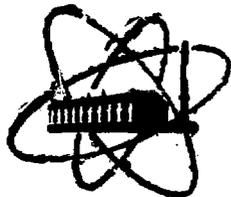


We regret that some of the pages in the microfiche copy of this report may not be up to the proper legibility standards, even though the best possible copy was used for preparing the master fiche

ФЭИ-822



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

SI 4905331

В. Е. КОЛЕСОВ, О. И. МАКАРОВ

**Методы численного решения одномерных
и двумерных нестационарных уравнений
диффузии нейтронов в применении к расчету
импульсных экспериментов**

E 2 1, F 51

Обнинск — 1978

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.Е.Колесов, О.И.Макаров

**МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ НЕЙТРОНОВ
В ПРИМЕНЕНИИ К РАСЧЕТУ ИМПУЛЬСНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ**

Обшинок - 1978

УДК 621. 039. 514. 4

М-17

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются аппроксимации нестационарного уравнения диффузии, учитывающие экспоненциальный вид решения, характерный для импульсных нейтроновых экспериментов. Доказывается в некоторых простых случаях асимптотическая устойчивость и сходимость метода. Дается краткое описание программы численного решения двумерных многогрупповых уравнений диффузии мгновенных нейтронов.

Г. В в е д е н и е .

В настоящее время среди экспериментальных средств исследования характеристик ядерных реакторов видное место занимает импульсный нейтронный метод. Физические основы и проблемы математического обоснования этого метода описываются в [1,2]. В связи с развитием импульсных методов актуальное значение имеет численный расчет соответствующих процессов, т. е. решение нестационарного уравнения переноса нейтронов. При решении такого уравнения присутствуют все трудности решения стационарного уравнения и, кроме того, возникают новые и весьма значительные [3]. Поэтому нестационарное уравнение решают чаще всего в простых приближениях, здесь будет обсуждаться многогрупповое диффузионное уравнение. Важная область применения описанных методов - моделирование импульсных экспериментов на быстрых сборках, в которых существенную роль играют процессы замедления. Исходя из этого, алгоритмы строились с учетом возможности расчета при наличии 20 и более энергетических групп. Соответствующие алгоритмы решения одномерных уравнений, рассмотренные в работе [4], показали свою работоспособность, однако далеко не всегда могли достаточно точно описать эксперимент с помощью одномерной модели. Наблюдается потребность в многомерных расчетах, в связи с чем некоторые свойства методов должны быть изучены более подробно. Исследованию этих свойств и посвящена данная работа.

II. Постановка задачи .

При численном расчете импульсного эксперимента в многогрупповом диффузионном приближении решается следующее уравнение:

$$\hat{\nu}^1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} - \text{div } \hat{D} \text{grad } \bar{\varphi} + \hat{\Sigma} \bar{\varphi} = \hat{S} \bar{\varphi} + \hat{T} \bar{\varphi} \quad (1)$$

с граничными условиями $\hat{D} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} = \hat{\ell} \bar{\varphi} \quad (2)$

и начальными условиями $\bar{\varphi}(\tau, t)|_{t=0} = \bar{\varphi}_0(\tau) \quad (3)$

Здесь: - G - число энергетических групп;

$$- \bar{\varphi}(\tau, t) = \{ \varphi^{(1)}(\tau, t), \varphi^{(2)}(\tau, t), \dots, \varphi^{(G)}(\tau, t) \}$$

- $\hat{\nu}^1, \hat{D}, \hat{\Sigma}, \hat{\ell}$ - положительные диагональные матрицы порядка G , составленные, соответственно, из обратных

групповых скоростей, коэффициентов диффузии, сечений увода и коэффициентов граничных условий;

- матрицы \hat{S} и \hat{T} имеют следующую структуру:

$$S_{ij} = \begin{cases} \Sigma_j^{i+1} & i > j \\ \Sigma_j^{i+1} & i = j \\ 0 & i < j \end{cases}; T_{ij} = \chi^{(i)} \nu_p \Sigma_j^{(i)}; i, j = 1, 2, \dots, G$$

Σ_j^{i+1} - сечения замедления из группы j в группу i ,

$\bar{\lambda}$ - спектр деления, $\bar{\Sigma}_f$ - сечения деления,

ν_p - среднее число мгновенных нейтронов на один акт деления.

