ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

ИТЭФ- 71

Е.П.ШАБАЛИН

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ АМПЛИТУД В УНИТАРНОЙ КАЛИБРОВКЕ

МОСКВА 1978

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

ИТЭФ - 71

В.П.Шебалин

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕДИАГОНАЛЬНЫХ АМПЛИТУД В УНИТАРНОЙ КАЛИБРОВКЕ

Москва 1978

УДК 530.145:538.3 М-16

На примере $SU(2)\otimes U(1)$ -калибровочной теории определена процедура регуляризации различных недиагональных амплитуд в унитарной калибровке, которой обычно избегают пользоваться, опасаясь неоднозначностей, хотя такая калибровка имеет преимущество в резком сокращении числа диаграмм заданного порядка.

Получены выражения для регуляризованных собственно-энергетических и вершинных операторов и дано объяснение, в каком смысле следует понимать регуляризацию вершинных функций.

В заключение на примерах продемонстрирована корректность вычислений в унитарной калибровке с помощью развитого формализма.

On example of the SU(2) x U(1)-gauge theory the regularisation procedure for different nondiagonal amplitudes is defined in a special unitary gauge. This gauge is not usually used due to fear of uncertaintnesses, though it has some advantages due to a sharp decrease of the number of diagrammes of the fixed order.

A formulae for the regularized selfenergy and vertexes operators are obtained and an explanation is given for the meaning of regularized vertex functions in unitary gauge.

At the end a correctness of calculations with the help of the developed formalism is demonstrated on two examples.

Настоящая работа носит учебно-методический характер и преследует следующую цель:

I) на основе последовательного рассмотрения продемонстрировать пригодность унитарной калибровки для вычисления недиагональных переходов и

2) пояснить смысл, в котором следует понимать процедуру регуляризации вершинных операторов при работе в унитарной калибровке.

Публикация данной работы в период, когда методы работы с перенормируемой калибровочной теорией считаются давно установленными, вызвана двумя причинами. Во-первых, как обнаружил автор, среди физиков довольно распространенным является мнение, что " в унитарной калибровке ничего нельзя вычислить". По отношению к недиагональным амплитудам это неверно и, как всякое заблуждение, заслуживает опровержения. Но кроме того, - и это является второй причиной, - существует класс задач, в которых использование унитарной калибровки намного упрощает решение. К таким задачам относится определение некоторых общих свойств амплитуд высших порядков с внутренними недиагональными переходами. Примером может служить задача вычисления электрического дипольного момента кварка в калибровочной СР-неинвариантной теории [I] . Преимущество унитарной калибровки определяется в этом случае значительным сокращением количества диаграмм, поскольку в унитарной калибровке отсутствуют диаграммы с "духовыми" частицами, а также более простой спиральной структурой диаграмм.

В данной статье все рассмотрение будет ограничено $SU(2)\times U(1)$ - калибровочной теорией. Однако используемые приемы регуляризации в одинаковой мере пригодны для любой калибровочно-инвариантной теории.

Последовательность изложения такова: в разделе I будут сформулированы необходимые для вычислений правила Фейнмана для теории Вайнберга-Салама [2,3] , дополненной четырехкварковой схемой ГИМ [4] с дробно-заряженными кварками. В разделах 2-5 будут указаны рецепты нахождения регуляризованных собственно-энергетических и вершинных недиагональных операторов. В разделах 6 и 7 на примерах будет проверена законность и однозначность найденных приемов вычисления в унитарной калибровке.

I. Правила Фейнмана в $SU(2)\times U(1)$-калибровочной теории

Рассмотрим модель Вайнберга -Салама, распространенную на адроны в соответствии с четырехкварковой моделью ГИМ. В изотопическом пространстве слабых взаимодействий каждое состояние характеризуется изоспином и гиперзарядом. Левоспиральные фермионы объединяются в дублеты

$$L_p=\begin{pmatrix} p \\ n_c \end{pmatrix}_L,\quad L_c=\begin{pmatrix} c \\ \lambda_c \end{pmatrix}_L,\quad L_e=\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L,\quad L=\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L$$

$$n_c=n\cos\theta+\lambda\sin\theta\ ,\quad \lambda_c=-n\sin\theta+\lambda\cos\theta\ , \tag{1}$$

а правоспиральные фермионы считаются синглетами:

$$R_p=p_R\ ,\quad R_n=n_R\ ,\quad R_c=c_R\ ,\quad R_e=e^-_R\ ,\quad R_\mu=\mu^-_R \tag{2}$$

Гиперзаряд определяется как удвоенный средний электрический заряд мультиплета, так что

$$Y(e^-_L)=Y(\nu_e)=-1\ ,\ \text{а}\qquad Y(e^-_R)=-2\ .$$

Для кварков с дробными зарядами

$$Y(p_L)=Y(n_L)=\frac{1}{3}\ ,\quad Y(p_R)=\frac{4}{3}\ ,\quad Y(n_R)=-\frac{2}{3}\ ;$$

Индексы L и R понимаются в смысле

$$\psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi, \qquad \psi_R = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi.$$

Исходный лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}\vec{b}_{\mu\nu}\vec{b}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}a_{\mu\nu}a_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\varphi)^+(\mathcal{D}_\mu\varphi) + m^2\varphi^+\varphi - \\
&-\frac{f^2}{4}(\varphi^+\varphi)^2 + \bar{R}_\kappa i\gamma_\mu(\partial_\mu + ig'Y(R_\kappa)a_\mu)R_\kappa + \\
&+\bar{L}_\kappa i\gamma_\mu(\partial_\mu - ig\vec{\tau}\vec{b}_\mu + ig'Y(L_\kappa)a_\mu)L_\kappa - \\
&-h_e(\bar{L}_e\varphi R_e + \text{э.с.}) - h_\mu(\bar{L}_\mu\varphi R_\mu + \text{э.с.}) - \\
&-h_n[(\bar{L}_p\cos\theta - \bar{L}_c\sin\theta)\varphi R_n + \text{э.с.}] - \\
&-h_\lambda[(\bar{L}_p\sin\theta + \bar{L}_c\cos\theta)\varphi R_\lambda + \text{э.с.}] - \\
&-h_p(\bar{L}_p\tilde{C}\varphi R_p + \text{э.с.}) - h_c(\bar{L}_c\tilde{C}\varphi R_c + \text{э.с.}),
\end{aligned} \tag{3}$$

где φ - дублет скалярных полей

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi^+\\ \varphi^0\end{pmatrix},$$

так что $Y(\varphi) = 1$ и $\mathcal{D}_\mu\varphi = (\partial_\mu - ig\vec{\tau}\vec{b}_\mu + ig'a_\mu)$.

$$\tilde{C}\varphi = i\tau_2 C\varphi = i\tau_2\varphi^* = \begin{pmatrix}\varphi^{0*}\\ -\varphi^-\end{pmatrix}.$$

Индекс κ пробегает значения $\kappa = p, c, e, \mu$. Кроме того,

$$\vec{b}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{b}_\nu - \partial_\nu\vec{b}_\mu + 2g[\vec{b}_\mu \times \vec{b}_\nu]$$

$$a_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu.$$

Спонтанное нарушение симметрии проявляется в отличии от нуля среднего вакуумного значения поля φ^0 :

$$\langle \varphi^{\circ} \rangle_0 = \frac{m}{\sqrt{2} f},$$

и это приводит к тому, что из-за взаимодействия с полями φ векторные бозоны и фермионы приобретают массу.

