

НИИЭФА П-В-0406



Научно-исследовательский институт
электрофизической аппаратуры
имени Д. В. Ефремова

А. К. Орлов

**ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПОЧКЕ
СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ**

Ленинград
1979

Государственный комитет по использованию
атомной энергии СССР

Научно-исследовательский институт
электрофизической аппаратуры
имени Д.Б.Ефремова

А.К.Орлов

ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Ленинград 1979

А Н Н О Т А Ц И Я

Орлов А.К. Переходный процесс в цепочке связанных резонаторов. Препринт В-0406. Л., НИИЭФА, 1979, 19 стр., с ил., цена 6 коп.

На основании метода собственных функций рассмотрены переходные процессы в цепочке связанных резонаторов при включении ВЧ-генератора и пучка. Для секции на $\pi/2$ -типа колебаний конечные результаты получены в аналитическом виде. Свойства π -структуры исследованы численно. В случае сверхпроводящей секции найдено оптимальное время задержки пучка относительно момента включения генератора. Проанализировано понятие электронной добротности.

А Б С Т Р А К Т

Orlov A.K. Transient Process in a Set of Coupled Cavities. Preprint В-0406. L., NIIÉFA, 1979, 19 p., with ill., price 6 cop.

Transient processes in a set of coupled cavities at switching the RF generator and the beam are considered on the base of the inherent function method. Finite results are analytically obtained for the section of $\pi/2$ oscillations. The numerical investigation of the π -structure properties is made. In case of the superconducting section the optimum beam delay time relative the generator switching is found. The electron Q-factor concept is analyzed.

С Научно-исследовательский институт
электрофизической аппаратуры
имени Д.И.Вавилова (НИИЭФА), 1979

О Г Л А В Л Е Н И Е

В в е д е н и е	5
1. Возбуждение секции В4-генератором	7
а. $\pi/2$ -тип колебаний	8
б. π -тип колебаний	12
2. Нагрузка секции пучком.	14
З а к л ю ч е н и е	18
Л и т е р а т у р а	19

ВВЕДЕНИЕ

В линейных ускорителях электронов обычно используется ускоряющая структура в виде диафрагмированного волновода. Однако в последние годы в связи с разработкой Лос-Аламосской мезонной фабрики [1] и созданием малогабаритных электронных ускорителей для прикладных целей [2] все чаще стала использоваться ускоряющая система, состоящая из цепочки связанных резонаторов, т.е. замкнутый диафрагмированный волновод. Для сверхпроводящих (СП) ускорителей [3] структура со стоячей волной также представляется наиболее практичным вариантом, так как в схеме с рекуперацией ВЧ-мощности возникают определенные трудности, связанные с настройкой кольца.

При включении ВЧ-генератора или пучка в резонаторной структуре возникает переходный процесс установления колебаний, характер которого зависит, естественно, от конкретных условий. Например, в ускоряющей структуре при обычной температуре время переходного процесса может составлять заметную часть длительности ВЧ-импульса. В режиме сверхпроводимости генератор работает непрерывно (или квазинепрерывно). Для таких ускорителей обычно характерна сильная токовая нагрузка и высокий к.п.д. Поэтому здесь может представлять интерес процесс выхода на стационарный режим с учетом нагрузки пучком. По указанным причинам нестационарные процессы в структуре со стоячей волной уже исследовались рядом авторов [4,5]. Характерной особенностью этих работ является использование при расчетах эквивалентной модели связанных контуров. При этом необходимо решать систему связанных дифференциальных уравнений и отыскивать характеристические корни многочленов.

Проблема изучения переходных процессов может быть сравнительно просто решена и в ряде случаев аналитически, если использовать метод собственных функций (см., например, [4]). При таком подходе поле в структуре будем определять через векторный потенциал \vec{A} : $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ и $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{A}$.

В свою очередь векторный потенциал выразим в виде суммы собственных функций:

$$\vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(z),$$

где собственный вектор $\vec{A}_{\lambda}(z)$ определяется уравнением $\Delta \vec{A}_{\lambda} + \frac{\omega_{\lambda}^2}{c^2} \vec{A}_{\lambda} = 0$ (ω_{λ} - собственная частота).

Временная амплитудная функция $q_{\lambda}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\ddot{q}_{\lambda} + 2d_{\lambda} \dot{q}_{\lambda} + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda} = \int_V \vec{j} \vec{A}_{\lambda} dV \quad (1)$$

при условии нормировки

$$\int_V \vec{A}_{\lambda}^2 dV = \frac{1}{\epsilon_0}$$

($d_{\lambda} = \frac{\omega_{\lambda}}{2Q_{\lambda}}$, d_{λ} , Q_{λ} - затухание и добротность колебаний λ -типа, которые определяются не только затуханием в стенках, но и потерями во внешних цепях).

Если произвести замену $q_{\lambda} = P_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t}$, то уравнение (1) преобразуется к виду [6]:

$$\dot{P}_2 + \alpha_2 P_2 = \frac{i}{2\omega_2} M \left(e^{i\omega_2 t} \int_V \vec{j} \vec{A}_2 dV \right), \quad (2)$$

где M - оператор усреднения по времени.

Теперь нужно определить собственные функции векторного потенциала $\vec{A}_2(z)$. Останемся на случае цепочки из идентичных резонаторов, свойства которой изучены наиболее детально (рис.1).

