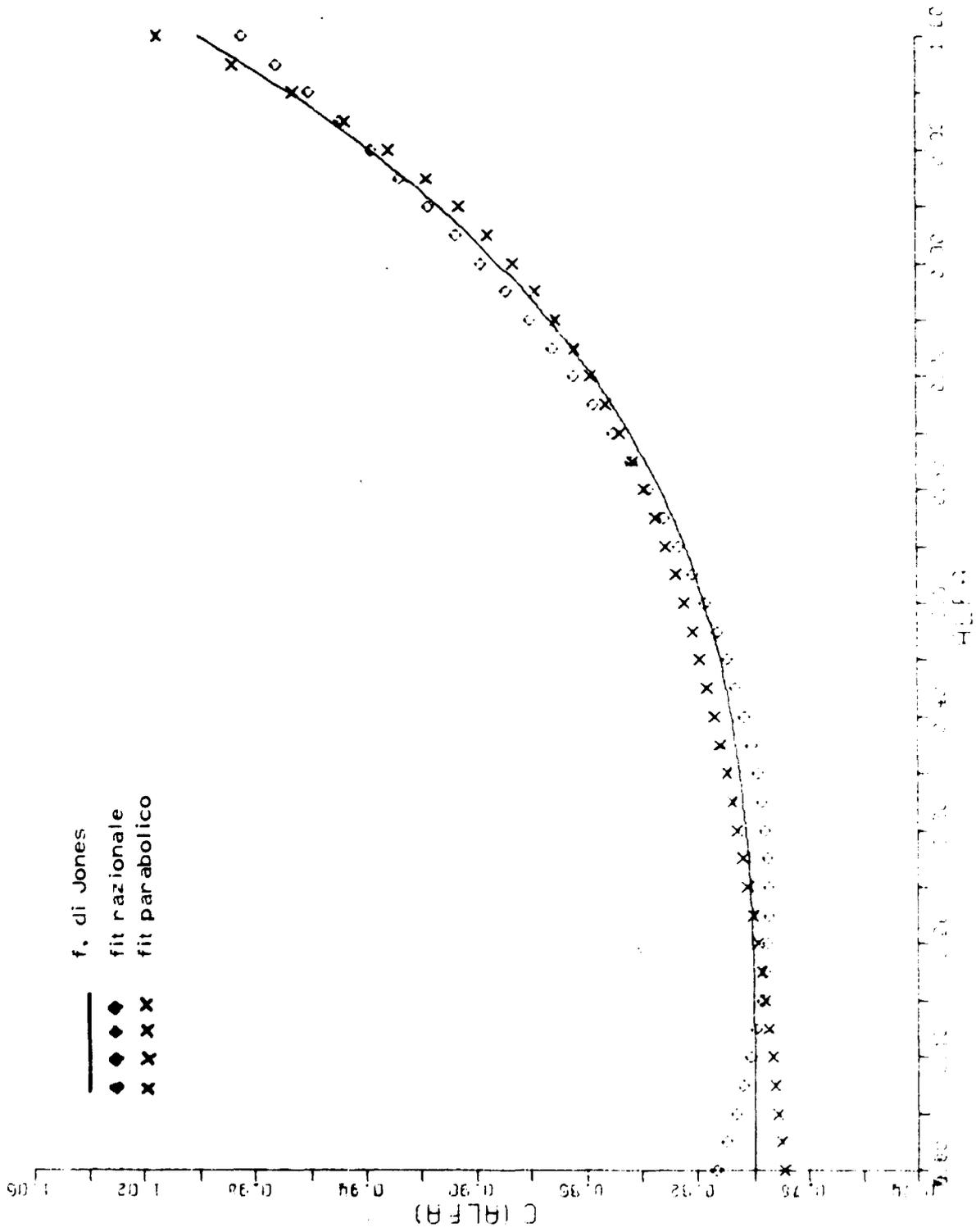
$$c_0(\alpha) = .81360327 - .15608449 \alpha + .32668435 \alpha^2$$

e un'altra è

$$c(\alpha) = (1 - .75652504 \alpha) (1.2676458 - 1.0277462 \alpha)^{-1}$$

Le tre curve sono rappresentate in figura.

12bis



### 5. ANALISI QUALITATIVA DELL'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE

$$\underline{\alpha(x, t)}$$

Consideriamo la funzione di una variabile precedentemente introdotta  $\alpha = \alpha(x, t^*)$ . Su ciascun punto della caratteristica si ha

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{g}{u_v} \frac{cZ - \alpha}{c - \alpha c'}$$

dove, nel caso della correlazione di Jones,

$$- c(\alpha) = c_0 + (1 - c_0) \alpha^N, \quad \text{con} \quad 0 < c \leq 1$$

$$- 0 < c_0 < 1$$

$$- \eta = \frac{p_e}{p_e - p_v} > 1$$

$$- \alpha \leq 1, \quad \text{per definizione}$$

- N funzione quadratica crescente della pressione p, e maggiore di

$$3.33 / 4/.$$

Esaminiamo ora il segno di  $d\alpha/dx$ . Supponiamo sia sempre  $g > 0$  (cioè che la temperatura della camicia sia ovunque più alta di quella del refrigerante) e, inoltre che sia  $1 - \alpha c'/c > 0$ . Da quest'ultima disuguaglianza si ricava la condizione

$$\frac{c'}{c} < \frac{1}{\alpha}$$

cioè, integrando tra  $\alpha^*$  e  $\alpha > \alpha^*$

$$c < \frac{c(\alpha^*)}{\alpha^*} \alpha$$

essendo  $\alpha^*$  un valore compreso in  $(0, \alpha)$ . Facendo  $\alpha^*$  prossimo a zero, in modo da esaminare la relazione in  $(0, 1)$ , si vede come il valore  $c(\alpha^*)/\alpha^*$  diventa grande a piacere essendo  $c(\alpha)$  limitata. L'assunzione in esame appare, pertanto, ragionevole.

Nelle condizioni sopra esposte, il segno di  $d\alpha/dx$  è lo stesso di quello della funzione

$$\phi(\alpha) = c r - \alpha = r(c_0 + c_1 \alpha^N) - \alpha$$

che passa da  $\phi(0) = r c_0$  a  $\phi(1) = r - 1$ , valori entrambi  $> 0$ .

