

ФЭИ-838



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

847905505

В. С. ФЕДOTOVCKИИ

F11

**Динамическая плотность газожидкостной суспензии
и гидродинамическое демпфирование колебаний
системы тело—газожидкостная суспензия**

Обнинск — 1978

ФЭИ-838

ТЕРМО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.С. Федотовский

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПРОТНОСТЬ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СУСПЕНЗИИ
И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ
СИСТЕМЫ ТЕЛО - ГАЗОЖИДКОСТНАЯ СУСПЕНЗИЯ

Обложка - 1978

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены малые колебания тела с полостью, содержащей жидкость с пузырьками газа. Показано, что из-за относительного движения пузырьков в жидкости динамическая плотность суспензии отличается от "статической" плотности. В приближении потенциальности движения жидкости между пузырьками найдено, что динамическая плотность в случае колебательного движения суспензии зависит от объёмного газосодержания смеси, размеров пузырьков, вязкости жидкости и частоты колебаний. При достаточно высоких частотах колебаний ($\omega \gg \nu/a^2$, где ν - кинематическая вязкость жидкости, a - радиус пузырьков), динамическая плотность определяется только объёмным газосодержанием суспензии χ . $\rho_{дин} = \rho_0(1 - \chi)(2\alpha + 1)$. Показано также, что суспензия газовых пузырьков обладает демпфирующими свойствами. Демпфирование колебаний тела с газожидкостной суспензией, обусловленное относительным движением пузырьков и соответствующей диссипацией энергии, также определяется объёмным газосодержанием, размерами пузырьков, вязкостью жидкости и частотой колебаний системы. На основе полученных результатов рассмотрены колебания упругого цилиндрического стержня в концентрической оболочке, заполненной газожидкостной суспензией. Приведены числовые примеры.

Введение.

Динамические свойства тел с полостями, содержащими жидкость или тел, окруженных жидкостью, подробно исследовались в ряде работ [1, 2]. При частичном заполнении полости считалось, что жидкость имеет свободную поверхность, а движение тела происходит в поле силы тяжести. В ряде практических задач может оказаться, что весь объем полости будет заполнен газожидкостной смесью. Инерционность и демпфирующие свойства такого тела в общем случае будут зависеть от структуры и газосодержания смеси, заполняющей полость. В качестве тела с полостью может быть рассмотрен не только замкнутый объем, но и участок трубопровода с протекающей газожидкостной смесью. При вибрациях труб с двухфазным потоком инерционность смеси определяет одну из важных характеристик — собственную частоту колебаний трубопровода.

Большое практическое значение имеет также исследование движения тел, окруженных газожидкостной смесью. Такие задачи возникают, например, при вибрациях топливных стержней при внешнем обтекании их двухфазным потоком. В этом случае, при расчете собственных частот колебаний, к массе стержня добавляется присоединенная масса жидкости. Отличие присоединенной массы однофазной жидкости от присоединенной массы суспензии также связано с ее динамическими свойствами.

Ранее считалось, что для определения собственной частоты колебаний трубопровода с протекающей газожидкостной смесью в качестве колеблющейся массы (на единицу длины трубопровода) следует брать собственную массу трубы и массу суспензии, определяемую по статической плотности. Опыт показывает, что только при низких частотах колебаний результаты расчета собственной частоты по статической плотности суспензии дают правильный результат [3]. При достаточно больших частотах колебаний трубопровода возникает поперечное колебательное движение газа относительно жидкости, т.е. проявляются динамические свойства двухфазной смеси. Инерционность и демпфирующие свойства среды в колеблющемся трубопроводе в этом случае будут зависеть не только от газосодержания, но и от структуры двухфазной смеси (пузырьковая, сферичная, расслоенная, кольцевая и т.д.). Ниже эти характеристики будут рассмотрены только для пузырьковой структуры двухфазной смеси.

I. Динамическая плотность суспензии.

Рассмотрим тело с полостью, содержащей жидкость с пузырьками газа. Пусть пузырьки имеют одинаковый радиус a , и объёмное газосодержание суспензии равно α . Если такое тело движется с некоторой скоростью $u(t)$ в направлении x , то в суспензии создаётся градиент давления

$$dp/dx = -\rho_c du/dt,$$

где $\rho_c = \rho_{ж}(1-\alpha) + \rho_r \alpha$ - статическая плотность суспензии. Предполагается, что размер элемента суспензии dx существенно превышает радиус пузырька и, что суспензию можно рассматривать как однородную жидкость. Предположим также, что давление в любом месте суспензии, обусловленное ускоренным движением тела, достаточно мало, так что сжимаемость газовых пузырьков можно пренебречь.

$$p < p_{max} = \rho_c \frac{du}{dt} L \ll p_0.$$

Здесь L - характерный размер полости, p_0 - давление в неподвижной суспензии.

