ФЭИ-962

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

SU 80 04368

В. С. ФЕДОТОВСКИЙ

# О гидродинамической инерционности и демпфировании колебаний стержневых элементов и оболочек в ограниченных объемах, заполненных жидкостью

Обнинск — 1979

ФЭИ - 962

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.С.Федотовский

# О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ИНЕРЦИОННОСТИ И ДЕМПФИРОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ОБОЛОЧЕК В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЪЕМАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Обнинск - 1979

УДК – 533.6.013.42

М – 17

## Аннотация

Рассмотрены колебания круглых цилиндрических стержней в жесткой эксцентричной оболочке, заполненной жидкостью. Определены нелинейности присоединенной массы и гидродинамического демпфирования. Рассмотрены малые поступательные и крутильные колебания призматических стержней в ограниченных объемах и даны оценки присоединенных масс, присоединенных моментов инерции и соответствующих коэффициентов демпфирования. Приводятся оценки присоединенных масс и демпфирования для цилиндрической оболочки, колеблющейся в ограниченном объеме жидкости.

## Введение

Большинство конструктивных элементов атомных энергетических установок, подверженных вибрациям, соприкасаются с жидкой средой или омываются скоростным потоком жидкости. Как известно, жидкость, окружающая колеблющиеся конструкции, оказывает существенное инерционное и демпфирующее воздействие на их колебания. Наиболее распространенными конструктивными элементами атомного энергетического оборудования являются стержневые элементы (твэлы, кассеты, стержни управления и т.п.) различных геометрических форм: круговые стержни, стержни с оребрением, призматические стержни, пластинчатые стержни и т.п. На практике обычно используются стержневые системы с относительно малыми расстояниями между элементами или одиночные стержни, заключенные в замкнутые полости с малым зазором, заполненным протекающей или неподвижной жидкостью.

Наиболее характерной для рассматриваемого круга задач является задача об изгибных колебаниях круглого упругого стержня, окруженного концентрической оболочкой.

Задачу о колебаниях цилиндрического стержня внутри замкнутой концентрической полости решали в акустическом приближении Кито [I], Чжень и Вамбсганс [2]. Для несжимаемой жидкости решения [I] и [2] дают известную формулу Стокса [3] для присоединенной массы идеальной жидкости

$$m = \pi \rho a^2 \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2}, \qquad (I)$$

где $a$ – радиус стержня, $b$ – радиус оболочки.

Влияние вязкости жидкости на присоединенную массу также исследовалось в работах Кито [4] и Чженя и др. [5] и b [6]. Было показано, в частности, что присоединенная масса вязкой жидкости может существенно (на порядок) превосходить присоединенную массу идеальной жидкости. Следует отметить, однако, что эффект сильного влияния вязкости на присоединенную массу оказывается только для низкочастотных колебаний стержня, находящегося в малостесненных объемах жидкости. В большинстве практических случаев влиянием вязкости на присоединенную массу можно пренебречь. Кроме того, так как обычно характерный размер области занятой жидкостью существенно меньше длины звуковой волны, а скорость звука существенно больше скорости колебаний, то решения, полученные на основе потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости, обеспечивают обычно вполне достаточную точность расчета присоединенных масс.

Другой весьма важной характеристикой колебательной системы является гидродинамическое демпфирование.

Для круглого стержня, колеблющегося в концентрической оболочке, эта задача решалась, например, в [5] и [6] для неподвижной жидкости и в [7] для случая обтекания стержня продольным турбулентным потоком. В [6] было показано, что коэффициент гидродинамического демпфирования колебаний определяется следующим образом:

$$\xi = \frac{4\pi\mu a}{\sqrt{2\nu/\omega}} \frac{(b^4 + a^3 b)}{(b^2 - a^2)^2}, \qquad (2)$$

где $\nu$ - кинематическая вязкость жидкости, $\omega$ - круговая частота колебаний стержня. Численно совпадающий с (2) результат был получен и в работе [5], отличающийся, однако, чрезвычайной громоздкостью. В [7] была разработана математическая модель демпфирования колебаний стержня в продольном турбулентном потоке, основанная на двухслойной модели турбулентного потока, и получена формула

$$\xi = \frac{4\pi\mu a}{\sqrt{2\nu/\omega}} \frac{(b^4 + a^3 b)}{(b^2 - a^2)^2} \cdot \frac{1 + \exp(-2\eta/\delta)}{1 - \exp(-2\eta/\delta)}, \qquad (3)$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ - толщина колеблющегося пограничного слоя на твердой поверхности, $\eta$ - толщина гидродинамического пограничного слоя. В работе [8] приведены экспериментальные данные для колебаний цилиндрического стержня, окруженного концентрической оболочкой, подтверждающие эту модель.

Большой практический интерес представляют более сложные случаи колебаний стержня некруглого поперечного сечения, крутильные колебания элементов, погруженных в жидкость или омываемых потоком, колебания оболочек, содержащих жидкость и омываемых потоком жидкости, и т.п. Динамические свойства таких систем могут быть определены с достаточной точностью из элементарных расчетов. В качестве нескольких примеров рассмотрим поступательные и крутильные колебания призматических стержней и найдем присоединенную массу и присоединенный момент инерции. Рассмотрим также колебания цилиндрической оболочки, окруженной твердой концентрической стенкой, зазор между которыми заполнен жидкостью. Для таких элементов достаточно просто рассчитывается и гидродинамическое демпфирование.

