

4. International conference on structural mechanics
in reactor engineering. San Francisco, Calif., USA,
15-19 August 1977

CEA-CONF--4069

FR7800 667

**GLOBAL PLASTIC MODELS FOR COMPUTERIZED
STRUCTURAL ANALYSIS**

R. ROCHE

A. HOFFMANN

1 - INTRODUCTION

L'accroissement considérable des exigences de sûreté dans l'industrie nucléaire peut amener à entreprendre des analyses élasto-plastiques de structures mécaniques. C'est le cas pour un certain nombre de problèmes rencontrés dans les structures de Liquid Metal Fast Breeder Reactors, lorsque les règles simples ne suffisent pas /1/.

Des analyses de ce type peuvent aussi être utiles pour les structures de Light Water Reactor quand on cherche à vérifier directement la sécurité vis à vis des "modes of failure" considérés dans certaines réglementations nationales /2/.

Malheureusement, de tels calculs sont coûteux, sauf si les structures considérées sont de forme très simple. De ce fait, ils ne peuvent être entrepris que dans des cas très particuliers. Il est donc souhaitable de disposer de moyens de calcul plus rapides et moins coûteux que les procédés généralement utilisés et donnant néanmoins des résultats d'une précision techniquement satisfaisante.

Les modèles globaux de plasticité permettent de telles économies lorsque la forme géométrique des structures s'y prête, ce qui est généralement le cas quand une (ou deux) dimensions sont faibles devant les autres (tuyauteries et coques).

Le coût prohibitif des analyses élasto-plastiques est dû à ce que les équations de la plasticité sont explicitées en chaque point. En conséquence l'intégration est nécessaire sur le volume entier de la structure et l'état des points considérés doit être gardé en mémoire.

Tout au contraire, avec les modèles globaux, les équations de comportement plastique seront exprimées pour un

ensemble de points (une normale, une section droite) ce qui permet de limiter l'intégration à une surface ou à une ligne et réduit considérablement les indications à conserver en mémoire.

2 - PRINCIPE DES "MODELES GLOBAUX"

D'un point de vue purement intuitif, il paraît naturel de définir les contraintes et les "strains" de façon habituelle. Cependant il convient de considérer également un point de vue formel /3/. La base de ce formalisme est la notion de contrainte généralisée et de "strain" généralisée introduite par PRAGER /4/ et qui est nécessaire à une bonne introduction des "minimum principles" /5/.

Notons brièvement que les contraintes généralisées et les déformations généralisées doivent permettre d'écrire l'expression du travail virtuel des forces intérieures (strain energy virtual variation). De façon plus formelle, il est nécessaire d'écrire que l'espace E des "generalized strains" et l'espace S des "generalized strains" peuvent être mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle e, s \rangle$ de valeur réelle qu'on nomme le travail virtuel. Les équations de plasticité peuvent s'exprimer directement avec les contraintes et les déformations généralisées : "yield surface, plastic flow laws and hardening properties". Lorsque l'écrouissage est supposé nul, on retombe sur les méthodes de l'analyse limite. Il est cependant important de noter qu'il est théoriquement possible de tenir compte de l'écrouissage /3/ avec les notions de contrainte et de déformation généralisées.

3 - FORMULATION GENERALE

Un ensemble de points de la structure (la normale d'une coque, la section droite d'une barre ou d'un tuyau) est défini par un ensemble de coordonnées (x_i) . Cet ensemble

est un point généralisé. En ce point on définit un vecteur "contrainte généralisée" de composantes (s_i) et le vecteur dual "generalized strain" de composantes (e_i).

Une variation de δe_i de la "strain" e_i correspond à un travail virtuel

$$\delta W = s_i \delta e_i$$

La "Yield surface" est définie par une équation contenant la contrainte généralisée s_i et les variables d'état μ_k représentant l'histoire du point généralisé

$$F(s_i, \mu_k) = 0$$

L'écoulement plastique ou visco-plastique est obtenu en admettant une loi de normalité

$$de_i^P = \frac{\delta F}{\delta s_i} d\lambda$$

le calcul est alors poursuivi par les méthodes incrémentales classiques.

