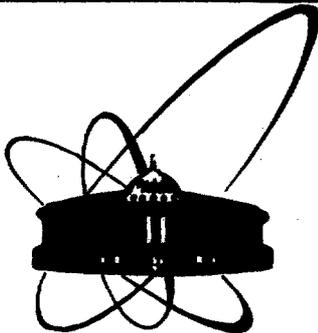


SU 8007715



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P2-80-87

Г.С.Погосян, Я.А.Сморodinский, В.М.Тер-Антонян

ОСЦИЛЛЯТОРНЫЕ ФУНКЦИИ ВИГНЕРА

Направлено в "Journal of Physics. A"

1980

Погосян Г.С., Смородинский Я.А.,  
Тер-Антонян В.М.

P2-80-87

Осцилляторные функции Вигнера

Получено замкнутое выражение для  $n$ -мерной осцилляторной функции Вигнера и развита диаграммная техника для нахождения явной зависимости этой функции от углов Эйлера при любом  $n$ .

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Pogosyan G.S., Smorodinsky Ya.A.,  
Ter-Antonyan V.M.

P2-80-87

Oscillation Wigner Functions

A closed expression is obtained for the dimensional Wigner oscillator function and a diagrammatic technique is developed for finding the explicit dependence of the function on Euler angles for any dimensions  $n$ .

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1980

Как известно, для потенциалов, наделенных динамической группой симметрии, переменные в уравнении Шредингера обычно разделяются в нескольких системах координат. В случае центрально-симметричных потенциалов (кулоновское поле, изотропный осциллятор) такая повышенная разделяемость переменных приводит к своеобразной неоднозначности при введении функции Вигнера, так как при этом оператору конечных вращений уже можно поставить в соответствие несколько различных типов матричных элементов в зависимости от выбора базисных волновых функций. В самом деле, например, в случае кулонова поля и изотропного осциллятора можно говорить о матричных элементах оператора конечных вращений как по сферическому, так и по параболическому и декартовому базису соответственно. В отличие от обычной функции Вигнера (сферический базис), универсальной для всех центрально-симметричных полей, функции Вигнера, построенные по остальным базисам, несут на себе информацию и о самом поле и, следовательно, отражают его динамическую симметрию.

В настоящей работе исследуется функция Вигнера для изотропного осциллятора произвольной размерности, причем в качестве базиса выбраны декартовы волновые функции. В дальнейшем для краткости мы будем говорить о них как об осцилляторных функциях Вигнера.

План статьи таков. Вначале вводятся двумерные осцилляторные функции Вигнера. Далее на их основе строятся осцилляторные функции Вигнера произвольной размерности и развивается диаграммная техника, позволяющая сравнительно легко определять явную зависимость этих функций от углов Эйлера.

I. При переходе от системы координат  $S(x, y)$  к системе координат  $S'(x', y')$ , повернутой относительно первой на угол  $\alpha$ , декартовы волновые функции кругового осциллятора преобразуются ортогональной матрицей \*)

$$|j+m', j-m'; x', y'\rangle = \sum_{m=-j}^j \langle j+m, j-m; x, y | j+m', j-m'; x', y'\rangle |j+m, j-m; x, y\rangle \quad (I)$$

Разложим коэффициенты этого преобразования по полярным волновым функциям с той же энергией. Так как  $E^{xek} = 2j+1$ ,  $E^{m\alpha} = 2\rho+1M+1$ , где  $\rho \geq 0$  и целое,  $M$  - азимутальное квантовое число, то при равных энергиях  $\rho = j - \frac{|M|}{2}$ , так что  $-2j \leq M \leq 2j$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \langle j+m, j-m; x, y | j+m', j-m'; x', y'\rangle = \\ & = \sum_{k=-j}^j \langle j+m, j-m; x, y | j-|k|, 2k; z, \varphi\rangle e^{2i\pi\alpha} \langle j-|k|, 2k; z, \varphi' | j+m', j-m'; x', y'\rangle \end{aligned}$$

