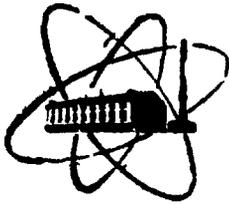


5080-1200
ФЭИ-1004 ✓



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. Г. ПОПОВ, В. А. КОНОВАЛОВ

**Вычислительные методы синтеза условного
оптимального по быстрдействию
управления системой с распределенными
параметрами одного типа**

Обнинск — 1979

ФЭИ - 1004

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.Г. Попов, В.А. Коновалов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА
УСЛОВНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ
СИСТЕМОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ОДНОГО ТИПА

Обнинск - 1979

А н н о т а ц и я.

Для систем с распределёнными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа со сложной границей, предложена аппроксимирующая математическая модель. На функции состояния системы и управления, а также на скорости их изменения наложены ограничения типа неравенств, что вызывает необходимость рассматривать оптимальную функцию управления как условную.

Предлагается численный метод и алгоритм поиска условной управляющей функции, выводящей систему в заданное состояние за минимальное время.

Алгоритм поиска оптимальной управляющей функции реализован программно на ЭВМ и его возможности продемонстрированы на примере расчёта системы с цилиндрической одномерной геометрией.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе для оптимизации систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями в частных производных, применены следующие методические приемы:

- методом конечных разностей нестационарная система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных;
- при построении алгоритма оптимизации использованы методы теории оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, как наиболее разработанные;
- решение многоэкстремальной задачи оптимизации построено с использованием методов выпуклого программирования.

Перечисленные методические приемы объединены в единую вычислительную процедуру, адекватную физической постановке исходной задачи.

Достаточно подробные выкладки в настоящей работе приведены как для пояснения самого способа решения задачи, так и для возможного использования в практических задачах.

§ 1. Постановка задачи

Состояние физических систем достаточно широкого класса описывается уравнениями типа:

$$c(z) \cdot p(z) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} t(z, \tau) = z^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \lambda(z) z^{\pm 1} \frac{\partial}{\partial z} t(z, \tau) + \mathcal{F}(z) \cdot u(\tau), \quad (I.1)$$

где $t(z, \tau)$ - функция состояния системы, зависящая от координаты точки z и времени τ ;

$c(z), p(z), \lambda(z)$ - физические параметры среды, зависящие от координаты точки системы;

$\mathcal{F}(z)$ - функция распределения управляющего воздействия по объему системы;

$u(\tau)$ - временная часть зависимости управляющего воздействия.

В центре области и на ее внешних границах для любого момента времени τ должны выполняться условия:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0, \quad z = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \quad z = R_0. \quad (I.2)$$

$$\text{Начальное условие } t(z, 0) = 0, \quad \tau = 0. \quad (I.3)$$

На динамическое поведение системы накладываются следующие ограничения:

на функцию состояния системы

$$t(z, \tau) \neq t_0(z); \quad \dot{t}(z, \tau) \leq t_1(z); \quad (I.4)$$

на функцию управляющего воздействия

$$\mathcal{F}(z) \cdot u(\tau) \leq \mathcal{F}_0(z); \quad 0 \leq u(\tau) \leq 1; \quad u'(\tau) \cdot u(\tau) \leq u. \quad (I.5)$$

Ставится задача: за минимально возможное время τ_* систему, описываемую уравнением (I.1) с условиями (I.2), (I.3) и ограничениями (I.4), (I.5) вывести в состояние, характеризуемое функцией $t(z, \tau_*) = t_*(z)$.

Аналитическое решение подобной задачи связано со значительными трудностями [1, 2] и кроме того, может быть практически неприменимо [1, 6, 7]. Методы приближенного решения подобной задачи, удовлетворительные с точки зрения практической целесообразности [4, 5, 6, 7], в значительной степени зависят от конкретной формулировки задачи. С практической точки зрения объединение мощных методов конечно-разностной аппроксимации с методами оптимизации систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дает мощное вычислительное средство для решения оптимизационных задач [1, 4, 5, 6, 7]. Основная трудность их решения заключается в размерности задачи и времени её численного решения.

$$\frac{1}{2\Delta_z^2} \cdot \frac{\lambda_{i+1}}{c_i \rho_i} \cdot (t_2^i - t_1^i) = \frac{1}{\Delta_\tau} \cdot (t_1^{i+1} - t_1^i) - \frac{F_i}{c_i \rho_i} \cdot u^i; \quad (2.5)$$

б) при $i=n$ уравнение (2.4) принимает вид:
так как при $i=n$ $t_{n+1}^i - t_n^i = 0$, то

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{c_n \rho_n} \cdot \frac{1}{\Delta_z^2} \cdot (t_n^i - t_{n-1}^i) = \frac{1}{\Delta_\tau} \cdot (t_n^{i+1} - t_n^i) - \frac{F_n}{c_n \rho_n} \cdot u^i. \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.4) может быть записана в следующем виде:

$$a_{i+1}^i \cdot t_{i+1}^i - a_i^i \cdot t_i^i + a_{i-1}^i \cdot t_{i-1}^i = \frac{1}{\Delta_\tau} \cdot (t_i^{i+1} - t_i^i) - F_i \cdot u^i. \quad (2.7)$$

Для вычисления коэффициентов a_{i+1}^i , a_i^i , a_{i-1}^i , F_i используются следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} a_{i+1}^i &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i+1}}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta_z^2}; \\ a_{i-1}^i &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i-1}}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta_z^2}; \\ a_i^i &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta_z^2} \cdot (\lambda_{i+1} + \lambda_{i-1}); \quad F_i = \frac{F_i}{c_i \rho_i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $\Delta_z \rightarrow 0$ мы получаем систему в форме (2.1), в которой элементы матриц A , F и компоненты вектора \vec{f} вычисляются по формулам (2.8), (2.7). При интегрировании системы уравнений (2.1) при выборе шага необходимо ориентироваться на условие устойчивости счета

$$(1 - a_i^i \cdot \Delta_\tau) \geq 0 \quad (2.9)$$

2.2. Одномерная цилиндрическая геометрия ($d=1$)

Исходное уравнение (1.1) для произвольной точки разностной сетки рис.1 принимает вид:

$$\frac{1}{2\Delta_z} \left[\frac{t_{i+1}^i - t_i^i}{\Delta_z} \cdot 2c_{i+1} \lambda_{i+1} - \frac{t_i^i - t_{i-1}^i}{\Delta_z} \cdot 2c_{i-1} \lambda_{i-1} \right] \cdot \frac{1}{\Delta_\tau} = \frac{1}{\Delta_\tau} (t_i^{i+1} - t_i^i) - F_i \cdot u^i. \quad (2.10)$$

а) для центра цилиндрического тела:

так как при $i=1$, $t_1^i - t_0^i = 0$

$$\frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1} \frac{\vartheta_2}{\Delta z_1 \Delta z_2} (t_2^i - t_1^i) = \frac{1}{\Delta \tau} (t_1^{i+1} - t_1^i) - F_1 u^i \quad (2.11)$$

б) для внешней границы цилиндра

$$\frac{\lambda_{n-1}}{c_n \rho_n} \frac{\vartheta_{n-1}}{\Delta z_n \Delta z_{n-1}} (t_n^i - t_{n-1}^i) = \frac{1}{\Delta \tau} (t_n^{i+1} - t_n^i) - F_n u^i \quad (2.12)$$

На основании геометрического разбора рис.1 для вычисления величин в формулах (2.10) - (2.12) используем следующие выражения:

$$\vartheta_{i,2} = 2^{-\frac{1}{2}} (\vartheta_i^2 + \vartheta_{i-1}^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \Delta z_i = \Delta z; \quad z_i = i \Delta z; \quad i=1, \dots, n;$$

$$\Delta z_{i,2} = \vartheta_{i,2} - \vartheta_{i-1,2} = 2^{-\frac{1}{2}} ((\vartheta_i^2 + \vartheta_{i-1}^2)^{\frac{1}{2}} - (\vartheta_{i-1}^2 + \vartheta_{i-2}^2)^{\frac{1}{2}});$$

$$\Delta z_{i-1,2} = \vartheta_{i-1,2} - \vartheta_{i-2,2} = 2^{-\frac{1}{2}} ((\vartheta_{i-1}^2 + \vartheta_{i-2}^2)^{\frac{1}{2}} - (\vartheta_{i-2}^2 + \vartheta_{i-3}^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Уравнения (2.10) с учетом геометрических соотношений (2.13) запишутся в форме:

$$a_{i+1}^i t_{i+1}^i - a_i^i t_i^i + a_{i-1}^i t_{i-1}^i = \frac{1}{\Delta \tau} (t_i^{i+1} - t_i^i) - F_i u^i \quad (2.14)$$

Для $i=1$ коэффициенты a_2^1, a_1^1, a_0^1 принимают значения

$$a_2^1 = 4 \cdot \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1} \cdot \frac{1}{\Delta z_2^2}; \quad a_1^1 = 4 \cdot \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1} \cdot \frac{1}{\Delta z_2^2}; \quad a_0^1 = 0; \quad F_1 = \vartheta_1 / (c_1 \rho_1). \quad (2.15)$$