4 - EXAMEN CRITIQUE DES METHODES TRADITIONNELLES

A la première impression il peut sembler que les modèles globaux de plasticité ne sont qu'un grossière approximation, qu'une astuce pour faire des économies de calcul. Ils ont en effet toute l'allure d'un prolongement de l'analyse limite. Une telle attitude n'est guère justifiée et n'est que l'illustration de deux séries de préjugés, l'une relative à la rigueur des équations traditionnellement utilisées, l'autre relative aux possibilités des modèles globaux. En fait, dans tous les cas il s'agit de connaître suffisamment les équations constitutives et d'utiliser des approximations convenables de ces dernières.

Dans les méthodes classiques, il est fait un certain nombre d'hypothèses qui, du fait de l'habitude, ne sont

pas toujours présentes à l'esprit. Tout d'abord il y a le choix de la "yield surface". Chacun sait qu'il existe deux hypothèses courantes à ce sujet, l'une basée sur le cisaillement maximal (TRESCA), l'autre sur le cisaillement octaédral (VON MISES). L'expérience tranche difficilement entre ces deux formes mais la seconde est généralement adoptée dans les systèmes de calcul, car d'un maniement plus aisé. Ce qu'il est important de noter ici est qu'il est admis que la forme de la "yield surface" reste constante au cours de l'histoire du changement (même si ses dimensions varient). D'un strict point de vue de physique expérimentale, cela n'est pas exact. Comme il est exposé dans /6/ "The theoretical initial yield surface denotes the start of infinitesimal plastic strain. Experimentally, however, plastic strain is not observed until it grows to a measurable value ... although the start of plastic strain ... depend more on the maximum shear stress than on \bar{J}_2 , the stress causing the measured amount of plastic strain depends more of the mean square of shear stresses on all planes than on the maximum shear stress". Pis encore si des déformations plastiques se produisent on peut prévoir des modifications profondes de la forme de la "yield surface" avec formation de coins /6/.

On observe en effet une tendance à une telle déformation de la yield surface /7/ /8/. Lorsque les déformations sont notables, le "strain hardening" se manifeste, nous venons de voir qu'il joue physiquement sur la forme de la yield surface, ce qui n'est jamais pris en compte dans les calculs. Même en acceptant cette hypothèse, le problème consiste, grâce aux résultats d'un essai de traction, à prédire l'évolution de cette surface. Les deux hypothèses les plus courantes, l'écrouissage isotope et l'écrouissage cinématique représentent grossièrement la réalité physique. Aussi d'autres modèles mathématiques ont été proposés tels que "composite or over lay or multilayers models" /9/ or using a lot of internal state parameters /10/ qui se révèlent fournir une bonne représentation du comportement élasto-plastique des structures /11/. Il faut cependant

dire que de tels modèles sont peu employés de façon courante.

Une loi d'écoulement est également nécessaire et en général choisie une loi normale, ce qui repose plus sur des considérations théoriques (DRUCKER's stability postulate) que sur une large vérification expérimentale /7/.

Enfin, outre ces hypothèses sur les lois physiques de la plasticité, d'autres hypothèses sont implicitement admises. Il est supposé que le matériau est isotope et homogène. Une telle assertion est extrêmement éloignée de la vérité pour les tôles et les pièces laminées. Les caractéristiques de plasticité (limite élastique et courbe d'écrouissage) dépendent du sens de laminage. D'autre part ces caractéristiques dans un sens donné sont loin d'être constantes dans l'épaisseur : la forme de la courbe contrainte déformation peut être très différente au centre de la tôle et sur sa peau, ainsi qu'on peut le voir sur la figure 1.

5 - POTENTIEL DE DEVELOPEMENT DES "MODELES GLOBAUX"

Tout ceci montre que la méthode traditionnelle utilisant les équations ponctuelles de la plasticité n'est pas l'application de lois physiques bien établies, mais un moyen technique de calcul utilisant des modèles mathématiques pour schématiser la réalité physique. Aussi les résultats ne peuvent être acceptés comme valables que si l'ensemble de la méthode a pu être qualifié. Par qualification, il faut entendre un nombre de comparaisons suffisant entre les résultats du calcul et les résultats expérimentaux.

De ce point de vue, les modèles globaux sont à soumettre aux mêmes règles d'agrément. En dehors de l'économie sur le coût du calcul, ils présentent l'avantage de pouvoir prendre directement en compte certaines hétérogénéités de la structure. Par exemple les courbes de traction (et de

flexion) peuvent directement être relevés sur des échantillons de tôle. Ils permettent ainsi de tenir compte directement des caractéristiques mécaniques des éléments utilisés.