Intanto è

$$\phi'(\alpha) = r N c_1 \alpha^{N-1} - 1$$

$$\phi''(\alpha) = r N(N-1) c_1 \alpha^{N-2} \geq 0$$

e quindi la  $\phi(\alpha)$  ha la concavità rivolta verso l'alto e possiede, perciò, al più, un minimo relativo.

E' ancora

$$\phi'(0) = -1$$

$$\phi'(1) = r N c_1 - 1$$

Poichè  $\phi''(\alpha)$  non ha zeri nei punti interni di  $(0, 1)$ , la  $\phi(\alpha)$  avrà un minimo se è  $\phi'(1) > 0$ , ma questo minimo non esisterà nel caso sia  $\phi'(1) \leq 0$ . Si avrà allora uno dei seguenti casi:

$$a) \quad \phi'(\bar{\alpha}) = 0 \quad \text{per} \quad r N c_1 \bar{\alpha}^{N-1} = 1, \quad \text{cioè} \quad \bar{\alpha} = \left( \frac{1}{r N c_1} \right)^{\frac{1}{N-1}}$$

In questo caso si ha

$$\frac{d\alpha}{dx} < 0$$

in un intervallo contenente  $\bar{\alpha}$

$$\frac{d\alpha}{dx} > 0$$

altrove

b)  $\phi'(\alpha) \neq 0$  ovunque in  $(0, 1)$

$\phi(\alpha)$  decresce dal valore  $\Gamma C_0$  al valore  $r-1$ , entrambi  $> 0$ . In questo caso, perciò, dovunque è

$$\frac{d\alpha}{dx} > 0$$

Si noti che il valore  $\bar{\alpha}$  dipende da  $c_1$ ,  $N$ ,  $\rho_c$  e  $\rho_v$ , e può perciò essere valutato inizialmente. Se è  $c_1 < \frac{1}{rN}$  sarà  $\bar{\alpha} > 1$ /nessun minimo  $\therefore (0, 1)/$ . Nel caso esista un punto di zero di  $d\alpha/dx$  nell'intervallo  $(0, 1)$  occorrerà poi valutare se il corrispondente valore di  $\alpha$  viene effettivamente raggiunto nelle condizioni termiche e meccaniche del sistema.

## 6. CALCOLO DELLA FUNZIONE $\alpha(x, t)$

E' stata compilata una subroutine per il calcolo della frazione di vuoto  $\alpha(x, t)$ , utilizzando l'esperienza numerica di cui si è discusso nei paragrafi precedenti. Perciò è stata prevista l'utilizzazione di una funzione  $c(\alpha)$  per il calcolo dello slip ratio che fosse espressa come un fit parabolico. Può essere considerata, inoltre, la possibilità di utilizzazione di un fitting razionale anzichè parabolico.

Nella subroutine il calcolo si effettua a partire dalla conoscenza di:

- la condizione iniziale  $\alpha(x, t_0)$
- le quote  $x_i$  ( $i = 1, 2 \dots M$ ) della discretizzazione adottate
- le funzioni  $GI(K)$  e  $GF(K)$ , legate al flusso di calore iniziale e a quello finale; questa loro dipendenza si esprime come

$$g = \frac{1}{r-1} f = \frac{1}{r-1} \frac{4q}{c_v \rho_e D_e}$$

essendo  $D_e$  il diametro equivalente del canale.

- L'intervallo DTEX di tempo in corrispondenza del quale si calcola la variazione dei vuoti nel canale. Per quei che concerne le connessioni di questi calcoli con gli altri che forniscono la valutazione della sorgente  $q(z, t)$  si deve ritenere che l'intervallo di tempo DTEX è quello durante il quale si assume che non si producano variazioni se non nelle grandezze termoidrauliche. Ciò è in relazione con i criteri e i limiti della cosiddetta "linearizzazione" del complessivo problema di calcolo

neutronico e termoidraulico nel canale di un reattore nucleare.

- le quote  $\beta_1$  e  $\beta_2$  di ebollizione agli istanti  $t_0$  e  $t_0 + DTEX$
- la velocità  $v$  del fluido in zona monofase.

L'intervallo DTEX viene suddiviso in subintervalli di ampiezza DT in modo tale da assicurare che il punto  $x^+$  che corrisponde, sulla linea caratteristica, al punto  $x$ , si trovi nello stesso intervallo in cui si trova  $x_0$ , al massimo, in uno contiguo; inoltre l'ampiezza dell'intervallo temporale deve garantire che  $\beta_1$  e  $\beta_2$  si trovino nello stesso intervallo o in intervalli contigui. La ragione di queste procedure appare evidente, se si pensa alle difficoltà connesse al tener conto delle variazioni che si producono passando da un intervallo all'altro, sia nel calcolo delle caratteristiche che nelle successive interpolazioni.

Si effettua il calcolo assumendo che  $\beta$  e  $g$  varino linearmente in funzione del tempo.

Esaminiamo l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = p(\alpha) \left[ v + \int_{\beta}^x g dx' \right]$$

dove con  $p(\alpha)$  si è indicata la funzione

$$p(\alpha) = \left[ 1 - \alpha \frac{c'(\alpha)}{c(\alpha)} \right] \frac{1}{c(\alpha)}$$

Consideriamo il punto  $x_i$  ed effettuiamo il calcolo della caratteristica da esso uscente. Sarà

$$\frac{dx}{dt} = p(\alpha) R_i + p(\alpha) g_i (x - x_i)$$

essendo

$$R_i = v + \int_{\beta}^{x_i} g dx'$$

L'omogenea associata

$$\frac{dx}{dt} = p(\alpha) g_i (x - x_i)$$

si risolve separando le variabili ed ha per soluzione

$$x = x_i + H \exp [ p(\alpha) g_i t ]$$

Un integrale particolare dell'equazione completa è  $x = \text{costante}$ . Si trova, in definitiva

$$x = x_i + \frac{R_i}{g_i} \{ \exp [ p(\alpha) g_i t ] - 1 \} \quad (8)$$

Risolviamo ora l'equazione

$$\frac{d\alpha}{dt} = g \left( r - \frac{\alpha}{c} \right) = g \frac{cr - \alpha}{c} \quad (9)$$

a) esaminiamo per ora la ipotesi che la funzione  $c(\alpha)$  sia rappresentabile come un polinomio di 2 grado

$$c(\alpha) = p_0 + p_1 \alpha + p_2 \alpha^2$$

Appare immediato dalla (9) che siamo ricondotti alla integrazione del rapporto di due polinomi di 2 grado e cioè

