

Ордена Ленина

ИАЭ-2908

Институт атомной энергии

им. И. В. Курчатова

SU 7900/81

Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, С. Е. Лысенко

**Определение температуры ионов
по спектру нейтралов перезарядки**

A14

Москва 1977

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ им. И. В. КУРЧАТОВА

Ю.Н.Днестровский, Д.П.Костомаров, С.Е.Лысенко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ИОНОВ
ПО СПЕКТРУ НЕЙТРАЛОВ ПЕРЕЗАРЯДКИ

М о с к в а
1977

Ключевые слова: токамак, ионная температура, нейтралы, перезарядка, рекомбинация.

В плотной плазме токамака рекомбинация увеличивает плотность нейтралов в центре плазменного шнура. Это позволяет измерять ионную температуру по перезарядке. Найдены асимптотические формулы для вычисления температуры ионов в центре шнура. Разработаны алгоритмы восстановления профиля температуры по спектру нейтралов перезарядки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Измерение спектров нейтралов, выходящих из плазмы, для определения температуры ионов давно используется в эксперименте. Пока размеры установок и плотность плазмы были невелики, истолкование спектров требовало лишь априорных представлений о локальном максвелловском распределении ионов по сечению шнура. Однако увеличение размеров и повышение плотности плазмы привели к тому, что шнур стал оптически плотным по отношению к процессам перезарядки нейтралов на ионах ($\sigma_{cx} n a > 1$, σ_{cx} - сечение перезарядки, n - плотность плазмы, a - радиус шнура). В этом случае три новых физических эффекта осложнили истолкование спектров и определение температуры ионов:

- 1) плотность нейтралов в центре шнура оказалась много меньше (на 3-4 порядка), чем на периферии;
- 2) при большой оптической толщине шнура плотность нейтралов в центральной его части определяется рекомбинацией;
- 3) даже энергичные нейтралы с энергией $E \sim 5-10$ кэВ испытывают несколько перезарядок при пролете от центра шнура до границы и выходят из плазмы с измененной энергией.

В настоящей работе проведены расчеты плотности и спектра нейтралов с учетом этих эффектов. Получены асимптотические формулы для модельных задач (разд. 3) и приведены результаты численных расчетов для экспериментов на установках Т-10 и "Алкатор" (разд. 4), а также описаны возможные алгоритмы обработки экспериментальных спектров.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТИ НЕЙТРАЛОВ

В стационарном случае приближенное уравнение для функции распределения нейтралов в круглом цилиндре имеет вид [1]

$$\vec{v} \nabla f + s f = (s_{cx} N + s_r n) \varphi_i, \quad (1)$$

где $\varphi_i(r, \vec{v})$ - функция распределения ионов;

$\int \varphi_i d^3v = 1$, $n = n(r)$, $N = N(r)$ - плотности плазмы и нейтралов;

$$s = s_{cx} + s_e, \quad s_{cx} = \sigma_{cx}(v) v n, \quad (2)$$

$$s_e = \sigma_e v_e n, \quad s_r = \sigma_r v_e n;$$

σ_{cx} , σ_e и σ_r - сечения перезарядки, ионизации электронами и фоторекомбинации;

v_e - тепловая скорость электронов. В уравнении (1) относительные скорости атомов и ионов $|\vec{v} - \vec{v}_i|$ заменены на $v = |\vec{v}|$. Возможность такой замены связана с тем, что скорость перезарядки $S_{cx} = \sigma_{cx}(v) \cdot v$ слабо меняется в интересующем нас диапазоне энергий $0,5 < E < 10$ кэВ.

В настоящей работе нас будет интересовать оптически толстая плазма по отношению к процессу перезарядки, когда

$$n a \sigma_{cx}(v_i) > 1 \quad (3)$$

(v_i - тепловая скорость ионов). В этом случае хорошее приближение для плотности нейтралов можно получить, используя решение задачи для плоского слоя.

Будем считать, что плазма расположена в слое $-a \leq x \leq a$, а плотность и скорость падающих на плазму нейтралов у стенки ($x = \pm a$) равны N_0 и v_0 . Для определения плотности нейтралов примем, что [2]

$$\varphi_i(x, v) = \frac{1}{2v_i(x)} [\delta(v - v_i(x)) + \delta(v + v_i(x))]. \quad (4)$$

Нетрудно показать, что в этом случае плотность нейтралов в плазме удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$N'' - \frac{s_i s_e}{v_i^2} N = 2N_0 \left(\frac{s_0^2}{v_0^2} - \frac{s_i^2}{v_i^2} \right) \operatorname{ch} \lambda_0(x) - \frac{s_i s_r}{v_i^2} n, \quad (5)$$

где $s_i = s(v_i)$, $s_0 = s(v_0)$, $\lambda_0(x) = \frac{1}{v_0} \int_a^x s_0 dx'$.

Первый член в правой части (5) описывает влияние нейтралов, падающих со стенок камеры, второй - эффекты рекомбинации.

Учитывая (3) и используя соотношение $S_r \ll S_e \ll S$, для решения уравнения (5) в ВКБ-приближении будем иметь

$$N = N_1 \operatorname{ch} \lambda(x) + \frac{S_r}{S_e} n, \quad (6)$$

где $\lambda(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{S_i S_e}{v_i}} dx'$. Постоянная N_1 может быть выражена через N_0 . Приближенно $N_0 = N_1 \operatorname{ch} \lambda(a)$. В дальнейшем мы будем считать, что решение (6) для плоской задачи пригодно и для цилиндрической задачи (1), если заменить x на радиальную координату r .

Вернемся теперь к уравнению (1). Введем декартовы координаты (x, y) с началом отсчета в центре шнура. Для частиц, выходящих параллельно оси x по лучу с фиксированной координатой y , функция распределения на поверхности $r = a$ имеет вид

$$f(y, v) = \frac{1}{v} \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 + y^2}} w(\rho, v) \Psi dx \quad (v = v_x > 0), \quad (7)$$

где

$$w(\rho, v) = (s_{cx} N + s_r n) \psi_i, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8)$$

$(s_{cx}, s_r, N, n, \psi_i - \text{функции от } \rho)$.

$$\Psi = \Psi(x, \sqrt{a^2 - y^2}, v) = \exp(\Omega(x, \sqrt{a^2 - y^2}, v)), \quad (9)$$

$$\Omega(x, z, v) = \frac{1}{v} \int_0^x s(\rho') dx', \quad \rho' = \sqrt{x'^2 + y^2}.$$

Заметим, что при $T_e \sim 1$ кэВ $s_r/s_e = \sigma_r/\sigma_e \sim 2 \cdot 10^8$.

