LYCEN 8027

FR8002835

institut de physique nucléaire
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON I
43, Bd du 11 Novembre 1918 • F 69622 VILLEURBANNE Cedex

La méthode de la fonction génératrice et son application à l'étude des changements de représentation et des développements en quasi-bosons

Mehdi HAGE-HASSAN

Laboratoire associé à l'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules

No. d'ordre 80-18 Année 1980

thèse

présentée

devant l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON-I
pour obtenir

le grade de DOCTEUR D'ETAT ES-SCIENCES

par

Mehdi HAGE-HASSAN

* * * * *

La méthode de la fonction génératrice et son application à l'étude des changements de représentation et des développements en quasi-bosons

Soutenue le 23 Avril 1980
devant la Commission d'Examen
JURY :

MM E. Elbaz Président

M. Lambert
S. Feneuille
J. Raynal

Examinateurs

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON-I

Président honoraire : M. le Professeur J. BOIDIN

Président :	M. le Professeur D. GERMAIN
1er Vice-Président :	M. le Professeur M. DUFAY
2ème Vice-Président :	M. J.C. DUPLAN, Maître-Assistant
3ème Vice-Président :	Mlle ECHALLON, Etudiante
Secrétaire Général :	M. J. RAMBAUD, Administrateur Civil

UNITES d'ENSEIGNEMENT et de RECHERCHE

U.E.R. de Médecine Grange-Blanche	M. le Professeur P. ZECH
U.E.R. de Médecine Alexis-Carrel	M. le Professeur R. MORNEX
U.E.R. de Médecine Lyon-Nord	M. Y. MINAIRE, Maître de Conférences Agrégé
U.E.R. de Médecine Sud-Ouest	M. le Professeur J. NORMAND
U.E.R. de Sciences Pharmaceutiques	M. le Professeur C.A. BIZOLLON
U.E.R. de Techniques de Réadaptation	M. A. MORGON, Maître de Conférences Agrégé
U.E.R. de Biologie Humaine	M. J.P. REVILLARD, Maître de Conférences Ag.
U.E.R. d'Education Physique et Sportive	M. A. MILLON, Professeur d'E.P.S.
U.E.R. de Sciences Odontologiques	M. le Professeur J. PARRET
U.E.R. de Mathématiques	M. le Professeur Ph. PICARD
U.E.R. de Physique	M. le Professeur J. DELMAU
U.E.R. de Chimie-Biochimie	Mme A. VARAGNAT, Maître-Assistant
U.E.R. des Sciences de la Nature	M. le Professeur Y. LEMOIGNE
U.E.R. de Sciences Physiologiques	Mlle le Professeur J.F. WORBE
U.E.R. de Physique Nucléaire	M. le Professeur M. GUSAKOW
I.U.T - I	M. le Professeur A. VILLE
I.U.T - II	M. J. GALLET, Directeur E.N.S.A.M.
Observatoire de Lyon	M. G. MONNET, Astronome Adjoint
U.E.R. de Mécanique	Mlle le Professeur G. COMTE-BELLOT

A la mémoire de mon père

Je prie Monsieur le Professeur Gusakow, Directeur de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon, de bien vouloir trouver ici l'expression de mes sincères remerciements pour son hospitalité toujours offerte.

Ce travail a été dirigé par Monsieur le Professeur Lambert, je tiens à lui adresser mes remerciements pour les meilleures conditions de travail qu'il m'a procurées. Ses conseils et ses critiques me furent très précieux.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma profonde gratitute à Monsieur le Professeur Feneuille, Directeur Scientifique du laboratoire Aimé Cotton, qui a bien voulu accepter de participer au Jury.

Je voudrais exprimer aussi, ma profonde gratitude à Monsieur Raynal, Physicien à Saclay, qui par ses travaux de recherche, ses critiques et ses remarques après une lecture approfondie de ce travail, m'a beaucoup aidé et qui de plus a bien voulu accepter, d'être rapporteur au jury.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur Elbaz, d'avoir bien voulu accepter de participer au Jury.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur le Docteur Kibler, pour ses conseils, ses encouragements et ses remarques qui m'ont été très précieux au moment de la publication de ce travail et je lui suis très reconnaissant d'avoir bien voulu accepter d'être rapporteur au Jury.

Je remercie, Monsieur le Professeur Giffon, ainsi que mes collègues de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon et plus particulièrement Messieurs Chambon, Drain et Nahabetian, pour les encouragements qu'ils m'ont apportés, dans l'achèvement de ce travail.

Je suis très reconnaissant au Conseil National de la Recherche Scientifique du Liban, dont l'appui matériel était indispensable pour la réalisation de ce travail.

Je remercie Mademoiselle Rothan qui a dactylographié ce texte avec autant de soin que de rapidité.

RESUME

Exposé de la méthode, suivi du calcul des coefficients de Talmi et de Moshinsky et Smirnov, de l 'étude de la fonction génératrice des invariants de Weyl du groupe SU(N) et de l'application aux développements en quasi-bosons.

ABSTRACT

The method is developed and applied to the determination of Talmi's and Moshinsky-Smirnov's coefficients and to a study of the generating function of the Weyl invariants of SU(N) and of quasi-bosons developments.

INTRODUCTION

Les fonctions génératrices des polynômes orthogonaux à une variable sont largement utilisées depuis longtemps dans tous les domaines des mathématiques et de la physique théorique surtout depuis l'avènement de la mécanique quantique et l'introduction de l'espace de Hilbert en tant qu'espace des états d'un système quantique. En les considérant comme noyau des transformations unitaires, Bargmann (1961) a donné une nouvelle interprétation de ces fonctions génératrices ce qui l'a conduit à l'introduction de l'espace fonctionnel appelé espace de Bargmann et Hilbert. Ces résultats fondamentaux ont servi de point de départ à de nombreux et importants travaux dans plusieurs domaines de la physique, en optique quantique (Kibble 1968), en physique nucléaire (Jancovici et Schiff 1964; Hage Hassan et Lambert 1972), en physique des particules (Beltrametti et Luzato 1967; Scheweber 1967).

En essayant d'etudier les mouvements vibrationnels des noyaux à l'aide de la méthode des coordonnées génératrices de Hill et Wheeler (1953) qui connait un grand succès en physique nucléaire notamment pour l'étude des mouvements rotationnels des noyaux (Peierls et Yoccoz 1957; Peierls et Thouless 1962) et en essayant de comparer les résultats qu'elle donne avec les résultats obtenus à l'aide du formalisme de quasi-bosons, nous avons été amenés à établir une nouvelle approche de cette méthode qui généralise les travaux de Bargmann. Nous appelons la nouvelle méthode à laquelle nous aboutissons, méthode de la fonction génératrice. Cette méthode permet de transposer tout problème d'un espace de Hilbert de la mécanique quantique en un problème dont la résolution devient plus simple dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$. Pour cela nous considérons une application linéaire et bijective entre l'espace de Hilbert et l'espace fonctionnel et nous pouvons définir la fonction génératrice comme une somme de produits associant chaque élément d'une base de l'espace de Hilbert à son image dans l'espace fonctionnel. A l'aide de cette fonction nous pouvons déterminer les images des opérateurs et les images des vecteurs définis dans l'espace de Hilbert. A partir des fonctions propres et des vecteurs propres de l'image de l'Hamiltonien dans l'espace fonctionnel nous arrivons à déterminer les vecteurs propres de l'opérateur Hamiltonien dans l'espace de Hilbert. Cette méthode se prête à de nombreuses applications, non seulement elle permet le calcul des éléments de passage d'une représentation à une autre représentation, calcul des coefficients de Talmi (1952), des coefficients de Moshinsky (1959) et Smirnov (1962) et des coefficients 3-jm des groupes unitaires entre autres mais aussi elle donne le développement de l'Hamiltonien en quasi-bosons et permet de régler certains litiges à propos du développement de l'Hamiltonien par la méthode de Beliaev et Zelevinsky (1962) ou la méthode de Marumori et al. (1964).