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} ds = \int_{t_0}^t g(t') dt' \quad (10)$$

Si tratta dunque di effettuare integrali del tipo seguente

$$\int \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} ds = \int k ds + \int \frac{ms+n}{Q_2(s)} ds \quad (11)$$

Se poniamo

$$Q_2(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2$$

risulta intanto da quanto precede

$$q_0 = r p_0$$

$$q_1 = r p_1 - 1$$

$$q_2 = r p_2$$

e inoltre

$$K = \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{r}$$

$$n = p_1 - q_1 \frac{p_2}{q_2} = p_1 - (r p_1 - 1) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} = k$$

$$n = p_0 - q_0 \frac{p_2}{q_2} = p_0 - r p_0 \frac{1}{r} = 0$$

Se si effettua la seconda integrazione a secondo membro della (11) si è ricondotti ad utilizzare la seguente identità

$$\int \frac{s}{Q_2(s)} ds = \frac{1}{2q_2} \log |Q_2(s)| - \frac{q_1}{2q_2} \int \frac{ds}{Q_2(s)}$$

e, quindi, il ben noto integrale della funzione  $Q_2^{-1}(s)$  per il quale si devono distinguere tre procedure diverse dipendenti dal fatto che sia  $\Delta = q_1^2 - 4q_0q_2$  positivo, negativo o nullo.

Se si effettuano i calcoli si trovano, nei tre casi diversi, le espressioni seguenti per l'integrale a primo membro di (10):

1. Caso  $\Delta < 0$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} ds = k(\alpha - \alpha_0) + \frac{m}{2q_2} \log \left| \frac{Q_2(\alpha)}{Q_2(\alpha_0)} \right| -$$

$$- \left( \frac{mq_1}{2q_2} - n \right) \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{2q_2\alpha + q_1}{\sqrt{-\Delta}} - \operatorname{arctg} \frac{2q_2\alpha_0 + q_1}{\sqrt{-\Delta}} \right]$$

2. Caso  $\Delta = 0$

Il risultato è, in questo caso, analogo a quello del caso precedente, a parte l'ultimo termine della somma: in questo caso occorre sottrarre, infatti, il termine

$$2 \left( \frac{mq_1}{2q_2} - n \right) \cdot \left( \frac{1}{2q_2\alpha_0 + q_1} - \frac{1}{2q_2\alpha + q_1} \right)$$

3. Caso  $\Delta > 0$

Anche in quest'ultimo caso cambia, evidentemente, il solo termine finale: questa volta occorre sottrarre il termine

$$\frac{1}{q_2(\sigma_1 - \sigma_2)} \log \left( \left| \frac{\alpha - \sigma_1}{\alpha - \sigma_2} \right| \cdot \left| \frac{\alpha_0 - \sigma_2}{\alpha_0 - \sigma_1} \right| \right)$$

essendo  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  radici dell'equazione  $Q_2(s) = 0$ , e cioè

$$\sigma_{1,2} = \frac{-q_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2q_2}$$

b) Il secondo caso, che può essere facilmente preso in considerazione, perchè la (9) è riducibile ancora a quadrature elementari, è quello in cui  $c(\alpha)$  è funzione razionale del tipo

$$c(\alpha) = \frac{1+m\alpha}{p'+q'\alpha}$$

Si è così ricondotti a integrare

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{ds}{r - \frac{s}{\frac{1+m's}{p'+q's}}} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1+m's}{r(1+m's) - s(p'+q's)} ds =$$

$$= \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1+m's}{-q's^2 + (rm' - p')s + r} ds$$

Si vede, allora, che questo caso si riconduce senz'altro a quello precedente relativo ad una funzione  $c(\alpha)$  polinomiale.

L'integrale della funzione  $1/(r - \frac{s}{\frac{1+m's}{p'+q's}})$  risulterà pertanto espresso come nei tre casi esaminati al punto a), che, anche in questo caso, saranno da tener evidentemente distinti, tenendo presente che, in questo caso, manca il termine  $K(\alpha - \alpha_0)$  allora sempre presente, e che le costanti vanno modificate secondo la tabella di sostituzioni seguente

$$m \rightarrow n$$

$$n \rightarrow l$$

$$q_0 \rightarrow r$$

$$q_1 \rightarrow rm' - p'$$

$$q_2 \rightarrow -q'$$

$$K \rightarrow 0$$

Esaminiamo per ultimo il problema della interpolazione.

Essa viene effettuata, in corrispondenza del punto  $x_k$ , tramite i valori

$\alpha_{k-1}^+$ ,  $\alpha_k^+$ ,  $\alpha_{k+1}^+$ . Si determinano così in corrispondenza di ciascun punto i valori delle tre costanti che compaiono nella formula

$$\alpha = \frac{\mu + \lambda x}{1 + \theta x}$$

per le successive terne di quote consecutive.

Se si osserva la relazione (8), si nota che in essa sono utilizzati i valori di  $g_i$ , di  $\alpha$  e di  $R_i$  riferiti al tempo  $t_0$ . Al tempo  $t_0 + \Delta t$  questi valori saranno, in generale, diversi.

Per tenere qualche conto delle variazioni, il calcolo viene ripetuto dopo il calcolo di  $\alpha(x, t_0 + \Delta t)$ , assumendo valori mediati aritmeticamente tra quelli iniziali e finali, per  $g_i$  e  $R_i$ .

Non è negli stessi termini il problema della dipendenza dalla  $x$  della equazione (9), stante il fatto che la funzione  $g$  viene assunta costante in ciascun intervallo /  $g_i$  è il valore costante nell'intervallo  $(x_i, x_{i+1})$  /; resta, peraltro, il problema di integrare la  $g$  nella variabile temporale tenendo conto della sua linearità. Così, gli integrali a secondo membro della (10) calcolati fino a  $t = t_0 + \Delta t$ , saranno del tipo

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} g_i dt = \frac{\Delta t}{2} [g_i(t_0) + g_i(t_0 + \Delta t)]$$

Un'analisi a parte merita il discorso relativo alla stabilità dello schema numerico adottato.

