

ФЭИ-944

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

SI 80 04093

В. С. МАСТЕРОВ, А. А. СЕРЕГИН

**Распад квазистационарных состояний  
в квазиклассическом приближении**

Обнинск — 1979

ФЭИ-944

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.С.Мастеров, А.А.Сергеев

РАСПАД КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ  
ПРИБЛИЖЕНИИ

Одесская - 1979

УДК-539.145

М-17

#### АННОТАЦИЯ

В квазиклассическом приближении получено уравнение для нахождения энергии и ширины одномерных распадающихся квазистационарных состояний. Эти величины можно находить не только для глубоководбарьерных состояний, но и для квазистационарных состояний, расположенных вблизи вершины барьера или даже выше. Для потенциальной энергии, аппроксимированной двумя сопряженными параболой, приводится результат расчета энергии и ширины квазистационарных состояний.

1. Начиная с основополагающей работы Г.А.Гамова, задачи, связанной с распадом квазистационарных состояний, посвящено много работ. Полную информацию о состоянии и литературе по этому вопросу можно найти в [1]. В настоящей работе мы хотим показать, что в квазиклассическом приближении можно находить вероятность распада не только глубокоподбарьерных квазистационарных состояний, но и квазистационарных состояний, расположенных вблизи барьера или даже выше. Рассмотренный в работе одномерный олучай кроме теоретического интереса представляет и практический интерес для нахождения вероятности деления.

Как уже упоминалось выше, в данной работе мы будем использовать квазиклассическое приближение. Однако это будет не метод ВКБ, а квазиклассическое приближение, развитое Цвааном [2] (метод Цваана), Кемблом [3], Хедингом [4], Покровским и Халатниковым [5] и доведенное до практического применения Пономаревым [6]. Основное отличие метода Цваана от хорошо известного метода ВКБ состоит в следующем. В методе ВКБ квазиклассические решения по обе стороны от точки поворота сшиваются на действительной оси, привлекая точное решение вблизи точки поворота. В методе Цваана квазиклассические решения по обе стороны от точки поворота аналитически продолжаются в комплексную плоскость  $z$  и сшиваются, обходя точку поворота в комплексной плоскости с учетом явления Стокса. Это позволяет рассматривать как действительные (ВКБ), так и комплексные точки поворота. Последние особенно важны при рассмотрении надбарьерных эффектов.

2. Основное внимание при рассмотрении распада одномерных квазистационарных состояний уделяется нахождению их энергии  $E_n$  и ширины  $\Gamma_n$ . Причем мы, как и авторы [1], считаем, что о квазистационарных состояниях можно говорить только тогда, когда их время жизни  $\tau \sim \hbar / \Gamma$  значительно больше времени свободного пролета. Существуют два эквивалентных подхода к изучению квазистационарных состояний. В первом подходе рассматривают стациона-

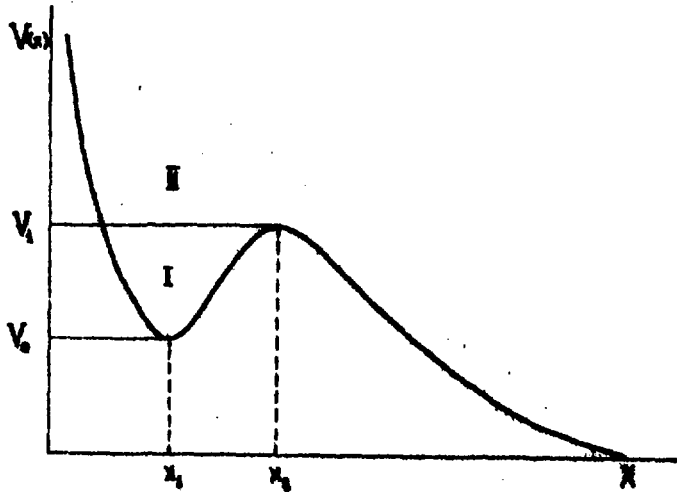


Рис. I. Схематическое изображение потенциальной энергии  $V(x)$  в зависимости от  $x$ .