Аппроксимация стационарного уравнения изучена достаточно хорошо, нас будет интересовать в основном аппроксимация производной по времени, поэтому сразу перейдем от исходного уравнения (I) к такому;

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \hat{\Lambda} \bar{\varphi} + \hat{\Sigma}_v \bar{\varphi} = \hat{S}_0 \bar{\varphi} + \hat{T}_r \bar{\varphi}, \quad (4)$$

где $\bar{\varphi}$ определена на некоторой сетке по пространственным переменным, $\hat{\Lambda}$ аппроксимирует $-\hat{v} \operatorname{div} \hat{D} \operatorname{grad}$, а матрицы $\hat{\Sigma}_v, \hat{S}_0, \hat{T}_r$ получены из $\hat{S}, \hat{S}, \hat{T}$ умножением на \hat{v} . В дальнейшем будем индекс v опускать.

Эффективный алгоритм численного решения уравнения (4) должен обладать следующими свойствами:

1) Не требовать при своей реализации большой памяти ЭВМ; лучше всего, если схема будет двухслойной.

2) Правильно рассчитывать регулярный режим, т.е. асимптотику. Это означает, что если при $t > t_0$ $\bar{\varphi}(\bar{z}, t) \approx \bar{\varphi}_0(\bar{z}) e^{-\lambda_0 t}$, то решение $\bar{\varphi}_h(\bar{z}, t)$ разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение (I), должно обладать теми же свойствами: при $t > t_0$ $\bar{\varphi}_h(\bar{z}, t) \approx \bar{\varphi}_{h0}(\bar{z}) e^{-\lambda_0 t}$, где $\bar{\varphi}_{h0}$ аппроксимирует $\bar{\varphi}_0$, $\lambda_{h0} = \lambda_0$. В этом случае будем называть схему асимптотически устойчивой (более подробно см. в [5]).

III. Схема для одномерного уравнения. Сходимость решения к регулярному режиму в простейших случаях.

В [5] обсуждаются схемы для решения одномерного параболического уравнения вида $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda \varphi = 0$, где Λ - положительно определенный дифференциальный оператор по x второго порядка. Из двухслойных схем единственной безусловно асимптотически устойчивой является чисто неявная. Для симметричной схемы условие асимптотической устойчивости имеет вид $\tau \leq \tau_c = 2 / \sqrt{\Delta_0 \delta_0}$, где δ_0 и Δ_0 - границы спектра разностного оператора Λ_h , аппроксимирующего Λ . Для того, чтобы с помощью чисто неявной схемы получить показатель экспоненты на асимптотике с точностью до 1%, необходимо условие $\tau \leq \tau_c = 1/500$. Если $\Delta_0 / \delta_0 \leq 10^4$, то условие для симметричной схемы

не является обременительным, т.к. при этом $\tau_0 > \tau_1$. Однако в случае многогрупповой задачи границы спектра оператора будут значительно шире. Возьмем для примера задачу с коэффициентами диффузии одинаковыми во всех группах. Тогда $\delta = \delta_0 \min v^{(i)}$, $\Delta = \Delta_0 \max v^{(i)}$ и условие асимптотической устойчивости симметричной схемы $\tau \leq 2/\sqrt{\delta \Delta} = 2/\delta \sqrt{\frac{\Delta_0 \max v^{(i)}}{\delta_0 \min v^{(i)}}}$ при $\max v^{(i)}/\min v^{(i)} \geq 10^4$ будет гораздо более жестким, чем условие аппроксимации с точностью до 1% для неявной схемы: $\tau \leq 1/50\delta$. Таким образом, при решении многогрупповой задачи естественно аппроксимировать оператор Λ на верхнем слое.

Оператор \hat{T} удобно брать на нижнем слое, при этом переход от одного значения времени к следующему осуществляется обычными прогонками последовательно по группам. Как показано в [4],

$$\text{схема } \bar{\varphi}_\tau + \hat{\Lambda} \bar{\varphi} + \hat{\Sigma} \bar{\varphi} = \hat{S} \bar{\varphi} + \hat{T} \bar{\varphi} \quad (5)$$

(здесь и дальше $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(t-\tau)$, $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(t-2\tau)$, $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}(t+\tau)$) будет асимптотически устойчивой, однако обладает первым порядком аппроксимации. Для того, чтобы уменьшить погрешность на регуляционном режиме, в [4] предлагаются поправки, приводящие схему к следующему виду:

$$\hat{\alpha} \bar{\varphi}_\tau + \hat{\Lambda} \bar{\varphi} + \hat{\Sigma} \bar{\varphi} = \hat{S} \bar{\varphi} + \hat{T} \hat{\beta} \bar{\varphi} \quad (6)$$