Для $i=2$ выражения $a_3^2, a_2^2, a_1^2, a_0^2, F_2$ следующие:

$$a_3^2 = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} \cdot \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{1}{\Delta z_2^2}; \quad a_2^2 = 2 \cdot \frac{\lambda_0}{c_1 \rho_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\Delta z_2^2}; \quad (2.16)$$

$$a_1^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{1}{\Delta z_2^2} \cdot \left\{ \frac{3}{\sqrt{3}-1} \lambda_2 + \lambda_1 \right\}; \quad F_2 = \frac{\vartheta_2}{c_2 \rho_2}.$$

Для $i \geq 3$ общие выражения для элементов матриц имеют вид:

$$a_{i+1}^i = 2^{(i-1)} \frac{\lambda_{i+1}}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta z_i^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{i^2 + (i-1)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2} - \sqrt{(i-2)^2 + (i-3)^2}}; \quad (2.17)$$

$$a_{i-1}^i = 2^{(i-1)} \cdot \frac{\lambda_{i-1}}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta z_i^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{i^2 + (i-1)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2} - \sqrt{(i-2)^2 + (i-3)^2}}.$$

$$u_i^1 = \frac{2}{c_1 \rho_1 \Delta z_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + (i-1)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 + (i-1)^2}} \left\{ \frac{(i+1)\lambda_{i+1}}{\sqrt{z^2 + (i-1)^2} - \sqrt{(i-2)^2 + (i-3)^2}} + \frac{(i-1)\lambda_{i-1}}{\sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2} - \sqrt{(i-2)^2 + (i-3)^2}} \right\}$$

При $\Delta z \rightarrow 0$ уравнения (2.14) приходят к системе (2.1), где элементы матриц A, F для цилиндрической геометрии вычисляются по формулам (2.15)-(2.17). При интегрировании системы (2.1) шаг по времени выбирается из условия устойчивости счета $(1 - \max |a_i^1| \Delta t) > 0$, где a_i^1 дается выражением (2.17).

2.3. Одномерная сферическая геометрия ($\alpha=2$).

Для произвольной точки сферического пространства исходное уравнение (1.1) имеет следующий конечно-разностный вид:

$$\frac{1}{z_{i,3}^2} \cdot \frac{1}{\Delta z_i} \cdot \left[\frac{t_i^{i+1} - t_i^i}{\Delta z_{i,3}} \cdot z_{i+1}^2 \cdot \lambda_{i+1} - \frac{t_i^i - t_{i-1}^i}{\Delta z_{i-1,3}} \cdot z_{i-1}^2 \cdot \lambda_{i-1} \right] = c_1 \rho_1 \frac{t_i^{i+1} - t_i^i}{\Delta z} - F_i u_i^j \quad (2.18)$$

а) в центре сферы:

для $i=1, t_1^j - t_0^j = 0$ и уравнение (2.18) имеет вид:

$$\frac{1}{z_{i,3}^2} \cdot \frac{1}{\Delta z_i} \cdot \lambda_{i+1} \cdot z_{i+1}^2 \cdot \frac{1}{\Delta z_{i,3}} (t_2^j - t_1^j) = c_1 \rho_1 \frac{t_i^{i+1} - t_i^i}{\Delta z} - F_i u_i^j \quad (2.19)$$

б) на внешней поверхности сферы: $i=n, t_{n+1}^j - t_n^j = 0,$

$$\frac{1}{z_{i,3}^2} \cdot \frac{1}{\Delta z_i} \cdot \frac{1}{\Delta z_{i-1,3}} \cdot z_{i-1}^2 \cdot \lambda_{i-1} (t_n^j - t_{n-1}^j) = c_n \rho_n \frac{t_n^{i+1} - t_n^i}{\Delta z} - F_i u_i^j \quad (2.20)$$

На основании геометрического разбиения рис.1 для вычисления величин в формулах (2.18)-(2.20) используем следующие выражения:

$$\begin{aligned} z_i &= i \cdot \Delta z; \quad \Delta z_i = \Delta z; \quad z_{i,3} = 2^{-\frac{1}{3}} (z_i^3 + z_{i-1}^3)^{\frac{1}{3}}; \\ z_{i,3}^2 &= 2^{-\frac{2}{3}} (z_i^3 + z_{i-1}^3)^{\frac{2}{3}}; \quad \Delta z_{i,3} = z_{i,3} - z_{i-1,3}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Уравнение (2.18) с учетом принятых обозначений (2.21)

$$a_{i+1}^i t_{i+1}^j - a_i^i t_i^j + a_{i-1}^i t_{i-1}^j = \frac{1}{\Delta z} (t_i^{i+1} - t_i^i) - F_i u_i^j \quad (2.22)$$

Для $i=1$ коэффициенты a_2^1, a_1^1, a_0^1, F_1 имеют следующие значения:

$$a_2^1 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1 \Delta z_2} \cdot \frac{1}{\Delta z_2}; \quad a_1^1 = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\lambda_2}{c_1 \rho_1 \Delta z_2} \cdot \frac{1}{\Delta z_2}; \quad a_0^1 = 0; \quad F_1 = \frac{F_1}{c_1 \rho_1} \quad (2.23)$$

Для $i=2$ коэффициенты a_3^2, a_1^2, a_2^2, F_2 записываются в виде:

$$a_3^2 = 2 \cdot 9 \cdot \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{1}{\Delta_2^2} \cdot \frac{1}{9 - \sqrt{81}};$$

$$a_1^2 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1} \cdot \frac{1}{\Delta_1^2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad a_2^2 = \frac{2}{c_2 \rho_2} \cdot \frac{1}{\Delta_2^2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \left\{ \frac{2\lambda_2}{\sqrt{9-1}} + \lambda_1 \right\}. \quad (2.24)$$

Для $i \geq 3$ общие выражения для элементов матриц A, F в сферической геометрии имеют следующий вид:

$$F_i = \frac{F_i}{c_i \rho_i}; \quad a_{i+1}^i = 2(i+1) \cdot \frac{\lambda_{i+1}}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta_i^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(i^2 + (i-1)^2)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i^2 + (i-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2}};$$

$$a_{i-1}^i = 2(i-1) \cdot \frac{\lambda_{i-1}}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta_i^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(i^2 + (i-1)^2)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2} - \sqrt{(i-2)^2 + (i-3)^2}}; \quad (2.25)$$

$$a_i^i = \frac{2}{c_i \rho_i} \cdot \frac{1}{\Delta_i^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(i^2 + (i-1)^2)^2}} \cdot \left\{ \frac{(i+1)^2 \lambda_{i+1}}{\sqrt{i^2 + (i-1)^2} - \sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2}} + \frac{(i-1)^2 \lambda_{i-1}}{\sqrt{(i-1)^2 + (i-2)^2} - \sqrt{(i-2)^2 + (i-3)^2}} \right\}$$

При $\Delta_i \rightarrow 0$ уравнения (2.22) сводятся к системе (2.1), а элементы матриц A, F для сферической геометрии вычисляются по формулам (2.23)–(2.25). При интегрировании системы (2.1) шаг по времени $\Delta\tau$ выбирается из условия устойчивости счета конечно-разностной схемы: $(1 - \max_i |Q_i(\Delta\tau)|) \geq 0$ для $0 \leq i \leq n$ (2.26) где Q_i дается выражением (2.25).

2.4. Симметричная трехмерная геометрия.

В трехмерной геометрии процесс описывается общим уравнением:

$$c(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z) \cdot \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} t(x, y, z, \tau) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \lambda(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} t(x, y, z, \tau) + \frac{\partial}{\partial z} \lambda(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} t(x, y, z, \tau) +$$

$$+ \mathcal{F}(x, y, z) \cdot u(\tau). \quad (2.27)$$

Условия в центре системы: $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \tau > 0, x = y = z = 0. \quad 2.28$

Условия на внешней границе системы: $\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \tau > 0 \quad 2.29$

$x = x_0, y = y_0, z = z_0.$ Начальные условия: $t(x, y, z, 0) = 0, \tau = 0.$

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (2.27) с условиями (2.28), (2.29) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\Delta\tau} (t_{i,k,e}^{j+1} - t_{i,k,e}^j) = a_{i+1,k,e}^{i,k,e} \cdot t_{i+1,k,e}^j + b_{i,k,e}^{i,k,e} \cdot t_{i,k+1,e}^j +$$

$$\begin{aligned}
 & + d_{i,k,e+1}^{i,k,e} \cdot t_{i,k,e+1} - (a_{i,k,e}^{i,k,e} + b_{i,k,e}^{i,k,e} + d_{i,k,e}^{i,k,e}) \cdot t_{i,k,e} + a_{i-1,k,e}^{i,k,e} \cdot t_{i-1,k,e}^{i,k,e} \\
 & + b_{i,k-1,e}^{i,k,e} \cdot t_{i,k-1,e}^{i,k,e} + d_{i,k,e-1}^{i,k,e} \cdot t_{i,k,e-1}^{i,k,e} + (c\rho)_{i,k,e}^{-1} F_{i,k,e} \cdot u^i; \\
 & i = 1, \dots, I; \quad k = 1, \dots, K; \quad e = 1, \dots, L. \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