В окрестности каждого пузырька градиент давления определяется плотностью жидкости и соответственно равен $-\rho_{ж} du/dt$. Поэтому на каждый пузырёк действует выталкивающая сила

$$F = \frac{4}{3} \pi \rho_{ж} a^3 du/dt,$$

под действием которой пузырёк движется относительно элемента суспензии со скоростью $w(t)$.

Пренебрегая плотностью газа в пузырьках по сравнению с плотностью жидкости, уравнение относительного движения пузырька запишем в виде

$$m \frac{dw}{dt} = \frac{4}{3} \pi \rho_{ж} a^3 \frac{du}{dt} - R. \quad (I)$$

Здесь m - присоединённая масса жидкости, определяющая инерционность пузырька, R - сила сопротивления, действующая на пузырёк при его относительном движении.

При движении группы пузырьков в жидкости каждый из них находится в условиях стеснённого обтекания. Так как поле скоростей в окрестности каждого пузырька быстро убывает с увеличением расстояния от его центра, то основной вклад в кинетическую энергию,

определяющую присоединённую массу, вносят области жидкости, прилегающие к пузырьку. Следовательно, для приближённого вычисления присоединённой массы сложная и неопределённая форма ячейки жидкости, содержащей один пузырёк, может быть заменена на сферическую. На рис. I схематично показаны линии тока в ячейке сложной формы и в эквивалентной ей по объёму сферической ячейке. Окружим каждый пузырёк сферическим слоем жидкости радиуса β , таким, что $(\alpha/\beta)^3 = \alpha$. Тогда используя формулу Стокса для присоединённой массы сферы, окружённой концентрической оболочкой [4], получим

$$m = \frac{2}{3} \pi \rho_{ж} a^3 \frac{2a^3 + \beta^3}{\beta^3 - a^3} = \frac{2}{3} \pi \rho_{ж} a^3 \frac{2\alpha + 1}{1 - \alpha}. \quad (2)$$

Силу сопротивления, действующую на пузырёк в условиях стеснённого обтекания, найдём по скорости диссипации энергии.

$$R = - \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{E}}{\partial w}. \quad (3)$$

При движении пузырьков в чистой жидкости безотрывный характер их обтекания осуществляется в широком диапазоне чисел Рейнольдса $Re = aw/\nu$. Если скорость относительного движения пузырьков достаточно велика, так что $Re \gg 1$, то поле скоростей близко к потенциальному. В этом случае основной вклад в диссипацию энергии даёт потенциальный поток. Пограничный слой и область следа дают вклад порядка $1/\sqrt{Re}$. Для колебательного движения пузырька получен аналогичный результат: при больших числах Рейнольдса сила сопротивления зависит только от мгновенного значения скорости пузырька и соответствует диссипации энергии в потенциальном приближении [5].

Отметим также, что теория движения сферических пузырьков справедлива, если число Вебера $We \ll 1$.

В общем случае скорость диссипации энергии в жидкости, занимающей объём V , равна [6]

$$\dot{E} = \frac{\mu}{2} \int_V \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \quad (4)$$

Если же движение жидкости потенциально, то интеграл по объёму преобразуется в интеграл по поверхности, ограничивающей область движения жидкости [7].

$$\dot{E} = -\mu \int_S \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial n} dS = -2\mu \int_S \left(V_n \frac{\partial V_n}{\partial n} + V_\tau \frac{\partial V_\tau}{\partial n} \right) dS. \quad (5)$$

Здесь V_n и V_τ - нормальная и тангенциальная составляющие поля скоростей на поверхности, n - направление внешней нормали. Отметим, что на границах воображаемых ячеек должны выполняться следующие условия:

$$V_n = 0, \quad \partial V_\tau / \partial n = 0 \quad (6)$$

на границах 1 и 3,

$$V_\tau = 0, \quad \partial V_n / \partial n = 0 \quad (7)$$

на границах 2 и 4 (см. рис.1). Следовательно, интеграл (5) по поверхности ячейки равен нулю.