Если оптическая толщина плазмы не слишком велика ($na\sigma_{cx}(v_i) \sim 1$), то в условиях установок токамак ($n \sim 10^{14}$, $N_0 \sim 10^{10}$) эффект ами рекомбинации в формулах (6) и (8) можно пренебречь. Кроме того, при $na\sigma_{cx} \sim 1$ функции $N(r)$ и $\Psi(x)$ не очень сильно меняются по сечению плазмы и поведение $w(\rho, v)$ на пути интегрирования (7) определяется функцией $\psi_i(\rho, v)$. В этом случае функция распределения (7) уже при небольших энергиях нейтралов ($v/v_i(0) \sim 1,5-2$) хорошо передает функцию распределения ионов в центре плазмы.

Поток частиц в анализатор равен

$$\frac{dj_a}{dE} = \omega S v F \quad (\text{частиц/эВс}), \quad (10)$$

где

$$F \equiv \frac{dN}{dE} = \frac{v^3 f}{2E} = \frac{1}{m} v f \quad (\text{частиц/см}^3 \text{эВ}); \quad (11)$$

$E = mv^2/2$, $\omega = S_{\text{ан}}/\theta^2$, $S_{\text{ан}}$ и S - площади анализатора и видимой из анализатора части поверхности плазмы, θ - расстояние от центра шнура до анализатора.

Для максвелловской функции

$$\varphi_i(r, v) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_i^3(r)} \exp\left(-\frac{E}{T_i(r)}\right) \quad (12)$$

в случае тонкой плазмы имеем

$$T_i(x=0) \approx T_i^0 = \left(\frac{\partial \ln F}{\partial E}\right)^{-1}. \quad (13)$$

Формула (13) обычно используется при обработке спектров нейтралов в анализаторе. Однако в современных установках типа Т-10 или "Алкатор" оптическая толщина плазмы велика ($n\alpha\sigma_{\text{сх}} \sim 5-8$), и приближение (13) перестает быть справедливым. При этом следует различать две области параметров. Если $\lambda_0 = n\alpha\sqrt{\sigma_{\text{сх}}\sigma_e} > 1$, но

$$\exp(\lambda_0) < 10^8 N_0/n, \quad (14)$$

то эффектами рекомбинации в (6) и (8) по-прежнему можно пренебречь. Если же

$$\exp(\lambda_0) > 10^8 N_0/n, \quad (15)$$

то в центральной части плазмы рекомбинация играет главную роль. В обоих случаях функция $w(\rho, v) \Psi$ имеет узкий максимум в промежуточной точке ρ_{max} между центром шнура и его периферией. Пользоваться формулой (13) при этом уже нельзя, и для определения температуры ионов в центре шнура по спектру (11) требуется более детальное изучение зависимости функции распределения f от энергии нейтралов. В следующем разделе будут получены некоторые асимптотические формулы для спектров, а затем приведены результаты численных расчетов. Заметим, что в недавно опубликованной работе [3] по асимптотике спектров используется грубая модель, не учитывающая сдвиг максимума функции $w \Psi$ от центра плазмы.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ИОНОВ

Рассмотрим спектр нейтралов, выходящих по главному диаметру шнура ($y = 0$). Подставляя (6) в (7)-(8), получим

$$F = \frac{1}{m} \nu f(\nu) = \frac{1}{m} \int_{-a}^a (s_{cx} N + s_r n) \varphi_i \psi dx = N_1 J_1 + N_2 J_2, \quad (16)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{m} \int_{-a}^a s_{cx} \operatorname{ch} \lambda(x) \varphi_i \psi dx, \quad J_2 = \frac{1}{m} \int_{-a}^a s_r \hat{n} \left(1 + \frac{s_{cx}}{s_e}\right) \varphi_i \psi dx; \quad (17)$$

$n = n_0 \hat{n}(x)$, $n_0 = n(0)$, $\hat{n}(0) = 1$; $\hat{n}(x)$ - безразмерная функция, описывающая пространственный профиль плотности плазмы.

Введем безразмерный параметр $\varepsilon = E/T_i(0)$. Если $\varepsilon \gg 1$, то интегралы (17) можно вычислять с помощью метода перевала.

Используя (9) и (12), будем иметь

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{s_{cx}}{m \pi^{3/2} \nu_i^3(x)} \exp(g_1(x, E)) dx, \quad (18)$$

$$J_2 = \int_{-a}^a \frac{s_r \hat{n}}{m \pi^{3/2} \nu_i^3(x)} \left(1 + \frac{s_{cx}}{s_e}\right) \exp(g_2(x, E)) dx.$$

Здесь

$$g_2(x, E) = -E\tau(x) - \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_x^a s(x') dx', \quad (19)$$

$$g_1 = g_2 + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \sqrt{s s_e \tau} dx',$$

$\tau = \tau(x) = 1/T_i(x)$. Перевальные точки $x_1 = x_1(E)$ и $x_2 = x_2(E)$ определяются уравнениями

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{s}{\sqrt{E}} + \sqrt{s s_e \tau} \right) - E\tau' = 0, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{s}{\sqrt{E}} - E\tau' = 0. \quad (20)$$

Тогда

$$J_1 \approx \left. \frac{s_{cx} \exp(g_1)}{m \sqrt{2} \pi \nu_i^3 \sqrt{-g_1''}} \right|_{x=x_1(E)}, \quad J_2 \approx \left. \frac{\sqrt{2} s_r \hat{n} (1 + s_{cx}/s_e) \exp(g_2)}{m \pi \nu_i^3 \sqrt{-g_2''}} \right|_{x=x_2(E)}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (16), получим выражение для спектра выходящих нейтралов.