В системе уравнений (2.30) коэффициенты $a_{i+1,k,e}^{i,k,e}$;
 $a_{i-1,k,e}^{i,k,e}$; $a_{i,k,e}^{i,k,e}$; $b_{i,k+1,e}^{i,k,e}$; $b_{i,k-1,e}^{i,k,e}$; $b_{i,k,e}^{i,k,e}$; $d_{i,k,e+1}^{i,k,e}$;
 $d_{i,k,e-1}^{i,k,e}$; $d_{i,k,e}^{i,k,e}$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{i+1,k,e}^{i,k,e} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i+1,k,e}}{(c\rho)_{i,k,e}} \cdot \frac{1}{\Delta_i^2}; \quad a_{i-1,k,e}^{i,k,e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i-1,k,e}}{(c\rho)_{i,k,e}} \cdot \frac{1}{\Delta_i^2}; \\
 a_{i,k,e}^{i,k,e} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i+1,k,e} + \lambda_{i-1,k,e}}{(c\rho)_{i,k,e} \cdot \Delta_i^2}; \quad b_{i,k+1,e}^{i,k,e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i,k+1,e}}{(c\rho)_{i,k,e}} \cdot \frac{1}{\Delta_k^2}; \\
 b_{i,k-1,e}^{i,k,e} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i,k-1,e}}{(c\rho)_{i,k,e}} \cdot \frac{1}{\Delta_k^2}; \quad b_{i,k,e}^{i,k,e} = \frac{\lambda_{i,k+1,e} + \lambda_{i,k-1,e}}{2(c\rho)_{i,k,e} \cdot \Delta_k^2}; \\
 d_{i,k,e+1}^{i,k,e} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i,k,e+1}}{(c\rho)_{i,k,e}} \cdot \frac{1}{\Delta_e^2}; \quad d_{i,k,e-1}^{i,k,e} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_{i,k,e-1}}{(c\rho)_{i,k,e}} \cdot \frac{1}{\Delta_e^2}; \\
 d_{i,k,e}^{i,k,e} &= \frac{\lambda_{i,k,e+1} + \lambda_{i,k,e-1}}{2(c\rho)_{i,k,e} \cdot \Delta_e^2}; \quad i = 1, \dots, I; \\
 & \quad k = 1, \dots, K; \quad e = 1, \dots, L. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Устремив $\Delta_k \rightarrow 0$, мы получим из разностной схемы (2.30) систему обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, вычисляемыми по рекуррентным формулам (2.31).

$$\begin{aligned}
 \dot{t}_{i,k,e} &= a_{i+1,k,e}^{i,k,e} \cdot t_{i+1,k,e} + b_{i,k+1,e}^{i,k,e} \cdot t_{i,k+1,e} + d_{i,k,e+1}^{i,k,e} \cdot t_{i,k,e+1} + \\
 & a_{i-1,k,e}^{i,k,e} \cdot t_{i-1,k,e} + b_{i,k-1,e}^{i,k,e} \cdot t_{i,k-1,e} + d_{i,k,e-1}^{i,k,e} \cdot t_{i,k,e-1} - \\
 & - (a_{i,k,e}^{i,k,e} + b_{i,k,e}^{i,k,e} + d_{i,k,e}^{i,k,e}) \cdot t_{i,k,e} + F_{i,k,e} \cdot u. \\
 & i = 1, \dots, I; \quad k = 1, \dots, K; \quad e = 1, \dots, L.
 \end{aligned} \quad (2.32)$$

При использовании системы (2.32) условие выбора величины шага Δt при интегрировании следующее:

$$\max_{i, k, l} \frac{1}{C_{i, k, l} \cdot P_{i, k, l}} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\lambda_{i, k, l} + \lambda_{i-1, k, l}) + \frac{1}{\Delta t^2} (\lambda_{i, k+1, l} + \lambda_{i, k-1, l}) + \frac{1}{\Delta t^2} (\lambda_{i, k, l+1} + \lambda_{i, k, l-1}) \right\} \leq \frac{2}{\Delta t} \quad (2.33)$$

2.5. 0 сходимости и точности аппроксимации

При интегрировании систем дифференциальных уравнений (2.7), (2.14), (2.22) и выборе шага интегрирования по времени Δt сходимость и точность аппроксимации исходного уравнения (1.1) гибридными (2.7), (2.14), (2.22) устанавливалась на основании рекомендаций [3].

После подстановки разложений приращений функции состояния системы в ряд Тейлора вида

$$t_{i+1}^j - t_i^j = \Delta t \cdot \dot{t}_i^j + \frac{\Delta t^2}{1.2} \cdot \ddot{t}_i^j + \frac{\Delta t^3}{1.2.3} \cdot \dddot{t}_i^j + O_3(\Delta t^4);$$

$$t_i^j - t_{i-1}^j = \Delta t \cdot \dot{t}_{i-1}^j + \frac{\Delta t^2}{1.2} \cdot \ddot{t}_{i-1}^j + \frac{\Delta t^3}{1.2.3} \cdot \dddot{t}_{i-1}^j + O_3(\Delta t^4) \quad (2.34)$$

$$t_i^{j+1} - t_i^j = \Delta t \cdot \dot{t}_i^{j+1} + \frac{\Delta t^2}{1.2} \cdot \ddot{t}_i^{j+1} + O_3(\Delta t^3),$$

в формулах (2.4), (2.10), (2.18) следует, что разностные операторы сходятся к точным во всех точках системы с распределенными параметрами и точность аппроксимации имеет первый порядок по Δt и по Δx .

§ 3. Аналитическое основание метода поиска приближенного условного оптимального управления.

3.1. Формулировка ограничений в управляемой системе.

Замена исходного математического описания управляемой системы (1.1) аппроксимированным (2.1) требует соответствующих формулировок ограничиваемых условий (1.4), (1.5).

В конечно-мерной системе (2.1) формулировка условий поведения функции состояния преобразуется к следующему виду:

$$\text{ограничение на абсолютные значения фазовых координат} \\ t_i(t) \leq t_{i0}, \quad i=1, \dots, n, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

ограничение на допустимые градиенты функции состояния в

системе

$$|t_i(\tau) - t_j(\tau)| \leq \Delta t_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Ограничения на управляющую функцию формулируются практически без изменений:

$$0 \leq u(\tau) \leq 1; \quad u^{-1}(\tau) \cdot \dot{u}(\tau) \leq u_0 \quad (3.3)$$

Цель процесса управления формулируется в виде равенства нулю суммы квадратичных отклонений текущих значений координат функции состояния от заданных.

$$(t_m(\tau_0) - t_m^{opt})^2 = 0, \quad \tau = \tau_0 \quad (3.4)$$

где m может принимать если не все, так некоторые значения из ряда $m=1, \dots, n$. Равенство (3.4) допускает эквивалентную формулировку:

$$\sum_{m=1}^n (t_m(\tau_0) - t_m^{opt})^2 = 0 \quad (3.4)$$

3.2. Аналитическое обоснование выбора критерия оптимизации и направления изменения управляющей функции

Качество процесса управления зависит от того, насколько велики будут нарушения в системе (2.1) условий (3.2) в процессе управления и отклонения условий (3.4) в конце процесса [5, 6].

Для формирования критерия качества оптимального ведения процесса вводим две вспомогательные функции, следуя [5].

$$\Psi_1(\alpha_1) = \frac{1}{2} \alpha_1^2, \quad \alpha_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (t_i(\tau) - t_j(\tau))^2 \alpha_{ij} + \delta_0 u(\tau) + \varphi_1(\tau), \quad (3.5)$$

$$-1 \leq \delta_1(\tau) \leq 0, \quad \alpha_1 \geq 0.$$

$$\Psi_2(\alpha_2) = \frac{1}{2} \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \sum_{i=1}^n c_i t_i(\tau) + \varphi_2(\tau), \quad (3.6)$$

$$-k \leq \varphi_2(\tau) \leq 0; \quad c_i \geq 0; \quad t_i(\tau) \geq 0$$

Равенства (3.5), (3.6) понимаем в интегральном смысле на всем временном интервале оптимального ведения процесса $[\sigma, \tau_0]$.