Входящие в эту формулу коэффициенты перехода от декартовых волновых функций к полярным были вычислены в работе /1/ и имеют вид

$$\langle j+m, j-m; x, y | j-|k|, 2k; z, \varphi\rangle = (-i)^{j-m} (-1)^{j-|k|} d_{k,m}^j \left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

причем  $d$ -функции Вигнера в смысле фазового соглашения определены согласно монографии /2/. Пользуясь этим результатом и теоремой сложения для  $d$ -функций, получим закон преобразования

\*) Ниже выбрана система единиц, в которой  $\hbar = m = \omega = 1$   
углы  $\varphi$  и  $\varphi'$  в системах  $S$  и  $S'$  связаны соотношением  $\varphi' = \varphi + \alpha$ .

$$|j+m', j-m'; \chi, \psi'\rangle = \sum_{m=-j}^j d_{m' m}^j(2\alpha) |j+m, j-m; \chi, \psi\rangle \quad (2)$$

Легко убедиться, что при  $m' = -j$  и  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  отсюда получается известная теорема сложения для полиномов Эрмита. Формула (2) для случая  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  была получена в работе /3/. Заметим также, что из (2) следует интересное интегральное представление для  $d$ -функций через нормированные функции Эрмита

$$d_{m' m}^j(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \bar{H}_{j+m}(\chi) \bar{H}_{j-m'}(\chi \cos \frac{\alpha}{2} - y \sin \frac{\alpha}{2}) \bar{H}_{j-m}(\psi) \bar{H}_{j-m'}(-\chi \sin \frac{\alpha}{2} + y \cos \frac{\alpha}{2})$$

Явный вид преобразования (2) можно установить и не переходя к полярным волновым функциям, а рассматривая соотношение (1) при больших  $\chi$  и  $\psi$  и заменяя полиномы Эрмита соответствующими главными степенями аргументов.

2. Для вычисления осцилляторных функций Вигнера при  $n \geq 3$  можно, как это делалось выше, сначала перейти к сферическому базису и затем совершить поворот. Однако уже при  $n = 3$  коэффициенты такого перехода имеют довольно сложный вид /4/ и не поддаются последующему суммированию с помощью известных теорем сложения для  $d$ -функций и коэффициентов Клебша-Гордана. Поэтому ниже все вычисления проводятся непосредственно на языке декартовых волновых функций.

Вид оператора  $n$ -мерных конечных вращений, естественно, зависит от того, какое количество углов используется для перевода одной точки сферы в другую. В декартовом базисе наиболее просто выглядят повороты в отдельных координатных плоскостях, так как каждый такой поворот преобразует лишь соответствующую пару одно-

мерных осцилляторных волновых функций по закону, полученному выше. Произвольное  $N$ -мерное вращение, как известно, эквивалентно определенным образом подобранной последовательности таких "элементарных" поворотов на  $n(n-1)/2$  углов Эйлера.

В трехмерном случае оператор конечного вращения выражается через углы Эйлера  $\Theta_1^z$ ,  $\Theta_2^z$  и  $\Theta_1^x$  следующим образом:

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_{2,1}(\Theta_1^z) \hat{G}_{3,2}(\Theta_2^z) \hat{G}_{2,1}(\Theta_1^x). \quad (3)$$

Индексы операторов  $\hat{G}_{j+1, j}$  указывают на координатную плоскость, в которой совершается поворот, а за положительное принято вращение от  $j+1$  оси к  $j$ -ой. Так как волновые функции в системах  $S(x, y, z)$  и  $S'(x', y', z')$  относятся к одному значению энергии, то отличны от нуля матричные элементы  $\langle j'+m', j'-m', n-2j' | \hat{G}(z) | j+m, j-m, n-2j \rangle$ . Выразив, согласно (3), оператор  $\hat{G}(z)$  через операторы  $\hat{G}_{j+1, j}$  и отделив вращение в плоскости  $(x, y)$  на угол  $\Theta_1^x$ , получим

$$\begin{aligned} & \langle j'+m', j'-m', n-2j' | \hat{G}(z) | j+m, j-m, n-2j \rangle = \\ & = \sum_{j''=0}^{n/2} \sum_{m''=j''}^{j''} \langle j'+m', j'-m', n-2j' | \hat{G}_{2,1}(\Theta_1^x) \hat{G}_{3,2}(\Theta_2^z) | j''+m'', j''-m'', n-2j'' \rangle \cdot \end{aligned}$$

$$\langle j''+m'', j''-m'', n-2j'' | \hat{G}_{2,1}(\Theta_1^z) | j'+m', j'-m', n-2j' \rangle.$$