Таким образом, для вычисления скорости диссипации энергии на одном пузырьке, интегрирование следует проводить только по поверхности пузырька. Если использовать модель сферической ячейки, запишем

$$\dot{E} = -2\mu \int_0^\pi \left(V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right)_{r=a} 2\pi a^2 \sin\theta d\theta, \quad (8)$$

где V_θ - тангенциальная составляющая поля скоростей в сферической ячейке должна быть взята в системе координат, связанной с движущимся пузырьком (в этой системе $V_r \partial V_r / \partial r|_{r=a}$ равно нулю). Потенциал поля скоростей в этом случае будет равен

$$\varphi = \omega \left[\frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(r + \frac{b^3}{2r^2} \right) + r \right] \cos\theta. \quad (9)$$

Соответствующие распределения тангенциальной скорости и её производной имеют вид

$$V_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \omega \left[\frac{a^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) + 1 \right] \sin\theta, \quad (10)$$

$$\frac{\partial U_{\theta}(r, \theta)}{\partial r} = - \frac{3}{2} W \frac{a^3 \theta^3}{(\theta^3 - a^3) r^4} \sin \theta. \quad (II)$$

Подставляя (IO) и (II) при $r = a$ в (8), получим

$$\dot{E} = - 12 \pi \mu a \omega^2 \frac{1 + (a/B)^3}{[1 - (a/B)^3]^2} \quad (I2)$$

Учитывая, что $(a/B)^3 = \alpha$ из (3) получим силу сопротивления

$$R = 12 \pi \mu a \omega \frac{1 + \alpha}{(1 - \alpha)^2}. \quad (I3)$$

При $\alpha = 0$ из (I3) следует известная формула для силы сопротивления, действующей на одиночный пузырёк в безграничном объёме жидкости [7].

Подставляя (2) и (I3) в (I), уравнение относительного движения пузырька запишем в следующем виде:

$$d\dot{w}/dt + Bw = A du/dt, \quad (I4)$$

где

$$A = \frac{2(1-\alpha)}{2\alpha+1}, \quad B = \frac{18\nu(1+\alpha)}{a^2(1-\alpha)(2\alpha+1)}. \quad (I5)$$

Для абсолютного движения пузырька уравнение движения примет соответственно вид

$$d\dot{v}/dt + Bv = (A+1) du/dt + B u. \quad (I6)$$

Определим теперь импульс силы, который нужно приложить к ячейке, чтобы вызвать движение её со скоростью $u(t)$.

$$I = \int_0^t F(\tau) d\tau = \frac{\partial T}{\partial u}. \quad (I7)$$

Здесь $F(\tau)$ - мгновенная сила, T - кинетическая энергия в жидкости в ячейке. Скорость движения пузырька при этом должна определяться из уравнений движения (I4) или (I5).

Если сферическая ячейка и содержащийся в ней пузырёк движутся в одном направлении со скоростями u и v , то потенциал поля скоростей, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ к граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -v \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=b} = -u \cos \theta, \quad (18)$$

имеет вид [4]

$$\varphi = \frac{\cos \theta}{b^3 - a^3} \left[(a^3 v - b^3 u) r + \frac{a^3 b^3 (v - u)}{2 r^2} \right]. \quad (19)$$

Кинетическая энергия жидкости в ячейке равна

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \rho_{ж} \left[\int_{S_a} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} dS_a - \int_{S_b} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=b} dS_b \right] = \\ &= \frac{2\pi\rho_{ж} b^3}{3(1-\alpha)} \left[(v-u)^2 \alpha + 2(u\alpha - u)^2 \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Знак минус перед вторым интегралом связан с тем, что направление нормали к поверхности при $r = b$ противоположно r .

Подставляя (20) в (17), получим

$$I = \frac{2\pi\rho_{ж} b^3}{3(1-\alpha)} \left[(2v\alpha^2 - 3u\alpha + v\alpha) \frac{\partial v}{\partial t} + u\alpha - 3v\alpha + 2u \right]. \quad (21)$$

Как видно из этой формулы, импульс силы сложным образом связан со скоростью движения ячейки или тела $u(t)$ и скоростью пузырьков $v(t)$. В некоторых предельных случаях формула (21) упрощается.