Для качественного ведения процесса управления системой без нарушения условий по абсолютным значениям и разностям значений функции состояния (3.1), (3.2) формируем

функционал качества процесса управления в форме

$$R(u, v, \tau) = \int_{\tau}^T (v_1 + v_2) d\tau \quad (3.7)$$

Достижение заданных значений функции состояния при оптимальном управлении $u(\tau)$ соответствует выполнению условия:

$$\mathcal{L}(u(\tau), \tau) = \frac{1}{2} [\bar{t}(u(\tau), \tau) - \bar{t}^{opt}]^2 + [\bar{t}(u(\tau), \tau) - \bar{t}^{opt}] = 0 \quad (3.8)$$

для некоторого разыскиваемого значения τ_* . Функционал (3.8) является функционалом цели процесса управления. Совершенно ясно, что условием достижения цели с соблюдением условий будет минимизация общего функционала качества и цели.

$$I(u(\tau), v(\tau), \tau) = \mathcal{L}(u(\tau), \tau) + R(u(\tau), v(\tau), \tau) \quad (3.9)$$

В пространстве состояний [4] вычисляем вариацию минимизируемого функционала (3.9) как функцию вариаций основной $u(\tau)$ и вспомогательных $v_1(\tau)$, $v_2(\tau)$ управляющих функций.

$$\delta I(u(\tau), v(\tau), \tau) = I(u + \delta u, v + \delta v, \tau) - I(u, v, \tau) = \delta \mathcal{L} + \delta R \quad (3.10)$$

Вектор-функция $\delta \bar{t}(u, \tau)$ является решением уравнения

$$\delta \dot{\bar{t}}(\tau, v_1) = A \cdot \delta \bar{t}(\tau, v_1) + F \cdot \delta u(\tau) :$$

с начальным условием $\delta \bar{t}(0) = 0$. (3.11)

$$\delta R(u, v, \tau) = \int_0^T \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_1} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i(t; \tau) - t_j(\tau) + t_0 u(\tau) + v_2(\tau) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_2} \left[\sum_{i=1}^n c_i v_i(\tau) + \delta v_2(\tau) \right] \right\} d\tau \quad (3.12)$$

В силу выполнения условия (3.11) для любой кусочно-непрерывной вектор-функции $\bar{t}(\tau)$ справедливо интегральное равенство

$$\int_0^T \bar{t}(\tau) [\delta \dot{\bar{t}}(\tau) - A \delta \bar{t}(\tau) - F \delta u(\tau)] d\tau = 0 \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) добавляем в выражение для δI , интегрируем

слагаемое $\vec{f}^T(\tau) \delta \vec{f}(\tau)$ по частям и собираем коэффициенты при $\delta \vec{f}(\tau)$.

С точностью до величин второго порядка малости получим:

$$\begin{aligned} & \left[(\vec{f}^T(\tau, u) - \vec{f}^T(\tau)) \vec{f}(\tau) \right]^T \delta \vec{f}(\tau) - \int_0^{\tau} \left[\vec{f}^T(\alpha) + \vec{f}^T(\alpha) A - \vec{d}^T(\alpha) \right]^T \delta \vec{f}(\alpha) d\alpha - \\ & - \int_0^{\tau} \left[\vec{f}^T F - r(\alpha) \right] \delta u(\alpha) d\alpha = \delta I(u, \tau) - \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial d_1} \delta d_1(\alpha) + \frac{\partial \Psi_2}{\partial d_2} \delta d_2(\alpha) \right] d\alpha \end{aligned} \quad (3.14)$$

Принять следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{d}(\tau) &= \{d_1(\tau), \dots, d_n(\tau)\}; \\ d_1(\tau) &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \Psi_1}{\partial d_i}; \quad d_2(\tau) = \dots = d_{n-1}(\tau) = 0, \quad d_n(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial \Psi_2}{\partial d_i}; \\ r(\alpha) &= r_0 \frac{\partial \Psi_1}{\partial d_1}; \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если принять условия

$$\vec{f}^T(\tau) = -A^T \vec{f}^T(\tau) + \vec{d}^T(\tau), \quad \vec{f}^T(\tau) = -[\vec{f}^T(\tau, u) - \vec{f}^T(\tau)] \quad (3.16)$$

то выражение (3.14) можно записать в виде:

$$\delta I = - \int_0^{\tau} \left[\vec{f}^T F - r(\alpha) \right] \delta u(\alpha) d\alpha + \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial d_1} \delta d_1(\alpha) + \frac{\partial \Psi_2}{\partial d_2} \delta d_2(\alpha) \right] d\alpha \quad (3.17)$$

Вычислим минимум интеграла (3.17) по $\delta u(\alpha)$, $\delta d_1(\alpha)$, $\delta d_2(\alpha)$ при ограничениях $-1 \leq \delta u(\alpha) \leq 0$, $-h \leq \delta d_1(\alpha) \leq 0$, $0 \leq \delta d_2(\alpha) \leq 1$. Минимум

достигается при следующих вариациях управляющих функций:

$$\delta u(\alpha) = \bar{u}(\alpha) = \begin{cases} +1, & [\vec{f}^T F - r(\alpha)] \geq 0 \\ 0, & [\vec{f}^T F - r(\alpha)] < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\delta d_1(\alpha) = \bar{d}_1(\alpha) = \begin{cases} 0, & \frac{\partial \Psi_1}{\partial d_1} < 0 \\ +1, & \frac{\partial \Psi_1}{\partial d_1} \geq 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\delta d_2(\alpha) = \bar{d}_2(\alpha) = \begin{cases} -h, & \frac{\partial \Psi_2}{\partial d_2} < 0 \\ 0, & \frac{\partial \Psi_2}{\partial d_2} \geq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

В качестве направления изменения $u(\alpha)$, $d_1(\alpha)$, $d_2(\alpha)$ для минимизации $I(u, \tau)$ принимаем направление:

$$\begin{aligned} q_1(\alpha) &= \bar{u}(\alpha) - u(\alpha); \\ h_1(\alpha) &= \bar{d}_1(\alpha) - d_1(\alpha); \\ h_2(\alpha) &= \bar{d}_2(\alpha) - d_2(\alpha) \end{aligned} \quad (3.21)$$

На выбранном направлении находим точку минимума функционала $I(u, \tau)$:

$$\min I(u + \lambda q, \tau + \lambda h, \tau), \quad \lambda \geq 0 \quad (3.22)$$

Так как минимизируемый функционал выпуклый и дифференцируемый, то его минимум достигается там, где выполняется условие:

$$\begin{aligned} & \bar{L}_\lambda(u + \lambda q, v + \lambda h, \tau) = 0 \\ & [\bar{L}_\lambda(\tau) - \bar{L}(\tau)]^+ \delta \bar{L}_\lambda(\tau) + \int_0^T \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial d_1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \delta t_i(\tau) + \varepsilon b_0 q(\tau) + \varepsilon h_1(\tau) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi_2}{\partial d_2} \left(\sum_{i=1}^n c_i \delta t_i(\tau) + \varepsilon h_2(\tau) \right) \right\} d\tau = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

В выражении (3.33) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \delta \bar{L}_\lambda(\tau) &= \varepsilon [\bar{L}(\tau, \bar{u}) - \bar{L}(\tau, u)]; \\ \delta \bar{L}(\tau) &= \bar{L}(\tau, \bar{u}) - \bar{L}(\tau, u); \\ \bar{L}_\lambda(\tau) &= \bar{L}(\tau, u) + \lambda [\bar{L}(\tau, \bar{u}) - \bar{L}(\tau, u)] \end{aligned} \quad (3.34)$$

После подстановки выражений (3.34) в (3.33) получим выражения для частных производных

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial d_1} = \theta_1(\tau) + \lambda \gamma_1(\tau), \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial d_2} = \theta_2(\tau) + \lambda \gamma_2(\tau), \quad (3.35)$$

где приняты следующие обозначения выражений:

$$\theta_1(\tau) = \sum_{i=1}^n a_i t_i(\tau) + b_0 u(\tau) + v_1(\tau); \quad \theta_2(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i t_i(\tau) + v_2(\tau); \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= \sum_{i=1}^n a_i (t_i(\tau, \bar{u}) - t_i(\tau, u)) + b_0 q(\tau) + h_1(\tau); \\ \gamma_2(\tau) &= \sum_{i=1}^n c_i (t_{i_2}(\tau, \bar{u}) - t_{i_2}(\tau, u)) + h_2(\tau); \end{aligned} \quad (3.37)$$

Если ввести обозначения:

$$\xi(\tau) = \int_0^T (\theta_1(\tau) \gamma_1(\tau) + \theta_2(\tau) \gamma_2(\tau)) d\tau \quad (3.38)$$

$$\eta(\tau) = \int_0^T (\gamma_1^2(\tau) + \gamma_2^2(\tau)) d\tau$$

Из выражения (3.33) получаем выражение для вычисления множителя λ с учётом введенных обозначений:

$$\lambda = \frac{[\bar{L}(\tau) - \bar{L}(\tau)]^+ \delta \bar{L}(\tau) + \xi(\tau)}{[\delta \bar{L}(\tau)]^+ \delta \bar{L}(\tau) + \eta(\tau)} \quad (3.39)$$

Для вычисления λ необходимо от 0 до τ проинтегрировать систему уравнений для $\bar{L}(\tau), \bar{L}(\tau, \bar{u}), \xi, \eta$. После этого вычисляется и проверяется условие принадлежности управляющих функций заданным областям.

Если же $\lambda \in [0, 1]$, то выбирается ближайшее из принадлежащих данному отрезку.

§ 4. Алгоритм вычисления условного оптимального управления

Перед началом k -го шага вычислений заданы числа $\tau_k > 0$, β_k и функции $v_1^*(\tau)$, $v_2^*(\tau)$, $\bar{v}_1^*(\tau)$, $\bar{v}_2^*(\tau)$, $u_k(\tau)$, $\bar{u}_k(\tau)$ в интервале времени $(0, \tau_k)$.