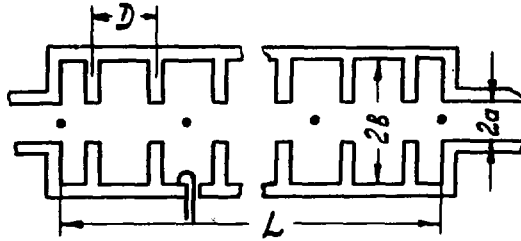


Рис.1. Геометрия системы.

Для центральной области на оси структуры в пренебрежении пространственными гармониками можно написать:

$$E_{zm} = a_m \cos \frac{\pi z m}{L}, \quad (3)$$

где $0 \leq m \leq N$ ($N = \frac{L}{D}$ - число полных ячеек в структуре; L - длина секция; D - период). Считаем, что на краях структуры стоят полуплоскости.

Отсюда

$$A_{zm} = \frac{a_m}{i\omega_m} \cos \frac{\pi z m}{L}.$$

В общем случае для определения по нормировочному условию коэффициента a_m нужно знать распределение поля не только на оси структуры, но и во всем резонаторе. Эта задача для диафрагмированного волновода обычной конфигурации решалась неоднократно. Можно использовать также экспериментальные данные. Например, для волновода имеются графики зависимости $\chi = \frac{\epsilon_0 \lambda}{\sqrt{P}}$ [7]. (ϵ_0 - амплитуда бегущей волны, P - поток мощности).

Если учесть, что косинус есть суперпозиция двух бегущих волн с мощностью P , то $\chi = \frac{a_m \lambda}{2\sqrt{P}}$ (это справедливо для всех типов колебаний за исключением $\bar{1}$, когда существенную роль играет первая отрицательная пространственная гармоника, и коэффициент $1/2$ пропадает).

Очевидно, что

$$\int_V A_2^2 dV = - \frac{1}{\epsilon_2^2} \frac{2}{\epsilon_0} 2W_0 = \frac{1}{\epsilon_0},$$

где W_0 - энергия, связанная с одной бегущей волной.

Если учесть, что $P = \frac{v_2 W_0}{L}$, тогда $a_m^2 = \frac{q \omega_m^2}{L \lambda_m^2} c$, где $q = \beta_2^2$
 ($\beta_2 = \frac{v_2}{c}$ - относительная групповая скорость)*.

1. ВОЗБУЖДЕНИЕ СЕКЦИИ ВЧ-ГЕНЕРАТОРОМ

Для возбуждения структуры от генератора поместим вблизи боковой стенки одной из ячеек (с номером K) прямоугольную петлю связи площадью S .

Считаем, что вблизи петли E_z поле имеет такое же распределение, как и в цилиндрическом резонаторе, возбуждаемом на колебаниях, независимых от z ($E_z \sim y_0 \left(\frac{v_0 z}{b} \right)$), т.е. в окрестности петли:

$$A_{zm} = \frac{a_m}{i \omega_m} y_0 \left(\frac{v_0 z}{b} \right) \cos \frac{\pi m K D}{L}.$$

Ток возбуждения зададим выражением

$$\vec{j} = j_2(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_0(t)) \delta(\vec{z} - \vec{z}_n) = j(t) \delta(\vec{z} - \vec{z}_n),$$

где $j_2(t)$ и $\varphi_0(t)$ - амплитуда тока и его фаза, которые могут меняться со временем. Дельта функция $\delta(\vec{z} - \vec{z}_n)$ характеризует пространственное положение петли.

Выполняя интегрирование по объему, получаем:

$$\int_V \vec{j} \vec{A}_m dV = j(t) \frac{a_m}{i \omega_m} \frac{v_0}{b} y_0 \cos \frac{\pi m K D}{L} = \\ = D(k, m) j(t).$$

Считая, что изменения амплитуды и фазы тока в течение одного периода малы, т.е. что они удовлетворяют условию усреднения, находим:

$$\dot{P}_m + d_m P_m = \frac{i}{2 \omega_m} D(k, m) j_2 \frac{e^{i \Delta_m t - i \varphi_0}}{2} = f(t), \quad (4)$$

где $\Delta_m = \omega_m - \omega_2$.

Решение данного уравнения, удовлетворяющее нулевому начальному условию, в общем случае имеет вид

$$P_m = e^{-d_m t} \int_0^t f(\tau) e^{d_m \tau} d\tau.$$

При постоянных j_2 и φ_0

$$P_m = \frac{i}{4 \omega_m} D(k, m) j_2 e^{-i \varphi_0} \frac{e^{i \Delta_m t} - e^{-d_m t}}{d_m + i \Delta_m} \quad (5)$$

Для групповой скорости используется нетрадиционное обозначение v_2 .

$$\begin{aligned}
 & \text{и} \\
 & P_m e^{-i\omega_m t} + \text{к.с.} = \frac{D(k, m)}{2\omega_m} \frac{j_2}{\alpha_m^2 + \Delta_m^2} \left\{ \alpha_m \left[\sin(\omega_2 t + \varphi_0) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - e^{-\alpha_m t} \sin(\omega_m t + \varphi_0) \right] + \Delta_m \left[\cos(\omega_2 t + \varphi_0) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - e^{-\alpha_m t} \cos(\omega_m t + \varphi_0) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Наиболее быстро с номером m изменяется множитель $\frac{1}{\alpha_m^2 + \Delta_m^2}$, который и определяет сходимость по индексу m ; остальные множители типа $1/\omega_m$ и α_m в пределах полосы пропускания меняются слабо. Поэтому в амплитудных коэффициентах будем производить отсчет от синхронной частоты ω_c , на которой фазовая скорость волны совпадает со скоростью частиц, и положим приближенно $\omega_m \approx \omega_c$; $\alpha_m = \alpha$.