Ad ogni passo vengono introdotti errori non uniformemente distribuiti, le cui cause sono nelle due parti del calcolo e cioè l'integrazione delle equazioni differenziali e l'interpolazione di  $\alpha(x, t)$ . Un errore in quest'ultima funzione altera, evidentemente, sia la condizione iniziale del calcolo relativo all'intervallo successivo sia la distribuzione delle velocità nel canale.

Se questi errori tendono ad amplificarsi nel corso dei calcoli, cioè se lo schema di calcolo non è stabile, risulterà alterata la descrizione della storia dell'equilibrio tra le fasi nel canale.

Una verifica empirica della stabilità dello schema si può fare assumendo costante nel tempo la funzione  $q(z, t)$ : lo schema di calcolo riprodurrà stabilmente la funzione  $\alpha(x, 0) = \alpha_0(x)$ .

Si comprende, ad ogni modo, che, per la diversa natura del calcolo stazionario e di quello del transitorio (nel quale soltanto, ad esempio, si effettuano calcoli di interpolazione), si rilevano errori che perturbano, lievemente e in modo non sistematico, la funzione  $\alpha_0(x)$  anche in presenza di uno schema stabile. La situazione è analoga a quella di un sistema fisico stabile nel quale lievi perturbazioni intervengono in maniera casuale sulle grandezze caratteristiche del funzionamento. Dopo un tempo di funzionamento sufficientemente elevato il sistema "assorbe" queste perturbazioni e le grandezze caratteristiche saranno costanti a meno di fluttuazioni statistiche. Questo problema sarà esaminato più oltre.

Un'analisi secondo le idee precedentemente esposte è stata condotta al modo seguente.

Calcolata la funzione  $\alpha_0(x)$  si valuta la sua norma

$$\|\alpha_0(x)\| = \left[ \sum \alpha_0^2(x_i) \right]^{1/2}$$

e si procede ad effettuare un calcolo del transitorio a flusso di calore costante. A ciascun passo si calcola la norma della funzione  $\alpha(x, t)$  e si corregge ciascun valore di essa secondo la formula

$$\alpha^j(x, t) = \alpha(x, t) \frac{\|\alpha_0(x)\|}{\|\alpha(x, t)\|}$$

ripetendo questa procedura per un numero sufficientemente elevato di passi. Si preparerà così una funzione  $\alpha_0(x)$  già in equilibrio con le perturbazioni spurie del calcolo temporale / cfr cap. 7/.

Una normalizzazione alternativa può essere quella che conserva il valore dell'integrale di  $\alpha(x,t)$  nel canale, e, quindi, il contenuto globale di vapore.

Un calcolo effettuato con questo tipo di normalizzazione è stato condotto per alcune migliaia di passi. Il vettore normalizzato viene riprodotto stabilmente, con una "deriva" temporale irrilevante.

Un indice delle variazioni indotte da questa deriva è la quantità

$$J(t) = \int_{\zeta}^L |\alpha(x, t + \Delta t) - \alpha(x, t)| dx$$

che si mantiene costantemente dell'ordine di  $3 \cdot 10^{-9}$ , con un valore iniziale di  $\int_{\zeta}^L \alpha_0(x) dx$  di circa 48,37 cm.

Lo stesso calcolo, privo però di normalizzazione, mostrava una leggera deriva nell'integrale. Dopo circa 1500 passi di calcolo (ca. 4,5 sec) il valore dell'integrale era di circa 47,8 cm, con un errore dell'ordine dell'1%: è questa la riduzione percentuale del contenuto di vapore indotta dagli errori di calcolo. Veniva usato il fit parabolico della formula di Jones con i dati seguenti:

$$r = 1.102 \text{ } 76$$

$$g = 5 \text{ sec}^{-1}$$

$$L = 100 \text{ cm}$$

$$\zeta = 11 \text{ cm}$$

$$v = 100 \text{ cm/sec}$$

### 7. NOTA SULLA SCELTA DI UNA CONDIZIONE INIZIALE STAZIONARIA

Un punto importante è quello che riguarda la preparazione di una condizione iniziale. Ci sembra che una valutazione accurata di ciò che debba essere assunto come condizione iniziale nel calcolo di un transitorio si debba imporre in generale, in questo genere di problemi, allo scopo di evitare la propagazione nel tempo di errori che sono dovuti solo a una rappresentazione della condizione iniziale non corrispondente allo schema adottato nel transitorio. È evidente che l'approssimazione dell'operatore differenziale in condizioni stazionarie è differente da quella relativa al transitorio e il raccordo tra le due rappresentazioni numeriche non va posto solo in termini di coerenza ma anche in termini di stabilità.

Il grado di stabilità /5/ diverso di due schemi di calcolo, impone la necessità di un raccordo basato sul confronto numerico.

Esaminiamo un problema alle condizioni iniziali, cioè del tipo

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{\Omega} \underline{v} + \underline{s} \quad \underline{v}(0) = \underline{v}_0$$

dove  $\underline{v}$  è un vettore definito su un reticolo spaziale e dipendente dal tempo e  $\underline{s}$  è un vettore sorgente definito sullo stesso reticolo e dipendente anch'esso dal tempo.

Il corrispondente problema numerico sarà scritto come

$$\frac{d\underline{u}}{dt} - A\underline{u} = \underline{\sigma} + \underline{\epsilon} \quad (+ \text{condizione iniziale}) \quad (12)$$

dove  $A$  è una matrice, i cui elementi supporremo indipendenti dal tempo, e in cui  $\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}(t)$  è un vettore, nel quale sono rappresentate le sorgenti di errore proprie del calcolo.