нарную задачу о вытекании потока частиц из ограниченной в пространстве области. В этом случае решают уравнение Шредингера  $\hat{H}\Psi = \Lambda\Psi$  с константой разделения  $\Lambda = E - i\Gamma/2$ . Во втором подходе рассматривают отражение частиц от потенциального барьера, в котором могут образовываться квазистационарные состояния, и получают уравнение для определения квазистационарных состояний. Причем решение этого уравнения имеет комплексный вид  $E^* = E - i\Gamma/2$ . Второй подход методически проще и именно его мы используем в настоящей работе.

Пусть поток частиц массой  $m$  и энергией  $E > V_0$  падает справа на потенциальный барьер  $V(x)$ , схематически изображенный на рис. I. Мы предполагаем, что потенциальная энергия является гладкой функцией от  $x$ , так чтобы для описания можно было использовать квазиклассическое приближение.

Применение метода Цваана требует выполнения следующих приемов, описанных в [6]: нахождения точек поворота из решения уравнения  $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]} = 0$  и построения комплексной плоскости  $z$ ; проведения разрезов в комплексной плоскости,

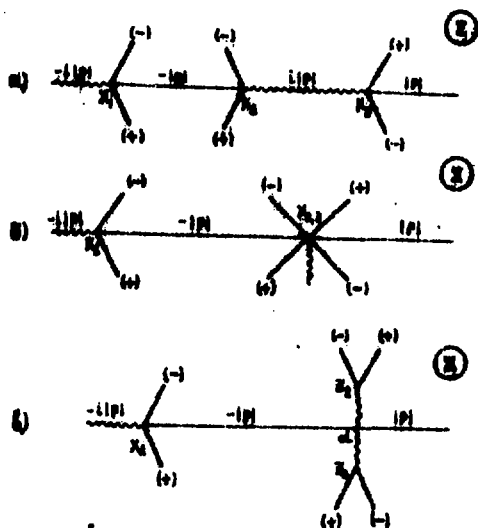


Рис. 2. Комплексные плоскости  $\mathcal{Z}$  для рассмотренных в данной работе случаев. Толстые сплошные линии (+) и (-) - линии Стокса, волнистые - разрезы, тонкая сплошная линия - действительная ось,  $X_i$  - действительная точка поворота,  $Z_i$  - комплексные точки поворота.

о том чтобы сделать импульс однозначной функцией; построения линий Стокса (+) и (-) в окрестности каждой точки поворота. В зависимости от энергии квазистационарных состояний удобно рассматривать два случая распада квазистационарных состояний, обозначенные на рис. 1 римскими цифрами. Комплексные плоскости  $\mathcal{Z}$ , получающиеся в данной задаче, представлены на рис. 2.

3. В области I, т.е. при  $V_0 < E < V_1$  импульс  $p(x)$  имеет три действительные точки поворота ( $X_1, X_2, X_3$ ) и комплексная плоскость  $\mathcal{Z}$  для этого случая изображена на рис. 2а. По условию задачи на действительной оси слева от  $X_1$  решение уравнения Шредингера имеет экспоненциально затухающий вид, которое в квазиклассическом приближении можно представить как

$$\Psi_1^+(x) \approx p(x)^{-1/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{X_1}^x p(x) dx\right)$$
 , а справа от  $X_3$  квазиклассическое решение представляет суперпозицию пе-

падающей  $\Psi_3^-(x) \approx p(x)^{-1/2} \exp(-i/\hbar \int_{x_3}^x p(x) dx)$  и отраженной

$\Psi_3^+(x) \approx p(x)^{-1/2} \exp(i/\hbar \int_{x_3}^x p(x) dx)$  волн. Для того, чтобы "сшить" эти решения, мы должны, не пересекая разрывы, продолжить по известным правилам [6] действительное затухающее решение  $\Psi_1^+$  на действительную ось в область справа от  $x_3$ . Результат шитья можно записать в виде равенства

$$e^{i\frac{\pi}{4}} \Psi_1^+ = e^{\kappa} [h e^{i(\sigma - \frac{\pi}{4})} - i e^{-i(\sigma - \frac{\pi}{4})}] \Psi_3^+ + e^{\kappa} [h e^{-i(\sigma - \frac{\pi}{4})} + i e^{i(\sigma - \frac{\pi}{4})}] \Psi_3^- \quad (1)$$