Если представить дублет полей φ в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{m}{f} + \sigma + i\vec{\tau}\,\vec{\varphi}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

и положить $\vec{\varphi}(x) = 0$, то лагранжиан бозонных полей превращается в обычный лагранжиан векторных массивных и безмассовых полей плюс лагранжиан нейтрального скалярного поля σ плюс лагранжиан взаимодействия полей b_μ^+, b_μ^-, $b_\mu^{(3)}$, a_μ и σ. Поэтому условие $\vec{\varphi}(x) = 0$ эквивалентно фиксированию так называемой унитарной калибровки, в которой остаются только физические бозонные поля

$$W_\mu^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(b_\mu^{(1)} \pm i b_\mu^{(2)}\right), \quad m_W \equiv M = \frac{gm}{f}$$

$$Z_\mu = \frac{g\,b_\mu^{(3)} + g' a_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{f}\, m$$

$$A_\mu = \frac{-g' b_\mu^{(3)} + g\,a_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \quad m_A = 0$$

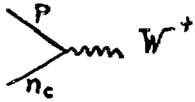
$$\sigma \qquad\qquad , \quad m_\sigma = \sqrt{2}\, m. \tag{4}$$

Связь констант g, g', f и m с константами слабого и электромагнитного взаимодействия определяется условиями:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2M^2} = \frac{f^2}{2m^2}, \quad e = \frac{2gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$$

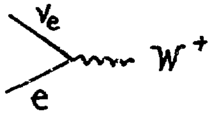
$$h_i = \frac{\sqrt{2}\, g\, m_i}{M} = m_i \sqrt{2\sqrt{2}\, G} \qquad (i = e, \mu, p, c, n, \lambda) \tag{5}$$

Ниже дана сводка правил Фейнмана в калибровке $\vec{\varphi}(x) = 0$.

I) 

: $\frac{g}{\sqrt{2}}\, \bar{p}\, \gamma_\mu (1+\gamma_5)\, n_c\, W^+_\mu$

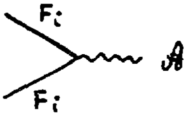
Вершина $\bar{c}\, n_c\, W^+$ имеет аналогичную структуру.

2) 

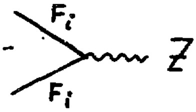
: $\frac{g}{\sqrt{2}}\, \bar{\nu}_e\, \gamma_\mu (1+\gamma_5)\, e^-\, W^+_\mu$

Вершина $\bar{\nu}_\mu\, \mu\, W^+$ имеет аналогичную структуру.

Взаимодействию нейтральных векторных полей A_μ и Z_μ с фермионами i -го сорта отвечают следующие вершины

3) 

: $\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}\, \bar{F}_i \gamma_\mu \left(a_i^\gamma \frac{1+\gamma_5}{2} + b_i^\gamma \frac{1-\gamma_5}{2} \right) F_i A_\mu$

4) 

: $\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}\, \bar{F}_i \gamma_\mu \left(a_i^Z \frac{1+\gamma_5}{2} + b_i^Z \frac{1-\gamma_5}{2} \right) F_i Z_\mu$

где коэффициенты $a_i^{\gamma,Z}$ и $b_i^{\gamma,Z}$ имеют вид

$$a_p^\gamma = a_c^\gamma = b_p^\gamma = b_c^\gamma = -8gg'/3(g^2+g'^2) \;;$$

$$a_n^\gamma = a_\lambda^\gamma = b_n^\gamma = b_\lambda^\gamma = 4gg'/3(g^2+g'^2) \;;$$

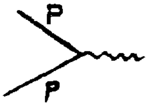
$$a_e^\gamma = a_\mu^\gamma = b_e^\gamma = b_\mu^\gamma = 4gg'/(g^2+g'^2) \;;$$

$$a_p^Z = a_c^Z = \frac{8g^2 - 2(g^2+g'^2)}{3(g^2+g'^2)} \;; \quad b_p^Z = b_c^Z = \frac{8g^2 - 8(g^2+g'^2)}{3(g^2+g'^2)} \;;$$

$$a_n^Z = a_\lambda^Z = \frac{-4g^2 - 2(g^2+g'^2)}{3(g^2+g'^2)} \;; \quad b_n^Z = b_\lambda^Z = \frac{-4g^2 + 4(g^2+g'^2)}{3(g^2+g'^2)} \;;$$

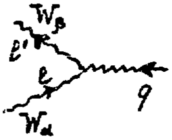
$$a_e^z = a_\mu^z = \frac{2(g'^2-g^2)}{g^2+g'^2}\ ; \quad b_e^z = b_\mu^z = \frac{4g'^2}{g^2+g'^2}\ ;$$

$$a_\nu^z = 2\ ; \quad b_\nu^z = 0\ ; \tag{6}$$

5) 

$$\sigma \ : \quad -g\frac{m_p}{M}\ \bar{p}p\sigma$$

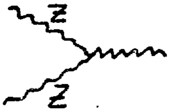
То же для взаимодействия с любым кварком или лептоном, с заменой m_p на массу соответствующего фермиона.

6) 

$$Z_\mu, A_\mu \ : \quad \frac{2g}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gZ_\mu - g'A_\mu)\cdot[\delta_{\alpha\beta}(\ell+\ell')_\mu - (\ell-q)_\beta\,\delta_{\alpha\mu} - (\ell'+q)_\alpha\,\delta_{\beta\mu}]W_\beta^+ W_\alpha\ ;$$

7) 

$$\sigma \ : \quad 2gM\ W_\alpha^+ W_\alpha\,\sigma$$

8) 

$$\sigma \ : \quad \left(g+\frac{g'^2}{g}\right)M\,Z_\alpha^+ Z_\alpha\,\sigma$$

Лагранжиан (3) дает также четверные вершины, но в дальнейшем рассмотрении они не понадобятся, и мы их здесь не приводим.

Пропагаторы векторных массивных частиц имеют вид

$$\frac{-i}{p^2-M^2+i\varepsilon}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{M^2}\right).$$

Пропагатор фотона

$$\frac{-i}{p^2+i\varepsilon}\,\delta_{\alpha\beta}.$$

Пропагатор скалярного поля

$$\frac{i}{p^2 - m_s^2 + i\varepsilon} .$$

Пропагаторы фермионов

$$\frac{i}{\hat{p} - m_f} .$$

В других калибровках появляются дополнительные вершины с заряженным хиггсовым полем φ^+, но при этом приведенные выше вершины не изменяются.

2. Регуляризация собственно-энергетического недиагонального оператора.

Рассмотрим оператор перехода $\lambda \to n$, определяемый диаграммой рис. I. В соответствии с правилами Фейнмана, эта диаграмма дает

$$A^{(1)}(p) \equiv \Sigma^{\bar{n}\lambda} = -\frac{g^2 \sin\theta\cos\theta}{16\pi^4} \int \gamma_\beta (\hat{p} - \hat{\ell}) \gamma_\alpha \frac{\delta_{\alpha\beta} - \frac{\ell_\alpha \ell_\beta}{M^2}}{\ell^2 - M^2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{(p-\ell)^2 - m_p^2} - \frac{1}{(p-\ell)^2 - m_c^2} \right) d^4\ell . \qquad (7)$$

Вычитательная процедура, понижающая степень расходимости петлевых диграмм в случае недиагональных переходов определена лагранжианом однозначно и ее, как показывает проверка, можно осуществить до вычисления интеграла x) :

---

x) Здесь и во всех дальнейших вычислениях будет оставляться только первый член разложения по ($m_p^2 - m_c^2$) и будут отбрасываться слагаемые, имеющие малость $\sim m^2/M^2$.

$$\Sigma^{\bar{n}\lambda}(p) = -\frac{g^2 \sin\theta\cos\theta\,(m_p^2-m_c^2)}{16\pi^4}(1-\gamma_5)\cdot$$

$$\cdot\int \frac{2(\hat{\ell}-\hat{p})+\hat{\ell}(\hat{\ell}-\hat{p})\hat{\ell}/M^2}{(\ell^2-M^2)\left[(p-\ell)^2-m^2\right]^2}\,d^4\ell \qquad , \qquad (8)$$

где $m^2 = (m_p^2+m_c^2)/2$.