D'autre part, les possibilités potentielles des modèles globaux sont bien plus étendues que l'on ne suppose. L'utilisation de descriptions perfectionnées de l'écroutissage permet une grande extension. En particulier, les modèles multilayers permettent d'accroître leur efficacité lors de changements cycliques.

De tels modèles ont été utilisés dans le système d'analyse CEASEM /12/ /13/ /14/ pour les coques et pour les tuyauteries. Il convient donc d'examiner les formulations de ces deux cas.

6 - EMPLOI POUR LES COQUES

Le "point généralisé" est ici une normale à la surface moyenne. Les composantes des contraintes généralisées /15/ /16/ sont, (voir figure 2) :

- Les contraintes de membrane $N_1 N_2 N_3$ (ou $N_{11} N_{22} N_{12}$)
- Les moments de flexion $M_1 M_2 M_3$ (ou $M_{11} M_{22} M_{12}$)

auxquelles correspondent les composantes suivantes de la "generalized strain" :

- Les déformations de membrane $e_1 e_2 e_3$ (ou $e_{11} e_{22} e_{12}$)
- Les variations de courbures $\chi_1 \chi_2 \chi_3$ ou $(\chi_{11} \chi_{22} \chi_{12})$

Dans la pratique courante la yield surface utilisée est une généralisation du critère Von Mises (avec si besoin plusieurs sous matériaux). Elle s'exprime en fonction des invariants du second ordre des déviateurs des contraintes généralisées.

Il y a trois invariants de ce genre :

$$\left\{ \begin{array}{l} N^2 = N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2 + 3N_3^2 \\ M^2 = M_1^2 + M_2^2 - M_1 M_2 + 3M_3^2 \\ MN \cos \varphi = N_1 M_1 + M_2 N_2 - 0,5 (M_1 N_2 + M_2 N_1) + 3 M_3 N_3 \end{array} \right.$$

grâce auxquels s'exprime la yield surface

$$F (M, N, \cos \varphi, \mu_1, \dots) = 0$$

L'hypothèse de normalité de l'écoulement plastique permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de_1}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial N} \frac{N_1 - 0,5N_2}{N} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial \cos \varphi} \frac{M_1 - 0,5M_2}{M} \\ \frac{de_2}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial N} \frac{N_2 - 0,5N_1}{N} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial \cos \varphi} \frac{M_2 - 0,5M_1}{M} \\ \frac{de_3}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial N} \frac{3N_3}{N} + \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial \cos \varphi} \frac{3M_3}{M} \\ \frac{d\chi_1}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial M} \frac{M_1 - 0,5M_2}{M} + \frac{1}{M} \frac{\partial F}{\partial \cos \varphi} \frac{N_1 - 0,5N_2}{N} \\ \frac{d\chi_2}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial M} \frac{M_2 - 0,5M_1}{M} + \frac{1}{M} \frac{\partial F}{\partial \cos \varphi} \frac{N_2 - 0,5N_1}{N} \\ \frac{d\chi_3}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial M} \frac{3M_3}{M} + \frac{1}{M} \frac{\partial F}{\partial \cos \varphi} \frac{3N_3}{N} \end{array} \right.$$

Dans la pratique, on peut souvent négliger l'effet de $\cos \varphi$, ce qui permet de remplacer les dérivées de F par deux paramètres d'écroutissage isotope :

$$de^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(de_1)^2 + (de_2)^2 + de_1 de_2 + \frac{1}{4} de_3^2}$$

$$d\chi^x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(d\chi_1)^2 + (d\chi_2)^2 + d\chi_1 d\chi_2 + \frac{1}{4} d\chi_3^2}$$

qui conduisent aux expressions classiques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{de_1}{N_1 - \frac{1}{2}N_2} = \frac{de_2}{N_2 - \frac{1}{2}N_2} = \frac{de_3}{3N_3} = \frac{de^*}{N} \\ \frac{d\chi_1}{M_1 - \frac{1}{2}M_2} = \frac{d\chi_2}{M_2 - \frac{1}{2}M_1} = \frac{d\chi_3}{3M_3} = \frac{d\chi^*}{M} \end{array} \right.$$

qui conduisent à des calculs habituels.

On notera que pour l'écroûissage cinématique il convient dans la formulation précédente de remplacer partout M_i et N_i par les différences $M_i - \mu_i$ et $N_i - \nu_i$ où les μ et ν correspondent au déplacement de la yield surface.