Поле на оси структуры

$$\begin{aligned}
 E_z = H \sum_{m=0}^N \frac{1}{\alpha^2 + \Delta_m^2} & \left\{ \alpha \left[\cos(\omega_2 t + \varphi_0) - e^{-\alpha t} \cos(\omega_m t + \varphi_0) \right] - \right. \\
 & \left. - \Delta_m \left[\sin(\omega_2 t + \varphi_0) - e^{-\alpha t} \sin(\omega_m t + \varphi_0) \right] \right\} \times \\
 & \times \cos \frac{\pi z m}{L} \cos \frac{\pi m k}{N},
 \end{aligned} \quad (6)$$

где $H = \frac{j_2}{2\omega_c^2} \alpha_c \frac{V_0}{B} \gamma_1(V_0)$.

В одноволновом приближении при $\omega_2 = \omega_c$

$$E_z = \frac{H}{\alpha} \left(1 - e^{-\alpha t} \right) \cos(\omega_2 t + \varphi_0) \cos \frac{\pi z \omega_c}{L} \cos \frac{\pi m k}{N}. \quad (7)$$

Таким образом, задача свелась к суммированию тригонометрических рядов. Формула (6) применима для любого типа колебаний, однако в разных конкретных случаях способы суммирования различны.

а. $\frac{J}{2}$ — тип колебаний

На такой рабочей волне синхронная частота соответствует центру дисперсионной кривой $\omega_m = \omega(\beta_m)$. В линейном приближении

$$\omega_m = \omega_c + \frac{d\omega}{d\beta_m} \Delta\beta_m = \omega_c + \frac{\pi v_2'}{L} (m - m_c) = \omega_c + \frac{\pi v_2' \pi}{L}.$$

Считаем, что число ячеек N в структуре велико и линейное приближение дает малую погрешность в широком диапазоне изменения π . В случае, когда ω_2 точно совпадает

с ω_c , получаем $\Delta_m = \frac{\pi v_2}{L} n$, $-m_c \leq n \leq N - m_c$.

Произведя замену $d_1 = \frac{dL}{\pi v_2}$, приходим окончательно к выводу, что нужно просуммировать ряды вида:

$$\sum_{n=-m_c}^{N-m_c} \frac{\cos \frac{\pi z}{L} (\omega_c + \pi) \cos \frac{\pi \kappa D}{L} (m_c + \pi)}{\pi^2 + d_1^2} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left[(\omega_c + \frac{\pi v_2}{L} n) t + \varphi_0 \right] \\ \pi \sin \left[(\omega_c + \frac{\pi v_2}{L} n) t + \varphi_0 \right] \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\}.$$

Используя формулы преобразования тригонометрических функций, получаем, что

$$\sigma_1 = \frac{1}{4} \sum_{n=-m_c}^{N-m_c} \frac{1}{\pi^2 + d_1^2} \sum_{i=1}^4 (\cos \varphi_i \cos \pi \mu_i - \sin \varphi_i \sin \pi \mu_i), \quad (8)$$

где

$$\varphi_1 = \omega_c t + \varphi_0 + \frac{\pi}{L} (z + \kappa D) m_c; \quad \mu_1 = \frac{\pi}{L} (v_2 t + z + \kappa D);$$

$$\varphi_2 = \omega_c t + \varphi_0 - \frac{\pi}{L} (z + \kappa D) m_c; \quad \mu_2 = \frac{\pi}{L} (v_2 t - z - \kappa D);$$

$$\varphi_3 = \omega_c t + \varphi_0 + \frac{\pi}{L} (z - \kappa D) m_c; \quad \mu_3 = \frac{\pi}{L} (v_2 t + z - \kappa D);$$

$$\varphi_4 = \omega_c t + \varphi_0 - \frac{\pi}{L} (z - \kappa D) m_c; \quad \mu_4 = \frac{\pi}{L} (v_2 t - z + \kappa D).$$

При $m_c = -\frac{N}{2}$ ряд по $\sin \pi \mu_i$ в силу нечетности дает 0; ряд по $\cos \pi \mu_i$ вычисляется [8, с.397]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 + d_1^2} \cos \pi \mu_i = \frac{\pi}{d_1} \frac{\operatorname{ch} d_1 (\mu_i - \pi)}{\operatorname{sh} d_1 \pi} = \frac{\pi}{d_1} f_1(\mu_i)$$

$$0 \leq \mu_i \leq 2\pi.$$

Следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{4 d_1} \sum_{i=1}^4 \cos \varphi_i f_1(\mu_i). \quad (9)$$

Вторая сумма может быть получена дифференцированием по параметру $\frac{\pi v_2 t}{L}$ или, что то же самое, по u_i :

$$\sigma_2 = -\frac{d\sigma_1}{d\left(\frac{\pi v_2 t}{L}\right)} = -\sum_{i=1}^4 \frac{\pi}{4d_i} \cos \varphi_i \frac{d\varphi_i(u_i)}{du_i}. \quad (10)$$