В общем случае, при движении тела в идеальной жидкости поле скорости определяется гидродинамическим потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа и граничным условиям на твердых поверхностях. В простейшем случае колебаний круглого стержня в концентрической оболочке, заполненной жидкостью, этот потенциал легко находится. В других случаях отыскание потенциала скорости может представлять значительные трудности. В этом случае большинство исследователей прибегают к численному решению задач на ЭВМ [9, 10].

Присоединенная масса жидкости, как известно, определяется кинетической энергией жидкости

$$m = 2E / u^2, \tag{4}$$

где $u$ – мгновенная скорость тела, $E$ – мгновенная кинетическая энергия жидкости, окружающей тело. При колебаниях круглого стержня в концентрической оболочке кинетическая энергия определяется из поля тангенциальной и радиальной составляющих скорости

$$E = \frac{1}{2}\rho \int\limits_V (v_r^2 + v_\theta^2)\, r\,dr\,d\theta, \tag{5}$$

где

$$v_r(r,\theta) = -u \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)\cos\theta, \tag{6}$$

$$v_\theta(r,\theta) = u \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)\sin\theta. \tag{7}$$

Как видно из (6) и (7) распределения радиальной и тангенциальной составляющих скорости существенно зависят от величины зазора между стержнем и оболочкой.

Если ограничиться рассмотрением относительно малых величин зазоров ( $b - a \ll a$ ), то, очевидно, вклад радиальной составляющей поля скорости в кинетическую энергию жидкости будет малым. Кроме того, распределение тангенциальной составляющей скорости (7) слабо изменяется по сечению зазора. Поэтому, учитывая вклад в кинетическую энергию только тангенциальной скорости и считая профиль тангенциальной скорости плоским, рассмотрим задачу о присоединенной массе жидкости в таком приближении. При движении цилиндра со скоростью $u$ распределение средней по сечению зазора тангенциальной скорости будет равно

$$\bar{v}_\theta(\theta) = \int\limits_0^\theta \frac{u a \cos\theta\, d\theta}{b - a} = \frac{u a}{b - a}\sin\theta. \tag{8}$$

Присоединенная масса жидкости в таком приближении будет равна

$$m = 2E/u^2 = \frac{\rho(b-a)}{u^2}\int_0^{\pi}\bar{v}_\theta^2(\theta)(a+b)\,d\theta = \pi\rho a^2\frac{a+b}{2(b-a)}. \quad (9)$$

Сравнивая этот результат с решением Стокса, отметим, что, например, при величине зазора ( $b - a$ ), равном 0,2 $a$ , (9) отличается от (I) менее чем на I%. При меньших зазорах отличие, очевидно, будет еще меньше.

## 2. Нелинейность присоединенной массы.

Используя принятые допущения, можно легко получить приближенную формулу для присоединенной массы жидкости для случая малых колебаний стержня при эксцентритичном расположении стержня относительно оболочки. Пусть, например, цилиндр, имеющий скорость $u$, находится на расстоянии $y$ от оси цилиндрической оболочки.

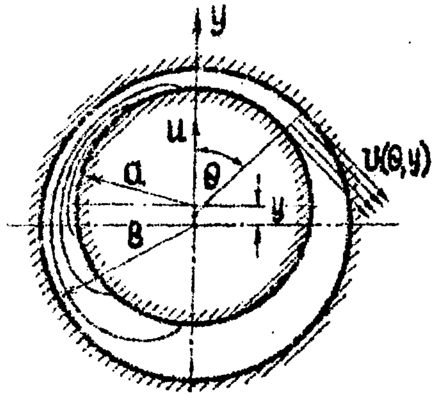


Рис.I

Зависимость величины зазора между поверхностью стержня и оболочкой от координаты $y$ будет иметь вид

$$h(\theta, y) = (b-a)\left(1 - \frac{y}{b-a}\cos\theta\right). \quad (I0)$$

Средняя расходная скорость в зазоре $h(\theta, y)$ тогда будет равна

$$\bar{v}(\theta, y) = \frac{u(y)\, a\sin\theta}{(b-a)\left(1 - \frac{y}{b-a}\cos\theta\right)} \quad (II)$$

и присоединенная масса

$$m(y) = \frac{2\rho\int_0^{\pi}\bar{v}^2(\theta,y)\frac{a+b}{2}\,d\theta}{u^2} =$$

$$= \rho\,\frac{a^2(a+b)}{b-a}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta\, d\theta}{1-\frac{y}{b-a}\cos\theta} = \pi\rho a^2\frac{(a+b)(b-a)}{y^2}\left[1-\sqrt{1-\frac{y^2}{(b-a)^2}}\right]. \quad (I2)$$

Или, если ввести безразмерный эксцентриситет $\varepsilon = y/b-a$ ,

$$m(\varepsilon) = \pi\rho a^2\,\frac{a+b}{b-a}\,\frac{(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\varepsilon^2} = m(0)\,\frac{2(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}{\varepsilon^2}, \quad (I3)$$

где $m(0) = \pi\rho a^2(a+b)/2(b-a)$ - присоединенная масса жидкости для концентрично расположенного стержня. Зависимость $m(\varepsilon)/m(0)$, представленная на рис. 2, показывает, что при приближении стержня к стенке оболочки присоединенная масса возрастает и при контакте с оболочкой в 2 раза превосходит присоединенную массу жидкости при концентричном расположении стержня. Зависимость $m(\mathcal{E})$ практически совпадает с численным решением Чженя [10]. Интересно отметить, что при касании стержня с плоской стенкой присоединенная масса становится в 2,5 раза больше, чем в случае безграничного объема жидкости [11].