здесь $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ - диагональные матрицы и

$$\beta^{(i)} = e^{d^{(i)}\tau}, \alpha^{(i)} = d^{(i)}\tau / (1 - e^{-d^{(i)}\tau}), d^{(i)} = \frac{1}{\tau} \ln \left(\frac{\|\hat{\varphi}^{(i)}\|}{\|\hat{\varphi}^{(i)}\|} \right) \quad (7)$$

Похожие поправки используются и в работах [6,7], однако там не имеется доказательства того факта, что $d^{(i)}$ будут сходиться к асимптотическому декременту затухания.

Докажем такую сходимость сначала для наиболее простого случая одногрупповой задачи без пространственной зависимости, т.е. для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Sigma \varphi = T \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad (8)$$

(здесь и далее будем предполагать, что операторы $\hat{\Sigma}$, $\hat{\Lambda}$, \hat{T} действуют на \hat{V}). Решение такой задачи $\varphi = \varphi_0 e^{(T-\Sigma)t}$. Разностное уравнение

$$\alpha \varphi_\tau + \Sigma \varphi = T \varphi e^{d\tau}, \quad \alpha = \frac{1}{\tau} \ln(\bar{\varphi}/\hat{\varphi}), \quad \alpha = d\tau / (1 - e^{-d\tau}) \quad (9)$$

Тогда $\varphi = \left(\frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha\tau}} + \Sigma \right)^{-1} \left(T e^{d\tau} + \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha\tau}} \right) \bar{\varphi}$

$$\hat{d} = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\alpha / (1 - e^{-\alpha\tau}) + T e^{d\tau}}{\alpha / (1 - e^{-\alpha\tau}) + \Sigma} = d + \frac{1}{\tau} \ln \frac{d e^{-d\tau} + T (1 - e^{-d\tau})}{d + \Sigma (1 - e^{-d\tau})} \quad (10)$$

Если обозначить $\varepsilon \equiv d - T + \Sigma$, то получаем

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{d e^{-d\tau} + T(1 - e^{-d\tau})}{d e^{-d\tau} + T(1 - e^{-d\tau}) + \varepsilon(1 - e^{-d\tau})} = \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon \tau}{d\tau / (e^{d\tau} - 1) + T\tau} \right) \quad (II)$$

Заметим, что функции $C_1(x) \equiv x / (e^x - 1) > 0$, $C_2(x)$ — монотонно убывает. Отсюда ясно, что итерационный процесс (II) имеет единственную неподвижную точку $\varepsilon = 0$. Докажем, что этот процесс сходится к нулю при любом начальном ε_0 . Поскольку при $T - \Sigma \leq 0$

$$C_1(d\tau) = C_1(\tau(\varepsilon + T - \Sigma)) \leq C_1(\varepsilon\tau) = \varepsilon\tau / (e^{\varepsilon\tau} - 1), \quad \text{то}$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon\tau}{d\tau / (e^{d\tau} - 1) + T\tau} \right) \right| \leq \left| \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon\tau}{\varepsilon\tau / (e^{\varepsilon\tau} - 1)} \right) \right| = |\varepsilon|.$$

отсюда при $T - \Sigma \leq 0$ получаем монотонную сходимость ε к нулю. При $T - \Sigma > 0$ рассмотрим сначала случай $\varepsilon \geq 0$, тогда $d > 0$.

Докажем, что $1 + \varepsilon\tau / [d\tau / (e^{d\tau} - 1) + T\tau] \leq e^{\varepsilon\tau}$ (I2)

Преобразуя, получаем следующие неравенства, эквивалентные (I2):

$$[(e^{d\tau} - 1)(\varepsilon + T)\tau + d\tau] / [d\tau + T\tau(e^{d\tau} - 1)] \leq e^{\varepsilon\tau}$$

$$(T + \varepsilon)\tau e^{(T - \Sigma)\tau} - e^{-\varepsilon\tau} \Sigma\tau \leq (\varepsilon - \Sigma)\tau + T\tau e^{(T - \Sigma)\tau} e^{\varepsilon\tau}$$

$$\varepsilon\tau (e^{(T - \Sigma)\tau} - 1) \leq T\tau e^{(T - \Sigma)\tau} (e^{\varepsilon\tau} - 1) + \Sigma\tau (e^{-\varepsilon\tau} - 1)$$

$$\frac{\varepsilon\tau}{e^{\varepsilon\tau} - 1} \leq \frac{e^{(T - \Sigma)\tau} (T - \Sigma)e^{-d\tau}\tau}{e^{(T - \Sigma)\tau} - 1} = \frac{\tau(T - \Sigma e^{-d\tau})}{1 - e^{-(T - \Sigma)\tau}}$$