Nous nous intéressons tout d'abord à l'étude de la base de l'oscillateur harmonique à trois dimensions puisque les états à une particule se développent sur cette base et nous construisons une nouvelle fonction génératrice de la base sphérique,ainsi qu'une nouvelle fonction génératrice de la base de la représentation couplée. De cette dernière,nous déduisons les fonctions propres de $\vec{L}^2$ et de Lz (carré du moment angulaire de deux particules et sa projection sur l'axe z) et nous étudions,plus particulièrement,pour la première fois à notre connaissance le développement sur la base produit de deux harmoniques sphériques de la fonction propre $\mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$,généralisation du tenseur T (l m) (Edmonds 1957).

Puis nous nous intéressons à la transformation d'une base de représentation en fonction des coordonnées de deux particules (représentation non couplée) en une base de représentation en fonction des coordonnées du centre de masse et des coordonnées relatives (représentation couplée) qui se rencontre dans de nombreux domaines de la physique. En particulier elle est utile dans la théorie cinétique des gaz (Kumar 1967), en physique nucléaire (voir par exemple Wong (1970)) et en physique moléculaire (Fieck 1979). De façon générale, elle est fondamentale pour calculer les éléments de la matrice du potentiel à deux corps dans la représentation sphérique de l'oscillateur harmonique. Malgré les grands efforts déployés par de nombreux auteurs (Moshinsky 1959, Kumar 1966 a, Gal 1968, Trlifaj 1972, Efros 1973, Raynal 1976, Dobeš 1977, Fieck 1979, Rashid 1979), une expression simple des coefficients de Talmi et des coefficients de Moshinsky et Smirnov se prêtant à des calculs numériques aisés n'a jusqu'ici jamais été proposée. Dans ce travail à partir de la fonction génératrice de la base sphérique précédemment construite et en n'utilisant que des opérations mathématiques élémentaires nous obtenons une fonction génératrice des coefficients de Talmi de laquelle nous déduisons une expression nouvelle de ces coefficients. De plus nous obtenons une expression nouvelle de ces coefficients dans un cas particulier et finalement à l'aide de cette dernière expression et d'une nouvelle formule de récurrence nous proposons une nouvelle méthode pour calculer les coefficients de Talmi dans le cas général. Par la méthode précédente (calcul des coefficients de Talmi) en utilisant de plus les résultats des travaux de Bargmann (1962) et de Schwinger (1965) sur le groupe des rotations nous obtenons une fonction génératrice nouvelle des coefficients de Moshinsky et Smirnov dont nous déduisons une expression nouvelle de ces coefficients. Cette expression permet alors de retrouver la formule obtenue dans le cas particulier traité par Efros. En outre nous donnons une nouvelle relation entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov.

Le calcul des coefficients 3-jm des groupes unitaires est très important en raison du rôle que ces groupes jouent dans la classification des particules élémentaires à interaction forte et dans l'étude des structures atomiques et nucléaires. Dans le travail de Schwinger (1965) est exposée une méthode utile pour la construction de la fonction génératrice des symboles 3-jm mais cette méthode est difficile à généraliser au groupe SU (N). Bargmann (1962), Resnikoff (1967) et d'autres auteurs (Hongoh 1974) ont essayé de déduire les symboles 3-jm des invariants de Weyl qu'il leur a fallu construire mais cette construction se révèle difficile en général pour SU (N) quand $N > 2$. La considération de cette difficulté nous a conduit à procéder autrement. Notre approche consiste à construire la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation de SU (N) dans l'espace de Bargmann (1962) de laquelle nous déduisons la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation. Puis utilisant ces dernières fonctions et l'intégrale de Gaunt, nous aboutissons à la fonction génératrice des invariants de Weyl. Cette méthode exige l'utilisation des transformations finies et une nouvelle paramétrisation de SU (N) ainsi que la détermination de la mesure invariante sur le groupe. La modification de l'expression de l'intégrale de Gaunt par l'introduction de paramètres réels et positifs convenablement choisis permet de la calculer dans l'espace de Bargmann et présente l'intérêt de donner une expression de la fonction génératrice des invariants de Weyl sous une forme compacte et simple. Notre méthode se caractérise par sa simplicité. En effet, elle n'exige pas de longs calculs, soit qu'il s'agisse de retrouver des résultats bien connus ou d'obtenir de nouveaux résultats. Elle nous permet de construire simplement la fonction génératrice du groupe SU (2). Elle nous permet de démontrer qu'un *ensemble des éléments* de la matrice de représentation de SU (N) est solution d'une équation différentielle et que cet ensemble, dans le cas du groupe SU (3), est équivalent à l'ensemble des fonctions harmoniques déterminées par Beg et Ruegg (1965).

Le développement de l'Hamiltonien d'un système physique, ainsi que le développement des opérateurs tensoriels, en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de bosons, présente un grand intérêt en théorie du magnétisme (Mattis 1965, Kibler et Grenet (1979)) pour l'étude des particules élémentaires (Hara et Goto 1968) mais surtout pour l'étude des mouvements collectifs des noyaux pairs-pairs (Beliaev et Zelevinsky 1962; Marumori et al. 1964; Pang et al. 1968; Sorensen 1970; Otsuka et al. 1978; Chacon et al 1979). Deux méthodes ont été proposées. La première est celle de Beliaev et Zelevinsky (1962). *Elle consiste à développer le produit de* deux opérateurs de fermions en fonction des opérateurs de bosons . Elle exige que les relations de commutation soient vérifiées par les développements. Il a été dit , à tort (Sorensen 1966,1970), comme nous le montrons dans ce travail, que cette méthode ne permet pas la conservation des éléments de matrice de l'Hamiltonien. La deuxième méthode est celle de Marumori et al. (1964). Elle consiste à établir une transformation entre l'espace des fermions et celui des quasi-bosons. En utilisant cette transformation, nous pouvons déterminer l'image de chaque opérateur de l'espace des fermions et en particulier de l'Hamiltonien, dont elle fournit un développement lentement convergent. En utilisant la méthode de la fonction génératrice et en choisissant pour fonction d'onde la fonction d'onde normalisée de Thouless (1960), *nous aboutissons à deux types de développements* de l'Hamiltonien. Le premier est analogue au développement de Marumori et al. (1964), le deuxième n'est autre que le développement de Beliaev et Zelevinsky (1962) écrit dans un ordre différent et débarassé de ses termes excédentaires, il converge rapidement et présente donc une grande utilité pratique. L'application de notre méthode à l'étude du modèle de Lipkin (Lipkin 1965, Pang et al. 1968) prouve que cette méthode donne des résultats d'une manière simple et rapide. Etant donné que le développement de l'Hamiltonien en termes de quasi-bosons peut être effectué sans qu'il soit nécessaire de fixer les états à une particule, nous pouvons utiliser une méthode variationnelle qui permet d'aboutir à une généralisation des équations de Hartree et Fock et de la R. P. A.

La première partie de ce travail est consacrée à l'exposé de la méthode de la fonction génératrice et à des applications directes de la méthode : construction de la fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur harmonique à trois dimensions, méthode de calcul des éléments de passage de la base cartésienne isotrope ou anisotrope à la base sphérique et construction de la fonction génératrice de la représentation couplée. Dans le deuxième chapitre, nous développons la construction des fonctions génératrices des coefficients de Talmi et des coefficients de Moshinsky et Smirnov, nous donnons de nouvelles expressions formelles de ces coefficients et une nouvelle relation entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov. Le troisième chapitre consacré à la construction des invariants de Weyl des groupes unitaires, traite de la construction de la fonction génératrice de la base de représentation de SU (3), d'une nouvelle paramétrisation du groupe

SU (N), de la détermination de la mesure invariante sur SU (N) et nous y montrons qu'un ensemble des éléments de la matrice de représentation est solution d'une équation de Laplace-Beltrami. Dans la quatrième partie il est question du développement de l'Hamiltonien en termes de quasi-*bosons et de sa comparaison avec* les développements de Beliaev et Zelevinsky et de Marumori et al., de l'application de notre méthode au modèle de Lipkin et pour finir de l'exposé d'une méthode variationnelle pour la déduction des équations de Hartree et Fock et des équations de la R.P.A.