Если ускорение тела с суспензией достаточно мало или вязкость жидкости велика ($du/dt \ll \nu u$), то пузырьки газа практически не перемещаются относительно жидкости ($v(t) \approx u(t)$, $\partial v/\partial t \approx 1$). Импульс силы в этом случае равен произведению статической массы ячейки на её скорость

$$I = \frac{4}{3} \pi \rho_{ж} b^3 (1-\alpha) u(t). \quad (22)$$

Если жидкость имеет малую вязкость или ускорение тела доста-

точно велико ($du/dt \gg Bu$), то уравнение движения пузырька примет вид

$$dv/dt = (A+1) du/dt \quad (23)$$

Интегрируя (23) и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получим

$$v(t) = (A+1)u(t) = \frac{3}{2\alpha+1} u(t); \quad \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{3}{2\alpha+1} \quad (24)$$

Подставляя (24) в (21), получим в этом случае

$$I = \frac{4}{3} \pi \rho_{ж} b^3 \frac{1-\alpha}{2\alpha+1} u(t). \quad (25)$$

Скоэффициент $\frac{4}{3} \pi \rho_{ж} b^3 \frac{1-\alpha}{2\alpha+1}$ назовём динамической массой ячейки. Так как предполагалось, что все ячейки одинаковы, то разделив динамическую массу ячейки на её объём, получим динамическую плотность суспензии

$$\rho_{дин} = \rho_{ж} \frac{1-\alpha}{2\alpha+1}, \quad (26)$$

отличающуюся в $1/(2\alpha+1)$ раз от статической плотности. Этот результат имеет простой физический смысл. При ускоренных движениях тела пузырьки газа смещаются относительно тела в направлении ускорения, а жидкость при этом перетекает в обратную сторону. Центр массы жидкости имеет, следовательно, меньшее ускорение, чем геометрический центр полости тела.

Рассмотрим ещё один случай движения тела, при котором выражение для динамической плотности принимает относительно простой вид.

Пусть тело с суспензией совершает малые гармонические колебания $u(t) = u_0 \sin \omega t$. Учтём, что инерционная сила, определяемая динамической плотностью суспензии и ускорением тела, не совершает работы за период колебания, т.е.

$$\int_0^{t_0} F_{ин}(t) u(t) dt = 0. \quad (27)$$

Так как гидродинамическая сила $F = dI/dt$, то для выполнения условия (27) импульс силы должен изменяться синфазно со скоростью тела $U(t)$. Отсюда следует, что в качестве $V(t)$ в (21) должна быть взята синфазная со скоростью тела составляющая скорости пузырька.

Представим относительную и абсолютную скорости пузырька в виде суммы составляющих

$$W(t) = W_1 \sin \omega t + W_2 \cos \omega t, \quad (28)$$

$$V(t) = V_1 \sin \omega t + V_2 \cos \omega t. \quad (29)$$

Подставив (28) и (29) в уравнения движения (14) и (16) и приравняв члены, содержащие $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, получим

$$\frac{W_1}{U_0} = \frac{A \omega^2}{\omega^2 + B^2}, \quad \frac{W_2}{U_0} = \frac{AB \omega}{\omega^2 + B^2}, \quad (30)$$

$$\frac{V_1}{U_0} = \frac{(A+1)\omega^2 + B^2}{\omega^2 + B^2}, \quad \frac{V_2}{U_0} = \frac{AB \omega}{\omega^2 + B^2}. \quad (31)$$

Таким образом, подставив V_1/U_0 в (21) и разделив результат на скорость и объём ячейки, получим динамическую плотность суспензии в случае колебательного движения

$$\rho_{\text{дин}} = \rho_{\text{ж}} \left[1 - \alpha \frac{(A+1)\omega^2 + B^2}{\omega^2 + B^2} \right]. \quad (32)$$

Если суспензия образована сравнительно маловязкой жидкостью ($B \ll \omega$), то формула (32) переходит в (26). При большой вязкости жидкости ($B \gg \omega$), из (32) получается статическая плотность "замороженной" суспензии $\rho_c = \rho_{\text{ж}}(1 - \alpha)$.

На рис.2, для примера, представлена зависимость динамической плотности суспензии, образованной водой ($\nu = 10^{-2}$ см²/сек) с пузырьками газа ($\alpha = 0,1$ см) от частоты колебаний. Как видно из рисунка, при увеличении частоты колебаний динамическая плотность уменьшается, а при $\omega \gg 60$ рад/сек становится постоянной величиной, определяемой соотношением (26).