т.е. $\varepsilon\tau / (e^{\varepsilon\tau} - 1) \leq 1$; $\tau(T - \Sigma e^{-d\tau}) / (1 - e^{-(T - \Sigma)\tau}) \geq \tau(T - \Sigma) / (1 - e^{-(T - \Sigma)\tau}) \geq 1$,

то последнее неравенство верно, отсюда и (I2) верно. Подставляя (I2) в (II), получаем, что и при $T - \Sigma > 0$ для $\varepsilon_0 \geq 0$ получаем монотонную сходимость ε к нулю. При $\varepsilon_0 < 0$ имеем $\hat{\varepsilon} \geq \varepsilon$ и либо ε монотонно сходится к нулю слева, либо начиная с некоторого шага

$\varepsilon > 0$. Таким образом, и в этом случае имеем сходимость ε к нулю. Оценим скорость сходимости процесса (II) при малых ε для случая $T = 0$.

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \ln \left[1 + \varepsilon\tau / \left(\frac{d\tau}{e^{d\tau} - 1} \right) \right] \approx \varepsilon \left(1 - \frac{e^{-2\tau} - 1}{-2\tau} \right) \quad (I3)$$

Таким образом, сходимость первого порядка и при больших $\Sigma\tau$ может быть весьма медленной.

Рассмотрим более общую, чем в (9), аппроксимацию производной по t : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx \varphi_\tau \equiv (B\varphi - A\dot{\varphi}) / \tau$

где коэффициент B найдем из условия: если $\varphi = e^{d\tau}$, то $\varphi_\tau = \varphi(B - Ae^{-d\tau})\tau = d\varphi$, т.е. $B = d\tau + Ae^{-d\tau}$. Таким образом, $\varphi_\tau = [(d\tau + Ae^{-d\tau})\varphi - A\dot{\varphi}] / \tau$. (I4).

Будем с помощью этой аппроксимации решать уравнение $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Sigma\varphi = 0$. Получаем $\varphi = A\dot{\varphi} / [\tau(\Sigma + d) + Ae^{-d\tau}]$.

$$\hat{d} = \frac{1}{\tau} \ln \{ A / [\tau(d, \Sigma) + Ae^{-d\tau}] \} + d, \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \ln (1 + \tau e^{d\tau} \varepsilon / A).$$

При малых ε $\hat{\varepsilon} \approx \varepsilon (1 - e^{-\alpha \tau} / A)$.

Если взять $A = e^{\alpha \tau}$, то получаем сходимость второго порядка. Сходимость при условии $d\tau > -1$ очевидна. В случае наличия T получается $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \frac{\varepsilon \tau}{1 + T \tau})$, т.е. сходимость опять первого порядка, но, т.к. обычно $T < \Sigma$, т.е. рассчитываются подкритические сборки, то в этом случае сходимость будет более быстрой. Будем в дальнейшем пользоваться такой аппроксимацией

$$\psi_{\tau} \equiv [(1 + \alpha \tau)\psi - e^{\alpha \tau} \check{\psi}] / \tau \quad (15)$$

Сходимость при наличии пространственной и энергетической зависимости в общем случае доказать трудно, поскольку полученная схема нелинейна. Рассмотрим одногрупповую задачу с коэффициентом T , не зависящим от пространственных переменных:

$$\psi_{\tau} + \Lambda \psi + \Sigma \psi = T \check{\psi} e^{\alpha \tau} \quad (16)$$

Решение можно разложить по собственным функциям разностного оператора $\Lambda + \Sigma$. Представим $\psi(z, t) = \sum_{i=1}^{\nu} \psi_i(z) c_i(t)$,

$$\begin{aligned} (\Lambda + \Sigma)\psi_i &= \lambda_i \psi_i, \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\nu}, \\ \psi &= (1 + \tau \alpha + \tau \Lambda + \tau \Sigma)^{-1} (1 + \tau T) \check{\psi} e^{\alpha \tau} \\ c_i &= e^{\alpha \tau} (1 + \tau T) / (1 + \tau \alpha + \tau \lambda_i) \check{c}_i \end{aligned} \quad (17)$$