Nous signalons que la majeure partie de ce travail est déjà publiée ou en cours de publication.

CHAPITRE I

METHODE DE LA FONCTION GENERATRICE

La méthode de la fonction génératrice que nous développons permet de transformer tout problème d'un espace de Hilbert de la mécanique quantique en un problème analogue dont la résolution devient plus simple, dans un espace fonctionnel, appelé espace de Bargmann et Hilbert (Bargmann 1961, 1962). Si nous considérons une application linéaire et bijective entre l'espace de Hilbert et l'espace des fonctions analytiques de Bargmann et Hilbert, nous pouvons définir la fonction génératrice comme une somme de produits, associant chaque élément d'une base de l'espace de Hilbert à son image dans l'espace fonctionnel. A l'aide de cette fonction nous pouvons déterminer les images des opérateurs et les images des vecteurs définis dans l'espace de Hilbert. En outre, l'image de l'opérateur Hamiltonien admet des fonctions propres dans l'espace de Bargmann et Hilbert ce qui nous permet de déterminer les vecteurs propres de l'Hamiltonien dans l'espace de Hilbert de la mécanique quantique.

L'application de notre méthode à l'étude de la base de l'oscillateur harmonique à trois dimensions présente un grand intérêt puisqu'en physique nucléaire on développe les états à une particule sur cette base (Ripka 1968). C'est ainsi que nous pouvons retrouver simplement les fonctions propres et les vecteurs propres de la base cartésienne de l'oscillateur harmonique à trois dimensions (Messiah 1965); de plus, nous obtenons l'expression de la base sphérique sous la forme exposée par Bargmann et Moshinsky (Bargmann et Moshinsky 1960). Nous sommes amenés à construire une nouvelle fonction génératrice de la base sphérique afin de pouvoir calculer ultérieurement les coefficients de Talmi et les coefficients de Moshinsky et Smirnov (voir chapitre II) et pour calculer la fonction génératrice des éléments de passage de la base sphérique à la base cartésienne isotrope ou anisotrope. De cette fonction génératrice nous pourrions déduire, par développement, les coefficients de passage et nous avons pu établir des relations de récurrence entre ces coefficients. L'application de cette méthode s'avère aussi utile dans le calcul des invariants de Weyl des groupes unitaires à partir desquels s'obtiennent les coefficients 3-jm (voir chapitre III).

Il nous a paru intéressant d'appliquer notre méthode à l'établissement de la fonction génératrice de la fonction d'onde couplée des harmoniques sphériques et pour cela nous partons de la fonction génératrice des symboles 3-jm établie par Schwinger (1965) et de la fonction génératrice des harmoniques sphériques. L'intérêt de la fonction génératrice de la fonction d'onde couplée ainsi construite est de permettre la détermination des fonctions propres de $\vec{L}^2$ et de Lz. Parmi les fonctions propres de $\vec{L}^2$ et Lz nous étudions particulièrement le développement sur la base produit de deux harmoniques sphériques de la fonction propre $\mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$ qui est une généralisation du tenseur sphérique bien connu T (1 m) (Edmonds 1957).

Dans ce chapitre, les quatre premiers paragraphes sont consacrés à l'exposé de la méthode de la fonction génératrice. Dans le cinquième paragraphe nous appliquons la méthode en construisant la fonction génératrice d'un système de bosons. La construction de la fonction génératrice de l'oscillateur harmonique à trois dimensions et le calcul des éléments de passage d'une base cartésienne à une autre base cartésienne, isotrope ou anisotrope fait l'objet du sixième paragraphe. Enfin, le septième paragraphe est consacré à la construction de la fonction génératrice de la fonction d'onde couplée de deux harmoniques sphériques et au développement sur la base produit de deux harmoniques sphériques de la fonction $\mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$.

1 - Caractérisation de la fonction génératrice

Soient $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des états du système physique étudié et $\{ | m > \}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Soient $\mathcal{F}$ un espace fonctionnel pré-Hilbertien et $\{ \mathcal{P}_m(Z) \}$ une base orthonormée de $\mathcal{F}$ où $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$. Ici z est un point de l'espace Euclidien réel ou complexe E_N. Enfin N est un entier arbitraire.

La norme dans l'espace $\mathcal{F}$ est définie à partir du produit scalaire :

$$(f, g) = \int \overline{f(z)} \; g(z) \; d\mu_N(z). \tag{I.1}$$

où $d\mu_N(z)$ définit la mesure de l'intégration.

Pour caractériser la fonction génératrice $| \phi(z) >$ de la base $\{ | m > \}$ de $\mathcal{H}$ il est nécessaire de définir une application T de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{F}$ qui soit à la fois linéaire et bijective.

$$P_m(z) = T \, | m > . \tag{I.2}$$

Pour tout vecteur $| \psi_f >$ de $\mathcal{H}$ nous pouvons écrire :

$$| \psi_f > = \sum_m f_m \, | m > \tag{I.3}$$

et

$$T \, | \psi_f > = \sum_m f_m \, T \, | m > = \sum_m f_m \, P_m(z)$$

$$= f(z). \tag{I.4}$$

Donc à tout vecteur $| \psi_f >$ de $\mathcal{H}$ correspond une image f (z) dans $\mathcal{F}$ qui possède les mêmes composantes que $| \psi_f >$. L'application linéaire et bijective T^{-1} de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$ est définie par :

$$T^{-1} [P_m(z)] = | m > \tag{I.5}$$

Nous définirons la fonction génératrice $| \phi(z) >$ de la base $\{ | m > \}$ de $\mathcal{H}$ par :

$$| \phi(z) > = \sum_m \overline{P_m(z)} \, | m > . \tag{I.6}$$

Il en découle que :

$$| \Psi_f > = \int f(z) \; | \phi(z) > \; d u_N(z) \\ = T^{-1} \; f(z) , \qquad (I.7)$$

où

$$f(z) = < \phi(z) \; | \Psi_f > = \sum_m P_m(z) < m \, | \Psi_f > \\ = T \, | \Psi_f > . \qquad (I.8)$$

La fonction génératrice $| \phi(z) >$ peut être considérée comme un vecteur appartenant à $\mathcal{H}$. Il faut remarquer que la condition d'orthonormalisation des polynômes $P_m(z)$ est une condition nécessaire pour la validité des résultats que nous obtiendrons dans la suite de ce travail.
L'image $\hat{A}$ dans $\mathcal{F}$ d'un opérateur A de $\mathcal{H}$ est donnée par :

$$\hat{A} = T \quad A \quad T^{-1}. \qquad (I.9)$$

D'une façon générale, si f (A) est une fonction algébrique ou développable en série nous aurons :

$$\widehat{f(A)} = f(\hat{A}) \qquad (I.10)$$

et par suite

$$f(A) = T^{-1} \; f(\hat{A}) \; T . \qquad (I.11)$$

L'action de l'opérateur $\hat{A}$ sur un vecteur quelconque f (z) de l'espace $\mathcal{F}$ s'écrit donc :

$$\hat{A} \; f(z) = \int f(z') < \phi(z) \, | \, A \, | \, \phi(z') > \; d u_N(z'). \qquad (I.12)$$

De plus, du point de vue pratique, il sera utile d'utiliser la relation suivante

$$\hat{A} < \phi(z) \, | = \sum_{mn} < n \, | \, A \, | \, m > < m \, | \, P_m(z) \\ = < \phi(z) \, | \, A . \qquad (I.13)$$

2 - <u>Relations d'orthogonalisation et de fermeture</u>

De la fonction génératrice $| \phi(z) >$ de la base $\{ \, | \, m > \}$ de $\mathcal{H}$ définie précédemment nous déduisons les propriétés suivantes.