С помощью замены

$$(\ell^2-M^2)^{-1}(\ell^2-2p\ell+p^2-m^2)^{-2} = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{\left[(\ell-px)^2-\Delta\right]^3} \quad ,$$

где $\Delta = M^2(1-x)+m^2x-p^2x(1-x)$

и перехода к переменной $Q=\ell-px$ интересущий нас интеграл приводится к виду $\int_0^1 2x\,dx\int\frac{d^4Q}{(Q^2-\Delta)^3}\Big\{-2\hat{p}(1-x)-$

$$-\frac{p^2\hat{p}\,x^2(1-x)}{M^2}+\frac{Q^2}{M^2}\hat{p}\left(2x+\frac{1-x}{2}\right)\Big\}.$$

Используя формулы интегрирования по методу размерной регуляризации, приведенные в приложении I, получим

$$\Sigma^{\bar{n}\lambda}(p) = c\,\hat{p}\,(1+\gamma_5)\,f(p^2) \qquad , \qquad (9)$$

где

$$c = -ig^2\sin\theta\cos\theta\,(m_p^2-m_c^2)/16\pi^2$$

$$f(p^2)=\int_0^1 dx\left[\frac{2x(1-x)}{\Delta}+\frac{p^2x^3(1-x)}{M^2\Delta}+\frac{(x+3x^2)\Gamma(2-\frac{n}{2})}{M^2\,\Delta^{2-n/2}}\right]. \qquad (10)$$

В пределе $n\to 4$ функция $f(p^2)$ содержит расходящуюся часть, пропорциональную $\Gamma(0)$, и необходима регуляризация оператора $\Sigma^{\bar{n}\lambda}(p)$. Учитывая, что при вычислении $\Sigma^{\bar{n}\lambda}$ интегрировалось произведение сингулярных функций, можно, как обычно, считать, что вычисленное по формулам (9 -10) значение $\Sigma^{\bar{n}\lambda}$ определено лишь с с точностью до полиномиальных по p членов, которым отвечают некоторые локальные и квазилокальные контрчлены к исходному лагранжиану. Вид этих контрчленов может быть найден из следующих требований:

I) контрчлены должны быть скалярами в изотопическом пространстве слабых взаимодействий,

2) Функция Грина перехода $\lambda \to n$ с регуляризованным оператором $\Sigma_R^{\bar{n}\lambda}$ не должна иметь полюсов, отвечающих физическим состояниям n и λ .

Из первого требования вытекает, что для $\Sigma^{\bar{n}\lambda}$ допустимы контрчлены вида

$$\bar{L}_c \, i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} L_p$$ и эрмитово-сопряженный,

$$\bar{L}_p \varphi R_n \,, \; \bar{L}_p \varphi R_\lambda \,, \; \bar{L}_c \varphi R_n \,, \; \bar{L}_c \varphi R_\lambda$$

и эрмитово-сопряженные,

$$\bar{R}_n \, i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} R_\lambda$$ и эрмитово-сопряженный

с некоторыми коэффициентами, которые определяются из второго требования. С учетом замечания о структуре контрчленов можно представить $\Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(p)$ в виде

$$C^{-1} \Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(p) = \hat{p}(1+\gamma_5) f(p^2) + F_1 \hat{p}(1+\gamma_5) + F_2 \hat{p}(1-\gamma_5) +$$
$$+ \Phi_1 (1+\gamma_5) + \Phi_2 (1-\gamma_5) \,.$$

Требование отсутствия полюсов при $\hat{p} = m_n$ и $\hat{p} = m_\lambda$ у функции Грина

$$G^{\bar{n}\lambda} = \frac{1}{\hat{p}-m_n} \Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(p) \frac{1}{\hat{p}-m_\lambda}$$

сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} \Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(\hat{p}=m_n) = 0 \\ \Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(\hat{p}=m_\lambda) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m_n(1+\gamma_5)f(m_n^2) + F_1 m_n(1+\gamma_5) + F_2 m_n(1-\gamma_5) + \phi_1(1+\gamma_5) + \\ \qquad + \phi_2(1-\gamma_5) = 0, \\ m_\lambda(1-\gamma_5)f(m_\lambda^2) + F_1 m_\lambda(1-\gamma_5) + F_2 m_\lambda(1+\gamma_5) + \phi_1(1+\gamma_5) + \\ \qquad + \phi_2(1-\gamma_5) = 0 \end{cases}$$

В силу ортогональности спиральных множителей $(1+\gamma_5)$ и $(1-\gamma_5)$ мы имеем на самом деле четыре уравнения

$$m_n f(m_n^2) + m_n F_1 + \phi_1 = 0 \quad , \quad F_2 m_n + \phi_2 = 0$$

$$m_\lambda f(m_\lambda^2) + m_\lambda F_1 + \phi_2 = 0 \quad , \quad F_2 m_\lambda + \phi_1 = 0,$$

решая которые, приходим к следующему выражению для $\Sigma_R^{\bar{n}\lambda}$:

$$C^{-1}\Sigma_R^{\bar{n}\lambda} = \hat{p}(1+\gamma_5)\left[f(p^2) - \frac{m_n^2 f(m_n^2) - m_\lambda^2 f(m_\lambda^2)}{m_n^2 - m_\lambda^2}\right] +$$
$$+ m_n m_\lambda \frac{f(m_n^2) - f(m_\lambda^2)}{m_n^2 - m_\lambda^2}\left[-\hat{p}(1-\gamma_5) + m_\lambda(1+\gamma_5) + m_n(1-\gamma_5)\right]. \tag{II}$$

В дальнейшем мы будем широко пользоваться этой формулой.

3. Амплитуда $\bar{n}\lambda\gamma$ -перехода

Анализ амплитуд переходов $\bar{n}\lambda\gamma$ и $\bar{n}\lambda Z$ удобно производить в терминах вспомогательных амплитуд $\mathcal{A}^{(i)}$, определенных следующим образом: амплитуде $\mathcal{A}^{(i)}$ отвечает диаграмма рисунка с номером i, причем на этой диаграмме в качестве затравочной фотонной (Z -бозонной) вершины стоит оператор, явно выписанный на соответствующей диаграмме. В качестве операторов будут фигурировать

$$1\,,\quad \gamma_\mu\,,\quad \hat{O}_L=\gamma_\mu\,\frac{1+\gamma_5}{2}\,,\quad \hat{O}_R=\gamma_\mu\,\frac{1-\gamma_5}{2}\,. \tag{12}$$

Полная амплитуда $\bar{n}\lambda\gamma$ -перехода определяется следующим выражением:

$$\mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda\gamma)=-\frac{2gg'}{3\sqrt{g^2+g'^2}}\Big\{3\,\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,k)+2\Big[\mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,k)+\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,k)\Big]-\mathcal{A}_\mu^{(5)}(p,k)\Big\}, \tag{13}$$

где в соответствии с правилами Фейнмана и учетом вынесенных множителей

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,k)=\frac{-c(1-\gamma_5)}{i\pi^2}\int\frac{d^4l\;\gamma_\nu(\hat{p}-\hat{l})\gamma_\eta}{[(l-p)^2-m^2]^2}\cdot\Big[(2l-k)_\mu\delta_{\alpha\beta}-(l+k)_\beta\delta_{\mu\alpha}-(l-2k)_\alpha\delta_{\mu\beta}\Big]\frac{\delta_{\alpha\eta}-l_\alpha l_\eta/M^2}{l^2-M^2}\cdot\frac{\delta_{\beta\nu}-\frac{(l-k)_\beta(l-k)_\nu}{M^2}}{(l-k)^2-M^2}; \tag{14}$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,k)=\frac{c(1-\gamma_5)}{i\pi^2}\int\frac{d^4l\;\gamma_\alpha\hat{l}\gamma_\mu(\hat{l}-\hat{k})\gamma_\alpha}{[(l-p)^2-M^2](l^2-m^2)[(l-k)^2-m^2]}\cdot\Big[\frac{1}{(l-k)^2-m^2}+\frac{1}{l^2-m^2}\Big]; \tag{15}$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,k)=\frac{c(1-\gamma_5)}{i\pi^2}\int\frac{d^4l\;\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\alpha}{[(l-p)^2-M^2](l^2-m^2)[(l-k)^2-m^2]}; \tag{16}$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(5)}(p,k)=\left\{\gamma_\mu \frac{1}{\hat{p}_\lambda - m_n}\Sigma_Д^{n\lambda}(p_\lambda)+\Sigma_Д^{n\lambda}(p_\lambda)\frac{1}{\hat{p}_n - m_\lambda}\gamma^\mu\right\}. \qquad (17)$$

В формуле (17) вместо оператора $\Sigma^{n\lambda}(p)$, определяемого формулой (9), стоит доопределенный оператор

$$\Sigma_Д^{n\lambda}(p)=\Sigma^{n\lambda}(p)-Cm_n f(m_n^2)\frac{1+\gamma_5}{2}-Cm_\lambda f(m_\lambda^2)\frac{1-\gamma_5}{2}. \qquad (18)$$

Обоснование замены $\Sigma^{n\lambda}$ на $\Sigma_Д^{n\lambda}$ содержится в приложении 2. Здесь же кратко заметим, что формула (9), как уже отмечалось, дает собственно-энергетический оператор лишь с точностью до некоторых локальных слагаемых. Формула (18) как раз содержит необходимую добавку к голому оператору $\Sigma^{n\lambda}$.