Рассмотрим модельную задачу. Пусть

$$T_i(x) = \frac{1}{\tau(x)} = T_i(0) (1 + \alpha^2 \xi^2)^{-1}, \quad n = \text{const} = n_0, \quad (\xi = x/a),$$

$$\sigma_{cx} v = S_{cx} = \text{const} (\approx 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^3/\text{c}), \quad \sigma_e v_e = S_e = \text{const} = \frac{1}{4} S_{cx}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), получим

$$\xi_{1,2} = \frac{x_{1,2}}{a} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2\alpha\varepsilon^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} \nu \\ 1 \end{array} \right\}. \quad (23)$$

Здесь $\sqrt{\varepsilon_0} = \alpha a / v_i(0)$, $\nu = 1 + \sqrt{\varepsilon_0}/5$; верхняя строка в фигурной скобке (23) относится к индексу 1, а нижняя - к индексу 2. Подстановка (23) в (19)-(21) дает

$$J_{1,2} = C_{1,2} \exp(-\varepsilon) u_{1,2}(\xi), \quad (24)$$

где

$$C_1 = \frac{S_{cx}}{m\sqrt{2}\pi v_i^3} \sqrt{\frac{a}{2\alpha}}, \quad C_2 = \frac{5\sqrt{2} S_r \hat{n}}{m\pi v_i^3} \sqrt{\frac{a}{2\alpha}}, \quad (25)$$

$$u_{1,2}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon_0}{4\alpha\varepsilon^2} \left\{ \begin{array}{l} \nu^2 \\ 1 \end{array} \right\}\right).$$

Наконец, выражение для спектра (16) будет иметь вид

$$F = \exp(-\varepsilon) \cdot u(\varepsilon), \quad (26)$$

где

$$u = u(\varepsilon) = N_1 C_1 u_1 + n_0 C_2 u_2. \quad (27)$$

Для вычисления "истинной" температуры в центре шнура $T_i(0)$ по "измеренной" T_i^0

(13) удобно ввести поправочный множитель

$$\Psi = \frac{T_i(0)}{T_i^0} = \frac{\partial \ln F / \partial E}{\partial \ln(F/u) / \partial E} = 1 - \frac{\partial \ln u}{\partial \varepsilon}. \quad (28)$$

В случае (14), когда рекомбинация несущественна,

$$\Psi = 1 - \frac{\partial \ln u_1}{\partial \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} + \frac{\nu^2 \varepsilon_0}{\alpha \varepsilon^2} - \frac{\nu \varepsilon_0}{\alpha \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{5\varepsilon}} \right). \quad (29)$$

В случае (15), когда рекомбинация в центральной части плазмы играет главную роль,

$$\Psi = 1 - \frac{\partial \ln u_2}{\partial \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon_0}{\alpha \varepsilon^2} \right). \quad (30)$$

Заметим, что поправочный множитель Ψ может быть как большим, так и меньшим единицы. Падение сечения перезарядки σ_{cx} с увеличением энергии E приводит

к возрастанию доли горячих нейтралов в спектре и завышению температуры. Рост плотности нейтралов на периферии (6), наоборот, обогащает холодную часть спектра и занижает измеряемую температуру ионов.

На рисунках приведены кривые, иллюстрирующие полученные формулы. На рис. 1 нанесены распределения температуры $T_i(r)$ при $\alpha = 1, 2$ и 3. Рис. 2 описывает поведение поправочного множителя по формуле (29) в зависимости от энергии \mathcal{E} для установки Т-4 со "средней" оптической толщиной $\sqrt{\epsilon_0} \sim 5$. Здесь же пунктиром нанесено положение точки ξ_{max} . Видно, что для острого профиля $T_i(r)$ ($\alpha = 3$) поправка существенно меньше, чем для плоского ($\alpha = 1$). Если ξ_{max} лежит достаточно близко к центру плазмы, поправка невелика (при $\xi_{max} \lesssim 0,3$ поправка не превышает 10%).

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПОПРАВОЧНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

В оптически плотной плазме при не очень большой энергии нейтралов точка ξ_{max} сдвигается к периферии плазмы и описание профиля ионной температуры формулой (22) становится неудовлетворительным. Использование других модельных профилей для $T_i(r)$ приводит к трансцендентным уравнениям (20) и необходимости численного вычисления интегралов (17).

В настоящем разделе будем считать, что

$$T_i(\xi) = T_i(0) (1 - \xi^2)^\beta, \quad n(\xi) = n_0 (1 - \xi^2)^\gamma. \quad (31)$$

где n_0 - плотность плазмы в 10^{13} см^{-3} . Для сравнения с профилями (22) график $T_i(\xi)$ при $\beta = 2$ нанесен на рис. 1 пунктиром. Сечения σ_{cx} и σ_e возьмем из экспериментов [4], а для скорости рекомбинации будем использовать приближенную формулу [5]:

$$\langle \sigma_r v_e \rangle = 1,27 \cdot 10^{-13} \frac{z^{3/2}}{z + 0,59} \text{ (см}^3/\text{с)}, \quad z = \frac{13,6}{T_e}. \quad (32)$$

Рис. 3 - 7 содержат результаты вычислений для установки Т-10 ($\alpha = 36 \text{ см}$). Здесь приведены поправочные множители для плазмы с температурой $T_i(0) = T_e(0) = 800 \text{ эВ}$ при $\beta = \gamma = 1,5$, $n_0 = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ в зависимости от энергии нейтралов \mathcal{E} (рис. 3) и от плотности плазмы (рис. 4). Пунктиром обозначены поправочные множители, полученные без учета рекомбинации. Сравнение кривых показывает, что рекомбинация начинает играть роль при переходе плотности плазмы через некоторое критическое значение $n_{кр} \sim 8 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. При $n > n_{кр}$ плотность нейтралов в центральной части шнура определяется рекомбинацией (второй член в выражении (6) больше первого),