Вращение  $\hat{G}_{2,1}(\Theta_1^z)$  не затрагивает координаты  $Z$ , и поэтому последний матричный элемент отличен от нуля лишь при  $j''=j'$ , так что суммирование по  $j''$  сводится. Коэффициент, содержащий произведение двух операторов вращения, в свою очередь, приводится к линейной комбинации произведений матричных элементов от опера-

торов  $\hat{G}_{21}(\theta_1^2)$  и  $\hat{G}_{32}(\theta_2^2)$ , и после учета аналогичных правил отбора имеем:

$$\begin{aligned} & \langle j+m, j-m, n-2j | \hat{G}(z) | j'+m', j'-m', n-2j' \rangle = \\ & = \sum_{m''=-j'}^{j'} \sum_{\tilde{m}=-j}^j \langle j+m, j-m | \hat{G}_{21}(\theta_1^2) | j+\tilde{m}, j-\tilde{m} \rangle \langle j-\tilde{m}, n-2j | \hat{G}_{32}(\theta_2^2) | j'-m'', n-2j' \rangle \\ & \quad \langle j'+m'', j'-m'' | \hat{G}_{21}(\theta_1^2) | j'+m', j'-m' \rangle \delta_{j+\tilde{m}, j'+m''}. \end{aligned}$$

Переходя далее от суммирования по  $\tilde{m}$  и  $m''$  к суммированию по  $t = j' + m''$  и  $k = j + \tilde{m}$  и пользуясь тем, что, согласно (2),

$$\begin{aligned} & \langle j+m, j-m; x_k, x_{k+1} | j'+m', j'-m'; x'_k, x'_{k+1} \rangle = \\ & = \langle j+m, j-m | \hat{G}_{k+1, k}(x) | j'+m', j'-m' \rangle = d_{m', m}^j(2x), \end{aligned} \quad (4)$$

получим явное выражение для трехмерной осцилляторной функции Вигнера:

$$\begin{aligned} & \langle j+m, j-m, n-2j | \hat{G}(z) | j'+m', j'-m', n-2j' \rangle = \\ & = \sum_{t=0}^{2 \min(j, j')} d_{t-j, m}^j(2\theta_1^2) d_{2j'-\frac{n+t}{2}, 2j'-\frac{n+t}{2}}^{j'}(2\theta_2^2) d_{m', t-j}^{j'}(2\theta_1^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Пределы, в которых суммирование по  $t$ , можно явно не выписывать, если подразумевать, что  $t$  пробегает только те значения, при которых абсолютное значение нижних, зависящих от  $t$  индексов  $d$ -функций не превышает значения соответствующего верхнего индекса.

Как видно из (3), при  $\theta_2^2 = 0$  имеет место чистое вращение в плоскости  $(x, y)$  на угол  $\theta_1^1 + \theta_1^2$ , а при  $\theta_1^1 = \theta_1^2 = 0$  - такое же вращение на угол  $\theta_2^2$  в плоскости  $(z, \vartheta)$ , так что в этих случаях выражение (4) должно переходить в  $d$ -функции от аргументов  $2(\theta_1^1 + \theta_1^2)$  и  $2\theta_2^2$  соответственно. Пользуясь равенством  $d_{m, m, 0}^j(\theta) = \delta_{m, m}$  и теоремой сложения для  $d$ -функций, легко убедиться в справедливости такого перехода.