Чтобы проследить, как сокращаются расходимости, воспользуемся разложением $\mathcal{A}_\mu^{(i)}$ по степеням импульса фотона k.

$$\mathcal{A}_\mu^{(i)}(p,k)=\mathcal{A}_\mu^{(i)}(p,0)+\frac{\partial\mathcal{A}_\mu^{(i)}(p,k)}{\partial k_\sigma}\bigg|_{k=0}\cdot k_\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\mathcal{A}_\mu^{(i)}(p,k)}{\partial k_\sigma\,\partial k_\tau}\bigg|_{k=0}\cdot k_\sigma k_\tau+\dots\dots \qquad (19)$$

Подсчет степеней импульса, по которому ведется интегрирование, приводит к заключению, что в амплитуде $\mathcal{A}_\mu^{(2)}$ расходимости могут содержаться во всех трех первых членах разложения, а в амплитудах $\mathcal{A}^{(3)}$, $\mathcal{A}^{(4)}$ и $\mathcal{A}^{(5)}$ только в первом члене разложения.

Используя те же приемы, какие применялись при вычислении $\Sigma^{n\lambda}(p)$, найдем:

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,0) = \frac{c}{i\pi^2}(1-\gamma_5)\int_0^1 dx \int d^4\ell \cdot \left\{ \frac{12x(1-x)\ell_\mu}{(Q^2-\Delta)^4} \cdot \left[2(\hat{\ell}-\hat{p}) + \frac{\hat{\ell}(\hat{\ell}-\hat{p})\hat{\ell}}{M^2} \right] - \frac{2x\left[\hat{\ell}(\hat{\ell}-\hat{p})\gamma_\mu + \gamma_\mu(\hat{\ell}-\hat{p})\hat{\ell}\right]}{M^2(Q^2-\Delta)^3} \right\},$$

где $Q=\ell-px$ и $\Delta = M^2(1-x)+m^2x-p^2x(1-x)$.

Заменяя интегрирование по ℓ на интегрирование по Q и используя формулы приложения I, получим

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,0) = -c\gamma_\mu(1+\gamma_5)\int_0^1 \left(\frac{2x(1-x)}{\Delta} + \frac{p^2x^3(1-x)}{M^2\Delta} + \frac{(x+3x^2)\Gamma(2-\frac{n}{2})}{M^2\,\Delta^{2-n/2}} \right)dx - c\hat{p}(1+\gamma_5)2p_\mu\int_0^1 \left(\frac{2x^2(1-x)^2}{\Delta^2} + \frac{x^2(1-x)(1+4x)}{M^2\Delta} + \frac{p^2x^4(1-x)^2}{M^2\Delta^2} \right)dx. \tag{20}$$

Сравнивая выражения (20) и (9-I0), приходим к выводу, что

$$\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,0) = -\frac{\partial\Sigma^{\bar{n}\lambda}(p)}{\partial p_\mu}. \tag{2I}$$

Аналогичные вычисления для суммы $\mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,0)+\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,0)$ дают:

$$\mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,0)+\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,0) = \frac{\partial\Sigma^{\bar{n}\lambda}(p)}{\partial p_\mu}. \tag{22}$$

Мы приходим к хорошо известному тождеству Уорда-Такахаши, согласно которому вершинная функция, определяемая согласно (I3) как

$$\Gamma_\mu(p,k) = 3\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,k) + 2\left[\mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,k)+\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,k)\right], \tag{23}$$

при $k = 0$ выражается через производную от собственно-энергетического оператора $\Sigma^{\bar{n}\lambda}$:

$$\Gamma_\mu^{(\gamma)}(p,0) = -\frac{\partial \Sigma^{\bar{n}\lambda}(p)}{\partial p_\mu}. \tag{24}$$

Поскольку тождество Уорда-Такахаши справедливо как для "голых", так и для регуляризованных операторов, то

$$\Gamma_{\mu R}^{(\gamma)}(p,0) = -\frac{\partial \Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(p)}{\partial p_\mu}, \tag{25}$$

где $\Sigma_R^{\bar{n}\lambda}(p)$ определяется формулой (II).

Формула (25) является рецептом регуляризации не зависящей от импульса фотона части вершинной функции $\Gamma_\mu^{(\gamma)}$. Как обстоит дело с частью $\Gamma_\mu^{(\gamma)}$, пропорциональной k ? Вычисление, сделанное в предположении $p^2, k^2 \ll M^2$, дает

$$\frac{\partial \mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,k)}{\partial k_\sigma}\bigg|_{k=0} \cdot k_\sigma = \frac{2c}{M^4}\Big(\hat{p}k_\mu + p_\mu\hat{k} + (pk)\gamma_\mu + $$
$$- \frac{5}{4} i\,\varepsilon_{\mu\sigma\rho\eta}\,k_\sigma p_\rho \gamma_\eta \gamma_5\Big)(1+\gamma_5)\ ; \tag{26}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,k)}{\partial k_\sigma \partial k_\tau}\bigg|_{k=0} \cdot k_\sigma k_\tau = \frac{c}{M^4}\Big(\frac{13}{4}k^2\gamma_\mu - \frac{5}{4}\hat{k}k_\mu + $$
$$+ \frac{k^2\gamma_\mu - \hat{k}k_\mu}{4}\,\Gamma(0)\Big)(1+\gamma_5). \tag{27}$$

Формулы (26) и 27) показывают, что в случае реального фотона, для которого выполняются условия

$$k_\mu e_\mu^\lambda = 0 \quad , \quad k^2 = 0,$$

рецепт (25) является рецептом <u>полной регуляризации</u> вершинной функции $\Gamma_\mu^{(\gamma)}(p,k)$, а следовательно, и всей амплитуды $\bar{n}\lambda\gamma$ -перехода, поскольку подстановка $\Sigma_R^{\bar{n}\lambda}$ в диаграммы рис.5 дает нуль.

В случае же виртуального фотона рецепт (25) является рецептом <u>частичной регуляризации</u> $\Gamma_\mu^{(\gamma)}(p,k)$, а остаточная калибровочно-инвариантная часть, пропорциональная

$$\frac{k^2\gamma_\mu - \hat{k}k_\mu}{4}\,\Gamma(0)$$

оказывается важной при регуляризации соответствующих амплитуд более высокого порядка. В следующих разделах мы увидим, как срабатывает эта дополнительная внемассовая расходящаяся часть.

4. Амплитуда $\bar{n}\lambda Z$ - перехода

Наличие в затравочной вершине $\bar{q}qZ$ несохраняющих векторный ток слагаемых приводит к необходимости помимо уже рассмотренных амплитуд $\mathcal{A}_\mu^{(i)}$ $(i = 2,3,4,5)$ вычислить амплитуду $\mathcal{A}_\mu^{(6)}$, определяемую диаграммами рис.6.

Полная амплитуда $\bar{n}\lambda Z$ -перехода определяется выражением:

$$\mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda Z) = \frac{2g^2}{3\sqrt{g^2+g'^2}}\Big\{3\mathcal{A}_\mu^{(2)}(p,k) + \Big(2 - \frac{g^2+g'^2}{2g^2}\Big)\mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,k) +$$
$$+ \Big(2 - \frac{4(g^2+g'^2)}{2g^2}\Big)\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,k) - \Big(1 + \frac{g^2+g'^2}{2g^2}\Big)\mathcal{A}_\mu^{(5)}(p,k) +$$
$$+ \frac{3(g^2+g'^2)}{2g^2}\mathcal{A}_\mu^{(6)}(p,k)\Big\}, \tag{28}$$

где

$$\mathcal{A}_\mu^{(6)}(p,k) = \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \frac{1}{\hat{p}_\lambda - m_n} \Sigma_Д^{\bar{n}\lambda}(p_\lambda) +$$

$$+ \Sigma_Д^{\bar{n}\lambda}(p_n) \frac{1}{\hat{p}_n - m_\lambda} \gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}. \tag{29}$$

Подставляя $\Sigma_Д^{\bar{n}\lambda}$, определяемое формулой (18), в это выражение, можно убедиться, что $\mathcal{A}_\mu^{(6)}(p,k)$ не содержит расходящейся части.