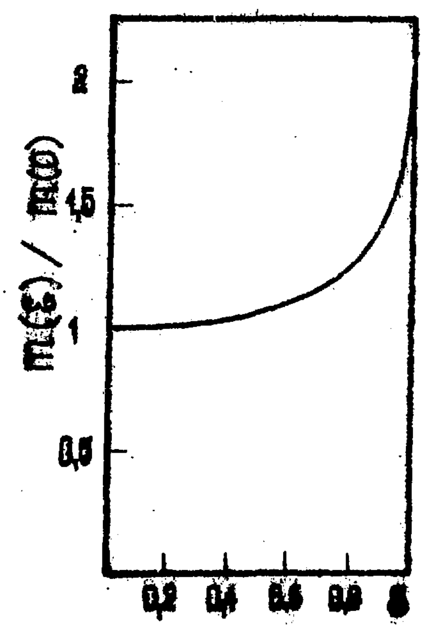


Рис. 2.

Рассмотрим теперь случай больших колебаний стержня, когда амплитуда колебаний соизмерима с величиной зазора ( $\ell - a$ ). Вообще говоря, из-за зависимости присоединенной массы от мгновенного положения стержня, его колебания будут нелинейными. Для определения зависимости частоты колебаний от амплитуды найдем среднюю за период колебания кинетическую энергию жидкости или "среднюю" присоединенную массу.

Пусть стержень, имеющий собственную массу $M$ на единицу длины, образует идеальную колебательную систему без трения. Из закона сохранения энергии системы

$$[M + m(y)]\,\dot{y}^2 + k y^2 = k A^2, \qquad (14)$$

где $A$ – амплитуда, $k$ – коэффициент жесткости, получим зависимость скорости стержня от координаты:

$$\dot{y}(y) = \sqrt{\frac{k(A^2 - y^2)}{M + m(y)}} \qquad (15)$$

и время пребывания стержня в области $y, y+dy$:

$$dt(y, y+dy) = dy/\dot{y} = \sqrt{\frac{M + m(y)}{k(A^2 - y^2)}}\,dy \qquad (16)$$

Средняя за период колебания $T$ кинетическая энергия жидкости равна

$$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt,$$

где $E(t) = m(t)\,u^2(t)/2$.

Отсюда следует:

$$\overline{m} = \frac{\int_0^T m(t)\, u^2(t)\, dt}{\int_0^T u^2(t)\, dt} \qquad (17)$$

Заменив временную переменную на пространственную и проинтегрировав по координате в пределах размаха колебаний стержня, получим

$$\overline{m}(A) = \frac{\int_{-A}^{A} m(y)\left[K(A^2-y^2)/(M+m(y))\right]^{1/2} dy}{\int_{-A}^{A}\left[K(A^2-y^2)/(M+m(y))\right]^{1/2} dy}. \qquad (18)$$

Считая, что $M + m(y)$ – слабоменяющаяся функция координаты по сравнению с функциями $(A^2 - y^2)$ и $m(y)$, запишем приближенно

$$\overline{m}(\xi_0) = \frac{\int_{-\xi_0}^{\xi_0} m(\varepsilon)(1-\xi^2)^{1/2} d\xi}{\int_{-\xi_0}^{\xi_0}(1-\xi^2)^{1/2} d\xi}, \qquad (19)$$

где $\xi = y/A$, $\xi_0 = A/(b-a)$.

Записанное приближение означает, что несмотря на зависимость присоединенной массы жидкости от координаты, колебания стержня считаются гармоническими.

Из-за относительно слабой зависимости $m$ от $\varepsilon$ ясно, что зависимость $\overline{m}(\xi_0)$ при небольших $\xi_0$ будет мало отличаться от $m(0)$. В связи с этим определим здесь только максимальное значение $\overline{m}$, когда амплитуда колебаний стержня равна величине зазора $(b - a)$. Приняв $\xi = \varepsilon$, запишем

$$\overline{m}(1) = m(0)\,\frac{2\int_{-1}^{1}\frac{1-(1-\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon^2}(1-\varepsilon^2)^{1/2}\, d\varepsilon}{\int_{-1}^{1}(1-\varepsilon^2)^{1/2} d\varepsilon} = m(0)\frac{4(4-\pi)}{\pi} \approx \qquad (20)$$
$$\approx 1{,}1\, m(0).$$

Как видно из (20), даже при максимально возможной амплитуде колебаний, нелинейность гидродинамической инерционности достаточно мала и может не учитываться в расчетах собственных частот колебаний круглых стержней.

## 3. Нелинейность гидродинамического демпфирования.

Большой практический интерес представляет нелинейность гидродинамического демпфирования. В некотрых случаях гидродинамические вибрации стержня носят автоколебательный характер или возбуждаются параметрически. Как известно, ограничительным фактором, препятствующим безграничному росту амплитуд колебаний, является нелинейное демпфирование.

Прежде чем привести оценку зависимости коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний стержня, рассмотрим малые колебания стержня, эксцентрично расположенного относительно стенок оболочки. В этом случае, принимая связь между коэффициентом демпфирования и средней за период колебания скоростью диссипации энергии в виде [6]

$$\xi = -2\bar{\dot{E}} / u_0^2 , \tag{21}$$

определим $\bar{\dot{E}}(y)$. Как и в [6] будем предполагать, что при колебаниях жидкости на поверхностях стержня и оболочки образуются тонкие пограничные слои $\delta = \sqrt{2\nu/\omega} \ll b-a$ и основная диссипация энергии происходит в этих слоях.