В четырехмерном случае вращение определяется шестью углами Эйлера, а оператор  $\hat{G}$  (4) выражается через операторы поворота в координатных плоскостях формулой /5/:

$$\hat{G}(4) = \hat{G}_{24}(\theta_2^2) \hat{G}_{32}(\theta_2^2) \hat{G}_{43}(\theta_2^2) \hat{G}_{24}(\theta_1^1) \hat{G}_{32}(\theta_1^2) \hat{G}_{21}(\theta_1^1) \quad (6)$$

осцилляторная функция Вигнера вычисляется аналогичным образом и равна

$$\begin{aligned} & \langle j+m, j-m, k-2j, n-k | \hat{G}(4) | j'+m', j'-m', k'-2j', n-k' \rangle = \\ & = \sum_{\lambda, \lambda', \sigma} d_{m', \sigma, j'}^{j'}(2\theta_1^1) d_{\sigma, \lambda, \lambda'}^m(2\theta_1^2) d_{2j', \frac{k'-k}{2}, 2j' - \frac{k'-k}{2}}^{\frac{k'-k}{2}}(2\theta_1^2) \cdot \quad (7) \\ & \cdot d_{\lambda-j, m}^j(2\theta_2^2) d_{\lambda, \mu - \frac{k-k'}{2}, 2j - \frac{k-k'}{2}}^{\frac{k-k'}{2}}(2\theta_2^2) d_{k'-\mu - \frac{k-k'}{2}, k-\mu - \frac{k-k'}{2}}^{\frac{k-k'}{2}}(2\theta_2^2). \end{aligned}$$

Суммирование здесь ведется в пределах, о которых говорилось выше в связи с формулой (5). При  $\theta_1^1 = \theta_1^2 = \theta_2^2 = 0$  вращение (6) вырождается в трехмерное, а формула (7) переходит в (5).

3. Перейдем к  $n$ -мерному случаю. Оператор колецких  $n$ -мерных вращений  $\hat{G}(n)$  можно представить в виде следующего произведения операторов поворота в координатных плоскостях /5/:

$$\hat{G}(N) = \hat{G}^{(n-1)}(\theta_{n-1}^{n-1}, \dots, \theta_{n-2}^{n-1}) \dots \hat{G}^{(1)}(\theta_1^1) \quad (8)$$

$$\hat{G}^{(n)}(\theta_1^n, \dots, \theta_n^n) = \hat{G}_{2,1}(\theta_1^n) \dots \hat{G}_{n+1,n}(\theta_n^n). \quad (9)$$

Из формулы (8) следует, что  $N$ -мерная осцилляторная функция Вигнера может быть выражена через матричные элементы операторов (9) следующим образом:

$$\langle N_1, \dots, N_n | \hat{G}(N) | N'_1, \dots, N'_n \rangle = \sum_{p_1^{(n-1)}, \dots, p_{n-2}^{(n-1)}} \dots \sum_{p_1^{(2)}, p_2^{(2)}} \langle N_1, \dots, N_n | \hat{G}^{(n-1)} | p_1^{(n-1)}, \dots, p_{n-2}^{(n-1)}, N'_n \rangle \cdot \quad (10)$$

$$\langle p_1^{(n-1)}, \dots, p_{n-1}^{(n-1)} | \hat{G}^{(n-2)} | p_1^{(n-2)}, \dots, p_{n-2}^{(n-2)}, N'_{n-2} \rangle \dots \langle p_1^{(2)}, p_2^{(2)} | \hat{G}^{(2)} | N'_1, N'_2 \rangle,$$

причем  $p_1^{(1)} + \dots + p_n^{(1)} = N'_1 + \dots + N'_n$ .

Введем обозначение

$$p_i^{(l)} = N_i^l; \quad p_i^{(2)} = N_i^2, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

с помощью которого (10) можно переписать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} & \langle N_1, \dots, N_n | \hat{G}(N) | N'_1, \dots, N'_n \rangle = \\ & = \sum_{p_1^{(1)}, \dots, p_n^{(1)}} \prod_{i=1}^{n-1} \langle p_1^{(i+1)}, \dots, p_{i+1}^{(i+1)} | \hat{G}^{(i)}(\theta_1^i, \dots, \theta_i^i) | p_1^{(i)}, \dots, p_i^{(i)}, N'_{i+1} \rangle. \quad (11) \end{aligned}$$