Сразу же отметим, что при вычислении оставшихся сумм, содержащих $\cos(\omega_2 t + \varphi_0)$ и $\sin(\omega_2 t + \varphi_0)$, можно использовать формулы (9) и (10), полагая в аргументе u_i значения $v_2 = 0$. Введем обозначение $u_i/v_2 = 0 = \tilde{u}_i$ и запишем

$$E_z = \frac{H}{4} \frac{L}{v_2} \frac{e^{-d_1^2 x}}{\sin d_1 \sqrt{x}} \sum_{i=1}^4 \cos \varphi_i \left[\exp(d_1 \tilde{u}_i) - e^{-d_1 t} \times \right. \\ \left. \times \exp(d_1 u_i) \right] = \frac{H}{4} \frac{L}{v_2} \sum_{i=1}^4 \cos \varphi_i F_i. \quad (11)$$

Выражение в квадратных скобках содержит периодические с периодом $(0, 2\pi)$ функции. Их значения для аргументов, выходящих из основного периода и, в частности, при отрицательных значениях, определяются сдвигом аргумента на $2\pi n$ (правило четности-нечетности неприменимо). Проанализируем картину установления колебаний в цепочке для частного случая, когда $k=0$, т.е. петля возбуждения расположена в начале секции.

При временах $t < \frac{L}{v_2}$ $F_1 = F_3 = 0$

$$F_2 = F_4 = \begin{cases} 2 \exp\left(-\frac{d_1 z}{v_2}\right) & z < v_2 t \\ 0 & z > v_2 t \end{cases}$$

Поэтому

$$E_z = \frac{H}{v_2} \frac{L}{2} \begin{cases} \exp\left(-\frac{d_1 z}{v_2}\right) \cos\left(\omega_2 t + \varphi_0 - \frac{\pi \omega_2 z}{L}\right) & z < v_2 t \\ 0 & z > v_2 t \end{cases}. \quad (12)$$

т.е. поле представляет бегущую вправо волну, которая экспоненциально затухает с увеличением координаты z . Интересно, что в первой ячейке ($z=0$) амплитуда не зависит от омического затухания, а ее величина пропорциональна $1/v_2$.

В промежутке $\frac{L}{v_2} < t < \frac{2L}{v_2}$ следует рассмотреть две области:

$$a) v_2 t + z < 2L, \text{ где } F_1 = F_3 = 0; F_2 = F_4 = 2 \exp\left(-\frac{d_1 z}{v_2}\right),$$

т.е. поле по-прежнему определяется формулой (12), так как в эту область значений отраженная волна еще не дошла.

$$b) \frac{1}{2} \omega t + z > 2L, \text{ где } F_1 = F_3 = 2 \exp\left(\frac{\alpha z}{v_2} - 2\alpha_1 \pi\right);$$

$$F_2 = F_4 = 2 \exp\left(-\frac{\alpha z}{v_2}\right).$$

Члены с F_1 и F_3 соответствуют отраженным волнам:

$$E_z = H \frac{L}{v_2} \left\{ \exp\left(-\frac{\alpha z}{v_2}\right) \cos\left(\omega_c t + \varphi_0 - \frac{\pi m_c z}{L}\right) + \exp\left(\frac{\alpha z}{v_2} - 2\alpha_1 \pi\right) \cos\left(\omega_c t + \varphi_0 + \frac{\pi m_c z}{L}\right) \right\}. \quad (13)$$

Не составляет труда получить аналогичные выражения и для больших значений t . Однако перейдем к асимптотическому случаю, т.е. стационарному состоянию.

Обращаясь к формуле (II), видим, что экспонента $\exp(\alpha_1 \omega_c t)$ максимальна в конце периода периодичности при $\omega_c t = 2\pi$. Поэтому затухающий со временем член будет пренебрежимо малым при условии

$$\omega_c t - \alpha_1 2\pi \gg 1, \text{ что соответствует временам}$$

$$t \gg \frac{1}{\alpha} + \frac{2L}{v_2}. \quad (14)$$

Конечно даже при комнатных температурах $\frac{1}{\alpha} > \frac{2L}{v_2}$. Для сверхпроводящих секций слагаемое $\frac{1}{\alpha}$ становится полностью пренебрежимым. Поэтому можно считать, что время переходного процесса $t_n \approx \frac{1}{\alpha}$

В стационарном состоянии

$$E_z = \frac{H L}{2 v_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \pi} \left[e^{\frac{\alpha_1 \pi z}{L}} \cos\left(\omega_c t + \varphi_0 + \frac{\pi m_c z}{L}\right) + e^{-\frac{\alpha_1 \pi z}{L}} \cos\left(\omega_c t + \varphi_0 - \frac{\pi m_c z}{L}\right) \right]. \quad (15)$$

Формулой (15) подтверждается характерное для $\sqrt{2}$ типа колебаний свойство независимости набегу фазы волны на ячейку от омического затухания. Нетрудно видеть, что при малом значении α_1

$$E_z \approx \frac{H}{\alpha} \left[\cos(\omega_c t + \varphi_0) \cos \frac{\pi m_c z}{L} - \frac{\alpha_1 \pi z}{L} \sin(\omega_c t + \varphi_0) \sin \frac{\pi m_c z}{L} \right],$$