Из сравнения полных амплитуд $\mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda\gamma)$ и $\mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda Z)$ (формулы (13) и (18)) находим

$$\mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda Z) = -\frac{g}{g'} \mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda\gamma) - \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{3} \Big\{ \mathcal{A}_\mu^{(3)}(p,k) +$$

$$+ 4\mathcal{A}_\mu^{(4)}(p,k) + \mathcal{A}_\mu^{(5)}(p,k) - 3\mathcal{A}_\mu^{(6)}(p,k) \Big\}. \tag{30}$$

Рецепт регуляризации амплитуды $\mathcal{A}_\mu(\bar{n}\lambda Z)$ теперь легко может быть сформулирован. Представляя вершинную функцию $\Gamma_\mu^{(\gamma)}$ и $\mathcal{A}_\mu^{(3,4)}$ в виде

$$\Gamma_\mu^{(\gamma)}(p,k) = \Gamma_\mu^{(\gamma)}(p,0) + k_\sigma \Gamma_{\mu\sigma}(p,k)$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(3,4)}(p,k) = \mathcal{A}_\mu^{(3,4)}(p,0) + k_\sigma \mathcal{A}_{\mu\sigma}^{(3,4)}(p,k), \tag{31}$$

где $\Gamma_{\mu\sigma}(p,k)$ и $\mathcal{A}_{\mu\sigma}^{(3,4)}(p,k)$ являются конечными функциями p при $k = 0$, и учитывая, что при переходе к $\Sigma_R^{\bar{n}\lambda}$ диаграммы, отвечающие перенормировке волновых функций свободных кварков, должны быть исключены из рассмотрения, найдем:

$$\mathcal{A}_{\mu R}(\bar{n}\lambda Z) = \frac{2g^2}{3\sqrt{g^2+g'^2}}\Big[\Gamma^{(8)}_{\mu R}(P,0)\Big(1+\frac{g^2+g'^2}{2g^2}\Big) +$$

$$+ K_\sigma \Gamma_{\mu\sigma}(P,K)\Big] - \sqrt{g^2+g'^2}\Big[\mathcal{A}^{(4)}_{\mu}(P,K) - \mathcal{A}^{(6)}_{\mu R}(P,K)\Big] -$$

$$- \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{3} K_\sigma \Big[\mathcal{A}^{(3)}_{\mu\sigma}(P,K) + \mathcal{A}^{(4)}_{\mu\sigma}(P,K)\Big], \qquad (32)$$

где $\mathcal{A}^{(6)}_{\mu R}$ получается из $\mathcal{A}^{(6)}_{\mu}$ заменой в формуле (29) $\Sigma_Д$ на $\Sigma_Д - \Sigma_R$:

$$\Sigma_Д - \Sigma_R = \Big[(\hat{p}-m_n)\frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2}(\hat{p}-m_\lambda)\Big]\frac{m_n^2 f(m_n^2) - m_\lambda^2 f(m_\lambda^2)}{m_n^2 - m_\lambda^2} +$$

$$+\Big[(\hat{p}-m_n)\frac{1-\gamma_5}{2} + \frac{1+\gamma_5}{2}(\hat{p}-m_\lambda)\Big] m_n m_\lambda \frac{f(m_n^2)-f(m_\lambda^2)}{m_n^2-m_\lambda^2}.$$

(33)

Как и в случае амплитуды $\bar{n}\lambda\gamma$ -перехода, рецепт (32) является рецептом <u>полной регуляризации</u> амплитуды $\bar{n}\lambda Z$ -перехода, если Z -бозон находится на массовой поверхности, и рецептом <u>частичной регуляризации</u>, если Z -бозон виртуален. В самом деле, расходимости содержатся только в $\Gamma_{\mu\sigma}(P,K)$ и в не зависящей от внешних импульсов части амплитуды $\mathcal{A}^{(4)}_{\mu}$:

$$\Big[K_\sigma \Gamma_{\mu\sigma}(P,K)\Big]_{расх} = \frac{3C}{4M^4}(K^2\gamma_\mu - \hat{K}K_\mu)(1+\gamma_5)\Gamma(0) \qquad (34)$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(4)}(P,0) = \frac{c}{i\pi^2}(1-\gamma_5)\int d^4\ell \frac{\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{(\ell-p)_\alpha(\ell-p)_\beta}{M^2}\right)}{(\ell^2-m^2)^2(\ell^2-2p\ell+p^2-M^2)} =$$

$$= \frac{c}{i\pi^2}(1-\gamma_5)\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\int_0^1 2(1-x)dx\int \frac{d^4Q\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{Q^2\delta_{\alpha\beta}}{4M^2}-\frac{P_\alpha P_\beta(1-x)^2}{M^2}\right)}{\left[Q^2-M^2x-m^2(1-x)-p^2x(1-x)\right]^3} =$$

$$= c(1-\gamma_5)\int_0^1(1-x)dx\left\{\frac{2\gamma_\mu+\hat{P}\gamma_\mu\hat{P}(1-x)^2/M^2}{M^2x+m^2(1-x)-p^2x(1-x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_\mu\Gamma(2-\frac{n}{2})}{M^2}\left[M^2x+m^2(1-x)-p^2x(1-x)\right]^{-2+\frac{n}{2}}\right\};$$

$$\mathcal{A}_\mu^{(4)}(0,0) = c\gamma_\mu(1+\gamma_5)\left\{2\int_0^1\frac{dx}{M^2x+m^2(1-x)} - 2\int_0^1\frac{x\,dx}{M^2x+m^2(1-x)}\right.$$

$$\left.+\int\frac{dx(1-x)\Gamma(0)}{M^2}\right\} = \frac{c\gamma_\mu(1+\gamma_5)}{M^2}\left[2\ln\frac{M^2}{m^2}-2+\frac{\Gamma(0)}{2}\right]. \qquad (35)$$

Если Z -бозон находится на массовой поверхности, то

$$K_\mu e_\mu^\lambda = 0\,, \quad K^2 = M_Z^2 = \frac{g^2+g'^2}{g^2}M^2.$$

При этом

$$\frac{2g^2}{3\sqrt{g^2+g'^2}}\left[K_\sigma\Gamma_{\mu\sigma}(p,K)\right]_{\text{расх}} - \sqrt{g^2+g'^2}\left[\mathcal{A}_\mu^{(4)}(0,0)\right]_{\text{расх}} =$$

$$= \frac{cg^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left[\frac{2(g^2+g'^2)}{4g^2M^2}-\frac{g^2+g'^2}{2g^2M^2}\right]\Gamma(0)\gamma_\mu(1+\gamma_5) = 0. \qquad (36)$$

Таким образом, для амплитуды с реальным фотоном регуляризация, согласно (32), является полной. В случае виртуального Z -бозона в этой амплитуде, согласно (32) и (35), остаются расходимости, которые важны для перенормируемости амплитуд высших порядков.

5. Вершинный оператор $\bar{n}\lambda\sigma$

Ситуация с регуляризацией $\bar{n}\lambda\sigma$ -вершины несколько отличается от имевшей место для $\bar{n}\lambda\gamma$ и $\bar{n}\lambda Z$ - вершин. В случае, когда фотон или Z -бозон находились на массовой поверхности, расходимости вершинной функции компенсировались расходимостями от перенормировки волновых функций n - и λ - полей. Как известно, для скалярных вершин такое сокращение отсутствует, и в рассматриваемой теории это также имеет место. Вершинная функция $\bar{n}\lambda\sigma$ описывается двумя диаграммами рис. 7 и 8.

$$\mathcal{A}^{(7)}(p,k) = 2g^2 M (m_p^2 - m_c^2)\sin\theta\cos\theta\,(1-\gamma_5)\cdot$$
$$\cdot\int \frac{\gamma_\beta(\hat{p}-\hat{\ell})\gamma_\alpha\, d^4\ell}{(\ell^2-M^2)[(\ell-k)^2-M^2][(p-\ell)^2-m^2]^2}\cdot\left(\delta_{\alpha\eta}-\frac{\ell_\alpha\ell_\eta}{M^2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\delta_{\beta\eta}-(\ell-k)_\beta(\ell-k)_\eta/M^2\right); \qquad (37)$$

$$\mathcal{A}^{(8)}(p,k) = \frac{g^3}{M}(m_p^2-m_c^2)\sin\theta\cos\theta\,(1-\gamma_5)\cdot$$
$$\cdot\int\frac{\gamma_\alpha(2\hat{p}-\hat{k}-2\hat{\ell})\gamma_\beta\,(\delta_{\alpha\beta}-\ell_\alpha\ell_\beta/M^2)}{(\ell^2-M^2)[(p-\ell)^2-m^2][(p-\ell-k)^2-m^2]}. \qquad (38)$$