Analizziamo ora la questione relativa alla scelta delle condizioni iniziali da associare alla equazione (12). Di solito si ritiene opportuno associare la condizione iniziale  $\underline{u}(0) = \underline{u}_0$  soluzione del problema stazionario corrispondente alla (12) e cioè

$$-A\underline{u}_0 = \underline{\sigma} + \underline{\epsilon}_0 \quad (13)$$

dove  $\underline{\epsilon}_0$  è la sorgente di errore propria delle procedure e degli algoritmi mediante i quali si risolve la (13). E' allora

$$\underline{u}_0 = -A^{-1}(\underline{\sigma} + \underline{\epsilon}_0) \quad (14)$$

Se si risolve formalmente la (12) si trova, se il sistema rimane isolato ( $\underline{\sigma} = \text{costante}$ ),

$$\underline{u} = e^{tA} \left[ \underline{c} + (I - e^{-tA}) A^{-1} \underline{\sigma} + \int_0^t e^{-t'A} \underline{\epsilon}(t') dt' \right] \quad (15)$$

e si riconosce che è  $\underline{c} = \underline{u}(0) = \underline{u}_0$

Poniamo ora  $\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}_0 + \underline{\phi}(t)$ ; ne segue, ricordando la (14):

$$\begin{aligned} \underline{u} &= e^{tA} \left[ \underline{u}_0 + (I - e^{-tA}) A^{-1} (\underline{\sigma} + \underline{\epsilon}_0) + \int_0^t e^{-t'A} \underline{\phi}(t') dt' \right] = \\ &= \underline{u}_0 + \int_0^t e^{(t-t')A} \underline{\phi}(t') dt' = \underline{u}_0 + \underline{\delta}(t) \end{aligned}$$

L'ipotesi di stabilità dello schema numerico di calcolo porta ad assumere che sia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{\delta}(t) = \underline{0}$$

e, in pratica, che esista  $t_*$  per cui accada identicamente

$$\underline{\delta}(t) = \underline{\delta}(t_*)$$

per ogni  $t > t_*$ . Questo comporta che sia, per  $t \leq t_*$

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\delta}(t)$$

e

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\delta}(t) = \underline{u}_0 + \underline{\delta}(t_*)$$

per  $t \geq t_*$ .

Si vede così che la condizione iniziale  $\underline{u}_0$ , che dovrebbe essere riprodotta invariata nel calcolo temporale nella ipotesi assunta che il sistema rimanga isolato, risulta invece progressivamente alterata, o alterata almeno fino ad un ammontare massimo  $\underline{\delta}(t_*)$  nell'ipotesi "forte" di stabilità assunta.

Si nota poi che l'errore  $\underline{\delta}(t)$  dipende dalle caratteristiche dell'operatore  $e^{(t-t')A}$  e quindi della matrice  $A$ . Anche se, ad esempio,  $\underline{\phi}(t)$  fosse nulla in media nei sub-intervalli di un'opportuna suddivisione dell'intervallo di calcolo, non sarebbe nullo  $\underline{\delta}(t)$ , a meno che l'operatore  $e^{(t-t')A}$  non fosse identicamente singolare nell'intervallo, il che non può essere.

Anche se questi problemi sono ordinariamente trascurati nel calcolo e un'attenzione accurata è destinata in modo precipuo all'analisi di stabilità e alla coerenza, non è forse di interesse soltanto teorico considerarli. In alcuni casi queste conclusioni potrebbero tradursi in un'opportuna norma d'uso dei codici di calcolo, che fornirebbe una garanzia aggiuntiva di miglioramento del grado di stabilità di calcoli stessi, eliminando una

ingiustificabile incoerenza strutturale nella posizione del problema numerico. Ciò è tanto più importante quanto più si vicini a condizioni di instabilità fisiche del sistema in esame o allorchè le interazioni tra le grandezze fisiche sono "forti" e caratterizzate perciò da costanti di tempo critiche. Nel nostro caso, l'errore  $\underline{\delta}(t)$  corrisponde ad una modificazione nel tempo del contenuto di vapore relativo a ciascuna quota del canale, e quindi anche del contenuto globale di vapore nel canale. Si può suggerire che un calcolo del transitorio con sorgente costante effettuato per un tempo convenientemente elevato ( $t > t_*$ ) fornisca una soluzione  $\alpha(x, t)$  più idonea ad essere assunta come condizione iniziale che non  $\alpha_0(x)$ , se opportunamente normalizzata, per esempio in modo che sia

$$\int_0^L \alpha(x, t) dx = \int_0^L \alpha_0(x) dx$$

In essa sono contenute e assorbite, per così dire, tutte le perturbazioni che caratterizzano la differenza tra le distribuzioni di errore  $\underline{\epsilon}_0$  e  $\underline{\epsilon}(t)$ .

Un esempio relativo a questo genere di problemi sarà esposto in Appendice.

### 8. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Il metodo esposto in questo lavoro consente di introdurre nei calcoli di dinamica le correlazioni sperimentali di slip-ratio di forma qualsiasi. L'utilizzazione di esse mediante opportuno fitting nulla di sostanziale toglie alla rappresentazione.

La preparazione di una condizione iniziale stazionaria è stata precedentemente discussa, anche sulla base di una lunga esperienza numerica sostenuta per il problema esaminato in questo lavoro. Le conclusioni riguardano la opportunità di principio che il modello matematico del sistema sia fatto funzionare, con uno schema numerico stabile, per un tempo "infinito", in condizioni di isolamento da sorgenti variabili, prima di effettuare il calcolo di un transitorio. Anche se, presumibilmente, il trascurare questo accorgimento non introduce errori elevati per una larga classe di problemi, in condizioni di stabilità, rimane da valutare quale prezzo questi errori impongano nei calcoli, a parte il fatto che non esiste congruenza numerica tra il calcolo del transitorio e le condizioni iniziali ricavate mediante il calcolo stazionario.

Il Dr. Aldo GALATI ha contribuito con discussioni e suggerimenti a questo lavoro, particolarmente per il problema della valutazione della condizione iniziale.