что совпадает при $\alpha_1 \rightarrow 0$ с формулой одноволнового приближения (?). Поэтому можно сказать, что одноволновое приближение применимо с высокой степенью точности, если

$$\alpha_1 \ll 1, \text{ т.е. время заполнения } \frac{L}{v_2} \text{ намного меньше времени омического затухания } \frac{1}{\alpha}.$$

б. $\bar{\pi}$ -тип колебаний

Для определения расстройки Δ_m в данном случае разложим дисперсионную кривую

$$\omega_m^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + K_c \cos \frac{\bar{\pi} m}{N}}$$

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} \approx 1 + \frac{K_c}{2} - \frac{K_c}{2} \frac{\bar{\pi}^2 (m-N)^2}{N^2}.$$

Здесь K_c означает коэффициент связи, который можно определить через групповую скорость, например, в точке $\frac{\bar{\pi}}{2}$: $\frac{\omega_0 K_c}{2} = \frac{v_2'}{D}$.

Поэтому

$$\Delta_m = -\frac{v_2'}{2L} \frac{\bar{\pi}^2}{N} (m-N)^2 = -\chi \pi^2. \quad (16)$$

Сначала рассмотрим члены соответствующие стационарному случаю и просуммируем ряд

$$\sum_{m=0}^N \frac{1}{d^2 + d_m^2} \cos^2 \frac{\bar{\pi} z m}{L} \cos^2 \frac{\bar{\pi} m k D}{L} = \frac{1}{2f^2} \sum_{\pi=0}^N \frac{1}{\pi^4 + d_2^2} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^2 \left(\cos^2 u_{i,N} \cos^2 u_{i,\pi} + \sin^2 u_{i,N} \sin^2 u_{i,\pi} \right),$$

где

$$d_2 = \frac{dL}{v_2'} \frac{2N}{\bar{\pi}^2} = d_1 \frac{2N}{\bar{\pi}}; \quad u_1 = \frac{\bar{\pi}}{L} (z + kD);$$

$$u_2 = \frac{\bar{\pi}}{L} (z - kD).$$

Здесь параметр d_2 , характеризующий также, как и d_1 , степень смешивания колебаний, отличается от d_1 в $\frac{2N}{\bar{\pi}}$ раз и зависит от числа ячеек в отличие от колебаний $\frac{\bar{\pi}}{2}$ типа.

Ряды вида

$$\sum_{\pi=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi x}{\pi^4 + d_2^2} = f_1 \quad \text{и} \quad \sum_{\pi=1}^{\infty} \frac{\pi^2 \cos^2 \pi x}{\pi^4 + d_2^2} = f_2$$

легко суммируются при переходе в область комплексного переменного. Введем функцию

$$z = z_1 + iz_2 = f_2 - id_2 f_1 = \sum_{\pi=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi x}{\pi^2 + id_2} = \frac{\bar{\pi}}{2\sqrt{d_2}} e^{i\pi/4} \times$$

$$\times \frac{ch\sqrt{d_2} e^{i\frac{\pi}{4}} (x-\pi)}{sh\sqrt{d_2} e^{i\pi/4}} - \frac{1}{2id_2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

В раскрытом виде получаем

$$f_2 = z_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2d_2}} \frac{\operatorname{sh} \sigma \cos \gamma - \operatorname{sh} \gamma \cos \sigma - \operatorname{ch} \sigma \sin \gamma + \operatorname{ch} \gamma \sin \sigma}{\operatorname{ch} \sqrt{2d_2} \pi - \cos \sqrt{2d_2} \pi}; \quad (17)$$

$$f_1 = -\frac{1}{d_2} z_2 = -\frac{1}{2d_2^2} \frac{\pi}{2d_2 \sqrt{2d_2}} \frac{\operatorname{sh} \sigma \cos \gamma - \operatorname{sh} \gamma \cos \sigma + \operatorname{ch} \sigma \sin \gamma - \operatorname{ch} \gamma \sin \sigma}{\operatorname{ch} \sqrt{2d_2} \pi - \cos \sqrt{2d_2} \pi},$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{d_2}{2}} x$; $\gamma = \sqrt{2d_2} \left(\frac{x}{2} - \pi \right)$.

Для суммирования ряда по синусам приходится использовать численные методы. На рис. 2 приведены значения функций

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n^4 + d_2^2} \quad \text{и} \quad F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin \pi n x}{n^4 + d_2^2} = -d_2^2 F_1 / dx^2,$$

вычисленные для различных значений d_2 в пределах области периодичности. Из-за того, что F_1 и $F_2 \neq 0$, в отличие от случая колебаний $\frac{\pi}{2}$ типа, поле в секции в установившемся режиме имеет вид

$$E_z \sim a(z) \cos \left(\omega_c t + \varphi_0 - \frac{\pi z}{D} \right) + b(z) \sin \left(\omega_c t + \varphi_0 - \frac{\pi z}{D} \right),$$

что соответствует волне с переменной фазовой скоростью.