Пользуясь (9), выделим из произведения операторов поворота в координатных плоскостях крайний правый множитель и воспользуемся тем, что, согласно (2),

$$\begin{aligned} & \hat{G}_{i+2,i}(\theta_i^i) | p_i^{(i)}, N'_{i+1} \rangle = \\ & = \sum_m \left\langle \frac{p_i^{(i)} + N'_{i+1}}{2}, \frac{p_i^{(i)} + N'_{i+1}}{2} \right| \hat{G}_{i+2,i}(\theta_i^i) | p_i^{(i)}, N'_{i+1} \rangle \cdot \left| \frac{p_i^{(i)} + N'_{i+1}}{2}, \frac{p_i^{(i)} + N'_{i+1}}{2} \right\rangle \end{aligned}$$

где суммирование по  $m$  ведется в пределах  $2|m| \leq P_j^{(i)} + N'_{j+1}$ .  
 Пронося далее вектор состояния  $\langle P_{j+1}^{(i+1)} |$  через произведение  
 первых  $j-1$  операторов поворота в координатных плоскостях и  
 пользуясь условием ортонормировки одномерных осцилляторных волно-  
 вых функций, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \langle P_{j+1}^{(i+1)}, \dots, P_{j+1}^{(i+1)} | \prod_{e=1}^j \hat{G}_{e+1, e}(\theta_e^j) | P_{j+1}^{(i)}, \dots, P_{j+1}^{(i)}, N'_{j+1} \rangle = \\ & = \langle P_{j+1}^{(i)}, \dots, P_{j+1}^{(i)} | \hat{G}_{j+1, j}(\theta_j^i) | P_{j+1}^{(i)}, N'_{j+1} \rangle \cdot \\ & \langle P_{j+1}^{(i+1)}, \dots, P_{j+1}^{(i+1)} | \prod_{e=1}^{j-1} \hat{G}_{e+1, e}(\theta_e^j) | P_{j+1}^{(i)}, \dots, P_{j+1}^{(i)}, P_{j+1}^{(i)} + N'_{j+1} - P_{j+1}^{(i+1)} \rangle. \end{aligned}$$

Продолжая эту процедуру понижения числа множителей в произведении  
 операторов поворота в координатных плоскостях после  $j-1$  шагов,  
 получаем:

$$\begin{aligned} & \langle P_{j+1}^{(i+1)}, \dots, P_{j+1}^{(i+1)} | \prod_{e=1}^j \hat{G}_{e+1, e}(\theta_e^j) | P_{j+1}^{(i)}, \dots, P_{j+1}^{(i)}, N'_{j+1} \rangle = \\ & = \prod_{k=1}^j \langle J_{j+1, k} + M_{j+1, k}, J_{j+1, k} - M_{j+1, k} | \hat{G}_{j+1, j}(\theta_{j+1, j}^j) | J_{j+1, k} + M_{j+1, k}, J_{j+1, k} - M_{j+1, k} \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Величины  $J_{j+1, k}$ ,  $M_{j+1, k}$  и  $M'_{j+1, k}$  определены следующим образом:

$$2 J_{j+1, k} = N'_{j+1} + \sum_{\nu=j-k+1}^j P_{\nu}^{(i)} - \sum_{\nu=j-k+2}^{j+1} P_{\nu}^{(i+1)} + P_{j-k+2}^{(i+1)}$$

$$2 M_{j+1, k} = N'_{j+1} + \sum_{\nu=j-k+1}^j P_{\nu}^{(i)} - \sum_{\nu=j-k+2}^{j+1} P_{\nu}^{(i+1)} - P_{j-k+2}^{(i+1)}$$

$$2 M'_{j+1, k} = \sum_{\nu=1}^{j-k+1} P_{\nu}^{(i)} - \sum_{\nu=1}^{j-k+2} P_{\nu}^{(i+1)} + P_{j-k+2}^{(i+1)}$$

Пользуясь теперь формулой (4), приходим к окончательному результату:

$$\langle N_1, \dots, N_n | \hat{G}(\kappa) | N'_1, \dots, N'_n \rangle = \sum_{P_1^{(1)}, \dots, P_n^{(1)}} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^j d_{m_{j+1}, m'_{j+1}}^{J_{jk} \kappa} (2\theta_{j+1}^{(1)}) \quad (13)$$

Можно убедиться, что при  $n=2, 3$  и  $4$  формула (13) переходит в (4), (5) и (7).