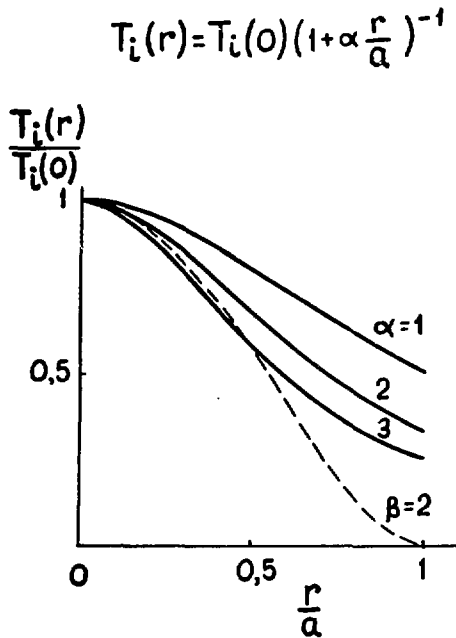


Рис. 1. Распределения температуры для модельной задачи

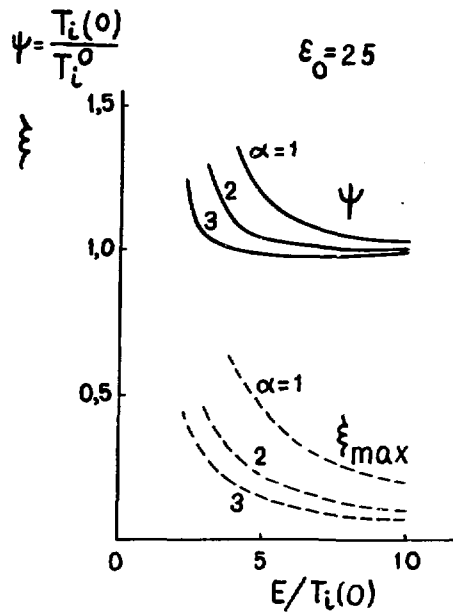


Рис. 2. Поправочный множитель в зависимости от энергии нейтралов для установки Т-4

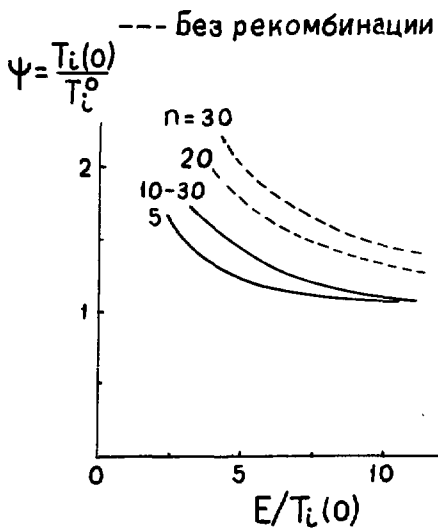


Рис. 3. Поправочный множитель в зависимости от энергии нейтралов для установки Т-10

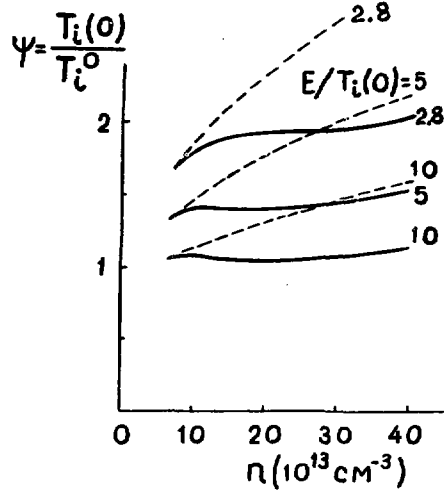


Рис. 4. Поправочный множитель в зависимости от плотности плазмы для установки Т-10

и здесь $N(\xi)$ слабо зависит от ξ . Размеры области, в которой $N(\xi) \approx \text{const}$, возрастают с ростом плотности плазмы. Все это хорошо видно на рис. 5, где приведены профили плотности нейтралов для двух значений плотности плазмы $n = 10$ и 20 . Пунктиром обозначены результаты расчетов без учета рекомбинации.

При уплощении профиля $T_i(\xi)$ или снижении температуры $T_i(0)$ поправка Ψ возрастает, однако эти зависимости являются более слабыми, чем зависимости от плотности плазмы и энергии нейтралов.

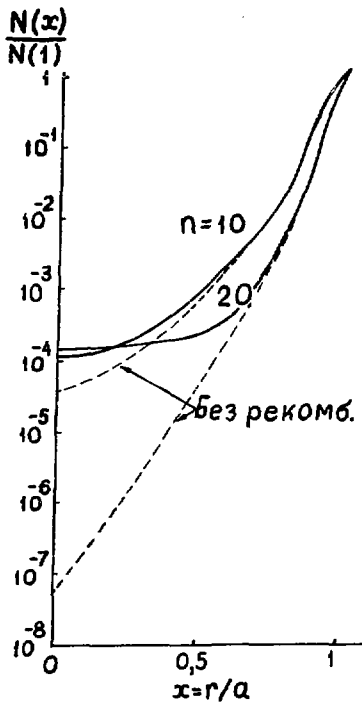


Рис. 5. Распределение плотности нейтралов по радиусу при разных плотностях плазмы для установки Т-10:

--- - расчеты без учета рекомбинации

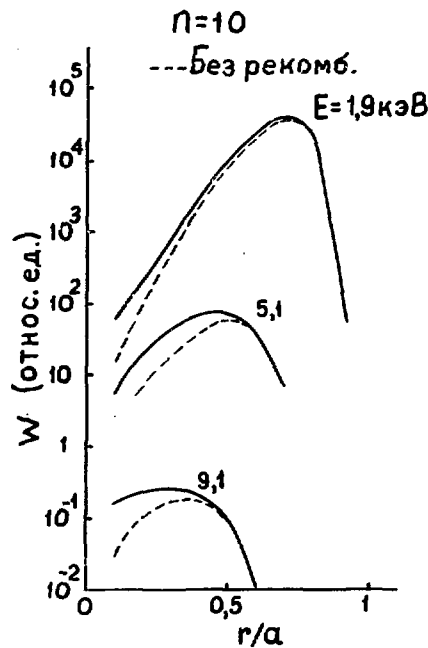


Рис. 6. Распределение подинтегральной функции по радиусу при разных энергиях нейтралов

Поведение подинтегральной функции W для различных энергий $E = 1,9; 5,1$ и $9,1$ кэВ изображено в логарифмическом масштабе на рис. 6. Пунктирные кривые рассчитаны без учета рекомбинации. Здесь $n = 10$, $\beta = \gamma = 1,5$. В этих условиях ширина максимума почти постоянна $\Delta \xi \sim 0,25$, а положение точки ξ_{max} хорошо следует зависимости $\xi_{\text{max}} \sim 1/\sqrt{E}$ в отличие от формулы (23), справедливой для модельного профиля (22). Учет рекомбинации сдвигает ξ_{max} к центру плазмы и уменьшает величину поправки Ψ (см. рис. 3-4).