Ясно, что медленнее всего убывает первая гармоника, (т.е. схема асимптотически устойчива) и при достаточно большом τ пространственная зависимость будет целиком определяться функцией $\psi_1(z)$. При этом мы приходим к уже рассмотренной задаче без пространственной зависимости для $c_1(t)$ и получаем сходимость $\alpha \rightarrow \alpha_0 = T - \Sigma - \lambda_1$. Точно так же доказывается асимптотическая сходимость и при энергетической зависимости всех операторов, кроме \hat{T} . Если \hat{T} зависит от пространственной и энергетической переменных, такое доказательство не пройдет-схема не будет монотонно сходиться ни по α , ни по гармоникам, тем не менее из уже полученных свойств можно ожидать, что схема будет сходиться всегда, на практике так и происходит.

IV. Разностная схема для решения двумерной задачи.

Решение многомерной задачи по схеме, в которой оператор целиком берется на верхнем слое, весьма трудоемко. Воспользуемся методом переменных направлений с уже описанными экспоненциальными поправками для получения схемы, в которой на каждом шаге нужно

обращать только одномерный оператор;

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} [(1 + d\tau/2)\varphi' - e^{d\tau/2}\check{\varphi}] + \Lambda_1\varphi' + \Sigma\varphi' = (-\Lambda_2\check{\varphi} + T\check{\varphi})e^{d\tau/2} \\ \frac{\partial}{\partial t} [(1 + d\tau/2)\varphi - e^{d\tau/2}\varphi'] + \Lambda_2\varphi + \Sigma\varphi = (-\Lambda_1\varphi' + T\varphi')e^{d\tau/2} \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\Lambda_1 + \Lambda_2$ аппроксимирует оператор $-v \operatorname{div} (\mathcal{D} \operatorname{grad})$.

Исключая промежуточный слой $\check{\varphi}$, получаем

$$\varphi = e^{d\tau} [1 + \frac{\Sigma}{2}(d + \Sigma + \Lambda_2)]^{-1} [1 + \frac{\Sigma}{2}(T - \Lambda_1)] [1 + \frac{\Sigma}{2}(d + \Sigma + \Lambda_1)]^{-1} [1 + \frac{\Sigma}{2}(T - \Lambda_2)] \check{\varphi} \quad (19)$$

Пусть коэффициенты \mathcal{D} , Σ и T не зависят от пространственных переменных x_1 и x_2 , тогда операторы Λ_1 и Λ_2 перестановочны и можно разложить φ по собственным функциям оператора $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$:

$$\varphi = \sum_{i,j} c_{ij}(t) \psi_{ij}$$

где

$$\Lambda \psi_{ij} = \Lambda \psi_{ij}^{(1)}(x_1) \psi_{ij}^{(2)}(x_2) = \psi_{ij}^{(1)} \Lambda_1 \psi_{ij}^{(2)} + \psi_{ij}^{(2)} \Lambda_2 \psi_{ij}^{(1)} = (\lambda_i^{(1)} + \lambda_j^{(2)}) \psi_{ij}$$

Для коэффициентов $c_{ij}(t)$ получаем:

$$c_{ij} = e^{d\tau} \frac{1 + \frac{\Sigma}{2}(T - \lambda_i^{(1)})}{1 + \frac{\Sigma}{2}(d + \Sigma + \lambda_i^{(1)})} \cdot \frac{1 + \frac{\Sigma}{2}(T - \lambda_j^{(2)})}{1 + \frac{\Sigma}{2}(d + \Sigma + \lambda_j^{(2)})} \check{c}_{ij} \quad (20)$$

Для асимптотической устойчивости достаточно потребовать, чтобы выполнялись следующие неравенства

$$\left| \frac{1 + \frac{\Sigma}{2}(T - \lambda_i^{(1)})}{1 + \frac{\Sigma}{2}(d + \Sigma + \lambda_i^{(1)})} \right| > \left| \frac{1 + \frac{\Sigma}{2}(T - \lambda_{M_k}^{(2)})}{1 + \frac{\Sigma}{2}(d + \Sigma + \lambda_{M_k}^{(2)})} \right| \quad \text{при } k=1,2. \quad (21)$$