4. Полученным выше результатам можно придать наглядность, если воспользоваться следующей аналогией. Оператор  $\hat{G}(\kappa)$  связывает состояния  $|N_1, \dots, N_n, \chi_1, \dots, \chi_n\rangle$  и  $|N'_1, \dots, N'_n, \chi'_1, \dots, \chi'_n\rangle$  и поэтому матричный элемент  $\langle N_1, \dots, N_n | \hat{G}(\kappa) | N'_1, \dots, N'_n \rangle$  можно интерпретировать как "амплитуду перехода системы из состояния  $N'$  в состояние  $N$ " и поставить в соответствие этой амплитуде диаграмму

$$\langle N_1, \dots, N_n | \hat{G}(\kappa) | N'_1, \dots, N'_n \rangle = \text{Diagram}$$

При таком подходе разложение (10) матричного элемента оператора  $\hat{G}(\kappa)$  по матричным элементам операторов  $\hat{G}^{(i)}$  графически представится в виде последовательности "переходов"

$$N' \text{ --- } \text{Diagram} \text{ --- } N = \text{Diagram} \text{ --- } \text{Diagram} \text{ --- } \dots \text{ --- } \text{Diagram} \text{ --- } N \quad (14)$$

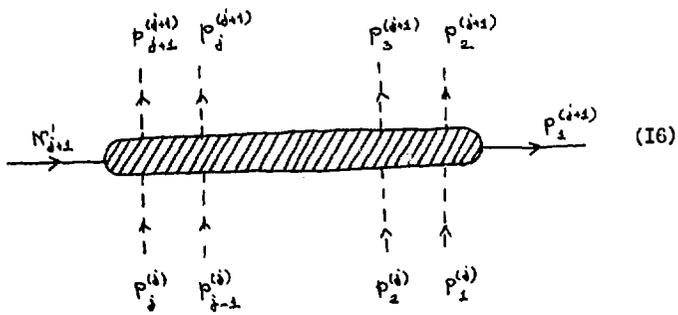
Подразумевается, что по пунктирным линиям ведется суммирование, а промежуточные блоки, содержащие одну сплошную линию, соответствуют матричным элементам операторов  $\hat{G}^{(i)}$ , а именно:

$$\langle P_{j+1}^{(i+1)}, \dots, P_{i+1}^{(i+1)} | \hat{G}(\theta_1^i, \dots, \theta_i^i) | P_3^{(i)}, \dots, P_j^{(i)}, N_{i+1}^{(i)} \rangle = P_{j+1}^{(i)} \dots P_i^{(i)} \langle \text{blob} \rangle P_{j+1}^{(i+1)} \quad (I5)$$

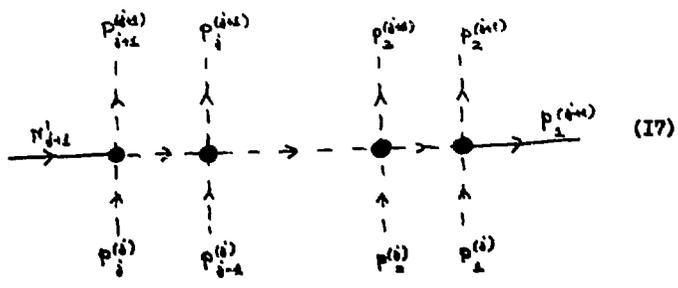
Согласно условию, предшествующему формуле (II), при  $j=1$  и  $j=p$  эти блоки переходят в первый и последний блок разложения (I4). Для каждого блока справедлив закон сохранения

$$P_{j+1}^{(i+1)} + \dots + P_{i+1}^{(i+1)} = P_{j+1}^{(i)} + \dots + P_j^{(i)} \quad 1.$$