Известно, что средняя за период колебания скорость диссипации энергии в колеблющемся пограничном слое на единицу поверхности равна

$$\bar{\dot{E}} = -\frac{\mu v_*^2}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} , \tag{22}$$

где $v_*$ – амплитудная относительная скорость на внешней границе пограничного слоя, $\omega$ – круговая частота колебаний стержня, $\mu$, $\nu$ – динамическая и кинематическая вязкости жидкости.

При малых колебаниях эксцентрично расположенного стержня по гармоническому закону $u(t) = u_0 \sin \omega t$ распределения амплитудных скоростей равны

$$v_*(\theta, y)\big|_b = \frac{u_0 a \sin\theta}{[(b-a) - y\cos\theta]} \quad \text{– на поверхности оболочки,} \tag{23}$$

$$v_*(\theta, y)\big|_a = u_0 \sin\theta \left[\frac{b - y\cos\theta}{(b-a) - y\cos\theta}\right] \quad \text{– на поверхности движущегося стержня.} \tag{24}$$

Подставив (23) и (24) в (22) и проинтегрировав по поверхностям стержня и оболочки, получим

$$\bar{\dot{E}} = -\mu\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \int_0^{\pi} \left[ v_*^2(\theta,y)\big|_b\, b + v_*^2(\theta,y)\big|_a\, a \right] d\theta = \tag{25}$$

$$= -\mu u_0^2 \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \int_0^{\pi} \frac{a^2 b + b^2 a - 2aby\cos\theta + a y^2\cos^2\theta}{[(b-a) - y\cos\theta]^2} \sin^2\theta \, d\theta$$

Пренебрегая в числителе подынтегрального выражения величинами $2aby\cos\theta$ и $ay^2\cos^2\theta$, получим по (21)

$$\xi(\varepsilon) = \frac{2\mu a(ab+b^2)}{\sqrt{2\nu/\omega}} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2} \qquad (26)$$

Для концентричного положения колеблющегося стержня ( $\varepsilon$ =0), получим

$$\xi(0) = \frac{\pi\mu a}{\sqrt{2\nu/\omega}} \frac{b(a+b)}{(b-a)^2}. \qquad (27)$$

Следует отметить, что для малых зазоров формула (27) дает достаточно хорошую точность. Например, при $b-a = 0{,}2a$ отличие (27) от "точной" формулы (2) составляет около 2%.

Зависимость коэффициента демпфирования от $\varepsilon$, полученная численным интегрированием (26), представлена на рис. 3 в виде отношения $\xi(\varepsilon)/\xi(0)$.

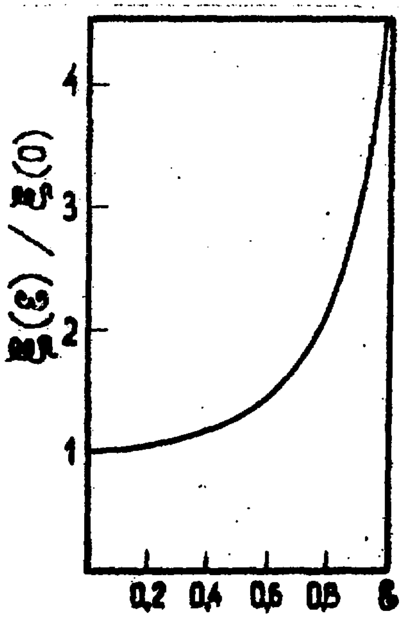


Рис. 3.

В отличие от соответствующей зависимости для присоединенной массы (13) при $\varepsilon \to 1$ коэффициент демпфирования стремится к бесконечности. Попутно отметим, что аналогичные результаты были получены в [12] для стержня, колеблющегося вблизи плоской стенки и в плоской щели.

Для определения зависимости коэффициента демпфирования немалых колебаний от амплитуды следует исходить из соотношения для мгновенной скорости диссипации на единицу поверхности.

$$\dot{E}(t) = -\mu\, v_*^2(t)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}. \qquad (28)$$

Мгновенная скорость диссипации энергии в жидкости при движении стержня со скоростью $u(\xi)$ в точке $\xi$ будет равна

$$\dot{E}(\xi) = -\frac{2\mu u^2(\xi)}{\sqrt{2\nu/\omega}} \frac{ab(a+b)}{(b-a)^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2} \qquad (29)$$

Для определения средней за период колебания скорости диссипации энергии перейдем аналогично (I9) от интеграла по времени к интегралу по координате $\xi$.

$$\bar{\dot{E}} = -\frac{4\mu u_0^2}{\pi\sqrt{2\nu/\omega}}\,\frac{ab(a+b)}{(b-a)^2}\int_0^{\xi_0}\Phi(\varepsilon)(1-\xi^2)^{1/2}\,d\xi, \qquad (30)$$

где

$$\Phi(\varepsilon) = \int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2}. \qquad (31)$$

Зависимость коэффициента демпфирования от амплитуды колебаний стержня $\xi_0$ будет, таким образом, иметь вид

$$\xi(\xi_0) = \frac{8\mu}{\pi\sqrt{2\nu/\omega}}\,\frac{ab(a+b)}{(b-a)^2}\int_0^{\xi_0}\Phi(\varepsilon)(1-\xi^2)^{1/2}\,d\xi. \qquad (32)$$