где  $\sigma = 1/\hbar \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$ ,  $\kappa = 1/\hbar \int_{x_2}^{x_3} |p(x)| dx$  и  $h^2 = 1 + \exp(-2\kappa)$ . Так как  $\Psi_3^-$  — падающая волна в точку  $x_3$ , то для описания распада нам необходимо потребовать равенства нулю коэффициента при  $\Psi_3^-$ . Отсюда получаем необходимое уравнение для определения характеристик квазистационарных состояний

$$\text{ctg } \sigma = i \frac{h-1}{h+1}, \quad (2)$$

которое можно переписать в виде

$$\sigma = 1/\hbar \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[E^* - V(x)]} dx = \pi(n + 1/2) - 1/2 \ln h,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Из вида уравнения видно, что неизвестная величина  $E^*$  должна быть комплексной величиной, которую мы представим в виде  $E^* = E - i\Gamma/2$ . Так как для глубоководбарьерных квазистационарных состояний  $\ln h$  и  $\Gamma$  являются малой величиной, то энергия и ширины этих состояний определяются соотношениями:

$$\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[E_n - V(x)]} dx = \pi(n + 1/2);$$

$$\Gamma_n = \frac{\hbar \omega_n}{\pi} \ln h;$$

$$\frac{\hbar}{\omega_n} = m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2m[E - V(x)]}}.$$

где  $\omega_n$  - циклическая частота классического движения. Если  $\ln h$  выразить через квазиклассический коэффициент прохождения частицы

$\ln h \approx \frac{1}{2} \exp(-2\kappa) = P/2$ , то ширины глубоководбарьерных состояний выражаются хорошо известной формулой, полученной Л.Д.Ландау,  $\Gamma_n = \hbar \omega_n P / (2\pi)$ .

В области II, т.е. при  $E > V_1$  импульс  $p(x)$  имеет одну действительную  $\kappa_1$  и пару сопряженных комплексных ( $\alpha_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ ) точек поворота. Комплексная плоскость  $\alpha$  для этого случая изображена на рис. 2в. Так же как и в предыдущем случае нам нужно продолжить экспоненциальное затухающее решение  $\Psi_1^+$  слева от  $\kappa_1$  на действительную ось справа от  $\alpha$ . Результат "сшивки" имеет вид

$$e^{i\frac{3\pi}{4}} \Psi_1^+ = [g e^{-i(\sigma - \frac{\pi}{4})} - i e^{-\delta - i(\sigma + \gamma - \pi/4)}] \Psi_2^- + [g e^{i(\sigma - \pi/4)} + i e^{-\delta + i(\sigma + \gamma - \pi/4)}] \Psi_2^+ \quad (4)$$

В этих выражениях  $\sigma = \frac{1}{\hbar} \int_{\kappa_1}^{\alpha} p(x) dx$ ,  $\delta = \frac{2}{\hbar} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \text{Re } p(\alpha + it) dt \right|$ ,  $\gamma = \frac{2}{\hbar} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \text{Im } p(\alpha + it) dt \right|$  и  $g^2 = 1 + \exp(-2\delta)$ . Величины  $\delta$  и  $\gamma$  появляются в результате обхода комплексных точек поворота в комплексной плоскости. Так как  $\Psi_2^-$  - падающая волна, то, как и в предыдущем случае, получаем уравнение для нахождения энергии и ширины квазистационарных состояний

$$\text{ctg}(\sigma - \gamma/2) = i \frac{g e^{\delta} - 1}{g e^{\delta} + 1}, \quad (5)$$

которое можно представить в виде

$$\sigma - \gamma/2 = \pi(q + 1/2) - i/2 \ln(g e^{\delta}). \quad (6)$$

К сожалению, решить последнее уравнение относительно  $E$  и  $\Gamma$  в аналитическом виде не представляется возможным.

Отметим, что при  $E \rightarrow V_1$ , т.е. при  $\delta \rightarrow 0$  и  $\gamma \rightarrow 0$  с одной стороны и  $\kappa \rightarrow 0$  с другой стороны уравнения для определения положения и ширины квазистационарных состояний (2) и (5) переходят друг в друга. Отсюда можно сделать заключение, что  $q$  в уравнении (6) пробегает следующие значения  $q = n_{\text{max}} + 1$ .