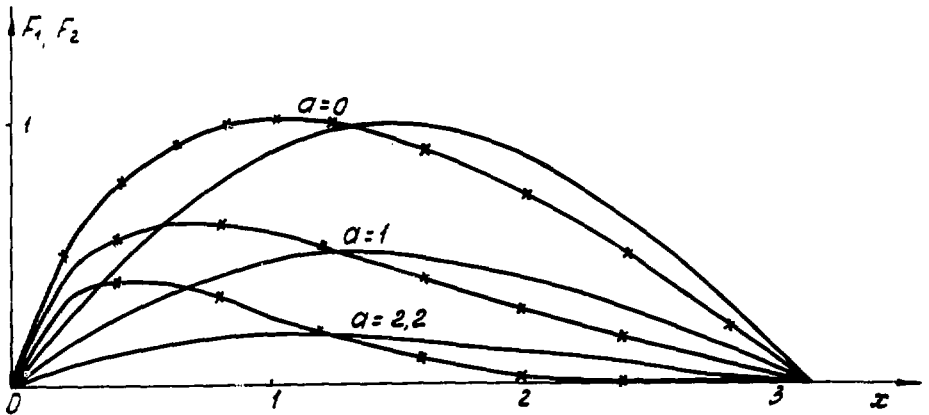


Рис. 2. Графики функций $F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x}{n^4 + a^2}$ (—) и $F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin \pi n x}{n^4 + a^2}$ (****)

Появление сдвига фазы $\Delta\phi$ и искажение рабочего типа колебаний вследствие потерь в структуре отмечалось в работе [1]. Чтобы величина $\Delta\phi$ была малой, необходимо выполнить условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^4 + \alpha_2^2} \gg \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\pi}{n^4 + \alpha_2^2},$$

которое выполняется при $\alpha_2 \ll 1$. При этом время установления $t_n \approx 1/\alpha_2$.

2. НАГРУЗКА СЕКЦИИ ПУЧКОМ

Представим, что в некоторый момент $t = t_0$ последовательность сгустков заполняет мгновенно всю секцию. Скорость сгустков $-v$, расстояние между ними $-\Lambda$. Считаем, что в момент t_0 распределение зарядов является четной функцией Ξ , т.е. сгустки симметричны, а центр одного из них совпадает с началом структуры. Поэтому разложение плотности заряда в ряд Фурье имеет вид

$$\rho(\vec{z}, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \rho_{\ell} \cos \frac{2\pi\ell}{\Lambda} \left[z - v(t - t_0) \right] \delta(x) \delta(y). \quad (18)$$

Уравнение для амплитуды поля

$$\begin{aligned} \dot{P}_m + d_m P_m &= \frac{iv}{2\omega_m} M e^{i\omega_m t} \frac{d_m}{i\omega_m} \times \\ &\times \int_0^L \sum_{\ell=0}^{\infty} \rho_{\ell} \cos \frac{2\pi\ell}{\Lambda} \left[z - v(t - t_0) \right] \cos \frac{\pi m z}{L} dz. \end{aligned} \quad (19)$$

Для правой части этого выражения характерно, что интеграл усреднения

$$M e^{i\omega_m t} \cos \frac{2\pi\ell}{\Lambda} \left[z - v(t - t_0) \right] \text{ принимает максимальное значение, равное } \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\pi i \ell}{\Lambda} (z + vt_0) \right] \text{ на частоте}$$

$$\omega_m = \frac{2\pi\ell v}{\Lambda} = \omega_{\ell}, \quad (20)$$

которая совпадает с частотой следования сгустков или превышает ее в ℓ раз. В противном случае интеграл усреднения нужно домножить на множитель

$$\exp(i\Delta_m t) (\Delta_m = \omega_m - \omega_{\ell}).$$

Интеграл взаимодействия

$$\int_0^L e^{i \frac{2\pi\ell}{\Lambda} (z + vt_0)} \cos \frac{\pi m z}{L} dz \text{ равен}$$

$\frac{1}{2} L e^{i \frac{2\pi\ell v t_0}{\Lambda}}$ при условии $\frac{2\pi\ell}{\Lambda} = \frac{\pi m}{L}$, что в сочетании с равенством (20) дает

$$\gamma = \frac{\omega_{\ell}}{\pi m_2 / L} = \frac{\omega_{\ell}}{\beta m_2}, \quad (21)$$

т.е. скорость частиц должна совпадать со скоростью волны.

В общем случае

$$\int_0^L e^{i \frac{2\pi c}{\lambda} (z + vt_0)} \cos \frac{\pi m z}{L} dz = \frac{1}{2} k_m^{m_c}, \quad (22)$$

где

$$k_m^{m_c} = \begin{cases} L & m = m_c \\ \frac{(-1)^{m-m_c} - 1}{-i\pi(m-m_c)/L} & m \neq m_c. \end{cases}$$

Полезно обратить внимание на то обстоятельство, что при $m = m_c$ $k_m^{m_c}$ вещественно, а при $m \neq m_c$ - мнимо.

Поле, наведенное пучком,

$$\begin{aligned} E_z = & \frac{d_c^2}{\omega_c^2} \frac{\rho_c v}{4} \left\{ \frac{L}{d} \cos \omega_c \tilde{z} (1 - e^{-d\tilde{z}}) \cos \frac{\pi m_c z}{L} - \right. \\ & - \sum_{m \neq m_c} \frac{i k_m^{m_c}}{d^2 + \Delta_m^2} \left[d (\sin \omega_c \tilde{z} - e^{-d\tilde{z}} \sin \omega_m \tilde{z}) - \right. \\ & \left. \left. - \Delta_m (\cos \omega_c \tilde{z} - e^{-d\tilde{z}} \cos \omega_m \tilde{z}) \right] \cos \frac{\pi m z}{L} \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где $\tilde{z} = z - t_0$.