При малых колебаниях стержня соотношение (32) дает формулу (27). Зависимость демпфирования от амплитуды колебаний в виде отношения

$$\xi(\xi_0)/\xi(0) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\xi_0}\Phi(\varepsilon)(1-\xi^2)^{1/2}\,d\xi \qquad (33)$$

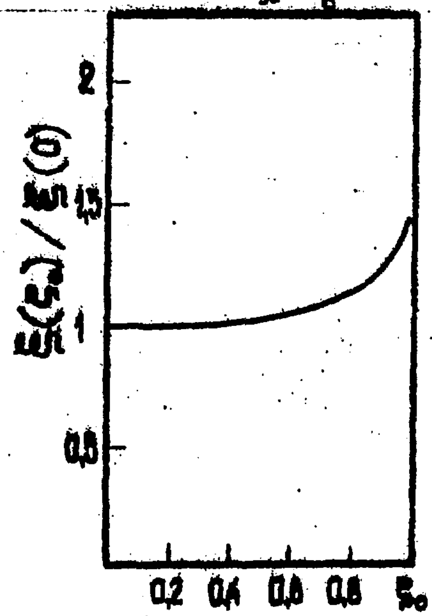

Рис. 4.

представлена на рис. 4.

Следует отметить, что принятый выше подход к определению коэффициента демпфирования по диссипации энергии в пограничных слоях становится непригодным при амплитудных колебаниях, близких к величине зазора. В этом случае демпфирование колебаний будет определяться, в основном, диссипативными процессами в тонком слое жидкости между сближающимися поверхностями стержня и оболочки. Особенно важным механизм выдавливания жидкости становится в задачах о соударении стержня с оболочкой. В рамках теории вязкой несжимаемой жидкости контакт между поверхностями вообще невозможен [I3]. Анализ процесса соударений, однако, здесь не рассматривается.

## 4. Поступательные колебания призматических стержней.

Основываясь на упрощенном анализе гидродинамической инерционности и демпфирования при колебаниях круглого цилиндрического стержня в оболочке, рассмотрим аналогичные задачи для колебаний призматических стержней.

Пусть, например, шестигранный призматический стержень, окруженный жесткой шестигранной оболочкой с зазором $h$, заполненным жидкостью, совершает малые колебания вдоль оси $y$. Схема линий тока и обозначения приведены на рис. 5. Присоединенную массу жидкости определим по формуле (4), где кинетическую энергию жидкости вычислим по распределению тангенциальной скорости по периметру стержня. При движении стержня вдоль оси $y$ со скоростью $u_0$ распределение тангенциальной расходной скорости будет иметь вид

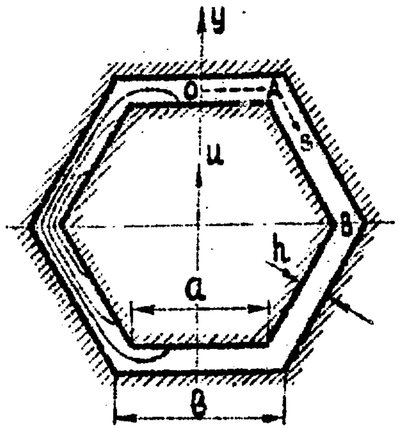


Рис. 5.

$$v_1(s) = u_0 s/h \quad \text{при } 0 \leqslant s \leqslant A,$$

$$v_2(s) = u_0\left(\frac{a}{4h} + \frac{s}{2h}\right) \text{ при } A \leqslant s \leqslant B.$$

$s$ – криволинейная координата, направленная по периметру стержня. Учитывая симметрию задачи относительно 2-х осей координат, запишем

$$E = 2\rho h\left[\int_0^A v_1^2(s)ds + \int_A^B v_2^2(s)ds\right] = \frac{5}{4}\rho u_0^2 \frac{a^3}{h}. \qquad (34)$$

Присоединенная масса жидкости по (4) равна

$$m_0 = \frac{5}{2}\rho\frac{a^3}{h}. \qquad (35)$$

Отметим, что при движении стержня в направлении $x$ присоединенная масса жидкости также равна $2{,}5\rho a^3/h$. Аналогичным образом рассчитывается присоединенная масса для других видов призматических стержней. Вычисления дают:

$$m_{\square} = \frac{7}{6}\rho\frac{a^3}{h} \qquad (36)$$

– присоединенная масса призматического стержня квадратного сечения со стороной $a$ (не зависит от направления движения).

$$m_\Delta = \frac{7}{12}\rho\frac{a^3}{h}$$ – присоединная масса треугольного призматического стержня, (37)

$$m_1 = \frac{1}{6}\rho\frac{a^3}{h}$$ – присоединенная масса плоской пластины, окруженной оболочкой с зазором $h$. (38)

Следует отметить, что при вычислении присоединенных масс призматических стержней предполагалось, что вклад в кинетическую энергию и, следовательно, в присоединенную массу областей жидкости вблизи углов призм пренебрежимо мал. Так как на практике обычно ребра стержней имеют некоторый радиус округления, то такое допущение вполне оправдано.

Получим теперь приближенные соотношения для коэффициентов гидродинамического демпфирования колебаний призматических стержней.