2.1. <u>Puisque la fonction $< \phi(z) \, | \, \phi(z') >$ s'écrit :</u>

$$< \phi(z) \, | \, \phi(z') > = \sum_m P_m(z) \; \overline{P_m(z')} , \qquad (I.14)$$

toute fonction f (z) de $\mathcal{F}$ satisfait la relation

$$f(z) = \int f(z') < \phi(z) \, | \, \phi(z') > \; d u_N(z') . \qquad (I.15)$$

Le recouvrement $< \phi(z) \, | \, \phi(z') >$ jouit donc d'une propriété analogue à celle de la distribution de Dirac. Ainsi nous écrirons par analogie :

$$< \phi(z) \, | \, \phi(z') > = \delta(z - z') . \qquad (I.16)$$

Une étude détaillée (Bergmann 1950) dans le cas où z appartient à E_1 ou à E_2 a montré que la fonction $< \phi(z) \, | \, \phi(z') >$ possède des propriétés mathématiques importantes.

2.2. La relation de fermeture s'écrit :

$$\int | \phi(z) > d\mu_N(z) < \phi(z) | = 1 . \tag{I.17}$$

La relation (I.17) s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int | \phi(z) > d\mu_N(z) < \phi(z) | &= \sum_{mn} | m > \int \overline{P_m(z)}\, P_n(z)\, du_N(z) < n | \\ &= \sum_m | m >< m | \\ &= 1. \end{aligned}$$

3 - Propriétés de conservation

3.1. Le produit scalaire est conservé par la transformation T. En d'autres termes

$$< \Psi_f | \Psi_g > = (f, g) . \tag{I.18}$$

3.2. De la définition de l'opérateur $\hat{A}$ il résulte que :

$$\hat{A} < \phi(z) | \phi(z') > = < \phi(z) | A | \phi(z') > ,$$

soit encore

$$\hat{A} \sum_m P_m(z) \overline{P_m(z')} = \sum_{mn} P_m(z) < m | A | n > \overline{P_n(z')} .$$

Puisque les vecteurs $P_n(z')$ sont linéairement indépendants nous avons :

$$\hat{A}\, P_n(z) = \sum_m < m | A | n > P_m(z)$$

de sorte que

$$(P_m\, \hat{A}\, P_n) = < m | A | n > . \tag{I.19}$$

L'opérateur A et son image $\hat{A}$ ont donc les mêmes éléments de matrice. De même si A est un opérateur quelconque de $\mathcal{H}$ et si

$$(A - a) | \Psi_f > = 0,$$

nous en déduisons que :

$$(\hat{A} - a)\, f(z) = 0 . \tag{I.20}$$

Nous pouvons écrire l'équation (I.20) sous la forme :

$$\int f(z') \left[< \phi(z) | A | \phi(z') > - a < \phi(z) | \phi(z') > \right] d\mu_N(z') = 0 . \tag{I.21}$$

Notons que cette équation est à rapprocher de l'équation de Hill et Wheeler (1953) qui rappelons le est obtenue par un procédé variationnel et joue un rôle important dans l'étude des mouvements collectifs du noyau. On comprend dès lors que la construction de la fonction génératrice $\phi(z)$ présente un intérêt certain.

3.3. De la définition (I.12) de $\hat{A}$ nous déduisons successivement

$$\begin{aligned} \hat{A}\, g(z) &= \int < \phi(z) | A | \phi(z') > g(z')\, d\mu_N(z') \\ \hat{A}^+ f(z) &= \int < \phi(z) | A^+ | \phi(z') > f(z')\, du_N(z') \\ &= \int < \phi(z') | A | \phi(z) >^* f(z')\, d\mu_N(z') \end{aligned}$$

et par suite :

$$(f, \hat{A} g) = \int \overline{f(z)} < \phi(z) | A | \phi(z') > g(z') \, d\mu_N(z) \, d\mu_N(z'),$$

$$(A^+ f, g) = \int \overline{f(z')} < \phi(z') | A | \phi(z) > g(z) \, d\mu_N(z) \, d\mu_N(z') . \tag{I. 22}$$

Il en résulte que :

$$\hat{A^+} = \hat{A}^+ .$$

L'image de l'adjoint est donc l'adjoint de l'image.

3. 4. De la définition (I. 17) et de l'expression (I. 12) des opérateurs images résulte immédiatement que :

$$\widehat{(A B)} = \hat{A} \hat{B} . \tag{I. 23}$$

L'image du produit est donc égale au produit des images.

4 - Remarque sur le choix de l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$

Dans la construction de la fonction génératrice $| \phi(z) >$ de la base $\{ | m > \}$ de $\mathcal{H}$, le choix de l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ est essentiel. La base $\{ | m > \}$ de $\mathcal{H}$ étant caractérisée par les nombres quantiques $m \equiv \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nous choisissons pour base de $\mathcal{F}$ une base $\{ P_m(z) \}$ telle que chaque vecteur de base $P_m(z)$ soit un produit de monômes dont les exposants β_i sont liés aux nombres quantiques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$P_m(z) = z_1^{\beta_1} \; z_2^{\beta_2} \; \ldots\ldots \; z_n^{\beta_n} \quad \text{où} \quad \beta_i = f_i \; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Un tel choix nous amène à la propriété suivante : U étant une transformation unitaire dans $\mathcal{H}$ qui a pour image $\hat{U}$ dans $\mathcal{F}$, nous avons :

$$\begin{aligned} U | \phi(z) > &= \sum_m \overline{P_m(z)} \; U | m > \\ &= \sum_{mn} < n | U | m > \overline{P_m(z)} | n > \\ &= \sum_n \overline{P'_n(z)} | n > \\ &= \sum_n (\hat{U} \overline{P_n(z)} | n > . \end{aligned}$$

De sorte que l'on peut écrire

$$\hat{U} P_n(z) = P_n(\hat{U^+}(z)). \tag{I. 24}$$

L'espace $\mathcal{F}$ que nous choisissons est l'espace de Bargmann-Hilbert. Cet espace joue un rôle de plus en plus important en physique notamment en optique quantique [Kibble (1968), Scheweber (1967), Gulshani (1979)] et dans l'étude des mouvements collectifs du noyau (Chapitre IV). Nous esquissons ici les propriétés essentielles de l'espace de Bargmann-Hilbert. L'espace de Bargmann $\mathcal{H}_B$ est l'espace des fonctions analytiques développables en série convergente

$$f(z) = \sum_{h_1 \ldots h_N} a_{h_1 \ldots h_N} \; z_1^{h_1} \; z_2^{h_2} \; \ldots \; z_N^{h_N} . \tag{I. 25}$$

Nous posons

$$z^{[h]} = z_1^{[h_1]} \; . \; z_2^{[h_2]} \; \ldots \; z_N^{[h_N]}$$

$$[h !] = h_1 ! \; h_2 ! \; \ldots \; h_N !$$

Ainsi nous pouvons écrire la fonction f (z) sous la forme :

$$f(z) = \sum_h \alpha_{[h]} \; z^{[h]} .$$

L'espace $\mathcal{H}_B$ est normé avec la métrique :

$$d\mu_N(z) = \pi^{-N} e^{-\bar{z}\cdot z} \prod_{k=1}^{N} dx_k \; dy_k$$

où

$$z_k = x_k + i\, y_k \,.$$

Il en résulte que la base de cet espace est donnée par

$$U_n(z) = \frac{z^{[h]}}{\sqrt{[h!]}} = \frac{z_1^{h_1} \; z_2^{h_2} \ldots z_N^{h_N}}{\sqrt{h_1!\, h_2! \ldots h_N!}} \tag{I. 26}$$

La fonction noyau $< \Phi(z) \mid \Phi(a) >$ de $\mathcal{H}_B$ est donc :

$$< \Phi(z) \mid \Phi(a) > \; = e_a(z) = e^{\bar{a}\cdot z} \tag{I. 27}$$

de sorte que

$$(e_a, f) = f(a) = \int e^{a\cdot \bar{z}} \, f(z) \, d\mu_N(z). \tag{I. 28}$$

Nous remarquons que :

$$(z_k f, g) = (f, \frac{\partial g}{\partial z_k})$$

$$(\frac{\partial}{\partial z_k} f, g) = (f, z_k g) \tag{I. 29}$$

où les deux opérateurs z_k et $\frac{\partial}{\partial z_k}$ sont hermitiquement conjugués l'un de l'autre.