Графическое разложение (I4) топологически эквивалентно диаграмме, приведенной на рис. I. Блок (I5) на этой диаграмме выглядит так:



В соответствии с формулой (I2) структура этого блока имеет вид



В отличие от разложения (I4), в (I7) промежуточные пунктирные линии при заданных внешних имеют определенный индекс, так что переход от (I6) к (I7) не связан с добавочным суммированием. Диаграмма на рис. 1 и разложение (I7) позволяют выразить амплитуду перехода  $\langle n | \hat{G}(t) | n' \rangle$  через амплитуды элементарных переходов двух линий в две (см. рис. 2).

В этой диаграмме число пересечений, т.е. элементарных блоков, равно  $n(n-1)/2$ . Это соответствует тому, что с каждым из таких блоков связан поворот в координатной плоскости на определенный эйлеров угол. Число суммираний в формуле (I3) равно

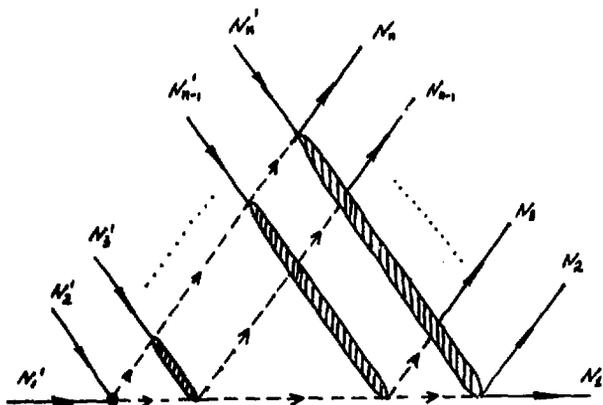


Рис. 1.

Диаграмма, топологически эквивалентная разложению (I4).

$(n-1)(n-2)/2$  и совпадает с числом элементарных петель на диаграмме рис. 2. Каждому пересечению, согласно (4), соответствует амплитуда элементарного "перехода"



индексы  $d$ -функций расставляются согласно правилу (18), а по нефиксированным индексам проводится суммирование, причем в суммировании принимают участие значения, для которых  $d$ -функция имеет смысл. Подробнее последнее условие нами объяснялось выше в связи с формулой (5).

Продemonстрируем эти правила на конкретных примерах при  $n = 3, 4, 5$ . Если индексы волновых функций выбрать так, как это делалось в пункте 2, то получаются диаграммы, изображенные на рис. 3 и рис. 4.

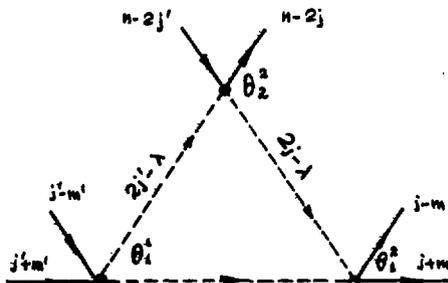


Рис. 3.

Диаграмма для трехмерной осцилляторной функции Вигнера.

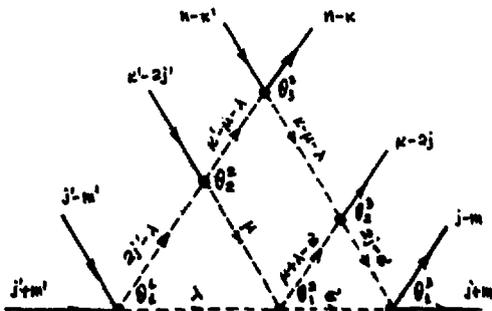


Рис. 4.

Диаграмма для четырехмерной осцилляторной функции Вигнера.