При движении шестигранного призматического стержня в направлении $y$ распределения относительных скоростей на внешних границах пограничных слоев будут иметь вид

$v_1(s) = u_0 s/h$ – на поверхностях стержня и оболочки при $0 \leqslant s \leqslant A$,

$v_2(s) = u_0\left(\frac{a}{4h}+\frac{s}{2h}\right)$ – на поверхности оболочки при $A \leqslant s \leqslant B$,

$v_{2c}^{c}(s) = u_0\left(\frac{a}{4h}+\frac{s}{2h}\right)+\frac{u_0}{2}$ – на поверхности стержня при $A \leqslant s \leqslant B$.

Интегрируя (22) по поверхностям стержня и оболочки с соответствующим распределением скоростей и с учетом симметрии задачи

$$\bar{\dot{E}} = -\frac{2\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\left[\int_0^{a/2} v_1^2(s)ds + \int_0^{b/2} v_1^2(s)ds + \int_{a/2}^{3a/2}(v_2^{c})^2(s)ds + \int_{b/2}^{3b/2} v_2^2(s)ds\right]$$

и подставив результат в (21), получим

$$\xi_\circ = \frac{4\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\frac{a^3}{h^2}\left[\frac{5}{8}+\frac{5}{16}\frac{b^3}{a^3}+\frac{1}{3}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b}{a}+\frac{h}{2a}+\frac{h^2}{4a^2}\right]. \quad (39)$$

При стремлении величины зазора к нулю имеем предельную формулу для демпфирования

$$\xi_\circ(h\to 0) = \frac{5\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\frac{a^3}{h^2} \quad (40)$$

Аналогичные предельные соотношения получаются для коэффициентов демпфирования колебаний других видов призматических стержней.

$$\xi_{\square} = \frac{7}{3}\frac{\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\frac{a^3}{h^2}$$ – квадратная призма; (41)

$$\xi_{\Delta} = \frac{7}{6}\frac{\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\frac{a^3}{h^2}$$ – треугольная призма; (42)

$$\xi_{1} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\frac{a^3}{h^2}$$ – плоская пластина. (43)

Следует отметить, что в случае колебаний призматических стержней присоединенная масса существенно зависит от эксцентриситета и при контакте одной из граней с поверхностью оболочки стремится к бесконечности в отличие от присоединенной массы для круглого стержня. Гидродинамическое демпфирование в этом случае также стремится к бесконечности, но возрастает быстрее чем для круглого стержня.

## 5. Крутильные колебания призматических стержней.

При малых крутильных колебаниях призматических стержней в стесненных условиях присоединенный момент инерции и коэффициент демпфирования крутильных колебаний могут существенно влиять на собственную частоту и затухание колебаний.

В отличие от вращательного движения круглого стержня, где присоединенной массой и в ряде случаев гидродинамическим демпфированием можно пренебречь, при вращательном движении призматического стержня возникают достаточно сильные движения вытесненной из узких зазоров жидкости. Схема движения жидкости в зазорах показана на рис.6.

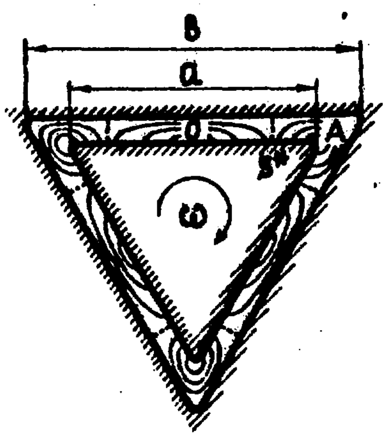


Рис.6.

Пусть крутильные колебания для треугольного призматического стержня происходит по гармоническому закону

$$\Omega(t) = \Omega_0 \sin \omega t$$

Присоединенный момент инерции жидкости определяется соотношением

$$I = 2E_{вр}(t)/\Omega^2(t), \qquad (44)$$

где $E_{вр}$ – кинетическая энергия жидкости при крутильных колебаниях стержня, $\Omega(t)$ – мгновенная скорость вращения стержня.

В силу симметрии задачи достаточно рассмотреть течение жидкости в ячейке OA. При вращении стержня со скоростью $\Omega$ распределение нормальной составляющей скорости поверхности стержня равно

$$u(s) = \Omega s. \tag{45}$$

В результате вытеснения в зазоре возникает течение жидкости в направлении $s$. Очевидно, что в области ребра призмы течение жидкости будет направлено к точке O. Обозначим неизвестную пока точку в которой скорость жидкости обращается в нуль $s^*$ и определим распределение расходной скорости вдоль $s$.

Приращение расходной скорости вдоль координаты $s$ равно

$$d v(s) = u(s)\frac{ds}{h} = \frac{\Omega s\, ds}{h}.$$

Тогда распределение скорости в области $0 \leq s \leq s^*$ будет

$$v(s) = \int_{s^*}^{s} \frac{\Omega s\, ds}{h} = \frac{\Omega}{2h}\left(s^2 - s^{*2}\right) \tag{46}$$

и в области $s_* \leq s \leq a/2$

$$v(s) = \frac{\Omega}{2h}\left(s^2 - s_*^2\right) \tag{47}$$

Кинетическая энергия жидкости в области $0 \leq s \leq a/2$ равна

$$E = \frac{\rho h}{2}\int_0^{a/2} v^2(s)\, ds = \frac{\rho \Omega^2}{8h}\int_0^{a/2}\left(s^2 - s_*^2\right)^2 ds =$$

$$= \frac{\rho \Omega^2}{8h}\left(\frac{a^5}{160} - \frac{2a^3 s_*^2}{24} + \frac{a s_*^4}{2}\right) \tag{48}$$