Таким образом инерционность тела с полостью, содержащей газожидкостную суспензию, будет равна

$$m_{\text{дин}} = M + \rho_{\text{дин}} V \quad (33)$$

где M - собственная масса тела.

Аналогичным образом может быть рассмотрено движение тела, окружённого газожидкостной суспензией. При движении в однофазной жидкости инерционность тела определяется его собственной массой и присоединённой массой жидкости. Очевидно, что при движении тела в газожидкостной суспензии, присоединённая масса должна определяться по динамической плотности суспензии.

2. Гидродинамическое демпфирование колебаний системы тело-газожидкостная суспензия

Пусть тело с полостью, содержащей суспензию закреплено на упругих пружинах. Тогда при колебаниях такой системы, из-за относительного движения пузырьков, в жидкости будет иметь место диссипация энергии и, следовательно, демпфирование колебаний тела.

Если характерный размер полости намного больше размеров пузырьков, и, следовательно, число пузырьков, находящихся вблизи стенок, мало по сравнению с их общим количеством, то можно считать, что наличие стенок полости практически не влияет на скорость диссипации энергии.

Коэффициент гидродинамического демпфирования колебаний определим через среднюю за период колебаний скорость диссипации энергии по формуле

$$\overline{\dot{E}} = -2\overline{\dot{E}}/u_0^2 \quad (34)$$

Отыскивая решение уравнения (15) в виде $w(t) = w_0^2 \sin^2(\omega t + \gamma)$, получим

$$w(t) = u_0^2 \frac{A^2 \omega^2}{\omega^2 + B^2} \sin^2(\omega t + \gamma) \quad (35)$$

Подставив (35) в (13) и интегрируя, найдём среднюю за период колебаний скорость диссипации энергии на одном пузырьке

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}}_1 &= -12\pi\mu a \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^2} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} u_0^2 \frac{A^2 \omega^2}{\omega^2 + B^2} \sin^2(\omega t + \gamma) dt = \\ &= -24\pi\mu a \frac{1+\alpha}{2\alpha+1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 + B^2} \right) u_0^2 \end{aligned} \quad (36)$$

Так как в полости, имеющей объём V , содержится $3V\alpha/4\pi a^3$ пузырьков, то полная скорость диссипации энергии будет равна

$$\bar{E} = -18\mu \frac{V}{a^2} \frac{(1+\alpha)\alpha}{2\alpha+1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+B^2} \right) u_0^2, \quad (37)$$

и коэффициент демпфирования колебаний тела с суспензией будет

$$\bar{E} = 36\mu \frac{V}{a^2} \frac{(1+\alpha)\alpha}{2\alpha+1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+B^2} \right). \quad (38)$$

Как видно из этой формулы, при $\alpha = 0$ коэффициент демпфирования колебаний равен нулю. Это связано с тем, что в жидкости при этом отсутствует относительное движение, следовательно, отсутствуют и потери кинетической энергии. Интересно отметить зависимость коэффициента демпфирования от вязкости жидкости. Если при движении суспензии, инерционные силы, действующие на пузырьки, существенно больше вязкостных сил ($\omega \gg B$), то коэффициент демпфирования пропорционален вязкости. При увеличении вязкости жидкости относительное движение пузырьков ослабляется и коэффициент демпфирования уменьшается.

3. Колебания стержня в газожидкостной суспензии.

Используя полученные результаты рассмотрим задачу о колебаниях цилиндра, окружённого концентрической оболочкой, заполненной газожидкостной суспензией.

Известно, что потенциал поля скоростей, описывающий движение идеальной жидкости при колебаниях цилиндра в концентрической оболочке, имеет вид [4]

$$\varphi = \frac{u_0 r_0^2}{R^2 - r_0^2} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \sin \omega t. \quad (39)$$

Здесь r_0 и R - радиусы колеблющегося по закону $u(t) = u_0 \sin \omega t$ цилиндра и неподвижной оболочки, θ - угол между радиусом и направлением движения цилиндра.