Первый блок вычислений

От 0 до τ_k интегрируем следующие системы уравнений с начальными условиями:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(\tau) &= A \bar{x}(\tau, u) + F \cdot u_k(\tau), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}^0, \\ \dot{\bar{z}}(\tau) &= A \bar{z}(\tau, \bar{u}) + F \cdot \bar{u}_k(\tau), \quad \bar{z}(0) = \bar{z}^0, \\ \dot{\xi}(\tau) &= \theta_{1,k} \cdot \tau_{1,k} + \theta_{2,k} \cdot \tau_{2,k}, \quad \xi(0) = 0 \\ \dot{\eta}(\tau) &= \tau_{1,k}^2 + \tau_{2,k}^2, \quad \eta(0) = 0 \end{aligned}$$

Второй блок вычислений

Для $\beta_k > 0$ полагаем $\tau_{k+1} = \tau_k$ и далее после интегрирования запоминаем на момент времени τ_{k+1} , $\bar{x}(\tau_{k+1})$, $\bar{z}(\tau_{k+1})$, $\xi(\tau_{k+1})$, $\eta(\tau_{k+1})$,

а затем вычисляем

$$\lambda = \frac{[\xi(\tau_{k+1}) - \xi^*] [\bar{x}(\tau_{k+1}) - \bar{x}^*] + \eta(\tau_{k+1})}{[\bar{x}(\tau_{k+1}) - \bar{x}^*] [\bar{x}(\tau_{k+1}) - \bar{x}^*] + \eta(\tau_{k+1})}$$

По вычисленному значению λ производим выборку:

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \lambda, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Далее вычисляем значения управляющих функций и фазовых

координат для следующего шага вычислительного процесса:

$$\begin{aligned} v_1^{k+1}(\tau) &= (1 - \bar{\lambda}) v_1^*(\tau) + \bar{\lambda} \bar{v}_1^*(\tau); \\ v_2^{k+1}(\tau) &= (1 - \bar{\lambda}) v_2^*(\tau) + \bar{\lambda} \bar{v}_2^*(\tau); \\ u_{k+1}(\tau) &= (1 - \bar{\lambda}) u_k(\tau) + \bar{\lambda} \bar{u}_k(\tau); \\ \bar{z}_{k+1}(\tau) &= (1 - \bar{\lambda}) \bar{z}_k(\tau) + \bar{\lambda} \bar{z}_k(\tau) \end{aligned}$$

и заносятся в память ЭВМ.

Третий блок вычислений

Для $\beta_k > 0$ с момента τ_k вместе с уравнениями первого блока интегрируем

$$\begin{aligned} \dot{\bar{f}}(\tau) &= -A\bar{f}(\tau) + \bar{d}(\tau), \quad \tau = \tau_k, \quad \bar{f}(\tau_k) = [\bar{f}^{(k+1)} - \bar{f}(\tau_k)] \\ \dot{\beta}(\tau) &= -|\bar{f}^T F - r_k| + \theta_{1,k} \bar{v}_1^k(\tau) + \theta_{2,k} \bar{v}_2^k(\tau), \quad \beta(\tau_k) = \beta_k, \\ \dot{q} &= \theta_{1,k}^2 + \theta_{2,k}^2, \quad q(\tau_k) = 0, \quad \dot{\Delta} = |A||\Delta| + |F|, \quad \Delta(\tau_k) = 0 \end{aligned}$$

Параллельно с интегрированием приведенных уравнений производим вычисление функций.

$$\bar{u}_k(\tau) = u_k(\tau) = \begin{cases} 1, & [\bar{f}^T F - r_k] > 0 \\ 0, & [\bar{f}^T F - r_k] \leq 0 \end{cases}; \quad \begin{aligned} \bar{v}_1^k(\tau) = \bar{v}_1^k(\tau) &= \begin{cases} 0, & \theta_{1,k} > 0 \\ -1, & \theta_{1,k} \leq 0 \end{cases}; \\ \bar{v}_2^k(\tau) = \bar{v}_2^k(\tau) &= \begin{cases} -1, & \theta_{2,k} > 0 \\ 0, & \theta_{2,k} \leq 0 \end{cases}; \end{aligned}$$

Интегрирование ведется до того момента, пока не выполнится условие

$$\beta(\tau) - \frac{1}{2} q(\tau) - \Delta(\tau) \|\bar{f}(\tau_k) - \bar{f}(\tau)\| + \bar{t}^T(\tau_k) [\bar{f}(\tau) - \bar{f}(\tau_k)] \leq 0$$

Этот момент обозначим через τ_{k+1} и переходим на второй блок вычислений.

Четвертый блок вычислений

От τ_{k+1} к 0 интегрируем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{f}}(\tau) &= -A^T \bar{f}(\tau) + \bar{d}_{k+1}(\tau), \quad \bar{f}(\tau_{k+1}) = (\bar{f}_0 - \bar{f}(\tau_{k+1})), \\ \dot{\bar{v}}(\tau) &= A \bar{v}(\tau) + F \cdot u_{k+1}(\tau), \quad \bar{v}(\tau_{k+1}) = \bar{v}_{k+1}, \\ \dot{\beta} &= |\bar{f}^T F - r_{k+1}| - \theta_{1,k+1} \bar{v}_1^{k+1} - \theta_{2,k+1} \bar{v}_2^{k+1}, \quad \beta(\tau_{k+1}) = 0, \\ \dot{q} &= -\theta_{1,k+1}^2 - \theta_{2,k+1}^2, \quad q(\tau_{k+1}) = [\bar{t}_{k+1} - \bar{t}^{(k+1)}]^T [\bar{t}_{k+1} - \bar{t}^{(k+1)}], \\ u_{k+1}(\tau) = \bar{u}_{k+1}(\tau) &= \begin{cases} 1, & [\bar{f}^T F - r_{k+1}] > 0 \\ 0, & [\bar{f}^T F - r_{k+1}] \leq 0 \end{cases}; \end{aligned}$$

$$\bar{v}_1^{k+1}(\tau) = \bar{v}_1^{k+1}(\tau) = \begin{cases} 0, & \theta_{1,k+1} > 0 \\ -1, & \theta_{1,k+1} \leq 0 \end{cases};$$

$$\bar{v}_2^{k+1}(\tau) = \bar{v}_2^{k+1}(\tau) = \begin{cases} -1, & \theta_{2,k+1} > 0 \\ 0, & \theta_{2,k+1} \leq 0 \end{cases}.$$

Запомним вычисленные значения функций на интервале $(0, \tau_{k+1})$

$$\bar{v}_1^{k+1}(\tau), \bar{v}_2^{k+1}(\tau), u_{k+1}(\tau) \quad \text{и число}$$

$$\beta_{k+1} = \beta(0) - \bar{f}^T(0) \bar{t}^{(k+1)} - \frac{1}{2} q(0)$$

Необходимые данные для вычислений следующего шага получены.

Блок-схема программы вычислений приведена на рис.2.

§ 5. Результаты реализации методов

Приведенный алгоритм был программно реализован для одной системы с цилиндрически симметричной геометрией.

Распределение управляющего воздействия в объеме системы приведено на рис.3. Критерий качества в цели управления формулировался в соответствии с приводимыми в настоящей работе формулами (3.7), (3.8). На рис.10 приведена динамика условного управляющего воздействия в зависимости от времени, а на рис. 4,5, 6, 7, 8 динамика изменения функции состояния в объеме системы.

Следует заметить, что формулировка критерия качества и цели (3.7), (3.8) существенно зависит от конкретного представления о ходе процесса в системе, а точность вычислений от подбора эмпирических весовых коэффициентов в минимизируемом функционале.

На рис.9 представлены кривые изменения функции состояния системы в наиболее характерных точках управляемой системы.

На рис.11 приводится линия изменения градиента функции состояния.

В Н В О Д И

1. В данной работе приведена разработанная авторами гибридная математическая модель процессов в системе с распределенными параметрами и сложной геометрией, позволяющая воспользоваться хорошо разработанными принципами управления системами, состояние которых описывается обобщенными дифференциальными уравнениями [5, 8].

2. Применительно к разработанной модели и на основании общих принципов оптимального управления [4, 5] разработана методика поиска приближенного условного оптимального по быстроддействию управления.

3. На основании разработанной методики получен вычислительный алгоритм решения сформулированной задачи и с его помощью проведено решение поставленной практической задачи.

Приводятся результаты вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вутковский Л.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., "Наука", 1975.
2. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М., "Наука", 1977.
3. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., "Наука", 1978.
5. Кирил Н.Е. Вычислительные методы теории оптимального управления. Л., ЛГУ, 1973.
6. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М., "Наука", 1971.
7. Брайсон А.Е., Денкел В.Ф., Дрейфуэ С. Задачи оптимального управления с ограничениями типа неравенств. "Ракетная техника и космонавтика" № 1, 1964.
8. Леончук М.П. О численном решении задач оптимальных процессов с распределенными параметрами. КВМ и МФ. 1964. № 4, 6, с.1112-1116.