5 - Fonction génératrice d'un système de bosons

Dans ce paragraphe et dans les paragraphes suivants nous donnons des exemples d'application de ce qui précède à la construction de diverses fonctions génératrices : fonction génératrice d'un système de bosons, fonction génératrice de l'oscillateur harmonique à trois dimensions, etc... . L'espace $\mathcal{H}$ d'un système de bosons a pour base le produit des états de l'oscillateur harmonique à une dimension :

$$| m > = \frac{{a_k^+}^{m_k}}{\sqrt{m_k!}} | 0 > , \tag{I. 30}$$

où $| 0 >$ désigne l'état vide. De plus a_k^+ et a_k sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur qui satisfont les relations de commutation suivantes :

$$[a_k^+ , a_{k'}^+] = 0$$

$$[a_k , a_{k'}^+] = \delta_{kk'} \tag{I. 31}$$

En prenant pour espace fonctionnel $\mathcal{F}$ l'espace de Bargmann-Hilbert $\mathcal{H}_B$, la fonction génératrice d'un système de bosons est donnée par

$$| \Phi(z) > = \sum_N \overline{U_N(z)} \, | N >$$

$$= \sum_{h_1 \dots h_N} \frac{\bar{z}_1^{h_1} \dots \bar{z}_N^{h_N}}{\sqrt{h_1 ! \dots h_N !}} \cdot \frac{a_1^{+h_1} \dots a_N^{+h_N}}{\sqrt{h_1 ! \dots h_N !}} \mid 0 >$$

$$= \exp \left(\vec{\bar{z}} \cdot \vec{a^+} \right) \mid 0 > \tag{I. 32}$$

où $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$ et $\vec{a^+} = (a_1^+, \dots, a_N^+)$. Nous remarquons que l'isomorphisme entre $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_B$ est établi ici et qu'à tout état $\mid \Psi_f >$ de $\mathcal{H}_B$ correspond une fonction f(z) telle que :

$$\mid \Psi_f > = \sum_n \alpha_n \mid n >$$

$$\begin{aligned} f(z) &= < \phi(z) \mid \Psi_f > \\ &= \sum_n U_n(z) < n \mid \Psi_f > \\ &= \sum_n \alpha_n U_n(z) \end{aligned} \tag{I. 33}$$

où

$$\alpha_n = < n \mid \Psi_f > .$$

Les images des opérateurs de création et d'annihilation se déduisent de la formule (I. 13). Si nous nous limitons au cas d'une seule dimension, (I. 13) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{a} < \phi(z) \mid &= < \phi(z) \mid a \\ &= \sum_m \frac{z^m}{\sqrt{m!}} < m \mid a \\ &= \sum_m \frac{(m+1)}{\sqrt{(m+1)!}} z^m < m+1 \mid \\ &= \frac{d}{dz} < \phi(z) \mid , \end{aligned} \tag{I. 34}$$

et par suite

$$T \; a \; T^{-1} = \hat{a} = dz , \qquad T \; a^+ \; T^{-1} = \widehat{a^+} = z$$

L'équation $a \mid 0 > = 0$ a pour image $\frac{d}{dz} \; 1 = 0$

$$< \phi(z) \mid a \mid \phi(z') > = \frac{d}{dz} \; \delta(z - z') . \tag{I. 35}$$

6 - Fonctions génératrices de l'oscillateur harmonique à trois dimensions

6. 1. La première fonction génératrice

L'oscillateur harmonique a pour hamiltonien :

$$H = a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + a_z^+ a_z + \frac{3}{2} . \tag{I. 36}$$

D'après le paragraphe précédent la fonction génératrice de l'oscillateur harmonique est :

$$\mid \phi(\vec{r}, \vec{z}) > = e^{\vec{\bar{z}} \cdot \vec{a^+}} \mid 0 \, 0 \, 0 > , \tag{I. 37}$$

où

$$\vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \quad \text{et} \quad \vec{a^+} = (a_x^+, a_y^+, a_z^+).$$

L'image de l'hamiltonien $\hat{H}$ de H se déduit de la formule (I. 13) :

$$\hat{H} < \phi(z) \mid = < \phi(z) \mid H , \tag{I. 38}$$

ce qui conduit à :

$$\hat{H} = \vec{z} \cdot \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial z}\right) + \frac{3}{2}. \tag{I.39}$$

A toute fonction propre $f(z)$ de $\hat{H}$ correspond une fonction propre $|\Psi_f\rangle$ de H telle que :

$$\begin{aligned} |\Psi_f\rangle &= \int f(z_x, z_y, z_z)\, |\Phi(z)\rangle\, d\mu(z) \\ &= f(a_x^+, a_y^+, a_z^+)\, |000\rangle \end{aligned} \tag{I.40}$$

où *

$$d\mu(z) = e^{-(\bar{z}_x z_x + \bar{z}_y z_y + \bar{z}_z z_z)}\, dz_x\, dz_y\, dz_z .$$

6.1.1. La détermination des fonctions propres et des valeurs propres de $\hat{H}$ s'obtient en résolvant l'équation :

$$\hat{H} f(z) = E f(z). \tag{I.41}$$

La résolution de cette équation s'effectue aisément et nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(z_x, z_y, z_z) &= f_{n_x}(z_x)\, f_{n_y}(z_y)\, f_{n_z}(z_z) \\ &= \frac{z_x^{n_x}\, z_y^{n_y}\, z_z^{n_z}}{\sqrt{n_x!\, n_y!\, n_z!}} . \end{aligned} \tag{I.42}$$

Nous en déduisons (Messiah 1965) :

$$|\Psi_f\rangle = |\Psi_{n_x n_y n_z}\rangle = \frac{a_x^{+n_x}\, a_y^{+n_y}\, a_z^{+n_z}}{\sqrt{n_x!\, n_y!\, n_z!}}\, |000\rangle . \tag{I.43}$$

Il est évident que cette fonction est bien une fonction de la base de l'oscillateur harmonique et

$$\langle \vec{r}\, |\, n_x n_y n_z\rangle = \langle x | n_x\rangle \langle y | n_y\rangle \langle z | n_z\rangle \tag{I.44}$$

avec

$$\langle x | n_x\rangle = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\, 2^{n_x}\, n_x!)^{1/2}}\, e^{-x^2}\, H_n(x), \tag{I.45}$$

où $H_n(x)$ est un polynôme de Hermite.

La fonction génératrice $|\Phi(\vec{r}, \vec{z})\rangle$ s'écrit dans la représentation $(\vec{r})$ (Wong 1970) :

$$\langle \vec{r} | \Phi(\vec{r}, \vec{z})\rangle = \langle x | \Phi(x, z_x)\rangle \langle y | \Phi(y, z_y)\rangle \langle z | \Phi(z, z_z)\rangle$$

avec

$$\langle x | \Phi(x, z_x)\rangle = \frac{\alpha_x}{\pi^{1/4}}\, e^{-\frac{\alpha_x^2 x^2}{2} + \sqrt{2}\,\alpha_x z_x - \frac{z_x^2}{2}} \tag{I.46}$$

où

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{m\,\omega_x}{\hbar}} .$$

Ici m représente la masse de la particule et ω_x la fréquence de son mouvement selon l'axe x. Dans le cas traité ci-dessus nous avons $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 1$. Mais en général nous désignerons la fonction génératrice de l'oscillateur harmonique à trois dimensions par $G(\alpha_x, x, z_x)$.

En effectuant l'intégration dans l'espace de Bargmann de l'expression

* Quand aucune confusion n'est possible nous écrivons $d\mu_N(z) = d\mu(z)$

$$I(x, x') = \int \overline{G(\sigma_x, x, z_x)}\; G(\sigma_x, x', z_{x'})\; d\mu(z_x)$$
$$= \sum_{n_x} \langle x \mid n_x \rangle \langle x' \mid n_{x'} \rangle ,$$
$$= \langle x \mid x' \rangle$$

où $\sigma_x = \sigma_{x'}$.

nous trouvons que :

$$I(x, x') = \delta(x - x').$$

Ainsi, la méthode de la fonction génératrice nous permet de démontrer d'une façon simple que $\langle x \mid x' \rangle = \delta(x - x')$, alors qu'habituellement dans l'étude de l'oscillateur harmonique (Messiah 1965, p 418), cette expression est imposée sans faire l'objet de vérification.