Des modèles de ce type sont utilisés dans les modules TRICO et PASTEL /18/ /19/ traitant des coques de forme quelconque, ou simplement des coques de révolution.

7 - EMPLOI POUR LES "PIPING SYSTEM ANALYSIS"

Le point généralisé est ici la section droite, et ses coordonnées sont simplement celles de la fibre neutre du tuyau. De ce fait, on arrivera à utiliser en plasticité et en viscoplasticity a beam type method. /20/ /21/ /22/.

Les contraintes généralisées sont la traction d'ensemble, la flexion, la torsion et la pression, plus pratiquement on choisit comme composantes pour un tube :

$$\sigma_n = \frac{N}{\pi D t} \quad \sigma_p = \frac{PD}{2t} \quad \sigma_b = \frac{Mb}{\pi D \frac{2t}{4}} \quad \sigma_t = \frac{Mt}{\pi D \frac{2t}{4}}$$

auxquelles correspondent les generalized strain composants ci-après :

$$\epsilon_n = \frac{\Delta l}{l} \quad \epsilon_p = \frac{\Delta D}{D} \quad \epsilon_b = \frac{D}{4} \chi \quad \epsilon_t = \frac{D}{4} \psi$$

telles que la strain energy par unité de volume soit donnée par :

$$\delta W = \sigma_n \delta \epsilon_n + \sigma_p \delta \epsilon_p + \sigma_b \delta \epsilon_b + \sigma_t \delta \epsilon_t$$

où les notations utilisées sont :

D diamètre moyen, t épaisseur, N effort de traction, p pression interne, M_b moment de flexion, M_t moment de torsion, $\frac{\Delta l}{l}$ allongement de l'axe, χ variation de courbe, ψ variation de torsion.

Le plus souvent, ont seules de l'importance, la flexion et la torsion. Les composantes utiles sont alors réduites à deux σ_b et σ_t (avec ϵ_b et ϵ_t). D'autre part il est en général utilisé un modèle "composite" avec des matériaux à écrouissage cinématique. Dans ce cas une formule simple pour la yielding surface est :

$$\sigma_y^2 = \alpha_b^2 (\sigma_b - \beta_b)^2 + \alpha_t^2 (\sigma_t - \beta_t)^2$$

où β_b et β_t sont caractéristiques de l'écrouissage et où α_b et α_t sont des coefficients constants tels que :

$$\begin{cases} \alpha_t = \sqrt{3}/2 \\ \alpha_b = \frac{\pi}{4} \gamma \end{cases}$$

où γ a une valeur qui tient compte de la courbure des parties courbes telles que les coudes (elle s'exprime en général en fonction du paramètre $\lambda = 4 Rt/D$ où R est le rayon de courbure).

Les strain increments sont donnés par :

$$\begin{cases} d\epsilon_b = \alpha_b^2 \frac{\sigma_b - \beta_b}{\sigma_y} d\epsilon^* \\ d\epsilon_t = \alpha_t^2 \frac{\sigma_t - \beta_t}{\sigma_y} d\epsilon^* \end{cases}$$

Les paramètres d'écrouissage β_b et β_t varient suivant la règle de PRAGER modifiée par ZIEGLER :

$$\begin{cases} d\beta_b = (\sigma_b - \beta_b) d\mu \\ d\beta_t = (\sigma_t - \beta_t) d\mu \end{cases}$$

où la variation de $d\mu$ peut être obtenue par dérivation de l'équation de la yield surface (où σ_y est constant) et en tenant compte des expressions de $d\beta_b$ et $d\beta_t$ ainsi que de celle de l'incrément de déformation :

$$d\mu = \frac{d\epsilon_b}{d\epsilon^*} \frac{d\sigma_b}{\sigma_y} + \frac{d\epsilon_t}{d\epsilon^*} \frac{d\sigma_t}{\sigma_y}$$

ce qui est utilisé dans les itérations internes. On trouvera des applications de cette méthode dans /22/ et /24/.