Расходящиеся части $\mathcal{A}^{(7)}$ и $\mathcal{A}^{(8)}$ легко вычисляются и результат есть

$$\left[\mathcal{A}^{(7)}(p,k)\right]_{расх} = g^3\frac{(m_p^2-m_c^2)\sin\theta\cos\theta}{M^3}\left(-3\hat{p}+\frac{3\hat{k}}{2}\right)(1+\gamma_5)\Gamma(0),$$

$$\left[\mathcal{A}^{(8)}(p,k)\right]_{расх} = g^3\frac{(m_p^2-m_c^2)\sin\theta\cos\theta}{M^3}\left(3\hat{p}-\frac{3\hat{k}}{2}\right)(1+\gamma_5)\Gamma(0).$$

Поэтому вершинная функция $\bar{n}\lambda\sigma$, определяемая суммой $\mathcal{A}^{(7)}+\mathcal{A}^{(8)}$,сама по себе расходимостей не содержит. Но зато перенормировка волновых функций, определяемая диаграммами рис.9 , дает

$$\left[\mathcal{A}^{(9)}(P,K)\right]_{расх}= g\frac{g^3(m_p^2-m_c^2)\sin\theta\cos\theta}{M3}\left[m_\lambda(1-\gamma_5)+m_n(1+\gamma_5)\right]\frac{3\Gamma(0)}{4}.$$

Эта расходящаяся часть может быть убрана введением в лагранжиан контрчленов с коэффициентами противоположного знака. Поэтому рецепт устранения расходимостей из амплитуды $\bar{n}\lambda\sigma$ -перехода заключается в том, чтобы работать сразу в терминах $\sum_R^{\bar{n}\lambda}$, а вершинную часть вычислять как сумму $\mathcal{A}^{(7)}+\mathcal{A}^{(8)}$.

Рассмотренные амплитуды исчерпывают полный набор недиагональных фермионных амплитуд в рассматриваемой модели теории. Найденные выше приемы регуляризации могут быть легко перенесены на другие схемы калибровочной теории. Что касается регуляризации недиагональных бозонных амплитуд, рецепт перенормировки для них читатели могут найти в работе Брауна и Изергина [5] .

Заканчивая описание регуляризационной прцедуры, проверим на двух примерах, для которых имеются результаты, полученные в неунитарных калибровках, корректность сформулированной выше програмы перенормировки.

6. Пример I: процесс $\bar{n}\lambda \to e^+e^-$

Рассмотрим случай перехода системы кварков $\bar{n}\lambda$ в ${}^1S_0$ -состояние пары $\bar{e}e$. Для такой амплитуды имеется готовый результат, полученный в произвольной R_ξ калибровке [6,7].

$$\mathcal{A}(\bar{n}\lambda \to \bar{e}e) = \frac{-iG^2 m_c^2 \cos\theta \sin\theta}{4\pi^2}\, \bar{n}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\lambda \cdot \bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e. \tag{39}$$

В унитарной калибровке в терминах перенормированных недиагональных операторов интересующая нас амплитуда описывается двумя диаграммами рис.10 и 11. Вычислим не зависящую от внешних импульсов часть амплитуды в старшем порядке по параметру $1/M^2$:

$$\mathcal{A}^{(10)} = \bar{n}\left[\mathcal{A}_{\mu R}(\bar{n}\lambda Z)\right]_{K=0}\lambda \cdot \frac{\delta_{\mu\nu}}{-M_Z^2} \cdot \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}\, \bar{e}\gamma_\nu\gamma_5 e \tag{40}$$

$$\mathcal{A}^{(11)} = \bar{n}\gamma_\alpha\gamma_\sigma\gamma_\beta(1+\gamma_5)\lambda \cdot \bar{e}\gamma_\nu\gamma_\tau\gamma_\eta(1+\gamma_5)e \cdot$$

$$\cdot g^4(m_p^2 - m_c^2)\sin\theta\cos\theta \cdot$$

$$\cdot \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \cdot \frac{\ell_\sigma \ell_\tau (\delta_{\alpha\eta} - \ell_\alpha \ell_\eta/M^2)(\delta_{\beta\nu} - \ell_\beta \ell_\nu/M^2)}{\ell^2(\ell^2-M^2)^2(\ell^2-m^2)^2}, \tag{41}$$

где $\mathcal{A}_{\mu R}(\bar{n}\lambda Z)$ представлена формулой (32).

Поскольку амплитуды $\Gamma_{\mu R}(P,0)$, $\mathcal{A}_{\mu R}^{(6)}$ и $\mathcal{A}_{\mu\sigma}^{(3,4)}$ пропорциональны внешним импульсам, они содержат дополнительную малость m^2/M^2 или P^2/M^2 по сравнению с главным слагаемым в амплитуде $\mathcal{A}_\mu^{(4)}$, определяемым формулой (35). Поэтому главный член в $\mathcal{A}^{(10)}$ имеет вид

$$\mathcal{A}^{(10)} \cong \frac{C(g^2+g'^2)}{2M^2 M_Z^2}\left(2\ln\frac{M^2}{m^2} - 2 + \frac{\Gamma(0)}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \bar{n}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\lambda \cdot \bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e. \tag{42}$$

Вычислим амплитуду $\mathcal{A}^{(11)}$.

$$\mathcal{A}^{(11)} = g^4(m_p^2 - m_c^2)\sin\theta\cos\theta\, I(M^2; m^2)\cdot$$

$$\cdot\, \bar{n}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\lambda \cdot \bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e, \tag{43}$$

где

$$I(M^2; m^2) = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\left(1 - \frac{2\ell^2}{M^2} + \frac{\ell^4}{M^4}\right)}{(\ell^2 - M^2)^2 (\ell^2 - m^2)^2} \cong \frac{i}{16\pi^2 M^4}\left(\ln\frac{M^2}{m^2} + 1 + \frac{\Gamma(0)}{4}\right).$$

Учитывая, что

$$\Gamma = \frac{-ig^2\sin\theta\cos\theta\,(m_p^2 - m_c^2)}{16\pi^2}, \quad M_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{g^2} M^2,$$

получим:

$$\mathcal{A}(\bar{n}\lambda \to \bar{e}e) = \mathcal{A}^{(10)} + \mathcal{A}^{(11)} =$$

$$= \frac{ig^4\sin\theta\cos\theta\,(m_p^2 - m_c^2)}{8\pi^2 M^4}\, \bar{n}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\lambda \cdot \bar{e}\gamma_\mu\gamma_5 e. \tag{44}$$

Так как $g^4/2M^4 = G^2$, мы получили результат (39), который, насколько известно автору, и был получен Вайнштейном и Хриплoвичем [6] в процессе их работы сначала в унитарной калибровке, а затем проверен в R_ξ - калибровке.

7. Пример 2: распад $\mu \to e\gamma$

Предположим, что мюонное и электронное нейтрино являются суперпозициями двух других нейтрино ν_1 и ν_2 с различными массами $m_1 \neq m_2$.

$$\nu_e = \nu_1\cos\beta + \nu_2\sin\beta,$$

$$\nu_\mu = -\nu_1\sin\beta + \nu_2\cos\beta.$$

Тогда амплитуда распада $\mu \to e\gamma$ в унитарной калибровке в терминах перенормированных операторов определяется одной диаграммой рис.12. В соответствии с формулой (19) и формулой (25) получим

$$\mathcal{A}^{(12)} = \frac{-2gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \bar{U}_e \Big\{ -\frac{\partial \Sigma_R^{E\mu}(p)}{\partial p_\mu} + \frac{\partial \mathcal{A}_\mu^{(2)}}{\partial K_\sigma}\Big|_{K=0} \cdot K_\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_\mu^{(2)}}{\partial K_\sigma \partial K_\tau}\Big|_{K=0} \cdot K_\sigma K_\tau + \ldots \Big\} U_\mu \frac{e_\mu^\lambda}{\sqrt{2E_k}}, \qquad (45)$$

где отдельные слагаемые в фигурной скобке определяются формулами (11), (26) и (27).