BIBLIOGRAFIA

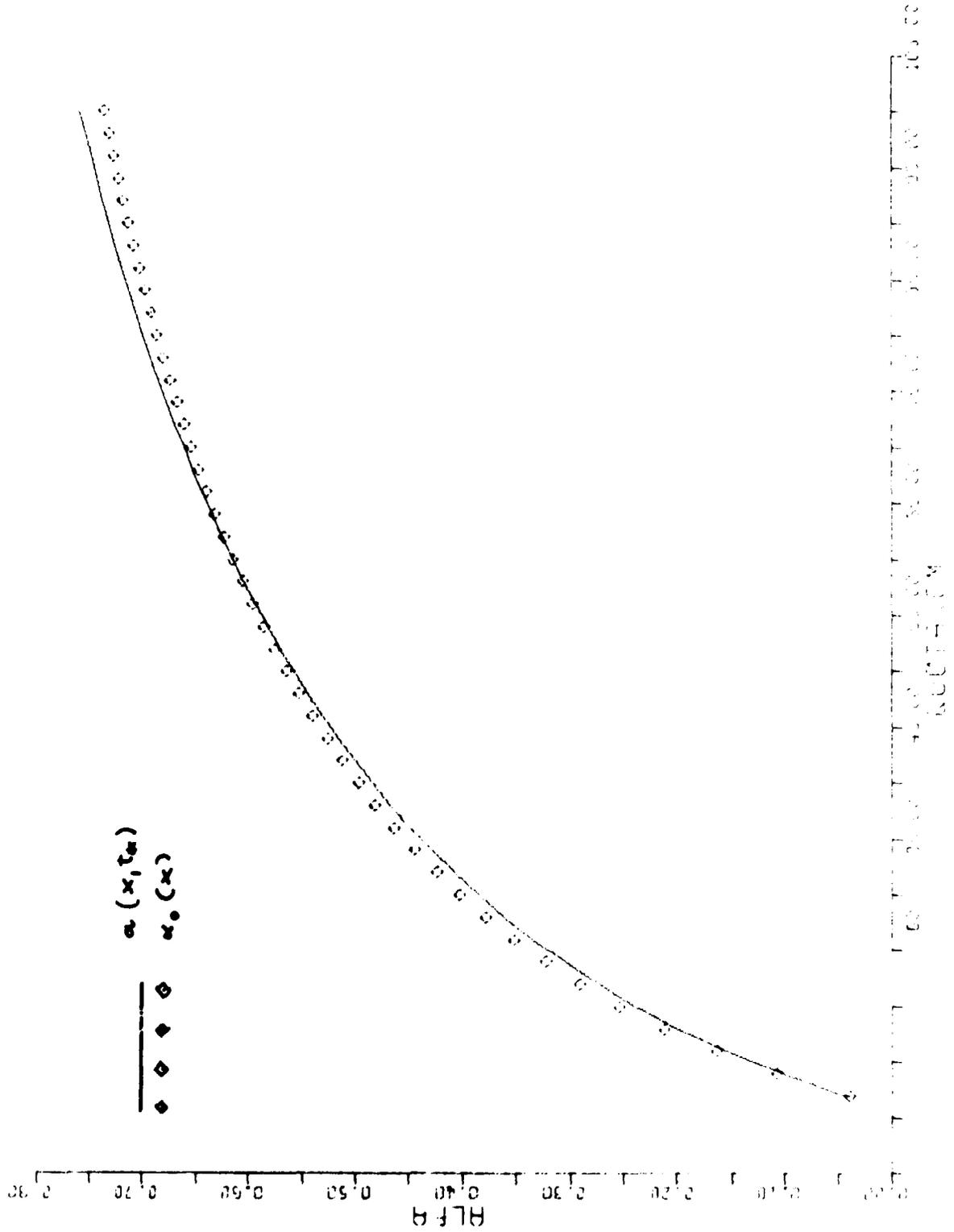
- 1) L.M. SHOTKIN, "A space-Independent Model of Two-Phase Flow and its Applications to Experiment" - BNL-963 (1966)
- 2) L.M. SHOTKIN, "Stability Considerations in Two-Phase Flow" - NSE 28, (1967)
- 3) S.G. BANKOFF, "A variable Density Single-Fluid Model for Two-Phase Flow" - Trans. ASME 82, 265 (1960)
- 4) A.B. JONES, "Hydrodynamic Stability of a Boiling Channel" - KAPL-2170 (1961)
- 5) G.E. FORSYTHE, W.R. WASOW, "Finite-difference Methods for Partial Differential Equations" - Wiley - New York (1960)
- 6) R.D. RICHTMYER e K.W. MORTON, "Difference Methods for Initial-Value problems" - Interscience Publishers, New York (1967)
- 7) R.S. VARGA, "Matrix Iterative Analysis" - Prentice-Hall-Englewood Cliffs (1962)