Ряды, входящие в это выражение, сходятся более быстро, чем в формулах (6), что объясняется протяженным характером возбуждения (сгустки размещены по всей секции).

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ суммы можно привести к замкнутому виду, например:

$$\begin{aligned} S_1 = & - \sum_{m \neq m_c} \frac{i k_m^{m_c}}{d^2 + \Delta_m^2} \sin \omega_m \tilde{z} \cos \frac{\pi m z}{L} = - \frac{2L}{\pi \left(\frac{\sqrt{v_2}}{L} \right)^2} \times \\ & \times \sum_{i=1}^2 \cos^2 \varphi_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\varphi_i}{2n+1} \frac{1}{(2n+1)^2 + d_1^2}. \quad (24) \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)u_i}{(2n+1)[(2n+1)^2 + \alpha_1^2]} = \frac{\pi}{4\alpha_1^2} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_1(u_i - \pi/2)}{\operatorname{ch} \alpha_1 \pi/2} \right] = \quad (25)$$

$$= \frac{\pi}{4\alpha_1^2} G_3(u_i), \quad 0 \leq u_i \leq \pi.$$

Здесь обозначение u_i совпадает с символом, принятым в формулах (7) для случая $\kappa = 0$; $z = \tilde{z}$.

Другая сумма получается непосредственным дифференцированием:

$$-\sum_{m \neq m_c} \frac{i k m (m - m_c)}{\alpha^2 + \Delta_m^2} \cos \omega_m \tilde{z} \cos \frac{\pi m z}{L} = \frac{d S_1}{d \left(\frac{\omega_2 \pi z}{L} \right)}.$$

При $\theta = \pi$ суммы находятся численно. Как и при возбуждении от генератора, погрешность одноволнового приближения мала при $\alpha_{1,2} \ll 1$.

т.е. $\frac{1}{d} \gg \frac{L}{v_2}$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{d} \gg \frac{L N}{v_2}$ при $\theta = \pi$.

Эти условия выполняются для ускорителя с СИ секциями, для которого можно считать

$$E_z = \frac{\alpha_c^2}{\omega_c^2} \frac{v_2^2}{4} \frac{L}{a} \cos \omega_c \tilde{z} (1 - e^{-\alpha \tilde{z}}) \cos \frac{\pi m_c \tilde{z}}{L}. \quad (26)$$

Оценим долю, которое может возбудить пучок со средним током \bar{I}_0 в сверхпроводящей секции на π -типе. Если слоты хорошо сформированы, то $\beta_c v = 2 \bar{I}_0$.

В соответствии с условием нормировки можем записать, что энергия в одной ячейке

$$W = -\frac{\omega_c^2}{2N}.$$

В свою очередь, $Q = \frac{\omega W}{P_s}$; $P_s = \frac{U^2}{2R_{ш}}$ (P_s , $U = a_c k$, $R_{ш}$ - потери в ячейках, напряжение и шунтовое сопротивление на ячейку длиной h). Поэтому

$$\alpha_c^2 = -\frac{\omega_c^2}{N} \frac{R_{ш}}{Q} \frac{1}{h^2} \quad \text{и} \quad E_z = -E_0 \cos \omega_c \tilde{z} (1 - e^{-\alpha \tilde{z}}) \cos \frac{\pi z}{D}, \quad (27)$$

где $E_0 = \frac{\bar{I}_0 R_{ш}}{h}$.

Видим, что в моменты времени $\tilde{z} = \frac{2\pi n}{\pi}$, когда слоты находятся в центрах ячеек

$z = 2\pi D$, поле является максимально тормозящим. При комнатной температуре для

сверхпроводящего волновода $\frac{R_{ш}}{h} \approx 0,5 \text{ мОм/см}$.

При амплитуде удельной добротности 10^4 и токе $\bar{I}_0 = 10^{-5} \text{ А}$ амплитуда поля, наведенного пучком, составляет 500 кВ/см. Отсюда следует, что при выключенном генераторе

пучок нельзя пропускать через СП секции по следующим причинам:

1. Пучок наведет в секции поле, которое превышает пробное значение. Такое может случиться, если энергия частиц достаточно велика.

2. При умеренных энергиях, как например в СП ускорителе на несколько МэВ, может наблюдаться сильная модуляция по энергии и плотности пучка.

Дело в том, что сначала при включении пучка наведенное поле мало и первые частицы пролетят через секцию. Однако с ростом t тормозящее поле будет возрастать, что приведет к торможению или повороту частиц. При этом поле начнет уменьшаться и опять появится возможность для пролета некоторых частиц через секцию и т.д.