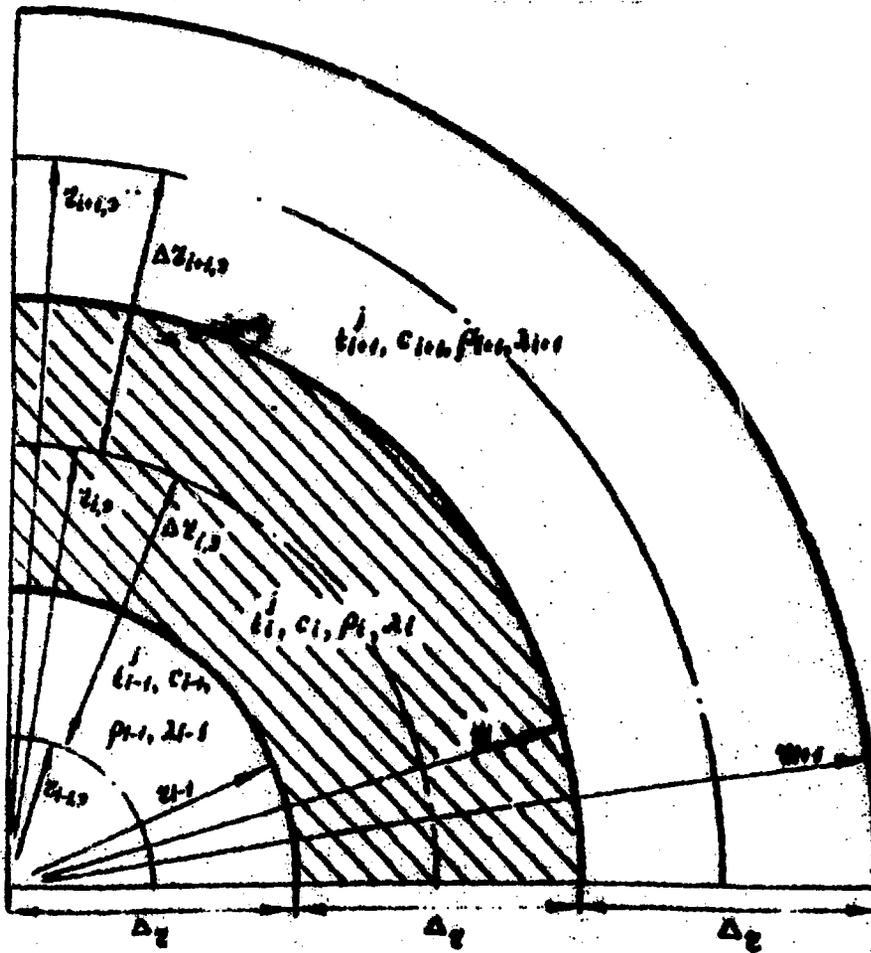


Рис. 1. Схема разбиения цилиндрического тела

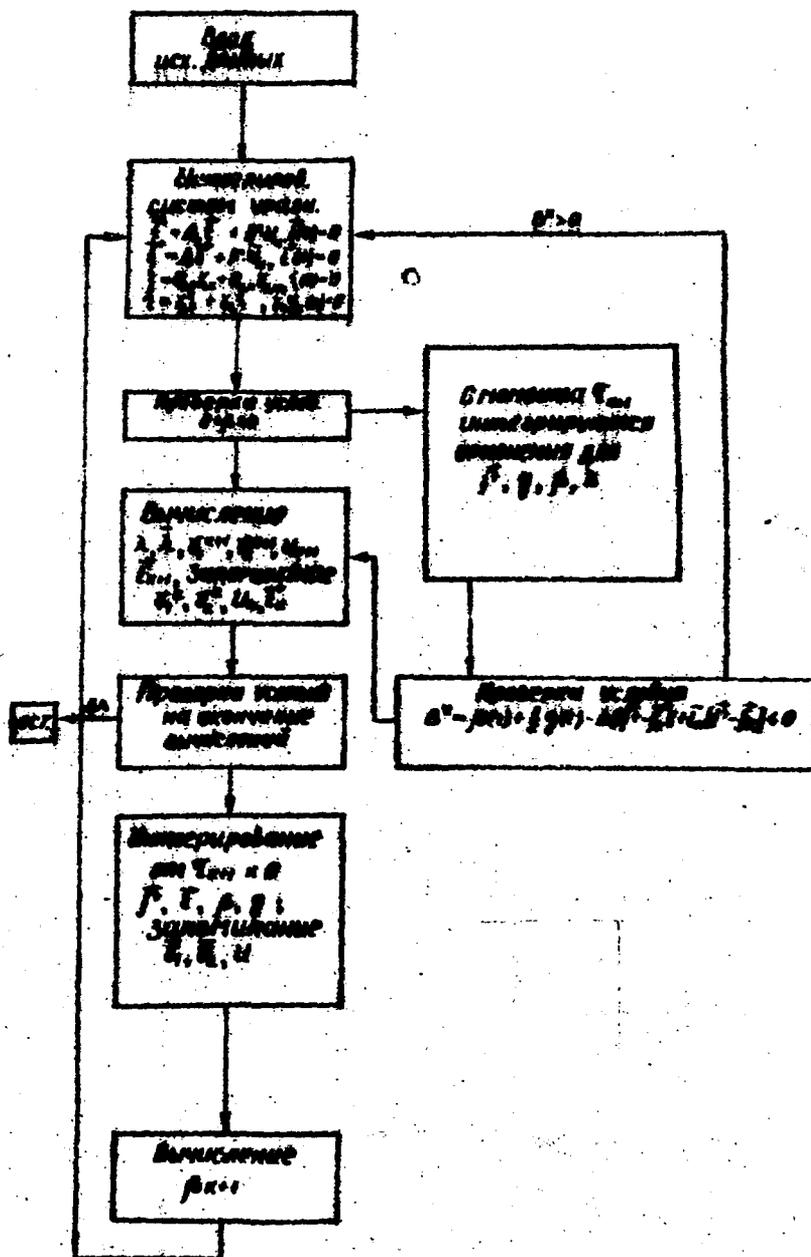


Рис. 2. Блок-схема алгоритма оптимизации

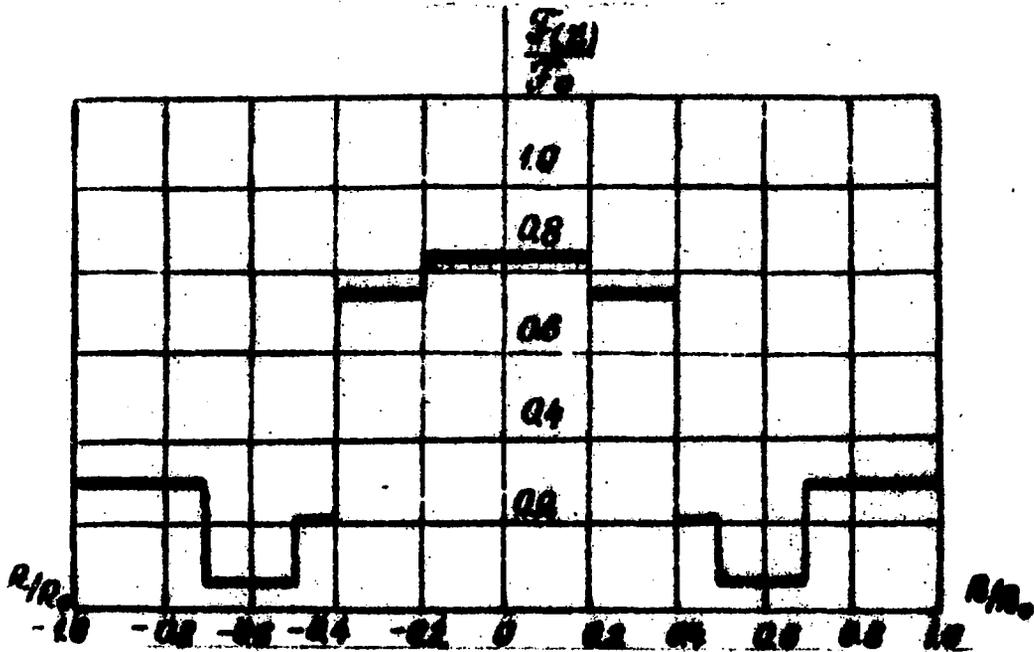


Рис. 3. Распределение функции управления по объему тела

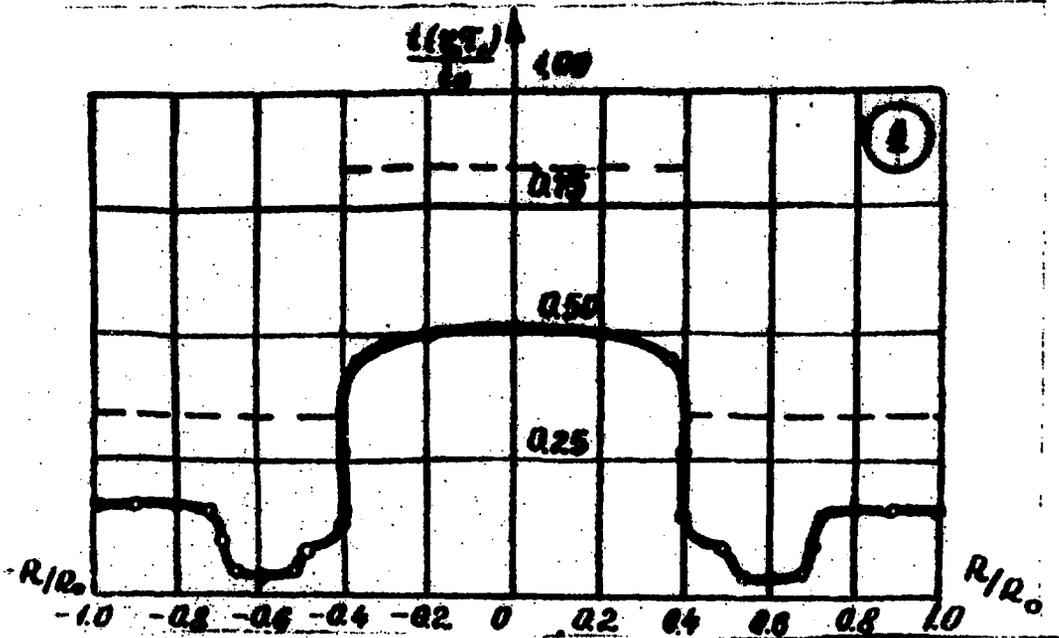


Рис. 4. Распределение функции состояния ($\tau/\tau_0 = 0.2$)