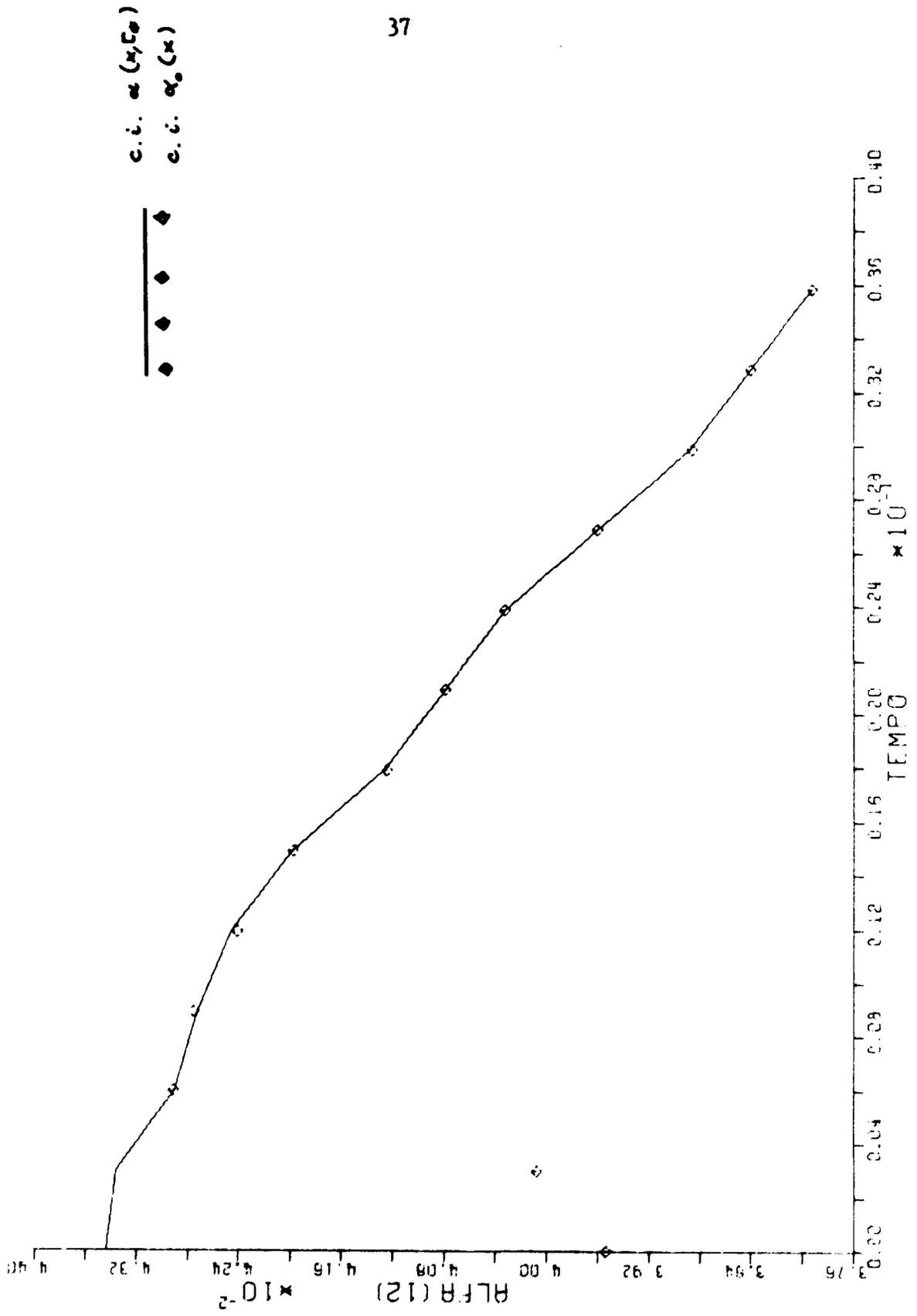
## 10. APPENDICE

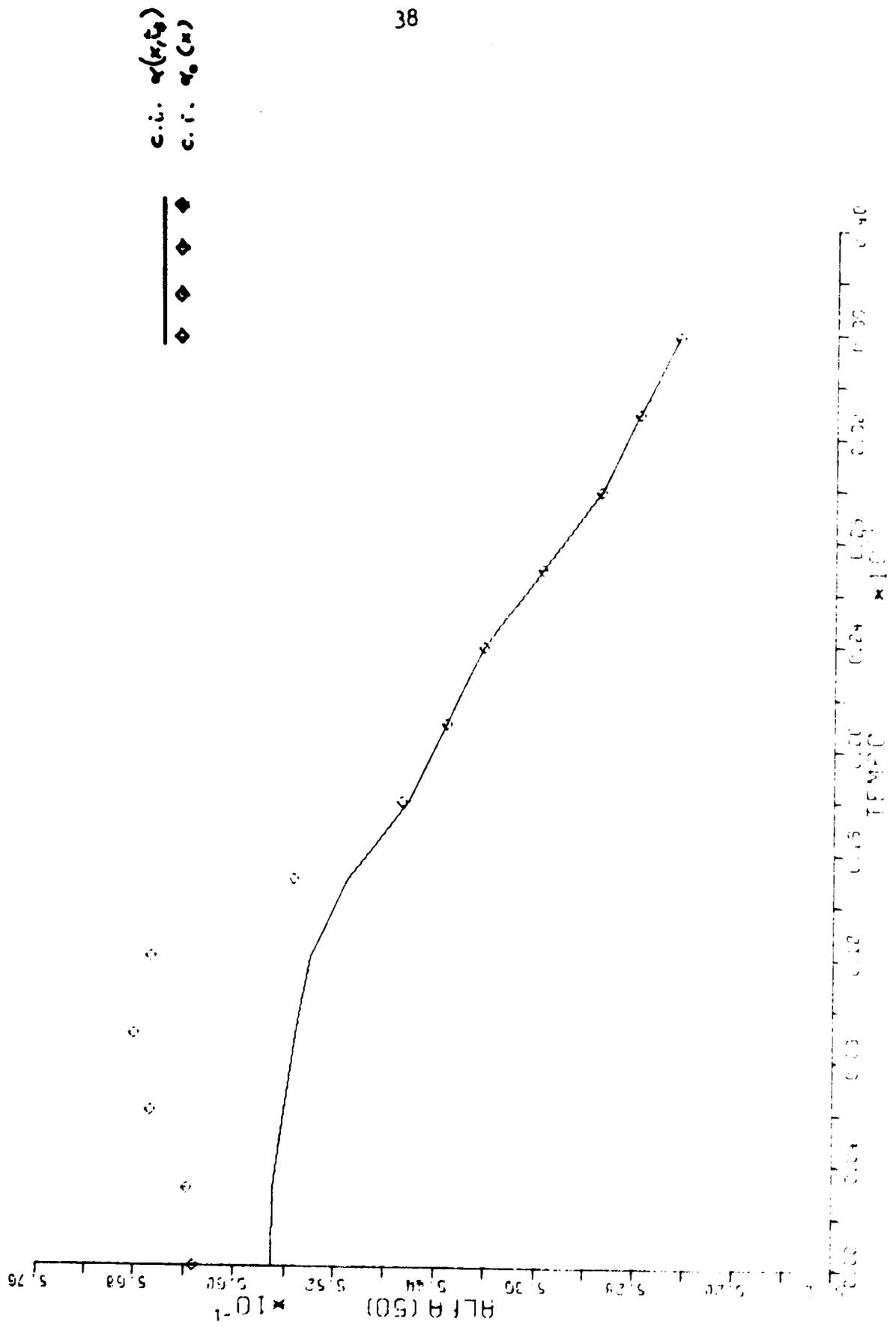
Riferendoci all'analisi fatta in merito alla determinazione di ciò che debba essere assunto come condizione iniziale per un problema ai valori iniziali, possiamo confrontare calcoli eseguiti, per il problema oggetto di questo lavoro, con funzioni ricavate con un calcolo stazionario e con funzioni ottenute invece per stabilizzazione asintotica da un calcolo di transitorio con sorgente costante.