При включенном генераторе ситуация изменится, так как полное поле является суперпозицией полей E_r и пучка E_n :

$$E = \left[E_r \cos(\omega_c t + \varphi_0) (1 - e^{-\alpha t}) - E_n \cos \omega_c (t - t_0) \times \right. \\ \left. \times (1 - e^{-\alpha(t-t_0)}) \right] \cos \frac{\pi m c z}{L}. \quad (28)$$

Согласно экспериментальным данным рабочее значение напряженности поля E в структуре не может превышать ~ 30 кВ/см, т.е. $E_r \approx 530$ кВ/см. Естественно, что при таком большом значении E_r задержка пучка по отношению к моменту запуска генератора должна быть незначительной. Время задержки можно определить следующим образом. Допустим, что генератор включается в момент $t=0$. Тогда в момент включения пучка t_0 поле в секции

$$E = E_r (1 - e^{-\alpha t_0}), \quad \text{а при } t > t_0$$

$$E = E_r (1 - e^{-\alpha t}) - E_n \left[1 - e^{-\alpha(t-t_0)} \right].$$

Исходя из требования, чтобы квадратичное отклонение от стационарного значения

$$N = \int_{t_0}^{\infty} \left[E - (E_r - E_n) \right]^2 dt = \frac{(E_r e^{-\alpha t_0} - E_n)^2}{2\alpha}$$

было минимальным:

$$\frac{dN}{d(\alpha t_0)} = \frac{-2(E_r e^{-\alpha t_0} - E_n) E_n e^{-\alpha t_0}}{2\alpha} = 0,$$

получаем

$$e^{-\alpha t_0} = \frac{E_n}{E_r}. \quad (29)$$

При таком значении t_0 ускоряющее поле постоянно по амплитуде и равно $E_r - E_n$ при любых $t > t_0$.

Из формулы (28) следует, что время переходного процесса в структуре определяется коэффициентом α , т.е. омическим затуханием в стенках резонатора и во внешних цепях связи.

Этот вывод несколько отличается от сведений по данному вопросу, приведенных в работе [9], с.159, где утверждается, что время установления непосредственно зависит от ускоряемого тока. Этот результат основан на формальном введении понятия электронной добротности $Q_3 = \frac{\omega W}{P_{эл}} = \frac{\omega W}{I U}$, с помощью которого нагруженная добротность определяется формулой:

$$\frac{1}{Q_H} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}} + \frac{1}{Q_{эл}}$$

где Q_0 - собственная добротность резонатора;

$Q_{вн}$ - добротность, определяемая внешними потерями.

Далее по аналогии с обычной теорией радиотехнических цепей полагается, что время установления, в течение которого поле меняется по амплитуде в e раз

$$t_{уст} = \frac{2Q_H}{\omega}$$

Некорректность такого рассуждения состоит в том, что электронная добротность в отличие от Q_0 и $Q_{вн}$ зависит от напряженности поля, а, следовательно, в нестационарном режиме является функцией времени $Q_3 \sim E(t)$. С учетом этого обстоятельства из уравнения (2) получаем

$$\dot{P} + \frac{\omega}{2Q_H} P = \dot{P} + \left(\alpha + \frac{gI}{P} \right) P = \dot{P} + \alpha P + gI = f.$$

Решение этого уравнения, как известно, изменяется со временем по закону $e^{-\alpha t}$, т.е. ток в показатель экспоненты не входит, а присутствует в виде амплитудного множителя. Зависимость $t_{уст}$ от тока может быть косвенной в том смысле, что оптимальное значение коэффициента связи и величина $Q_{вн}$ определяется ускоряемым током, но это другая сторона вопроса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, расчет переходных процессов в секции по методу собственных функций позволяет получить ряд конечных результатов в аналитическом виде. В частности, на $\frac{I}{2}$ -типе колебаний наблюдается картина установления поля, аналогичная процессу в длинной линии. Для анализа характеристик \bar{J} -структуры необходимо выполнить численное суммирование рядов. Как и ожидалось, в СП секции время установления определяется основной гармоникой. Задержку t_0 пучка относительно момента включения генератора целесообразно брать на основании соотношения

$$t_0 = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{E_{п}}{E_r}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Knapp E.A., Knapp B.C., Potter J.M. Standing wave high energy linear accelerator structures. Rev.Sci.Instrum., 1968, v.39, p.979.
2. Takio Kikuchi, Koji Takata. Electron acceleration by an alternating periodic structure. Jap.J.Appl.Phys., 1970, v.9, No.6, p.679.
3. Suelzle L.R. Status of the 2-GeV superconducting linac. IEEE Trans. on NS, 1971, v.NS-18, p.146.
4. Linear Accelerators. Под ред. Lapostolle P. and Septier A. Amsterdam, 1970.
5. Nishikawa T. Study of field distribution and beam loading in proton linacs at high energy. IEEE Trans. on NS, 1965, v.NS-12, No.3, p.630.
6. Орлов А.К., Рябцов А.В. Влияние несимметричных ВЧ-колебаний в резонаторе накопителя на устойчивость поперечного движения частиц. "Атомная энергия", 1969, т.27, № 1, с.23.
7. Вальднер О.А., Собенин Н.П., Зверев Б.В., Шедрин И.С. Справочник по диафрагмированным волноводам. М., Атомиздат, 1977.
8. Заездний А.М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. М.-Л., Госэнергоиздат, 1961.
9. Диденко А.Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. М., "Сов.радио", 1973.

А.К.Орлов

ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Заказ № 76/467. Рукопись поступила на издание 22/VI 1978 г.
 Формат бумаги 60x90¹/₈. Уч.-изд.л. 0,6. Отпечатано 125 экз.
 Ротапринт НИИЭФА. Цена 6 коп. Индекс 3624. Т-02921 19/1 1979 г.

Ответственная за выпуск Л.И.Шукатурова