При сравнении результатов расчетов с экспериментом и выяснении роли рекомбинации представляет интерес абсолютная величина потоков частиц, выходящих из плазмы. На рис. 7 приведены зависимости функции $F = dN/dE$ (11) от плотности плазмы при энергиях $E = 1,5; 5,5$ и $9,5$ кэВ. Здесь же нанесена кривая для плотности нейтралов в центре $N(0)$. Температура ионов в центре принята равной $T_i(0) = 800$ эВ, плотность падающих на плазму нейтралов и их температура равны $N_0 = 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $T_N(1) = 2$ эВ.

Поведение всех кривых при $n < n_{кр}$ и $n > n_{кр}$ существенно различается. В области $n < n_{кр}$ рекомбинация играет слабую роль, и функции F и $N(0)$ экспоненциально спадают с увеличением плотности плазмы. При $n > n_{кр}$ плотность нейтралов в центре шнура слабо (линейно) зависит от плотности плазмы. Поведение кривых без учета рекомбинации показано на рис. 7 пунктиром.

Заметим, что до недавнего времени возможность пассивной диагностики ионной температуры по спектру нейтралов перезарядки в оптически толстых системах казалась весьма проблематичной. Ожидалось, что потоки горячих нейтралов в анализатор

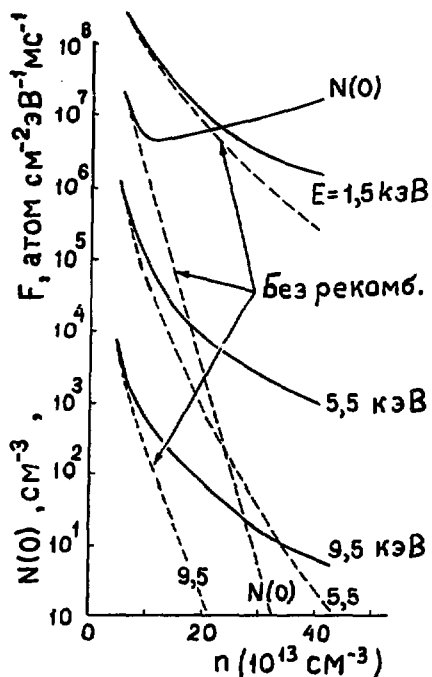


Рис. 7. Плотность нейтралов в центре и выходящий поток нейтралов в зависимости от плотности плазмы для установки Т-10

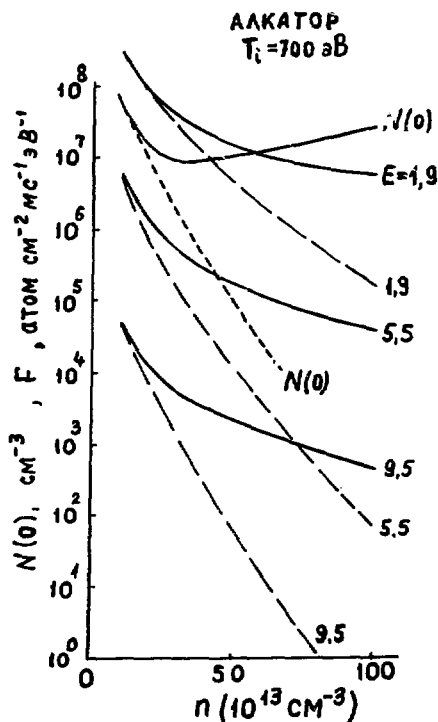


Рис. 8. Плотность нейтралов в центре и выходящий поток нейтралов для установки "Алкатер"

будут слишком малы. Однако недавно проведенные измерения спектров на установке "Алкатор" при плотности $n \sim 50$ [6] указывают на значительную величину этих потоков. Одной из причин этого эффекта, по-видимому, является рекомбинация.

На рис. 8 приведены зависимости dN/dE и $N(0)$ от плотности плазмы для установки "Алкатор" ($a = 10$ см) при $T_i(0) = 700$ эВ, $\alpha = \beta = 2$, $N_0 = 4 \cdot 10^{10}$ см $^{-3}$. Видно, что, начиная с плотностей $n_{кр} \sim 20 \div 30$, рекомбинация играет определяющую роль. Она объясняет, в частности, наблюдающийся медленный спад потоков нейтралов при увеличении плотности плазмы. В эксперименте при росте плотности от $n = 10$ до $n = 60$ абсолютная величина потока выходящих нейтралов с энергией 2 кэВ падала в 50 раз. Согласно рис. 8, при учете рекомбинации поток должен упасть примерно в 30 раз. При отбрасывании рекомбинации (пунктирная кривая, рис.8) расчетные потоки (при том же изменении плотности плазмы) падают на 2,5 порядка. Для установки "Алкатор", как и для установки Т-10, учет рекомбинации существенно уменьшает поправку для вычисления температуры по измеренному спектру. На рис. 9 приведены зависимости поправочного множителя Ψ от энергии нейтралов для этой установки. При расчете предполагалось, что температуры ионов и электронов при изменении плотности не меняются ($T_i = T_e = 800$ эВ, $\beta = \delta = 1,5$). Пунктиром обозначены кривые, полученные без учета рекомбинации. Заметим, однако, что рост плотности плазмы приводит к падению температуры электронов и возрастанию температуры ионов.

На рис. 10 пунктирные кривые для $T_e(0)$, $T_i(0)$ и τ_E получены с помощью моделирования энергобаланса плазмы [2]. По оси абсцисс отложена плотность плазмы n_0 . Здесь же приведены поправочные множители Ψ при энергии нейтралов

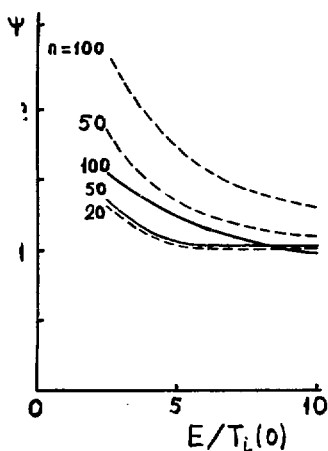


Рис. 9. Поправочный множитель в зависимости от плотности плазмы для установки "Алкатор"

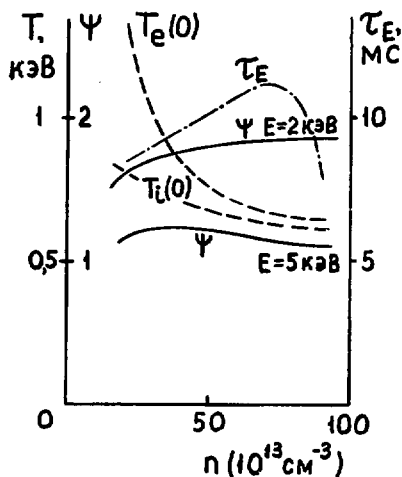


Рис. 10. Поправочный множитель в зависимости от плотности плазмы для установки "Алкатор" при расчетных значениях T_e и T_i

$E = 2$ и 5 кэВ (сплошные кривые). Видно, что в широкой полосе параметров поправка к температуре ионов составляет 80 и 15% соответственно.

5. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СПЕКТРОВ

До сих пор мы рассматривали прямую задачу определения спектра выходящих нейтралов по заданным пространственным распределениям плотности плазмы и нейтралов и температуры ионов и электронов. В настоящем разделе обсудим постановку и методы решения обратных задач определения параметров плазмы по спектру выходящих нейтралов.

5.1. Рассмотрим сначала задачу в следующей постановке. Пусть известны распределения плотности плазмы и температуры электронов по радиусу $n(r)$ и $T_e(r)$, а плотность нейтралов можно описать формулой (6). Требуется определить распределение ионной температуры по радиусу $T_i(r)$ по спектру нейтралов, выходящих по главному диаметру шнура. С математической точки зрения эта задача заключается в решении нелинейного интегрального уравнения первого рода (16), в котором F является известной функцией энергии $F = F(E)$. Мы обсудим ее решение в случае, когда интегралы (18) можно вычислять по методу перевала (21).

Предположим сначала, что рекомбинационный член мал для всего сечения плазменного шнура и основной вклад в формулу (16) дает интеграл J_1 :

$$F(E) = \frac{1}{m} N_1 J_1. \quad (53)$$

Здесь интеграл J_1 определяется формулами (19)–(21). Он содержит функцию $\tau(x) = 1/T_i(x)$, подлежащую определению. Одним из уравнений для функции $\tau(x)$ является соотношение (20), определяющее перевальную точку $x_1 = x_1(E)$:

$$\frac{\partial g_1(x, E)}{\partial x} = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{s(x)}{\sqrt{E}} + \sqrt{s(x) s_e(x) \tau(x)} \right) - E \tau'(x) = 0. \quad (34)$$

Прологарифмируем равенство (33) с учетом (19) и (21)

$$G_1(E) = g_1(x_1(E), E) = \ln F(E) + \ln \frac{\sqrt{2\pi m} v_i^3 \sqrt{-g_1''}}{N_1 s_{cx}} \quad (35)$$

и затем продифференцируем его по E . После этого, согласно (34), будем иметь

$$G_1'(E) = \frac{\partial g_1(x, E)}{\partial E} = -\tau(x) + \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2} E^{3/2}} \int_x^a s(x') dx'. \quad (36)$$

С другой стороны, если в формуле (35) из второго (неэкспоненциального) члена оставить лишь главную часть, явно зависящую от E ($\ln(\sqrt{-g_1''}/s_{cx}) \approx \ln(\sqrt{E}/s_{cx})$),

то после дифференцирования будем иметь

$$G'_i(E) = \frac{d}{dE} \ln \left(F(E) \frac{\sqrt{E}}{S_{cx}} \right), \quad (37)$$

где $S_{cx} = \sigma_{cx}(v) \cdot v$. В результате получаем

$$\tau = G'_i(E) + \frac{\sqrt{m}}{2\sqrt{2}E^{3/2}} \int_x^a s(x') dx' \equiv h_1(x, E). \quad (38)$$

Это уравнение нужно рассматривать совместно с уравнением (34), которому можно придать вид

$$\tau' = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{s(x)}{E^{3/2}} + \frac{\sqrt{s(x)s_e(x)\tau(x)}}{E} \right) \equiv h_2(x, E). \quad (39)$$

Обсудим полученную систему уравнений (38)–(39). Если бы можно было явно выразить из уравнения (38) переменную E через x и τ и подставить в (39), то задача определения функции $\tau(x)$ свелась бы к дифференциальному уравнению первого порядка. Однако аналитически это сделать нельзя, и систему (38)–(39) надо решать совместно численными методами, определяя из нее две функции $\tau(x)$ и $E(x)$, где $E(x)$ – функция, обратная к $x_i(E)$.

Для однозначной разрешимости такой смешанной системы конечного и дифференциального уравнений необходимо задать начальное условие для функции $\tau(x)$. Такое условие можно получить либо на границе, либо в центре плазменного шнура. Используя естественное соотношение $T_i(a) = 0$, получим

$$\tau(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow a. \quad (40)$$

Из (39) тогда следует, что $E(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Отсюда видно, что использование начального условия (40) требует знания спектра $F(E)$ вплоть до весьма малых энергий.

Начальные условия в центре шнура можно получить, воспользовавшись условием аксиальной симметрии: $\tau'(x) = 0$ при $x \rightarrow 0$. Используя (38)–(39), получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = \infty, \quad \tau(0) = - \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{d}{dE} \ln \left(F(E) \frac{\sqrt{E}}{S_{cx}} \right). \quad (41)$$

В реальных условиях верхняя граница измеряемого спектра лежит в области не очень больших энергий ($E_{\max} \tau(0) \lesssim 10$), и для нахождения $\tau(0)$ по формуле (41) с вычислением производной в точке $E \sim E_{\max}$ требуется учет поправок Ψ , обсуждавшихся выше. Если начальные условия для системы (38)–(39) поставлены, выбор алгоритма для ее численного интегрирования не представляет затруднений.