Исходя из известной теоремы Кельвина о минимуме кинетической энергии жидкости [3], найдем, что

$$E = \min \qquad \text{при} \quad s_* = a/2\sqrt{3} \tag{49}$$

Подставив (49) в (48) и увеличив результат в 6 раз (количество ячеек), найдем по (44)

$$I_{\Delta} = \frac{\rho a^5}{240 h} \qquad (50)$$

Аналогичным образом находятся присоединенные моменты инерции для других призматических стержней

$$I_{\square} = \frac{\rho a^5}{180 h} \quad \text{– квадратная призма;} \qquad (51)$$

$$I_{\bigcirc} = \frac{\rho a^5}{120 h} \quad \text{– шестигранная призма;} \qquad (52)$$

$$I_{1} = \frac{\rho a^5}{360 h} \quad \text{– пластинка.} \qquad (53)$$

Коэффициент гидродинамического демпфирования крутильных колебаний $\xi^{\circ} = -2\bar{E}_{cp}/\Omega_0^2$ легко находится по скорости диссипации энегии, вычисленной по распределению скорости (47), удовлетворяющему условию минимальности диссипации энергии при $s_* = a/2\sqrt{3}$.

Опуская вычисления, приведем окончательные результаты:

$$\xi^{\circ}_{\bigcirc} = \frac{\mu a^5}{60\sqrt{2\nu/\omega}\, h^2}; \qquad (54)$$

$$\xi^{\circ}_{\square} = \frac{\mu a^5}{90\sqrt{2\nu/\omega}\, h^2}; \qquad (55)$$

$$\xi^{\circ}_{\Delta} = \frac{\mu a^5}{120\sqrt{2\nu/\omega}\, h^2}; \qquad (56)$$

$$\xi^{\circ}_{1} = \frac{\mu a^5}{180\sqrt{2\nu/\omega}\, h^2}. \qquad (57)$$

Для сравнения приведем формулу для коэффициента демпфирования крутильных колебаний круглого цилиндрического стержня в концентрической оболочке. Скорость диссипации энергии в пограничном слое $\delta$ на поверхности стержня равна в этом случае $\bar{E} = \pi\mu a^3\Omega_0^2/\delta$ и

$$\xi^{\circ} = \frac{2\pi\mu a^3}{\sqrt{2\nu/\omega}}. \qquad (58)$$

Как видно из этой формулы, при сделанном выше предположении $\delta \ll h$, демпфирование крутильных колебаний не зависит от $h$ .

Поскольку при выводе формул для демпфирования крутильных колебаний не учитывалась тангенциальная составляющая скорости поверхности призмы, а рассчитывалось только вытесняющее действие граней, то условие применимости приближенных соотношений (54 ÷ 57) можно записать исходя из того, что, например, коэффициент демпфирования (54) должен быть существенно больше чем (58). Из этого следует, что характерный размер зазора $h$ должен удовлетворять условию $h \ll a/20$; с уменьшением числа граней это условие может быть ослаблено.

В предельных случаях, когда собственной массой или моментом инерции стержня можно пренебречь по сравнению с присоединенной массой или присоединенным моментом инерции жидкости, весьма удобной характеристикой системы является коэффициент затухания колебаний $n = \xi/2m$ или $n = \xi^{\circ}/2I$. Как следует из приведенных выше формул, коэффициент затухания одинаков для всех типов призматических стержней, совершающих поступательные или крутильные колебания

$$n = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\nu\omega}{2}} \qquad (59)$$

и зависит только от вязкости жидкости, частоты колебаний и ширины зазора.

## 6. Колебания цилиндрических оболочек.

Если тонкостенная цилиндрическая оболочка окружена жестким концентрическим корпусом, пространство между которыми заполнено жидкостью, то при колебаниях оболочки по какой-либо форме будет проявляться ее инерционное и демпфирующее действие.

Также как в рассмотренных выше случаях, получим приближенные соотношения для присоединенной массы и коэффициента демпфирования колебаний. В отличие от стержней присоединенную массу и коэффициент демпфирования будем относить к единице поверхности оболочки.

Пусть радиальный прогиб по окружности оболочки имеет вид

$$R(\theta,t) = f(t)\cos k\theta, \qquad (60)$$

где $k$ – номер формы колебаний или число волн по окружности оболочки, $f(t) = f_0 \sin \omega t$ – функция, характеризующая радиальный прогиб оболочки.

На рис. 7 схематично показаны линии тока для $k = 3$. Будем считать, что для любой рассматриваемой формы колебаний ве-

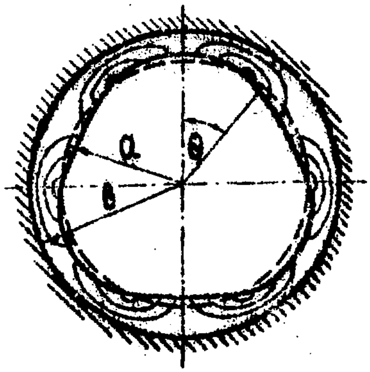


Рис. 7.