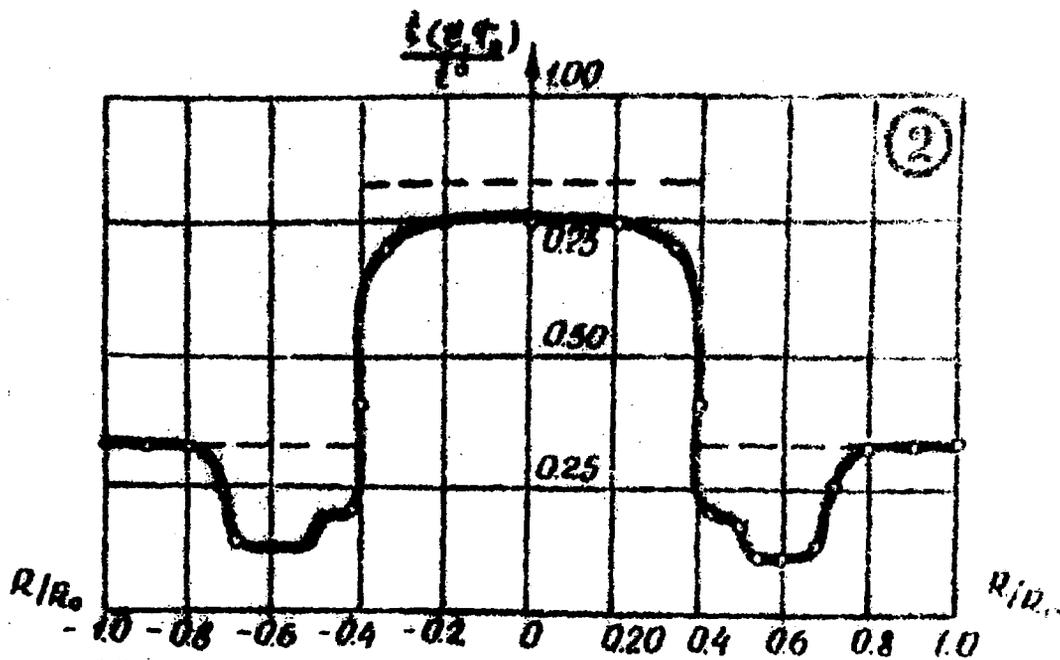


Рис. 5. Распределение функции состояния ($\sigma(\kappa_0) = 0.4$)

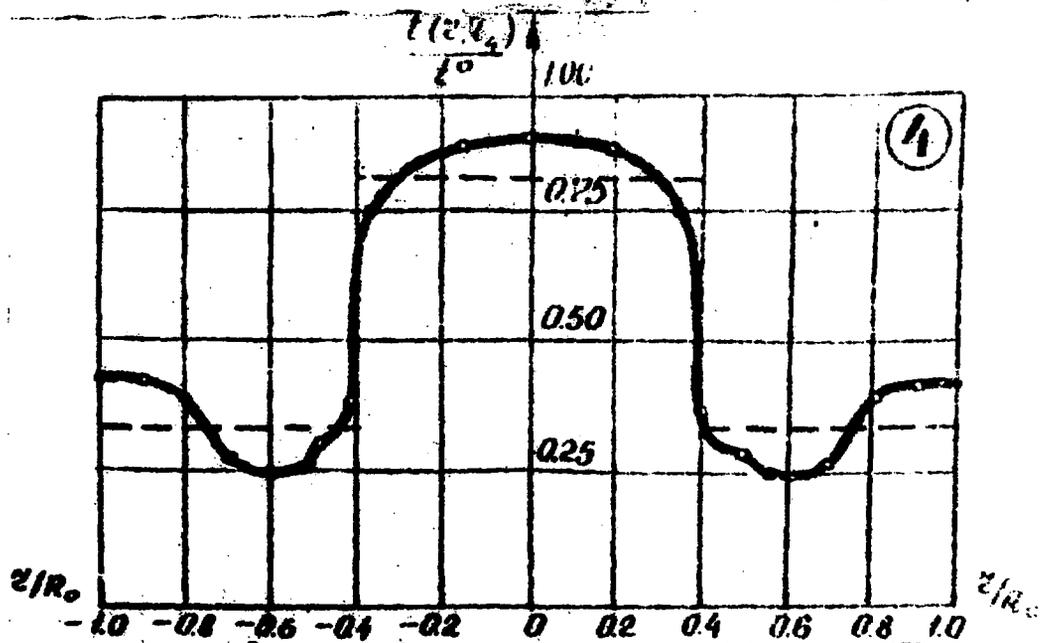


Рис. 6. Распределение функции состояния ($\sigma(\kappa_0) = 0.8$)

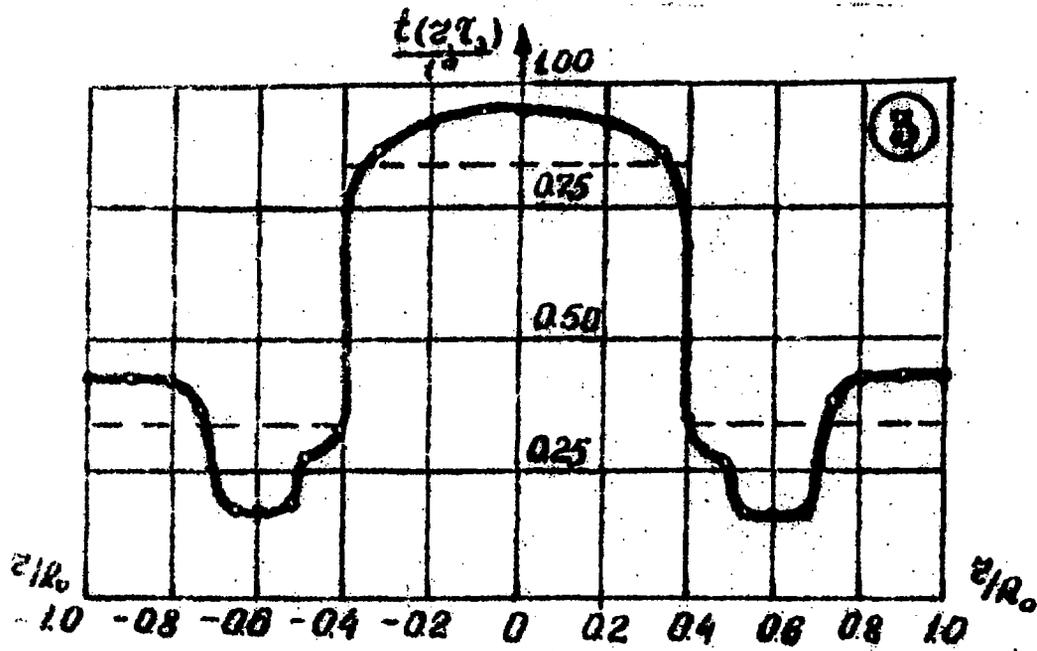


Рис. 7. Распределение функции состояния ($\sigma_{k_0} = 0.6$)