Проиллюстрируем развитый метод обработки спектра модельным примером. Сначала решим прямую задачу. Пусть профиль температуры ионов имеет вид $T_i(x) = T_0(1-x^2)$, а параметры плазмы соответствуют экспериментам на установке Т-10 ($\alpha = 35$ см, $n_0 = 5$, водород). Будем также считать, что $S = \text{const}$, $S_e = \text{const}$ (22), $n(x) = n_0(1-x^2)$. Подставляя $\tau(x) = 1/T_i(x)$ в (38)–(39) и решая трансцендентное уравнение, найдем функции

$$E = E(x), F = F(x) = F(x(E)) = \tilde{F}(E), \quad \tilde{G}'_i = \frac{d}{dE} \ln(\tilde{F}\sqrt{E}),$$

где $x(E)$ – функция, обратная к $E(x)$. На рис. 11 сплошными линиями нанесены графики $T_i(x)$, $E(x)$, $-\tilde{G}'_i(E(x))$. Перейдем к решению обратной задачи. Аппроксимируем функцию $\tilde{G}'_i(E)$ выражением

$$\tilde{G}'_i(E) \approx \hat{G}'_i(E) \equiv A + B\left(\frac{E}{E_0}\right)^n.$$

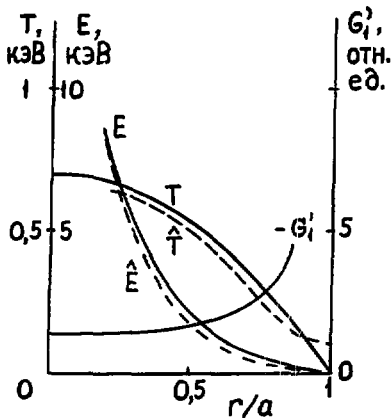


Рис. 11. Восстановление профиля ионной температуры по спектру нейтралов – пунктирная кривая; прямая задача – сплошные кривые

Такая аппроксимация в какой-то мере передает сглаживание экспериментальных спектров. Подставляя $\hat{G}'_i(E)$ вместо $\tilde{G}'_i(E)$ в (38)–(39) и решая полученную систему, найдем $\hat{\tau}(x)$ и $\hat{E}(x)$. Кривые для $\hat{T}_i(x) = 1/\hat{\tau}(x)$ и $\hat{E}(x)$ нанесены на рис. 11 пунктиром. Видно, что в области $0,2 < x < 0,6$ различие между $T_i(x)$ и $\hat{T}_i(x)$ не превышает 10%.

Оценивая задачу (38)–(41) в целом, заметим, что она содержит два типа неопределенностей, связанных с экспериментальным спектром $F(E)$:

а) спектр измеряется в ограниченной полосе энергий $E_{\min} < E < E_{\max}$, что делает неточным постановку начальных условий;

б) для использования уравнения (38) нужно вычислить производную от $F(E)$, что ведет к дополнительным ошибкам.

Указанные неопределенности в постановке задачи (38)–(41) дают основания ожидать, что вариационная задача для разыскания приближенного решения задачи (38)–(41) может оказаться более устойчивой [7]. Для этого ее надо рассмотреть в достаточно узком модельном классе функций, удовлетворяющих условиям (40)–(41).

Будем считать, что распределение температуры ионов в пространстве $T_i(r)$ определяется выражением

$$T_i(r) = \hat{T}_i(r) \equiv T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\beta, \quad \hat{\tau} = \frac{1}{\hat{T}_i}, \quad (42)$$

где T_0 и β - параметры, подлежащие определению. Модельный профиль (42) достаточно хорошо передает поведение температуры ионов в центральной части плазмы. На периферии отклонение профиля (42) от реального может быть значительным, однако восстановление реального профиля здесь затруднено, поскольку экспериментальный спектр $F(E)$ обычно содержит мало информации об этой области.

Рассмотрим два возможных метода разыскания приближенного решения задачи (38)-(39) с использованием (42).

Подстановка (42) в (39) дает трансцендентное уравнение для функции $E(x)$ при заданных значениях параметров T_0 и β . Это уравнение не содержит экспериментальной функции $F(E)$ и всегда однозначно разрешимо. Введем функционал

$$W_1 = W_1(T_0, \beta) = \int_0^a dx \left[\hat{\tau}(x - h_1(x, E(x))) \right]^2. \quad (43)$$

Разыскивая минимум функционала W_1 как функции параметров T_0 и β , мы найдем приближенное решение исходной задачи. Другой, возможный метод решения заключается в следующем. Введем функционал

$$W_2 = W_2(T_0, \beta) = \int_0^a dx \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE \left\{ [\tau(x) - h_1(x, E)]^2 + [\tau'(x) - h_2(x, E)]^2 \right\} \quad (44)$$

и будем искать значения параметров T_0, β , реализующие его минимум. В этом методе не надо решать трансцендентное уравнение, однако увеличение кратности интеграла может усложнить вычисления.

Рассмотрим теперь случай оптически более плотной плазмы, когда в центре шнура появляется область $0 < x < x_r$, в которой плотность нейтралов определяется рекомбинацией ($N \approx s_r n / s_e$), и основной вклад в формулу (16) дает второй интеграл. Экспоненциальный характер возрастания плотности нейтралов в области $x > x_r$ позволяет заключить, что

$$F(E) = \begin{cases} N_1 J_1, & \text{если } x_2(E) < x_r, \\ n_0 J_2, & \text{если } x_2(E) > x_r, \end{cases} \quad (45)$$

где J_1 и J_2 определяются формулами (21). Аналогично предыдущему для определения функции $\tau(x)$ в области $0 < x < x_r$ получаем систему двух уравнений. Одним из них по-прежнему будет уравнение (38), а второе уравнение принимает вид

$$\tau' = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{s(x)}{E^{3/2}} \equiv h_3(x, E) \quad (0 < x < x_r). \quad (46)$$

В области $x_r < x < a$ остается справедливой система (38) - (39). На границе раздела при $x = x_r$ решение $\tau(x)$ должно сохранять непрерывность (хотя оно имеет в этой точке разрывную производную). Начальные условия в точке $x = 0$ разыскиваются описанным выше методом.

Итак, если положение точки x_r известно, то профиль температуры ионов может быть определен либо с помощью прямого решения системы (38) - (39), (46), либо с помощью привлечения приближенных методов типа (43) или (44). Главный вопрос заключается в том, откуда взять сведения о положении точки x_r . Здесь могут встретиться различные ситуации. Пусть, например, из эксперимента известна плотность нейтралов на периферии плазмы N_0 . В этом случае формула (6) для плотности нейтралов приводит к следующему трансцендентному уравнению относительно x_r :

$$\int_{x_r}^a \frac{S S_e}{v_i} dx = \ln \left(\frac{N_0 S_e}{n S_r} \right) \Big|_{x=x_r} \quad (47)$$

Хотя уравнение (47) и содержит неизвестную функцию $T_i(r)$ (через скорость ионов v_i), однако зависимость от нее слабая ($v_i \sim \sqrt{T_i}$), в то время как зависимость левой части уравнения (47) от x_r - линейная. Для уточнения положения x_r можно использовать итерационные процедуры.