личина зазора $h$ мала по сравнению с длиной волны

$$h \ll \frac{2\pi a}{k}. \tag{61}$$

Распределение расходной тангенциальной скорости равно

$$v_k(\theta,t) = f'(t)\frac{a}{kh}\sin k\theta. \tag{62}$$

Вычислив кинетическую энергию жидкости в кольцевом зазоре

$$E(t) = \frac{\rho h}{2}\int_0^{2\pi} v_k^2(\theta,t)\,a\,d\theta = \frac{f'^2(t)\,\pi\rho a^3}{2hk^2} \tag{63}$$

и средний по окружности квадрат мгновенной скорости прогиба $\langle R'^2(t)\rangle = f'^2(t)/2$, получим по (4) присоединенную массу жидкости на единицу поверхности оболочки

$$m_k = \frac{\rho a^2}{k^2 h}. \tag{64}$$

Коэффициент гидродинамического демпфирования колебаний оболочки на единицу поверхности вычисляется аналогично (40). Средняя за период скорость диссипации энергии в пограничных слоях на поверхностях колеблющейся упругой оболочки и жестком корпусе равна

$$\bar{\dot{E}}_k = -\frac{\mu}{\sqrt{2\nu/\omega}}\,\frac{f_0^2\,\pi a^3}{k^2 h^2} \tag{65}$$

и осредненный по периметру оболочки и за период колебания квадрат скорости прогиба

$$\langle \overline{R'^2}\rangle = \frac{1}{4} f_0^2.$$

Подставив (65) в (21), получим

$$\xi_k = \frac{2\mu a^2}{k^2 h^2\sqrt{2\nu/\omega}}. \tag{66}$$

Как видно из (64) и (66) соотношение (59) для коэффициента затухания колебаний выполняется и в этом случае.

Отметим одну особенность колебаний оболочки, соответствующую

$K = 1$. В этом случае можно считать, что оболочка совершает поступательные колебания без деформации, т.е. колеблется как цилиндрический стержень. При определении присоединенной массы и коэффициента демпфирования удвоенная кинетическая энергия жидкости делится на квадрат поступательной скорости стержня или удвоенная средняя скорость диссипации - на средний за период квадрат скорости стержня (формулы (9) и (27)), а при колебаниях оболочек деление производится на средний квадрат радиальной скорости оболочки. Этим объясняется то, что при $K = 1$ формулы (64) и (66) дают (на единицу длины) вдвое больше значения, чем (9) и (27) соответственно.

В рассмотренных выше задачах жидкость считалась в целом неподвижной. Более интересными для практики являются случаи колебаний различных конструктивных элементов, обтекаемых турбулентным потоком жидкости. Исходя из принятой аналогии между процессами демпфирования колебаний круглого стержня и демпфирования поступательных, крутильных колебаний призматических стержней и изгибных колебаний оболочек, следует предположить, что влияние турбулентного потока жидкости на коэффициент демпфирования как и в (3) будет учитываться сомножителем, включающим отношение толщин гидродинамического и колеблющегося пограничных слоев [7].

$$\xi_{\text{в потоке}} = \xi_{\text{в неподв. жидк.}} \cdot \frac{1 + \exp(-2\eta/\delta)}{1 - \exp(-2\eta/\delta)} \qquad (67)$$

## Литература


1. Kito F. On vibration of a fluid contained in an annular region bounted by two concentric or eccentric circular cylinders. Japan Society Mechanical Engineers, N 108, v. 21, 1955.
2. Chen S.S, Wambsganss M.W. Parallel-flow-induced vibration on fuel rods. J. Nuclear Eng. and Design., N 2, v. 18, 1972.
3. Милн-Томсон Л.Н. Теоретическая гидродинамика, М., "Наука", 1969.
4. Kito F. On vibration of an incompessible, viscous fluid contained in space, betwin two concentric cylindrical walls. Japan Society Mechanical Engineers, N 121, v. 22, 1956.
5. Chen S.S, Wambsganss M.W, Jendrzejezyk J.A. Added mass and demping of a vibrating rod in confined viscous fluid. J. of Appl. Mech., June, 1976.
6. Синявский В.Ф., Кухтин А.Б., Федотовский В.С. Присоединенная масса и коэффициент затухания для цилиндра, колеблющегося в концентрической оболочке, заполненной вязкой жидкостью. Препринт ФЭИ - 729, Обнинск, 1976.
7. Федотовский В.С., Синявский В.Ф. Гидродинамическое демпфирование колебаний упругого цилиндрического стержня в параллельном турбулентном потоке. Препринт ФЭИ - 837, Обнинск, 1978.
8. Федотовский В.С., Кухтин А.Б., Спиров В.С., Радченко В.Н., Синявский В.Ф. Экспериментальное исследование гидродинамического демпфирования колебаний трубки в продольном турбулентном потоке жидкости. Препринт ФЭИ - 891, Обнинск, 1978.
9. Chen S.S. Vibration of nuclear bundles. J. Nuclear Eng. and Design, N 3, v. 35, 1975.
10. Chen S.S, Chung H. Design guide for calculating hydrodynamic mass. Part I. Circular cilindrical structures. ANL-CT-76-45, June, 1976.
11. Мазур В.Ю. Движение двух круговых цилиндров в идеальной жидкости. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, №6, 1970.
12. Синявский В.Ф., Федотовский В.С., Кухтин А.Б. Присоединенная масса и коэффициент демпфирования при колебаниях цилиндра вблизи плоской стенки и в плоской щели. В сб. "Теплофизические исследования". Материалы межотр. научно-технической конференции. М., 1977 (ВИМИ).
13. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.

Подписано в печать 23/УШ-1979 г. Т-14464 Формат 60х90 1/16
Офсетная печать Усл.п.л. 1,25 Уч.-изд.л. 0,9 Тираж 76 экз.
Заказ № 892 Цена 9 коп. Индекс 3624 ФЭИ-962

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, г. Обнинск

9 коп.

Индекс 3624