6.1.2. Nous pouvons déterminer les fonctions propres de H en cherchant les vecteurs propres de $\hat{H}$, $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ avec

$$\hat{L}^2 = \hat{L}^2 = \hat{L}_x^{\,2} + \hat{L}_y^{\,2} + \hat{L}_z^{\,2} . \qquad \text{(I. 47)}$$

Nous avons $\hat{L}_x^{\,2} = \hat{L}_x^2$ et $\hat{L} = -i\,\vec{z} \wedge (\frac{\vec{\partial}}{\partial z})$, où $\hat{L}$ est l'image du moment angulaire.

Les fonctions propres de $\hat{H}$, $\hat{L}^{\,2}$ et $\hat{L}_z$ se déterminent simplement et s'écrivent sous la forme :

$$f_{n\ell m}(z_x, z_y, z_z) = A_{n\ell m}\; \rho'^{2n}\; \mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{z}), \qquad \text{(I. 48)}$$

où $\rho'^{\,2} = z_x^{\,2} + z_y^{\,2} + z_z^{\,2}$, $\mathcal{Y}_{\ell m}$ est une harmonique sphérique (Wong 1970) et $A_{n\ell m}$ est une constante de normalisation telle que :

$$A_{n\ell m} = \frac{(-1)^n}{n!\, 2^{\,n+\frac{\ell}{2}}}\; N_{n\ell}$$

avec

$$N_{n\ell} = \sqrt{\frac{2\pi^{\frac{3}{2}}\, \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})}} \; . \qquad \text{(I. 49)}$$

De la formule (I. 40) nous déduisons les fonctions propres de l'hamiltonien H (voir I. 36) :

$$\mid n\,\ell\, m \rangle = \int f_{n\ell m}(z_x, z_y, z_z) \mid \phi(z) \rangle \; d\mu(z)$$
$$= A_{n\ell m}\; \rho^{+2n}\; \mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{a^+}) \mid 0\,0\,0 \rangle , \qquad \text{(I. 50)}$$

avec

$$\rho^{+2} = a_x^{+2} + a_y^{+2} + a_z^{+2} .$$

Notons que la fonction $\mid n\,\ell\, m \rangle$ donnée par (I. 50) a déjà été obtenue par Bargmann et Moshinsky par une méthode différente (voir Bargmann et Moshinski 1960).

Dans la représentation $\{\vec{r}\}$ nous pouvons écrire la fonction d'onde $\langle \vec{r} \mid n\,\ell\, m \rangle$:

$$\langle \vec{r} \mid n\,\ell\, m \rangle = \int f_{n\ell m}(z_x, z_y, z_z) \langle \vec{r} \mid \phi(z) \rangle \; d\mu(z)$$
$$= N_{n\ell}\, (\frac{1}{\pi})^{3/4}\, e^{-\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}}\; L_n^{\ell+\frac{1}{2}}(\vec{r}^{\,2})\; \mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}) \qquad \text{(I. 51)}$$

où $L_n^{\ell+\frac{1}{2}}$ est un polynôme de Laguerre (Wong 1970).

La fonction génératrice (I. 37) peut se développer sur la base sphérique en tenant compte des expressions (I. 48) et (I. 50)

$$| \phi (z) > = \sum_{n \ell m} f_{n \ell m} (z_x, z_y, z_z) | n \ell m >$$

$$= \sum_{n \ell m} \frac{(-1)^n N_{n \ell}^2}{2^{n+\frac{\ell}{2}}} \frac{(\rho' o)^{2n}}{n!} \mathcal{Y}_{\ell m} (\vec{z}) \mathcal{Y}_{\ell m} (\vec{a}^+) | 000 > . \quad (I. 52)$$

Cette fonction génératrice a déjà été exploitée par Kumar (1966) et ensuite par Wong (1970) pour calculer les coefficients de Talmi et les coefficients de Moshinsky et Smirnov (voir Moshinsky 1959, Smirnov 1962). Il est à noter que dans le développement de cette fonction génératrice (I. 52), les harmoniques sphériques apparaissent en fonction de trois paramètres z_x, z_y, z_z dont la présence constitue à notre avis la cause principale des difficultés rencontrées par Kumar et Wong dans leur recherche d'une expression compacte des coefficients de Talmi et des coefficients de Moshinsky et Smirnov. Quant à nous, nous calculerons ces coefficients au chapitre II en utilisant une autre fonction génératrice dont la construction va être exposée ci-dessous au paragraphe 6. 1. 3.

Nous terminerons le paragraphe 6. 1. 2. par les deux remarques suivantes

- De la conservation du produit scalaire nous pourrions déduire les éléments de passage de la base cartésienne isotrope à la base sphérique :

$$< n_x n_y n_z | n \ell m > = (f_{n_x n_y n_z} , f_{n \ell m}) . \quad (I. 53)$$

- La méthode précédemment décrite pour obtenir la fonction génératrice de l'oscillateur harmonique à trois dimensions peut être appliquée à un autre hamiltonien H. De manière générale ceci conduit à une équation différentielle image d'une équation différentielle dans l'espace de Hilbert et à l'aide de l'expression (I. 40), les fonctions propres de l'hamiltonien originel peuvent être obtenues. Notons que la présence du spin dans l'hamiltonien ne présente pas une difficulté particulière (voir Scheweber 1967).

6. 1. 3. La deuxième fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur

Pour plus de commodité nous rappelons l'expression de la base sphérique de l'oscillateur harmonique à trois dimensions, soit :

$$| n \ell m > = (-1)^n \frac{1}{n! \, 2^{n+\frac{\ell}{2}}} N_{n \ell} \, \rho^{2n} \, \mathcal{Y}_{\ell m} (\vec{a}^+) | 000 > , \quad (I. 54)$$

avec

$$\rho^2 = a_x^{+2} + a_y^{+2} + a_z^{+2} .$$

La base de l'espace fonctionnel s'écrit :

$$U_{n \ell m} (z, \xi, \eta) = \frac{\sqrt{4\pi}}{N_{n \ell} \sqrt{2\ell + 1}} \frac{z^n \xi^{\ell + m} \eta^{\ell - m}}{\sqrt{(\ell + m)! \, (\ell - m)!}} \quad (I. 55)$$

où

$\ell' = \ell + \frac{1}{2}$.

Compte tenu de la fonction génératrice des harmoniques sphériques (Schwinger 1965) que nous écrivons :

$$\left[\frac{4\pi}{2\ell+1}\right]^{\frac{1}{2}} \sum_m \phi_{\ell m} (\xi^0) \mathcal{Y}_{\ell m}(a^+) = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a}^+)^\ell}{2^\ell \cdot \ell !}, \tag{I.56}$$

où

$$\phi_{\ell m}(\xi^0) = \frac{\bar{\xi}^{\ell+m} \bar{\eta}^{\ell-m}}{(\ell+m)!\,(\ell-m)!} \tag{I.57}$$

et où le vecteur $\vec{b}$ est défini par :

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = 0, \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

avec

$$b_x = -\xi^2 + \eta^2, \quad b_y = -i(\xi^2 + \eta^2), \quad b_z = 2\xi\eta, \tag{I.58}$$

nous écrivons la fonction génératrice de la base sphérique $|\,G(z, \xi^0, r)>$:

$$|\,G(z, \xi^0, r)> = \sum_{n\ell m} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z^n}{N_{n\ell}} \phi_{\ell m}(\xi^0)\,|\,n\,\ell\,m> . \tag{I.59}$$

En remplaçant $|\,n\,\ell\,m>$ par son expression (I.54) et en utilisant l'expression (I.56) nous obtenons :

$$|\,G(z, \xi^0, r)> = \sum_{n\ell} \frac{(-1)^n}{n!\,2^{n+\frac{\ell}{2}}} \frac{\bar{z}^n \rho^{2n}}{\ell!\,2^\ell} (\vec{b} \cdot \vec{a}^+)^\ell\,|\,0\,0\,0>$$

$$= e^{\left(-\frac{\bar{z}\rho^2}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}^+}{2\sqrt{2}}\right)}\,|\,0\,0\,0> . \tag{I.60}$$