Если данные о плотности нейтралов отсутствуют, то нахождение точки x_r становится более неопределенной задачей. С одной стороны, ясно, что вид $F(E)$ зависит от положения x_r . Однако эта зависимость может быть слабой, поэтому обратная задача одновременного определения по $F(E)$ и температуры ионов $T_i(r)$ и положения точки x_r (фактически распределения нейтралов $N(r)$) может оказаться слишком неустойчивой для успешной практической реализации. В следующем разделе мы рассмотрим более общие алгоритмы, использующие дополнительную информацию о спектрах нейтралов. Следует ожидать, что они будут более устойчивы.

5.2. В предыдущем разделе были изучены "локальные" методы решения обратных задач, основанные на вычислении интегралов J_1 и J_2 по методу перевала (21). Сейчас мы рассмотрим "интегральные" алгоритмы, не использующие приближенных формул (21).

Будем считать, что известны результаты измерений спектров нейтралов по различным лучам, параллельным главному диаметру шнура $F_{exp}(y, E)$. Как и раньше, предположим также, что известны распределения плотности плазмы $n(r)$ и температуры электронов $T_e(r)$ по радиусу. Подставляя (7) и (12) в (11), получим нелинейное интегральное уравнение относительно двух функций $N(r)$ и $T_i(r)$ одного переменного с правой частью F_{exp} , зависящей от двух переменных. Вообще говоря, информации, содержащейся в функции $F_{exp}(y, E)$, может оказаться достаточно для более или менее устойчивого определения $N(r)$ и $T_i(r)$. Корректность задачи может быть улучшена, если имеется дополнительная информация об этих функциях. Для повышения устойчивости задачи ее следует сформулировать как вари-

ционную и ввести достаточно узкий модельный класс функций $T_i(r)$ и $N(r)$, в котором разыскивается решение.

Будем считать, что

$$N(r) = \hat{N}(r) \equiv N_1 \operatorname{ch} \lambda(r) + \frac{s_r}{s_e} n, \quad T_i(r) = \hat{T}_i(r) \equiv T_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\beta \quad (48)$$

(см. формулы (6) и (31)). Введем функционал

$$W_3 = W_3(T_0, \beta, N_1, A) = \int_{-a}^a dy \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE M_1(y) M_2(E) (AF - F_{\text{exp}})^2, \quad (49)$$

где

$$F = F(y, E) = \frac{1}{m} \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} w(\rho, E) \Psi(x, \sqrt{a^2 - y^2}, E) dx, \quad (50)$$

а функции w , Ψ , ρ определяются формулами (8), (9), (12), (48). Весовые функции M_1 и M_2 в (49) отражают роль и надежность измерений F_{exp} при разных y и E . Множитель A позволяет учесть неточности в абсолютной калибровке измерений спектров. Значения параметров A , T_0 , β и N_1 , для которых функционал (49) имеет минимум, естественно считать приближенным решением обратной задачи.

Удобно ввести обозначения

$$F = F_0, \quad F_{\text{exp}} = F_1, \quad a_{ij} = \int_{-a}^a dy \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} dE M_1 M_2 F_i F_j. \quad (51)$$

Функционал (49) квадратичен по A , поэтому его минимизация по этому параметру дает

$$A = a_{01} / a_{00}. \quad (52)$$

Подставляя (52) в (49), получим

$$W_3 = W_3(T_0, \beta, N_1) = a_{11} - a_{01}^2 / a_{00}. \quad (53)$$

Таким образом, обработка результатов эксперимента сводится к минимизации функционала (53) по трем параметрам. Если известна плотность нейтралов на периферии N_0 , то $N_1 = N_0 \operatorname{exp}(-\lambda(a))$. В качестве начального условия для поиска минимума можно использовать результаты разд. 3 и 4: $T_0 = T_i^0 \Psi$. В предельных случаях, когда рекомбинация не играет никакой роли (14) или играет главную роль в большей части сечения плазмы (15), в выражении (48) для $N(r)$ остается одно слагаемое (пер-

вое или второе), и параметр N_1 из функционала (53) вообще выпадает. Поиск минимума в этом случае существенно облегчается.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследовано влияние различных факторов на спектр выходящих нейтралов в оптически "толстой" плазме. Вычисленные поправки к измеряемой ионной температуре оказались неожиданно малыми. В условиях современных токамаков при энергиях нейтралов $E \sim 8$ кэВ они составляют 10-15% даже для очень плотной плазмы ($\sigma_{\text{сх}} n a \sim 10$). Эффект рекомбинации существенно увеличивает плотность нейтралов в центральных слоях плазмы. В связи с этим использование анализаторов спектров для определения ионной температуры оказывается перспективным и для больших строящихся и проектируемых установок. Предлагаемые алгоритмы обработки экспериментальных спектров позволяют учесть конечную оптическую толщину плазмы и использовать информацию, содержащуюся в малоэнергичной части спектра.

Авторы выражают признательность М.П.Петрову, обратившему их внимание на важность эффектов рекомбинации, а также Ю.А.Соколову и А.И.Кислякову за обсуждение экспериментов на установке "Алкатор".

Л и т е р а т у р а

1. Константинов О.Б., Перель Б.П. - ЖТФ, 1960, т. 30, № 12, с. 1485.
2. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Сб.: Вычислительные методы в физике плазмы, Дополнение. М., "Мир", 1974.
3. Mayer H.M. - IPP, 111/28, 1976.
4. Rehker S., Speth E. - IPP, 2/217, 1974.
5. Гордеев Ю.С., Зиновьев А.Н., Петров М.П. - Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, № 4, с. 223-227.
6. Alcator Group, VI Int. Conf. Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., IAEA, CN-35/A5, 1976.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1974.

Редактор Л.И. Кирюхина

Технический редактор Н.И. Мазаева

Т-02876. 11. 08. 77. Формат 60 х 90/8. Уч.-изд. л. 1,20
Тираж 180 экз. Заказ 1157. Цена 12 коп. ОНТИ. ИАЭ

12 коп.