Соответствующие распределения радиальной и тангенциальной составляющих скорости будут

$$u_r(r, \theta, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -u_0 \frac{r_0^2}{R^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \sin \omega t, \quad (40)$$

$$u_{\theta}(r, \theta, t) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = u_0 \frac{r_0^2}{R^2 - r_0^2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta \sin \omega t. \quad (41)$$

Квадрат скорости элемента жидкости равен

$$u^2(r, \theta, t) = u_r^2 + u_{\theta}^2 = u_0^2 \frac{r_0^4}{(R^2 - r_0^2)^2} \sin^2 \omega t \left[1 - 2 \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{R^4}{r^4}\right]. \quad (42)$$

Применим теперь это распределение к элементу суспензии. Учитывая, что в единице объёма суспензии содержится $n = 3\alpha/4\pi a^3$ пузырьков, запишем среднюю скорость диссипации энергии во всём объёме суспензии (на единицу длины цилиндра) в виде

$$\bar{E} = \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^R \bar{E}_1 n r dr d\theta. \quad (43)$$

Здесь

$$\bar{E}_1(r, \theta) = -24 \pi \mu a \frac{1 + \alpha}{2\alpha + 1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 + \beta^2}\right) u^2(r, \theta, 0)$$

средняя скорость диссипации энергии на одном пузырьке.

Интегрируя, получим

$$\bar{E} = -18 \pi \mu \frac{(1 + \alpha)\alpha}{2\alpha + 1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2 + \beta^2}\right) \frac{r_0^2}{a^2} \frac{(r_0^2 + R^2)}{(R^2 - r_0^2)} u_0^2. \quad (44)$$

Кроме потерь энергии, связанных с относительным движением пузырьков, имеют место потери энергии и в вязких пограничных слоях, возникающих на колеблющемся цилиндре и окружающей его оболочке [8].

$$\bar{E} = -2 \pi \mu u_0^2 \frac{r_0}{\delta} \left[\frac{R^2 + r_0^3 R}{(R^2 - r_0^2)^2} \right], \quad (45)$$

где $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ - характерная толщина этих слоев.

Следует отметить, что формула (45) была получена для однофазной жидкости в предположении $\delta \ll r_0, R - r_0$, и при распространении её на суспензии газовой пузырьков требуется некоторая усовершенств.

Если размеры пузырьков существенно превышают толщину пограничных

слоя δ , то можно считать, что пограничные слои содержат однофазную жидкость и использовать при этом формулу (45).

Если же размеры пузырьков малы по сравнению с толщиной пограничного слоя и концентрация их достаточно велика, то величина вязкости должна быть изменена, например, в соответствии с формулой Эйнштейна

$$\mu_0 = \mu(1 + \alpha). \quad (46)$$

Подставляя в (34) сумму (44) и (45), получим коэффициент демпфирования колебаний для рассматриваемой задачи

$$\xi = 36\pi\mu \frac{(1+\alpha)\alpha}{2\alpha+1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+B^2} \right) \frac{r_0^2}{a^2} \left(\frac{r_0^2+R^2}{R^2-r_0^2} \right) + 4\pi\mu \frac{r_0}{\delta} \left[\frac{R^4+r_0^3R}{(R^2-r_0^2)^2} \right]. \quad (47)$$

Если цилиндрический стержень колеблется в безграничном объеме суспензии ($R \rightarrow \infty$), то коэффициент демпфирования будет равен

$$\xi = 36\pi\mu \frac{(1+\alpha)\alpha}{2\alpha+1} \left(\frac{\omega^2}{\omega^2+B^2} \right) \frac{r_0^2}{a^2} + 4\pi\mu \frac{r_0}{\delta}. \quad (48)$$

Интересно отметить, что первый член в этой формуле равен коэффициенту гидродинамического демпфирования колебаний трубопровода радиуса r_0 , содержащего суспензию (см. формулу (38), где в качестве объема V следует взять объем суспензии в трубопроводе на единицу длины $\pi r_0^2 l$).

На рис. 3 представлены результаты расчёта коэффициента демпфирования по формуле (48) в зависимости от частоты колебаний. Расчёт проведен для случая колебаний стержня радиусом 1 см в воде ($\nu = 10^{-2}$ см²/сек), содержащей пузырьки радиуса 0,1 см и образующие суспензию с 10% объёмным газосодержанием. Кривая 1 соответствует демпфированию, обусловленному пузырьками (первый член в формуле (48)), а кривая 2 - демпфированию, обусловленному диссипацией энергии в пограничном слое. Как видно из рисунка, при малых частотах колебаний стержня, основной вклад в демпфирование дают пузырьки, а при высоких - пограничный слой на поверхности стержня. Из формулы (48) видно также, что наиболее сильно коэффициент демпфирования зависит от размеров пузырьков. При уменьшении радиуса пузырьков демпфирование возрастает в области высоких частот и уменьшается в области низких частот.