Разложение входящей в $\Sigma_R^{E\mu}$ функции $f(p^2)$ по степеням $\frac{p^2}{M^2}$ имеет вид:

$$f(p^2) = \frac{1}{M^2}\Big(1 + \frac{3\Gamma(0)}{2}\Big) + \frac{2p^2}{M^4} + O\Big(\frac{p^4}{M^6}\Big). \qquad (46)$$

Поэтому, оставляя только главные члены, пропорциональные $1/M^4$, получим:

$$-\frac{\partial \Sigma_R^{E\mu}}{\partial p_\mu} = -\frac{2C'}{M^4} \Big\{ (p^2 - m_e^2 - m_\mu^2)\gamma_\mu(1+\gamma_5) -$$

$$- m_e m_\mu \gamma_\mu (1-\gamma_5) + 2 p_\mu \hat{p}(1+\gamma_5) \Big\}. \qquad (47)$$

Суммируя выражения (47), (26) и (27), учитывая, что для реального фотона

$$K_\mu e_\mu^\lambda = 0, \quad K^2 = 0$$

и используя соотношения

$$-i\varepsilon_{\mu\alpha\sigma\eta} K_\alpha p_\sigma \gamma_\eta \gamma_5 = \frac{K_\alpha}{2}[\hat{p}\sigma_{\alpha\mu} + \sigma_{\alpha\mu}\hat{p}]$$

$$\gamma_\mu \hat{K} = K_\mu + \sigma_{\mu\nu} K_\nu, \quad \hat{K}\gamma_\mu = K_\mu - \sigma_{\mu\nu} K_\nu,$$

найдем

$$\mathcal{A}^{(12)} = \frac{eC'}{M^4} \bar{U}_e \Big(-\frac{1}{4}\sigma_{\mu\alpha} K_\alpha\Big)\big(m_e(1+\gamma_5) +$$

$$+ m_\mu(1-\gamma_5)\big) U_\mu \frac{e_\mu^\lambda}{\sqrt{2E_k}}. \qquad (48)$$

Если учесть, что

$$C' = \frac{-ig^2 \sin\beta \cos\beta \, (m_1^2 - m_2^2)}{16\pi^2}$$

наш ответ совпадает с полученным в фейнмановской калибровке [8,9] :

$$\mathcal{A}(\mu \to e\gamma) = \frac{ieG}{8\sqrt{2}\,\pi^2} \sin\beta \cos\beta \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{M^2} \right) \cdot$$

$$\cdot \bar{u}_e \frac{\sigma_{\mu\alpha} k_\alpha}{4} \left[m_e (1+\gamma_5) + m_\mu (1-\gamma_5) \right] u_\mu \frac{e_\mu^\lambda}{\sqrt{2E_k}} .$$

Рассмотренные примеры подтверждают корректность сформулированных выше правил работы в унитарной калибровке.

Приложение I

Замечания о методе размерной регуляризации.

В данном раздел для полноты изложения приводится формулы для вычисления фейнмановских интегралов с помощью метода размерной регуляризации, развитого т'Хуфтом и Вельтманом [10]. Во всех известных случаях этот метод позволяет работать с расходящимися в ультрафиолетовой области выражениями без потери калибровочной инвариантности, что особенно важно при вычислениях в унитарной калибровке. Этот метод, однако, имеет свои особенности, которые будут отмечены ниже.

Размерная регуляризация основывается на следующих формулах, вывод которых читатели могут найти в работе [10].

В пространстве n измерений интеграл вида

$$\int d_n x \, f(z),$$

где $d_n x = dx_1 \cdots dx_n$ и $z = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$,

может быть вычислен с помощью формул

$$\int d_n x \, f(z) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int f(z) z^{n-1} dz, \tag{П1}$$

$$\int_0^\infty \frac{z^\beta dz}{(z^2+\Delta)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\beta+1}{2})\Gamma(\alpha - \frac{\beta+1}{2})}{\Gamma(\alpha)\,\Delta^{\alpha-(\beta+1)/2}}. \tag{П2}$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо с помощью виковского поворота перевести фейнмановские интегралы в интегралы по эвклидову пространству. Например,

$$\int \frac{dp_1 \ldots dp_{n-1}\, dp_0}{(p_0^2 - p_1^2 - \ldots - p_{n-1}^2 - \Delta)^\alpha} = i \int \frac{d_n p}{(-p_1^2 - p_2^2 - \ldots - p_n^2 - \Delta)^\alpha} =$$

$$= i\pi^{n/2} \int \frac{z^{n-1} dz}{(-1)^\alpha (z^2+\Delta)^\alpha}. \tag{П3}$$

Используя эти формулы, получим

$$I_1 = \int \frac{d_n p}{(p^2-\Delta)^2} = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{\Delta^{2-n/2}} \qquad (П4)$$

$$I_1' = \int \frac{d_n p \cdot p^2}{(p^2-\Delta)^3} = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{\Delta^{2-n/2}} \qquad (П5)$$

$$I_1'' = \int \frac{d_n p \cdot p^4}{(p^2-\Delta)^4} = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{\Delta^{2-n/2}} \quad \text{и т.д.} \qquad (П6)$$

Формулы (П4–П6) указывают на одну важную особенность метода размерной регуляризации – именно, на необходимость отбрасывания конечных добавок при выделении расходящегося члена. В самом деле, если бы интеграл (П5) мы записали в виде

$$I_1' = \int \frac{(p^2-\Delta+\Delta)\,d_n p}{(p^2-\Delta)^3} = I_1 + \Delta \int \frac{d_n p}{(p^2-\Delta)^3},$$

то немедленно обнаружили бы, что $I_1' \neq I_1$, в противоречие с формулами (П4–П6). Противоречия, однако, нет. Дело в том, что при $n = 4$ каждый из интегралов (П4–П6) сам определен только с точностью до произвольной конечной добавки. Действительно,

$$\lim_{n \to 4} \left(\frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{\Delta^{2-n/2}} \right) = \Gamma(0).$$

С другой стороны, представляя Δ в виде $(\Delta+\delta)-\delta$ и разлагая в ряд по $\delta/(\Delta+\delta)$, получим

$$\lim_{n\to 4}\left[\frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{(\Delta+\delta)^{2-n/2}\left(1-\frac{\delta}{\Delta+\delta}\right)^{2-n/2}}\right]=\lim_{n\to 4}\left(\frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{(\Delta+\delta)^{2-\frac{n}{2}}}\right)+$$

$$+\lim_{n\to 4}\left[\frac{\delta}{\Delta+\delta}\left(2-\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\right]+\ldots\ldots=\Gamma(0)+\frac{\delta}{\Delta+\delta}+\ldots\ldots, \qquad (П7)$$

поскольку для Г-функции имеет место соотношение

$$x\,\Gamma(x)=\Gamma(x+1)$$

и для положительных целочисленных аргументов

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Поэтому метод размерной регуляризации помимо математической конструкции содержит предписание, согласно которому при вычислении расходящихся интегралов нельзя изменять числитель, добавляя и вычитая одинаковые слагаемые более низкой степени по импульсу.

В случае, если подынтегральное выражение содержит внешние импульсы, оно должно быть приведено путем сдвижки переменной интегрирования к виду (П2). Так, например,

$$\int\frac{d_nP\cdot f(P,K)}{(P^2-2PK+K^2-m_1^2)(P^2-m_2^2)}=\int_0^1 dx\int\frac{d_nP\cdot f(P,K)}{[P^2-2PKx+K^2x-m_1^2x-m_2^2(1-x)]^2}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 dx\int\frac{d_nQ\cdot f(Q+Kx,K)}{(Q^2-\Delta)^2}, \qquad Q=P-Kx.$$

Дальнейшее интегрирование производится по формулам (П1 - П3), с учетом того, что интегралы, содержащие в числителе импульс Q в нечетной степени, равны нулю, а произведение четного числа компонент импульса Q должно быть заменено на следующие комбинации

$$Q_\alpha Q_\beta \Rightarrow \frac{1}{4} Q^2 \delta_{\alpha\beta}$$

$$Q_\alpha Q_\beta Q_\sigma Q_\tau \Rightarrow \frac{1}{24} Q^4 (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\tau} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau} + \delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\sigma})$$

и т.д.