Nous pouvons déterminer la fonction génératrice de la base sphérique dans la représentation $\{r\}$ (voir I.51). Cette fonction génératrice permet de vérifier les calculs des coefficients de Talmi, des coefficients de Moshinsky et de Smirnov ... etc... tout comme nous pourrions le faire à partir de (I.60) :

$$G(z, \xi^0, r) = <\vec{r}\,|\,G(z, \xi^0, r)> .$$

Pour cela nous utiliserons la fonction génératrice des harmoniques sphériques [voir (I.56)] et la fonction génératrice des polynômes de Laguerre que nous écrivons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^{(r)}(\vec{r}^{\,2}) = e^{\frac{-z\,\vec{r}^{\,2}}{1-z}} / (1-z)^{r+1} . \tag{I.61}$$

Nous obtenons ainsi :

$$G(z, \xi^0, r) = \sum_{n\ell m} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z^n}{N_{n\ell}} \phi_{\ell m}(\xi^0) <\vec{r}\,|\,n\,\ell\,m>$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \sum_\ell \left[\sum_n z^n L_n^{(\ell+\frac{1}{2})}(\vec{r}^{\,2})\right] \left[\sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} \phi_{\ell m}(\xi^0) \mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r})\right] e^{-\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \sum_\ell \frac{e^{-\frac{\vec{r}^{\,2} z}{1-z}}}{(1-z)^{\ell+\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(\vec{b} \cdot \vec{r})^\ell}{2^\ell \cdot \ell !}\; e^{-\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + \frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{2(1-z)}}}{(1-z)^{3/2}} . \tag{I.62}$$

A notre connaissance cette fonction génératrice n'a jamais été mentionnée dans la littérature. Elle présente comme nous le verrons dans la suite de nombreux avantages. Non seulement elle permet le calcul des éléments de passage d'une base isotrope ou d'une base anisotrope, à trois variables à la base sphérique (voir 6. 1. 4.) mais encore elle s'avère très utile dans le calcul des coefficients de Talmi et des coefficients de *Mosinsky* et *Smirnov* (voir chapitre II).

6. 1. 4. Eléments de passage d'une base cartésienne isotrope ou anisotrope à une base sphérique

Des fonctions génératrices (I. 62) et (I. 37) nous pouvons déduire d'une façon simple la fonction génératrice $G(s, \vec{b}, \vec{t})$ des éléments de passage $< n_x\, n_y\, n_z \mid n\, \ell\, m >$ d'une base cartésienne isotrope ou anisotrope à une base sphérique. En effet, $G(s, \vec{b}, \vec{t})$ s'obtient en remplaçant $\mid n\, \ell\, m >$ par la fonction génératrice $G(s, \xi^o, r)$, voir (I. 60), et $< n_x\, n_y\, n_z \mid$ par la fonction génératrice $< \phi(\vec{r}, \vec{t}) \mid$, voir (I. 37). Nous obtenons ainsi dans le cas où la base cartésienne est isotrope :

$$\begin{aligned} G(s, \vec{b}, \vec{t}) &= < \phi(\vec{r}, \vec{t}) \mid G(s, \xi^o, r) > \\ &= < 0 \mid e^{\vec{t}\cdot\vec{a}}\, e^{-\frac{s\,\vec{a}^{+2}}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}^+}{2\sqrt{2}}} \mid 0 > \\ &= e^{-\frac{s\,\vec{t}^2}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{t}}{2\sqrt{2}}} , \end{aligned} \qquad (I.\ 63)$$

ou bien

$$G(s, \vec{b}, \vec{t}) = \sum_{n_x n_y n_z} \frac{z_x^{n_x}\, z_y^{n_y}\, z_z^{n_z}}{\sqrt{n_x!\, n_y!\, n_z!}} \left(\frac{4\pi}{2\ell+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{s^n}{N_{n\ell}}\, \Phi_{\ell m}(\xi^o) < n_x\, n_y\, n_z \mid n\, \ell\, m > . \qquad (I.\ 64)$$

Pour obtenir les éléments de passage $< n_x\, n_y\, n_z \mid n\ell m >$ il suffirait de développer le deuxième membre de l'expression (I. 63) puis d'établir une comparaison entre ce développement et le second membre de l'expression (I. 64). En fait il est préférable du point de vue pratique de calculer les éléments $< n_x\, n_y\, n_z \mid n\ell m >$ en utilisant des formules de récurrence que nous pouvons établir à l'aide des relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G(s, \vec{b}, \vec{t}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right) G(s, \vec{b}, \vec{t}) ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} G(s, \vec{b}, \vec{t}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{\eta}}\right) G(s, \vec{b}, \vec{t})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial s} G(s, \vec{b}, \vec{t}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right) G(s, \vec{b}, \vec{t})$$

avec

$$Q = -\frac{s\,\vec{t}^2}{2} + \frac{\vec{b}\cdot\vec{t}}{2\sqrt{2}} .$$

Nous obtenons alors les formules de récurrence :

$$\sqrt{\ell+m}\,\langle n_x n_y n_z | n \ell m\rangle = 2\,\frac{N_{n\ell}}{N_{n\,\ell-1}}\sqrt{\frac{2\ell+1}{2\ell-1}}$$

$$\Big(\sqrt{n_x(\ell+m-1)}\,\langle n_x-1\; n_y\; n_z | n\; \ell-1\; m-1\rangle$$

$$-\, i\sqrt{n_y(\ell+m-1)}\,\langle n_x\; n_y-1\; n_z | n\; \ell-1\; m-1\rangle$$

$$+\sqrt{n_z(\ell-m)}\,\langle n_x\; n_y\; n_z-1 | n\; \ell-1\; m\rangle\Big), \qquad (I.65)$$

$$(\ell-m)\langle n_x n_y n_z | n\ell m\rangle = 2\sqrt{n_x}\,\frac{2\ell+1}{2\ell-1}\,\frac{N_{n\ell}}{N_{n\,\ell-1}}\,\sqrt{(\ell-m)(\ell-m-1)}\,\langle n_x-1\; n_y\; n_z | n\; \ell-1\; m+1\rangle$$

$$-2i\sqrt{n_y}\,\frac{2\ell+1}{2\ell-1}\,\frac{N_{n\ell}}{N_{n\,\ell-1}}\,\sqrt{(\ell-m)(\ell-m-1)}\,\langle n_x\; n_y-1\; n_z | n\; \ell-1\; m+1\rangle$$

$$+2\sqrt{n_z}\,\frac{2\ell+1}{2\ell-1}\,\frac{N_{n\ell}}{N_{n\,\ell-1}}\,\sqrt{(\ell-m)(\ell+m)}\,\langle n_x\; n_y\; n_z-1 | n\; \ell-1\; m\rangle, \quad (I.66)$$

$$\frac{n}{N_{n\ell}}\langle n_x n_y n_z | n\ell m\rangle = -\frac{1}{2}\,\frac{\langle n_x-2\; n_y\; n_z | n-1\; \ell\; m\rangle}{n_x(n_x-1)\,N_{n-1\;\ell}}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\langle n_x\; n_y-2\; n_z | n-1\; \ell\; m\rangle}{n_y(n_y-1)\,N_{n-1\;\ell}}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\langle n_x\; n_y\; n_z-2 | n-1\; \ell\; m\rangle}{n_z(n_z-1)\,N_{n-1\;\ell}}\,. \qquad (I.67)$$

La fonction génératrice des éléments de passage d'une base cartésienne anisotrope à la base sphérique s'obtient de la même manière que dans le cas isotrope. Cette fonction génératrice est :

$$G(s,\vec{a},\vec{t}) = \int \prod_{i=1}^{3}\left[\left[\frac{\alpha_i^2\alpha^2}{\pi^2(1-s)^2}\right]^{\frac{1}{4}} e^{\left[-\frac{t_i^2}{2}+\sqrt{2}\alpha_i t_i x_i-\frac{1}{2}\alpha_i^2 x_i^2-\frac{\alpha}{2}x_i^2\left(\frac{1+\bar{s}}{1-\bar{s}}\right)+\alpha\frac{\bar{a}_i x_i}{2(1-\bar{s})}\right]}\,dx_i\right]. \quad (I.68)$$

$\vec{a}$ est un vecteur de longueur nulle construit à partir du couple $\xi = (\xi, \eta)$, $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$. En effectuant l'intégration nous aurons :

$$G(s,\vec{a},\vec{t}) = \prod_{i=1}^{3}\left[\left[\frac{2\alpha_i\,\alpha}{(\alpha^2+\alpha_i^2)+s(\alpha^2-\alpha_i^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\exp[\,Q_i\,]\right] \qquad (I.69)$$

$$Q_i = \frac{4\,t_i^2(1-\bar{s})[\alpha_i^2(1-\bar{s})-\alpha^2(1+\bar{s})]+4\sqrt{2}\alpha\,\alpha_i\,t_i\,\bar{a}_i(1-\bar{s})+\alpha^2\bar{a}_i^2}{8(1-\bar{s})[\alpha^2(1+\bar{s})+\alpha_i^2(1-\bar{s})]}.$$

Pour obtenir les formules de récurrence nous procèderions comme dans le cas isotrope.