Литература

1. Микешев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твёрдого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М. "Машиностроение", 1968.
2. Мокосев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., "Наука", 1966.
3. Стейн Р., Торбинер М. Колебания трубы с протекающей по ней жидкостью. "Прикладная механика", М., "Мир", №4, 1970.
4. Милн-Томсон Л.Н. Теоретическая гидродинамика, М., "Наука", 1964.
5. Воинов О.В., Петров А.Г. Движение пузырей в жидкости, Сб. "Механика жидкости и газа", М., т.10, 1976.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
7. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
8. Сиявский В.Ф., Кухтин А.Б., Федотовский В.С. Присоединённая масса и коэффициент затухания для цилиндра, колеблющегося в концентрической оболочке, заполненной вязкой жидкостью. Препринт ФЭИ- 729, Обнинск, 1976.

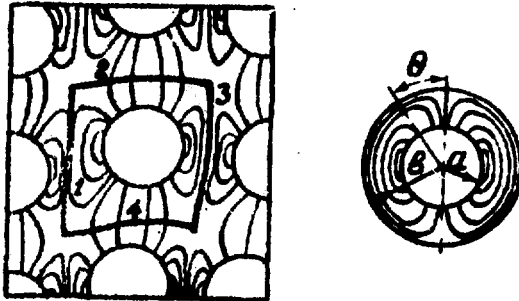


Рис. 1
 Линии тока в ячейке I, 2, 3, 4 и в эквивалентной сферической ячейке. Направление движения пузырьков — вертикальное.

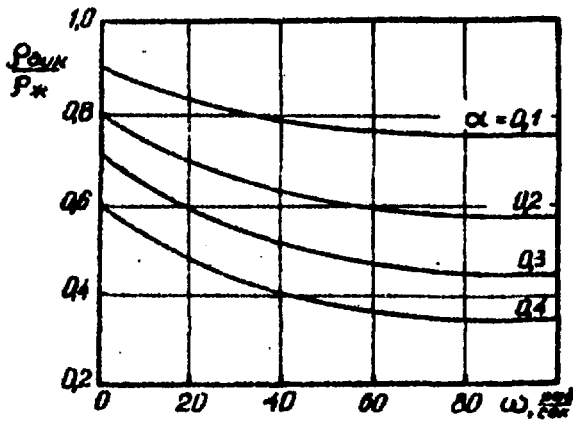


Рис. 2
 Зависимость динамической плотности суспензии (32) от частоты колебаний для различных значений объемного газосодержания α .

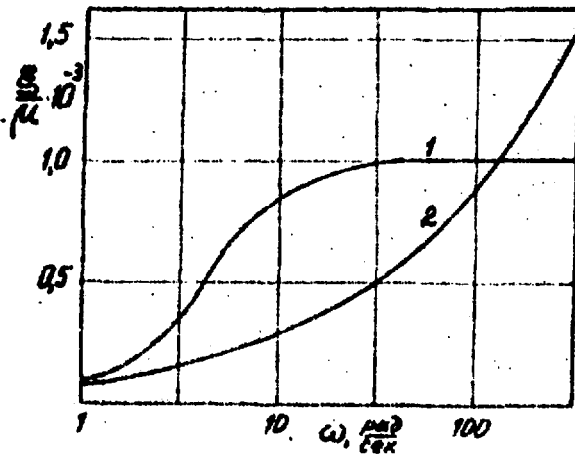


Рис. 3
 Зависимости коэффициента демпфирования колебаний суспензии от частоты (49) при 10%-ом объемном газосодержании суспензии: 1 — для микропузырьков, обусловливаемых пузырьками, 2 — для макропузырьков, обусловливаемых дисперсионной вязкостью в пограничном слое.

ФЭН-838 Т-12914 от 27/VI-1978 г. Объем 0,7 уч.-изд.л. Тираж III изд.
Индекс 3624 Цена 7 коп. Заказ № 700

Отпечатано на ротационте ФЭИ, август 1978 г.

Цена 7 коп.

Индекс 3624