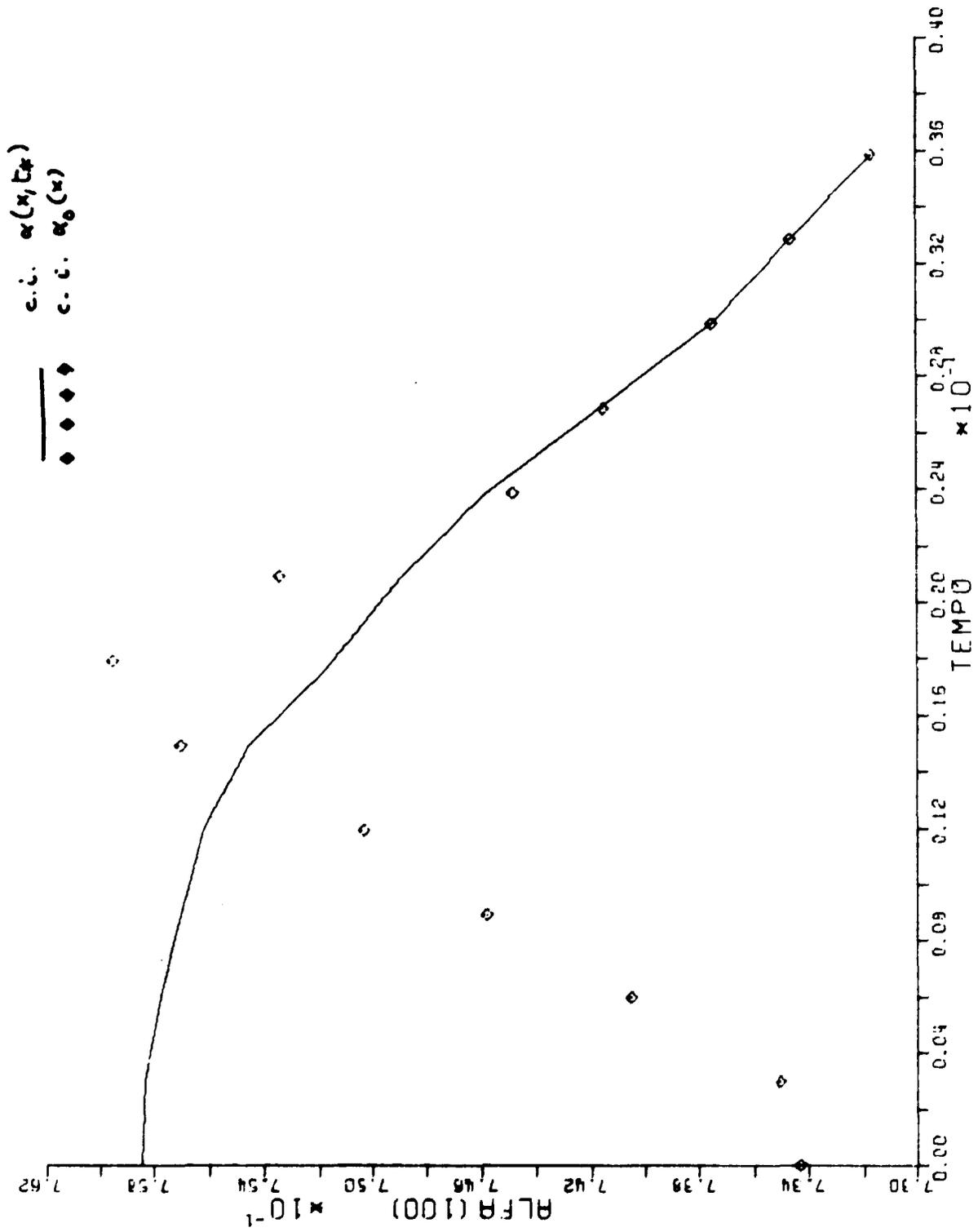
Abbiamo effettuato questo calcolo con i dati elencati a pag. 25, per un transitorio determinato dalla diminuzione temporale lineare della funzione  $g$ , assunta spazialmente costante, dal valore 5 al valore 2 in 3 sec.

Il primo calcolo è stato effettuato a partire da una funzione  $\alpha_0(x)$  ricavata dal calcolo stazionario, mentre il secondo è stato effettuato a partire dalla funzione  $\alpha(x,t)$  stabilizzata dopo un calcolo di circa 4.5 sec. La funzione risultante è stata normalizzata, alla fine, secondo il criterio della conservazione del contenuto di vapore nel canale. In entrambi i calcoli si assumeva  $\dot{S}(t) = \text{costante}$ . Nel primo dei due calcoli si è rilevato un andamento del tutto ingiustificabile fisicamente: la funzione  $\alpha(x,t)$  cresceva all'inizio uniformemente, e cioè aumentava il contenuto di vapore nel canale, in presenza di un flusso di calore decrescente. Successivamente la crescita si arrestava ed iniziava una diminuzione. Questo effetto numerico era evidentemente dovuto all'errore  $\delta(t)$  e mostrava una estinzione nel verso delle  $x$  crescenti con una velocità dello stesso ordine di quella del refrigerante. Il calcolo effettuato con la funzione normalizzata non mostrava invece questo









effetto, in accordo con il giudizio di stabilità dello schema espresso secondo i criteri illustrati nel Cap. 7.

Nei grafici uniti a questa Appendice sono mostrati a confronto:

- 1) le funzioni  $\alpha_0(x)$  e  $\alpha(x,t)$  normalizzata ( $t > t_0$ )
- 2) le funzioni  $\alpha(\bar{x}, t)$  calcolate nei due modi sopra illustrati, per i tre punti  $\bar{x} = 12$  cm,  $\bar{x} = 50$  cm, e  $\bar{x} = 100$  cm.

Si notano nel primo grafico le diversità delle due condizioni iniziali, corrispondenti a differenze del contenuto globale di vapore, prima della normalizzazione, dell'ordine di circa 1%.

Negli altri grafici gli andamenti delle funzioni sono indistinguibili a partire da tempi che variano con la quota in relazione alla propagazione degli effetti dell'errore  $\delta(t)$ .