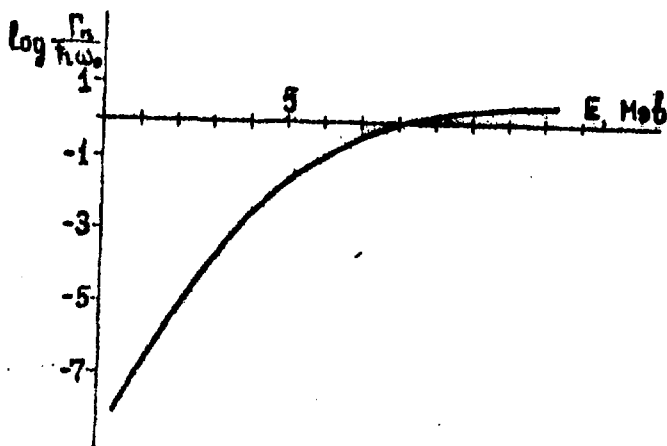


Рис. 3. Изменение логарифма обезразмеренной ширины квази-стационарных состояний в зависимости от энергии квазистационарных состояний. Параметры потенциальной энергии в МэВ:  $V_0 = 0$ ,  $\hbar\omega_0 = 1$ ,  $V_1 = 6$ ,  $\hbar\omega_1 = 3$ .

$n_{\max} + 2$  и т.д., где  $n_{\max}$  - количество подбарьерных квазистационарных состояний. Этот же предельный результат можно получить, если непосредственно рассматривать отражение частиц с энергией  $E = V_1$ . Комплексная плоскость  $z$  для этого частного случая изображена на рис. 2 б.

4. В качестве примера рассмотрим распад квазистационарных состояний в потенциальном поле

$$V(x) = \begin{cases} V_0 + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 & \text{при } x \leq a \\ V_1 - \frac{m\omega_1^2}{2} (x - x_1)^2 & \text{при } x \geq a, \end{cases}$$

где параметры  $a$  и  $x_1$  находятся из условия непрерывности потенциальной энергии и ее первой производной в точке "сшивки". Такая аппроксимация потенциальной энергии широко используется в физике деления атомного ядра. Сделав замену переменных в уравнении Шредингера  $y = x/d$ ,  $b = a/d$ ,  $y_0 = x_0/d$ ,  $y_1 = x_1/d$  и  $d^2 = \hbar/m\omega_0$ , выпишем необходимое окончательное выражение для

импульса в единицах  $\hbar/d$

$$\rho(y) = \begin{cases} \sqrt{2(E-V_0)/\hbar\omega_0 - y^2} & \text{при } y \leq b \\ \sqrt{2(E-V_1)/\hbar\omega_0 + (\omega_1/\omega_0)^2(y-y_1)^2} & \text{при } y \geq b. \end{cases}$$

В качестве примера на рис. 3 приведены результаты расчетов энергии  $E_n$  и ширины  $\Gamma_n$  квазистационарных состояний. Из приведенных результатов видно, что ширина уже третьего надбарьерного квазистационарного состояния больше расстояния между квазистационарными состояниями и линейно увеличивается с увеличением энергии.

5. Итак, в данной работе показано, как квазиклассическое приближение может быть использовано для нахождения энергии и ширины распадающихся квазистационарных состояний. Круг задач, к которым можно применить данный метод, не ограничивается рассмотренной задачей. Ближайшей задачей является изучение распада квазистационарных состояний через двугорбый барьер как с постоянной так и переменной массой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. "Наука", Москва, 1971.
2. A.Zwaan. Intensitäten im  $\alpha$ -Funkenspektrum, Thesis, Unrecht, 1929.
3. E.C.Kemble. The Fundamental Principles of Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill, 1937.
4. Дж.Хеддинг. Введение в метод фазовых интегралов. "Мир", М., 1965.
5. В.Л.Покровский, И.М.Халатников. КЭТФ, 40, 1713, 1961.
6. Д.И.Пономарев. Лекции по квазиклассике. Препринт ИТФ -53, 1967.

Подписано в печать 18/УИ-1979 г. Т-11956 Формат 60x90 1/16  
Офсетная печать Усл.п.л. 0,6 Уч.-изд.л. 0,5 Тираж 86 экз.  
Заказ № 731 Цена 5 коп. Индекс 3624 ФЭИ-944

Отпечатано на ротационной ФЭИ, г. Обнинск



5 коп.

Индекс 3624