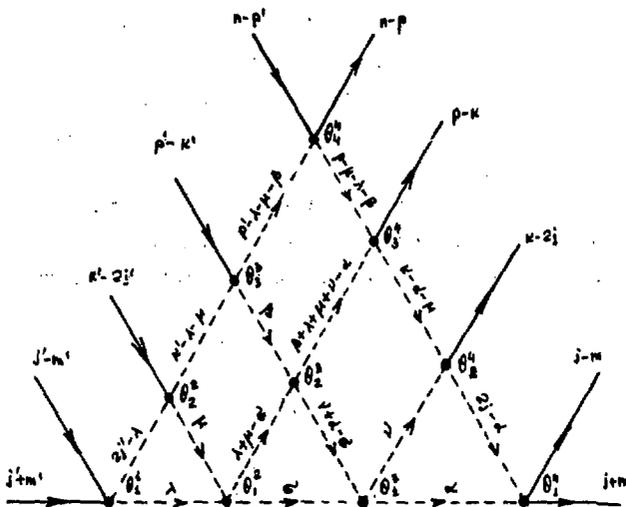


Рис. 5.

Диаграмма для пятимерной осцилляторной функции Вигнера.

Сформулированные правила в случае диаграмм рис. 3 и рис. 4 приводят к полученным ранее формулам (5) и (7), а для диаграммы на рис. 5 получается результат

$$\begin{aligned}
 & \langle j+m, d-m, k-2j, p-k, n-p | \hat{G}(s) | j'+m', d'-m', k'-2j', r'-k', n-r' \rangle = \\
 & = \sum_{\lambda, \mu, \nu, \kappa, \rho} d_{m', \lambda, j'}^{j'} (2\theta_1^0) d_{\frac{\lambda-\mu}{2}, \rho, \frac{\lambda+\mu}{2}}^{\frac{\lambda+\mu}{2}} (2\theta_2^0) d_{2j', \frac{\kappa-\lambda}{2}, \rho, \frac{\kappa+\lambda}{2}}^{\frac{\kappa+\lambda}{2}} (2\theta_2^0) d_{\sigma, \frac{\nu+\kappa}{2}, \frac{\kappa-\nu}{2}}^{\frac{\nu+\kappa}{2}} (2\theta_2^0) \\
 & \quad d_{\frac{\lambda+\mu+\rho-\sigma}{2}, \nu, \kappa, \frac{\rho+\sigma+\lambda+\mu}{2}}^{\frac{\lambda+\mu+\rho-\sigma}{2}} (2\theta_2^0) d_{\kappa, \frac{\lambda-\mu}{2}, \rho, \frac{\rho-\lambda-\mu}{2}}^{\frac{\rho-\lambda-\mu}{2}} (2\theta_2^0) d_{\alpha, j, m}^j (2\theta_1^0) \\
 & \quad d_{\nu, \frac{\mu-\alpha}{2}, 2j, \frac{\nu+\alpha}{2}}^{\frac{\mu-\alpha}{2}} (2\theta_1^0) d_{\beta+\lambda+\mu, \frac{\rho+\nu+\alpha-\lambda}{2}, \kappa, \frac{\rho+\sigma+\nu}{2}}^{\frac{\rho+\sigma+\nu}{2}} (2\theta_1^0) d_{\rho', \frac{\nu+\rho+\sigma+\lambda}{2}, \rho, \frac{\nu+\rho+\lambda+\mu}{2}}^{\frac{n-\lambda-\rho-\mu}{2}} (2\theta_1^0)
 \end{aligned}$$

Таким образом диаграммный метод сводит задачу о нахождении осцилляторной функции Вигнера к простым геометрическим построениям.

Мы глубоко признательны А.Н.Сисакиану за проявленный интерес к работе и плодотворные обсуждения.

#### Литература

1. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М., Торосян Г.Т. Препринт ПИРФ-77-04, Изд. Ереванского государственного университета, Ереван, 1977.
2. Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. "Квантовая теория углового момента". Л., 1975.
3. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ТМФ, 1979, т.10, № 1.
4. Погосян Г.С., Тер-Антонян В.М. ОИЯИ, П2-11962, Дубна, 1978.
5. Виленкин Н.Я. "Специальные функции и теория представлений групп", М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел  
7 февраля 1980 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.  
Заказ 27705. Тираж 680. Уч.-изд. листов 0,77.  
Редактор Б.Б.Колесова.  
Макет Т.Е.Жильцовой. Подписано к печати 25.2.80 г.