Для выполнения условий (21) достаточно потребовать

$$\tau \leq \sqrt{2} / \max \left\{ -2\sqrt{2}(d + \Sigma); \max_{k=1,2} \sqrt{\lambda_{M_k}^{(1)} \lambda_1^{(2)} + (\lambda_{M_k}^{(1)} + \lambda_1^{(2)})(d + \Sigma)} \right\} \quad (22)$$

Условие (22) накладывает весьма жесткие ограничения на шаг τ . Можно существенно увеличить средний шаг, если использовать циклический набор шагов. Будем для отдельных частей спектра выбирать свои τ , при которых быстро убывает гармоника этих частей спектра. Возьмем τ_0 такое, что $\tau_0 \max \{ \lambda_1^{(1)}; \lambda_1^{(2)} \} = \tau_0 \delta \leq 1/3$,

тогда схема асимптотически устойчива в части спектра: $0 \leq \lambda \leq$

$\leq 11/3\tau_0$. Выберем τ_1 таким, чтобы не медленнее, чем гармоника, соответствующая δ , убывали гармоники следующей части спектра: $11/3\tau_0 \leq \lambda \leq 11 \cdot (11/3\tau_0)$. Достаточно взять $\tau_1 = \tau_0 / 11$.

Таким образом, общий последовательный набор шагов $\tau_i = \tau_0 \cdot 11^{-i}$,

$$i=1, 2, \dots, m; \quad \tau_m \max \{ \lambda_{M_1}^{(1)}; \lambda_{M_2}^{(2)} \} = \tau_m \cdot \Delta \leq 11/3, \quad (23)$$

получаем асимптотически устойчивую схему.

В общем случае доказательство асимптотической устойчивости и сходимости не получено. Однако на практике устойчивость при выборе параметров τ в виде (23) всегда наблюдается.

Схема вида (18) обладает так же следующим важным свойством: после того, как произошел выход на регулярный режим, каждое из уравнений (18) точно аппроксимирует производную по времени, т.е. мы получаем точную асимптотику уравнения (4).

При решении таких уравнений обычным методом переменных направлений может возникать значительная погрешность в определении асимптотического декремента затухания даже при расчете с весьма малыми шагами τ . Обсуждение таких погрешностей можно найти в [8].

У. Описание программы "PN2P1".

Обсужденная выше схема была реализована в виде программы под названием "PN2P1" на языке FORTRAN-IV для ЭВМ ЕС-1030.

Задача, решается несколько более общего вида, чем описанная выше.

Разностным методом решаются уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \nu^{(i)-1} \frac{\partial \varphi_0^{(i)}}{\partial t} + g \operatorname{div} \bar{\varphi}_1^{(i)} + \sum_{j=0}^{(i)} \varphi_0^{(j)} = \sum_{j=0}^{(i)} (\varphi_0) + \varphi_0^{(i)} \\ \rho \nu^{(i)-1} \frac{\partial \bar{\varphi}_1^{(i)}}{\partial t} + g \frac{1}{3} \operatorname{grad} \varphi_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{(i)} \varphi_1^{(j)} = \sum_{j=1}^{(i)} (\bar{\varphi}_1) \end{cases} \quad (24)$$

$i = 1, 2, \dots, G.$

Здесь: - при $g = 1$ (прямая задача)

$$\varphi_0^{(i)} = \lambda_{ef} \chi^{(i)} \sum_{j=1}^G \nu_j \sum_{f=1}^{(i)} \varphi_0^{(j)}$$

$$\sum_{j=0}^{(i)} (\varphi_0) = \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_0^{(j)} \sum_{j=0}^{i-j}, \quad \sum_{j=1}^{(i)} (\bar{\varphi}_1) = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\varphi}_1^{(j)} \sum_{j=1}^{i-j}$$

- при $g = -1$ (сопряженная задача)

$$\varphi_0^{(i)} = \lambda_{ef} \nu_j \sum_{f=1}^{(i)} \chi^{(j)} \varphi_0^{(j)}$$

$$\sum_{j=0}^{(i)} (\varphi_0) = \sum_{j=i+1}^G \varphi_0^{(j)} \sum_{j=0}^{i-j}, \quad \sum_{j=1}^{(i)} (\bar{\varphi}_1) = \sum_{j=i+1}^G \bar{\varphi}_1^{(j)} \sum_{j=1}^{i-j}$$

Если $p=0, \lambda_{ef}=1$ - решается нестационарное квазидиффузионное уравнение, $p=1, \lambda_{ef}=1$ - телеграфное уравнение. Можно по этой схеме решать и условно-критическую задачу. При этом ищется минимальное значение $\lambda_{ef} = 1/K_{ef}$, при котором возможно решение уравнения с $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$. При решении разностной задачи на каждом шаге по t подсчитывается $\lambda_{ef} = \lambda_{ef} [1 - d(\bar{v}^2, \bar{\psi}) / (\bar{x}, \bar{q})]$.