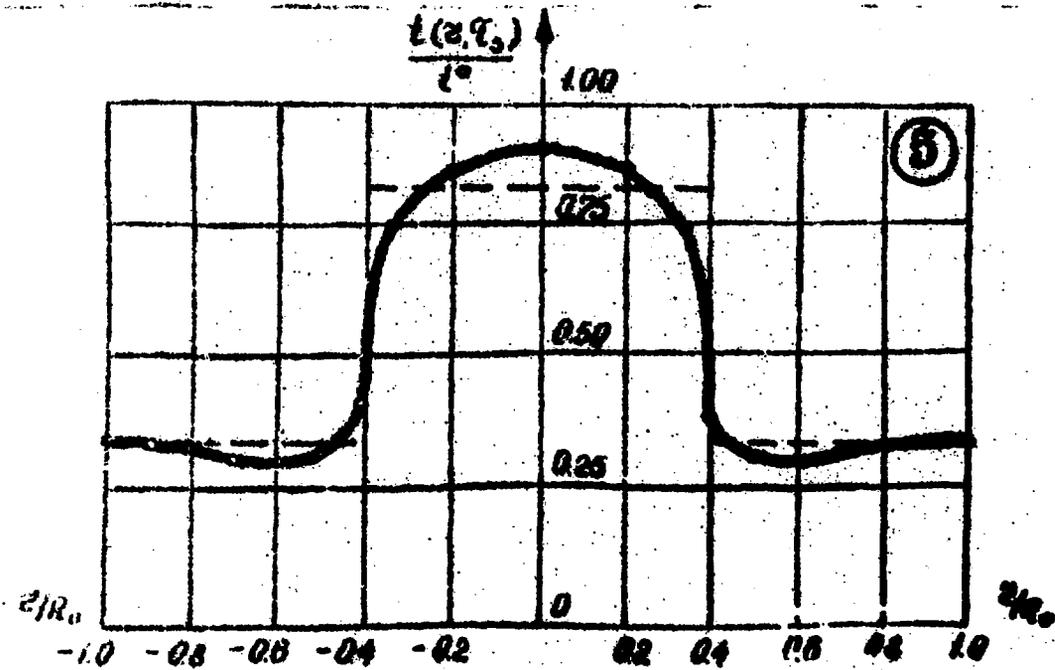


Рис. 8. Распределение функции состояния ($\sigma_{k_0} = 1.0$)

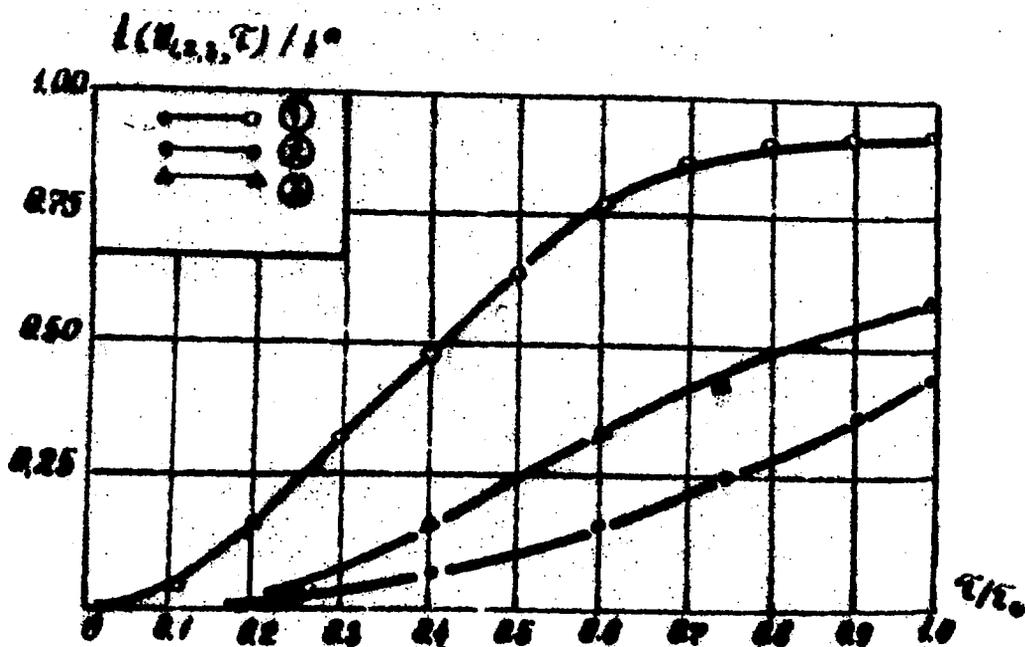


Рис. 9. Изменение функции состояния в точках 1, 2, 3

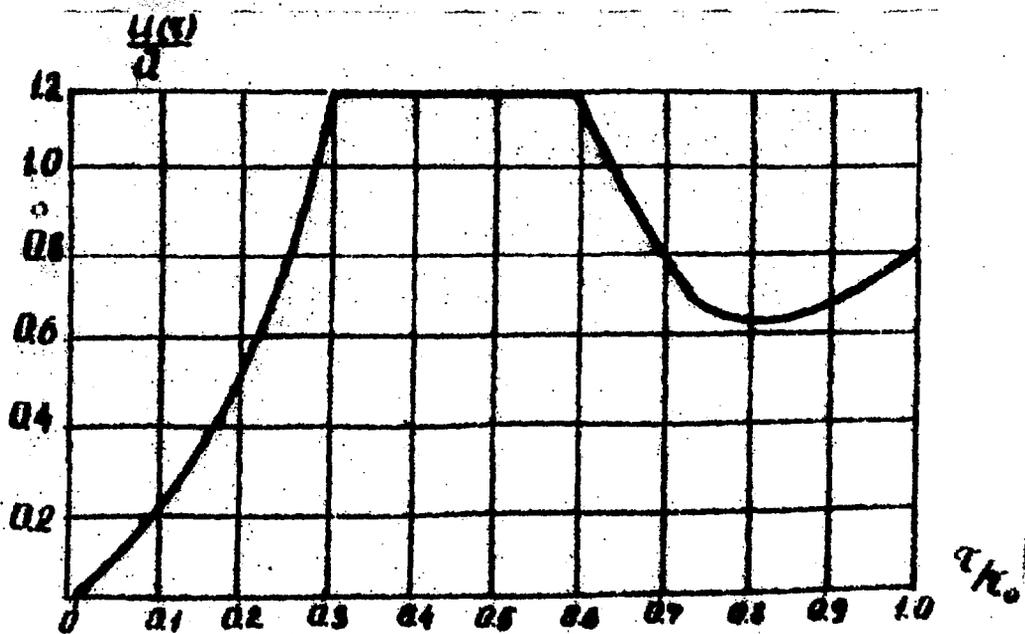


Рис. 10. Оптимальный закон изменения управляющей функции

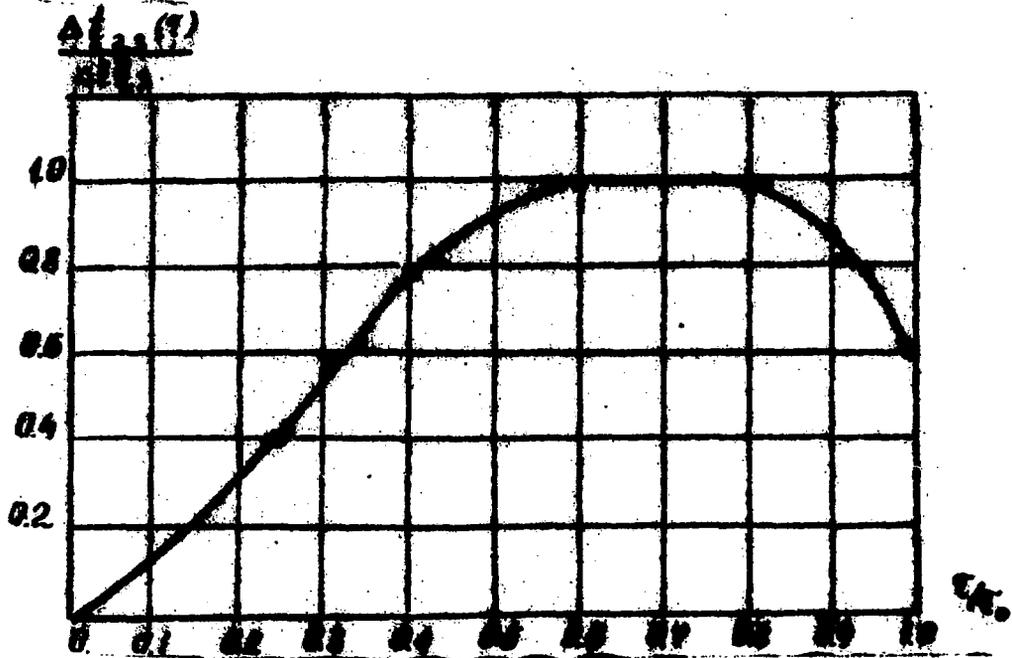


Рис. II. Изменение разности значений функции восточнее в точках 1,2,3



Подписано в печать 18/У1-1979 г. Т-11914 Формат 60x90 1/16
Офсетная печать Усл.п.л. 1,6 Уч.-изд.л. 1,1 Тираж 76 экз.
Заказ № 90у. Цена 11 коп. Индекс 3624 ФЭН-1004

Отпечатано на роталпринте ФЭН, ноябрь 1979 г.

11 коп.

Индекс 3624

|