Выпишем несколько полезных формул

$$I_2 = \int \frac{d_n P}{P^2(P^2-\Delta)} = i\pi^{n/2} \frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})}{\Delta^{2-n/2}} ;$$

$$I_3 = \int \frac{d_n P}{(P^2-\Delta)^\alpha} = i\pi^{n/2}(-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)\,\Delta^{\alpha-n/2}} ;$$

$$I_4 = \int \frac{P^{2m} d_n P}{(P^2-\Delta)^\alpha} = i\pi^{n/2}(-1)^{\alpha-m} \frac{\Gamma(m+\frac{n}{2})\Gamma(\alpha-m-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\alpha)\,\Delta^{\alpha-m-n/2}} ;$$

Приложение 2

Доопределение собственно-энергетического оператора недиагонального перехода

Доопределение $\Sigma^{\bar{n}\lambda}$ осуществляется на основе известного требования, согласно которому в изотопическом пространстве состояний n и λ должно существовать преобразование к новому базису состояний, убирающее недиагональные члены из лагранжиана свободных полей [12].

Пусть исходный базис представлен дублетом

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ n \end{pmatrix}.$$

В отсутствие взаимодействий

$$L_0 = (\bar{\lambda}, \bar{n}) \hat{P} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ n \end{pmatrix} - (\bar{\lambda}, \bar{n}) \begin{pmatrix} m_\lambda, 0 \\ 0, m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ n \end{pmatrix}.$$

При наличии слабого взаимодействия

$$L = (\bar{\lambda}, \bar{n}) \hat{P} \begin{pmatrix} 1, \alpha(1+\gamma_5) \\ \alpha(1+\gamma_5), 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ n \end{pmatrix} - (\bar{\lambda}, \bar{n}) \begin{pmatrix} m_\lambda, X \\ Y, m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ n \end{pmatrix}, \tag{П8}$$

где α дается формулой (9) ($\alpha = c f(p^2)$), а X и Y должны быть найдены, исходя из сформулированного выше рецепта. Для упрощения дальнейших выкладок будем считать α бесконечно малой величиной. Построим вспомогательный оператор

$$a = \frac{c}{2} (1+\gamma_5) \left[f(m_\lambda^2) \tau_+ + f(m_n^2) \tau_- \right], \tag{П9}$$

где

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 0, 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$$

Выбор аргументов у функции f при τ_+ и τ_- определяется тем, что для состояния $(\lambda+\alpha n)$ $p^2 \gtrsim m_\lambda^2$, а для состояния $(n+\alpha\lambda)$ $p^2 \gtrsim m_n^2$.

Лагранжиан (П9) может быть представлен в виде

$$L = (\bar{\lambda}, \bar{n})\beta(1+a^+)\beta\hat{p}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(1+a)\begin{pmatrix}\lambda\\ n\end{pmatrix} -$$

$$-(\bar{\lambda},\bar{n})\beta(1+a^+)(1-a^+)\beta\begin{pmatrix}m_\lambda, & X\\ Y, & m_n\end{pmatrix}(1-a)(1+a)\begin{pmatrix}\lambda\\ n\end{pmatrix}.$$

(П10)

Требуя, чтобы в терминах нового базиса состояний

$$\Psi = (1+a)\Psi_0$$

в лагранжиане отсутствовали недиагональные члены, получим уравнение для массовых членов X и У, доопределяющих собственно-энергетический оператор (9) :

$$\beta(1-a^+)\beta\begin{pmatrix}m_\lambda, & X\\ Y, & m_n\end{pmatrix}(1-a) = \begin{pmatrix}\tilde{m}_\lambda, & 0\\ 0, & \tilde{m}_n\end{pmatrix}. \qquad (\text{П11})$$

Решая это уравнение, находим

$$X = c\, m_\lambda f(m_\lambda^2)\frac{1+\gamma_5}{2} + c\, m_n f(m_n^2)\frac{1-\gamma_5}{2}$$

$$Y = \beta X \beta \qquad (\text{П12})$$

Следовательно, доопределенный оператор $\Sigma_A^{n\lambda}$ имеет вид

$$\Sigma_A^{n\lambda} = c\Big[\hat{p} f(p^2)(1+\gamma_5) - m_n f(m_n^2)\frac{1+\gamma_5}{2} - m_\lambda f(m_\lambda^2)\frac{1-\gamma_5}{2}\Big].$$

(П13)

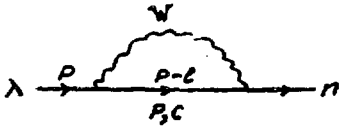


Рис.I

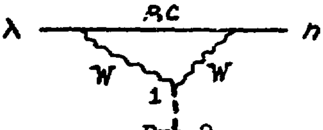


Рис.2

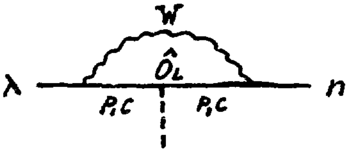


Рис.3

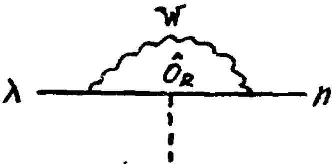


Рис.4

Рис.5

Рис.6

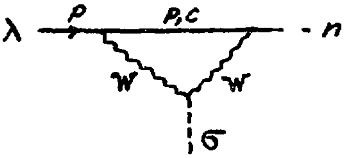


Рис.7

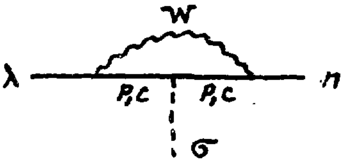


Рис.8

Рис.9

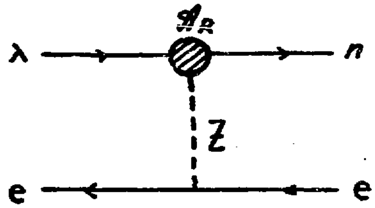


Рис.I0

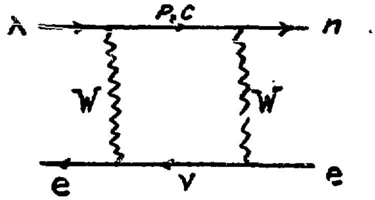


Рис.II

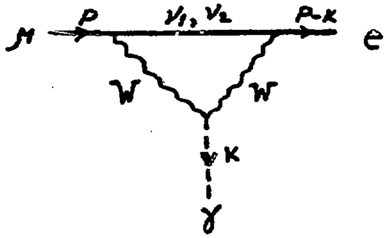


Рис.I2

ЛИТЕРАТУРА

I. Ш а б а л и н Е.П. М., Препринт ИТЭФ, 1978, № 31.

2. W e i n b e r g S. Phys.Rev.Lett., 19, 1264, 1967.

3. S a l a m A. Proc.of the 8th Nobel Symposium, Almquist and Wicksel, Stockholm, 1968.

4. G l a s h o w S.L., I l i o p o u l o s J., M a i a n i L. Phys.Rev., D2, 1285, 1970.

5. Б р а у н М.А., И з е р г и н А.Г. ЯФ, 10, 873, 1969.

6. В а й н ш т е й н А.И., Х р и п л о в и ч И.Б. Письма в ЖЭТФ, 18, 141, 1973.

7. Ф л а м б а у м В.В. ЯФ, 22, 661, 1975.

8. П е т к о в С.Т. ЯФ, 25, 641, 1977.

9. Ш а б а л и н Е.П. М., Препринт ИТЭФ, 1977, № 9.

10. H o o f t G.'t., V e l t m a n M. Preprint CERN - 73-9, 1973.

11. F e y n m a n R.P. Phys.Rev., 76, 1949.

12. C a b i b b o N., G a t t o C. Nuovo Cim., 16, 168, 1960.

Работа поступила в ОНТИ 4/У-1978г.

Подписано к печати I2/У-78г. Т-09907. Формат 70хI08 I/I6.
Печ.л.2,25.Тираж 290 экз.Заказ 7I.ЦенаI2 коп.Индекс 3624.

Отдел научно-технической информации ИТЭФ,II7259,Москва

I2 коп. ИНДЕКС 3624