Для расчета асимптотики в программе используется последовательность сеток: сначала решается задача на грубой сетке, затем каждый интервал сетки делится пополам, решение интерполируется в дополнительные узлы сетки и итерации продолжаются. Такой процесс повторяется необходимое число раз. При решении задач с большим числом узлов в зоне такой метод позволяет существенно сократить время счета.

Расчет возможен в двух геометриях - плоской (x, y) и цилиндрической (r, z) .

Возможности программы:

- Число групп - до 30;
- Число физических зон - до 20;
- Число геометрических зон - до 100, причем по одному направлению - до 20; общее число точек по пространству - до 3000; по одному направлению - до 100;

Используется около 150 К байтов оперативной памяти и магнитный диск. Для уменьшения занимаемого объема оперативной памяти до 80 К байтов достаточно изменить один оператор в обращении к программе. При этом максимальное число точек по пространству уменьшится до 1000.

Программа была опробована на малогрупповых задачах. При решении двухгрупповой двухзонной задачи с использованием 1000 точек по пространству потребовалось около 8 минут для получения K_{ef} с точностью 5 знаков. Проводился также расчет следующей задачи: в 2-х групповом приближении с 9 физическими зонами с 1300 точками по пространству:

- 1) Расчет K_{ef} и соответствующей функции ψ^* с точностью до 4 знаков.
- 2) Расчет d, ψ асимптотических с точностью до 4 знаков.
- 3) Вычисление функционалов ЦИД = $(v, z, \bar{\psi}, z, \psi^*)$, $\Lambda = (v^2 \bar{\psi}, \bar{\psi}^*) / \text{ЦИД}$.

Решение такой задачи заняло около 1 часа. В настоящее время имеется возможность использования 2Г - групповой системы констант

Л и т е р а т у р а

1. Теоретические и экспериментальные проблемы нестационарного переноса нейтронов. Под ред. В.В. Орлова, Э.А. Стумбура, М. Атомиздат, 1972.
2. Pulsed Neutron Research. Proceedings of a Symposium. Karlsruhe, May 1965. Vol. 1,2. Vienna, IAEA, 1965.
3. Флетт Г. Расчет кинетики реактора. В кн.: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х.Гринспена, К.Келбеца, Д. Окрента. Пер. с англ. М.Атомиздат, 1972, с.277.
4. Колесов В.Е., Макаров О.И. Численное решение нестационарного многогруппового одномерного уравнения диффузии нейтронов. В сб.: Вопросы атомной науки и техники. Серия: Реакторостроение. Вып. 6 (20) Издательство ФЭИ, Обнинск, 1977.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М., "Наука", 1973.
6. Birkhofer A., Werner W. Fully implicit alternating direction method applied to the energy-and-time-dependent neutron diffusion equation. In: Numerical Reactor Calculation. Proceedings of a seminar. Vienna 17-21 January 1972. Vienna, IAEA, 1972, p.689.
7. Wight A.L., Hansen K.F., Ferguson D.R. Application of Alternating Direction Implicit Methods of the Space Dependent Kinetics Equations. - "Nucl. Sci. Engng.", 1971, v.61, p.239.
8. Климов А.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Чихачев Н.И. Пространственная кинетика импульсного теплоемкостного реактора. БВМ и МД 17, № 1 (1977), 162-174.
9. Захарова С.М., Сивак Б.П., Тешинский Г.И. Ядерно-физические константы для расчета реакторов. Бюллетень информационного центра по ядерным данным. Выпуск третий. Приложение I. Атомиздат, 1967.

ФЭМ-822 Т-04615 от 18/01-1978 г. Обем 0,5 уч.-изд.л. Тираж 107 экз.
Цена 5 коп. Индекс 3624 Заказ № 176

Отпечатано на ротационно ФЭМ, февраль 1978 г.

Цена 5 коп.

Индекс 3624