- /1/ ASME Pressure Vessel and Boiler Code - Code Case 1592
- /2/ "Appareils à pression de vapeur - Circuit primaire principal des chaudières nucléaires à eau" (Boiler regulations - Primary circuit of Water Nuclear Boilers) (Arrêté et circulaire du 24 février 1974). Supplément à la brochure 1331 - Journal officiel de la République française 1974.
- /3/ NAYROLES, B., "Structure Algébrique des Théories classiques" in "Plasticité et viscoplasticité" edited by D. RADENKOVIC and J. SALENCON - Edisciance/Mc Graw-Hill - Paris 1974.
- /4/ PRAGER, W., "The general theory of limit design" Proc. 8th Int. Congr. Appl. Mech. (Istanbul 1952) - 1956
- /5/ HODGE, P., G., Jr "Numerical Applications of minimum principles in Plasticity" in "Engineering plasticity" edited by J. HEYMANN and F.A. LECKIE The University Press Cambridge 1968.
- /6/ LIN, T., H., "Theory of Inelastic structures" J. WILEY New York 1968.
- /7/ PHILLIPS, A., "Experimental plasticity. Some thoughts on its present status and possible future trends" in "Problems of Plasticity" edited by A. SAWCZUK Nordhof Int. Pub. LEYDEN 1974.
- /8/ GREENSTREET, W.L., "Structural Analysis Technology for High-Temperature Design" Paper L3/2 SMIRT3 London 1975.
- /9/ ZIENKIEWICZ, O.C., and al! "Composite and over lay models in numerical analysis of elasto-plastic continua" in "Symposium on foundations of plasticity" edited by A. SAWCZUK - Nordhof. Int. Pub. LEYDEN 1973.

- /10/ Z. MROZ "A description of work hardening of metals" in the same.
- /11/ MUNSAKER, B., VAUGUAN, D. K., STRICKLIN, J. A., "A comparaison of the capability of four Hardening Rules to Predict a Material's Plastic Behaviour" Transactions ASME, J. of Press. Vessel Tech. Febr. 1976.
- /12/ JEANPIERRE, F., and all "CEASEMT System of Finite Elements Computer Programms - Use for Inelastic Analysis in Liquid Metal Cooled Reactor Components" IAEA-IWGFR Specialists Meeting on High Temperature Design Technology - Champin, Pennsylvania April 1976 International Atomic Energy Agency.
- /13/ JEANPIERRE, F., and all "Système CEASEMT - Ensemble de programmes de calcul de structure à usage industriel" Note CEA-N-1938 - CEN Saclay 1976.
- /14/ HOFFMANN, A., and all "Aperçus théoriques sur les programmes - Eléments - Dynamique - Non Linéarités géométriques - Flambage - Plasticité -" Note CEA-N-1934 CEN Saclay 1976.
- /15/ HOFFMANN, A., and all "Analyse des coques de forme quelconque dans le domaine plastique par la méthode des éléments finis. Modèles, primaires, comparaison avec l'expérience" SMIRT 3 - Berlin 1973.
- /16/ VRILLON, B., and all "Comparaison between Experimental and computer Analysis of the Behaviour under Pressure of a 90° Bend with an Elliptical Section" Pressure Vessel Technology - Park III - Discussions - 2^d Int. Conf. on Press. Vessel Tech. San Antonio Oct. 1973.

- /17/ ILIOUCHINE "Plasticité" Eyrolles - Paris 1956.
- /18/ HOFFMANN, A., JEANPIERRE, F. "Système SEMT Programme TRICO - Notice d'utilisation Janvier 1976" (TRICO user manual) Note CEA-N-1930.
- /19/ GOLDSTEIN, F. "Système SEMT - Programme PASTEL Notice d'utilisation - Mars 1976" (PASTEL user manual) Note CEA-N-1932 CEA-N-1932 CEN Saclay.
- /20/ ROCHE, R.J., "Modèle simple pour le calcul plastique d'une tuyauterie" - Note CEA-N-1872 CEN Saclay septembre 1975.
- /21/ ROCHE, R.L., HOFFMANN, A. "Inelastic Piping Flexibility Analysis - A Beam Type Method" paper II-3 Specialists Meeting on High Temperature Design Technology of LMFBRs - Champion - Pennsylvania April 1976 (IWGFR-IAEA - VIENNA).
- /22/ ROCHE, R.L., HOFFMANN, A., VRILLON, B. "Piping Systems Inelastic, a Simplified Numerical Method" 3rd Int. Conf. on Pressure Vessel Technology Tokyo - April 1977 (ASME edit.).
- /23/ ZIEGLER, H. "A modification of PRAGER'S Hardening Rule" Quant. Appl. Math. Vol 17, n° 1 1959.
- /24/ BOURRIER, P., HOFFMANN, A., "Plastic Creep Behaviour analysis of a elbow pipe" paper SMIRT4.