Pour clore ce paragraphe notons qu'en utilisant la fonction génératrice $G(o, \xi^o, r)$ des éléments de base $\langle\vec{r}\,|\, o\,\ell\, m\rangle$ nous pourrions calculer les coefficients de Wigner ou symboles 3 - jm ainsi que l'expression

$$\int \mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\theta,\varphi)\,\mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\theta,\varphi)\ldots\mathcal{Y}_{\ell_n m_n}(\theta,\varphi)\,\sin\theta\; d\theta\; d\varphi$$

qui se déduit simplement de l'intégrale $\int \prod_{i=1}^{n}\left(G(o,\xi^i,r_i)\,d\vec{r}_i\right)$ avec $\xi^i = (\xi_i, \eta_i)$.

7 - Fonction génératrice de la fonction d'onde couplée des harmoniques sphériques et développement de $\mathcal{Y}_{\ell m}\ (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$

7.1. La fonction génératrice de la fonction d'onde couplée dans l'espace de Bargmann a déjà été construite [voir Bargmann (1962) et Schwinger (1965)]. Nous nous proposons de construire par analogie la fonction génératrice de la représentation couplée des harmoniques sphériques.

La fonction d'onde relative au couplage de deux harmoniques sphériques est :

$$\Psi_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 m_3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle \vec{r}_1\, \vec{r}_2 \mid \ell_1\, \ell_2\, \ell_3\, m_3 \rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_3} \frac{(-1)^{\ell_1 - \ell_2 + m_3}}{\sqrt{2\ell_3+1}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1)\, \mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\vec{r}_2) \quad (I.70)$$

où $\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix}$ sont les symboles 3-jm.

De la fonction génératrice (I. 56) et de la fonction génératrice $\Phi\ (\xi, \eta, \tau)$ des symboles 3 -jm [voir Schwinger (1965)], nous déduisons :

$$\sum_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 m_3} U_{n \ell m}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\, \Phi_{\ell_3 m_3}(\xi''')\, \Psi_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 m_3}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$= \int \Phi(\xi, \eta, \tau)\ \exp[\ (\vec{\bar{a}}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{\bar{a}}_2 \cdot \vec{r}_2)/2\ ]\ d\mu\,(\xi')\ d\mu\,(\xi'') \qquad (I.71)$$

avec

$$\Phi\ (\xi, \eta, \tau) = \exp[\ \tau_3\,[\ \xi'\,\xi''\ ] + \tau_2\,(\xi''\,\xi') + \tau_1\,(\xi''\,\xi''')\ ]\ , \qquad (I.72)$$

$$n = J - 2\,\ell_3, \quad \ell = \ell_3, \quad n = \ell_1 - \ell_2\ ,$$

et où $\vec{\bar{a}}_1$ et $\vec{\bar{a}}_2$ sont les vecteurs de longueur nulle construits à partir des couples :

$$\bar{\xi}' = (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) \qquad \text{et}\ \bar{\xi}'' = (\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)\ .$$

La fonction génératrice de la fonction d'onde couplée des harmoniques sphériques est déduite du calcul de l'intégrale constituant le second membre de l'expression (I. 71). Pour effectuer le calcul et pour simplifier l'écriture nous posons :

$$|\Psi\rangle = \exp[\ (\vec{\bar{a}}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{\bar{a}}_2 \cdot \vec{r}_2)/2\ ]\ ,$$

$$\langle \Phi\,(\xi, \eta, \tau)\,| = \langle \Phi\,|\ . \qquad (I.73)$$

Compte tenu des relations (I.31) nous écrivons :

$$\frac{d}{d\tau_2} \langle \Phi | \Psi \rangle = \xi_3 \langle \Phi | \xi_1 | \Psi \rangle + \eta_3 \langle \Phi | \eta_1 | \Psi \rangle\ ,$$

$$\frac{d}{d\tau_1} \langle \Phi | \Psi \rangle = \xi_3 \langle \Phi | \xi_2 | \Psi \rangle + \eta_3 \langle \Phi | \eta_2 | \Psi \rangle \qquad (I.74)$$

avec

$$\langle \Phi | \xi_j | \Psi \rangle = (-x_j - i\, y_j) \langle \Phi | \bar{\xi}_j | \Psi \rangle + z_j \langle \Phi | \bar{\eta}_j | \Psi \rangle\ ,$$

$$\langle \Phi | \eta_j | \Psi \rangle = (x_j - i\, y_j) \langle \Phi | \bar{\eta}_j | \Psi \rangle + z_j \langle \Phi | \bar{\xi}_j | \Psi \rangle \qquad (I.75)$$

et j = 1, 2.

De même nous avons :

$$
\begin{aligned}
&<\Phi\,|\,\bar{\xi}_1\,|\,\Psi> = \tau_3<\Phi\,|\,\eta_2\,|\,\Psi> + \tau_2\xi_3<\Phi\,|\,\Psi>,\\
&<\Phi\,|\,\bar{\eta}_1\,|\,\Psi> = -\tau_3<\Phi\,|\,\xi_2\,|\,\Psi> + \tau_2\eta_3<\Phi\,|\,\Psi>,\\
&<\Phi\,|\,\bar{\xi}_2\,|\,\Psi> = -\tau_3<\Phi\,|\,\eta_2\,|\,\Psi> + \tau_1\xi_3<\Phi\,|\,\Psi>,\\
&<\Phi\,|\,\bar{\eta}_2\,|\,\Psi> = \tau_3<\Phi\,|\,\xi_1\,|\,\Psi> + \tau_1\eta_3<\Phi\,|\,\Psi>.
\end{aligned}
\tag{I. 76}
$$

Si nous reportons les relations (I. 76) dans (I. 75) nous aboutissons à un système d'équations linéaires en fonction des éléments $<\Phi|\,\xi_1\,|\,\Psi>,\ \ldots\ <\Phi\,|\,\eta_1\,|\,\Psi>$.

Nous reportons les relations (I. 76) dans (I. 75) et nous faisons l'intégration du système obtenu. Nous obtenons ainsi la fonction génératrice de la fonction d'onde couplée des harmoniques sphériques, soit :

$$
\sum_{\ell_1\ell_2\ell_3 m_3} U_{n\ell m}(\tau_3,\tau_2,\tau_1)\,\Phi_{\ell_3 m_3}(\xi''')\,\Psi_{\ell_1\ell_2\ell_3 m_3}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)
$$

$$
= \exp\left[\left(\tau_2^2\left[(\vec{a}.\vec{r}_1)+\tau_3^2\vec{r}_1^{\,2}(\vec{a}.\vec{r}_2)\right]+\tau_1^2\left[(\vec{a}.\vec{r}_2)+\tau_3^2\vec{r}_2^{\,2}(\vec{a}.\vec{r}_1)\right]\right.\right.
$$

$$
\left.\left. +\,2\tau_1\tau_2\tau_3\, i\,(\vec{a}.(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2))\right)/2c(\tau_3)\right]\times\left[<\Phi|\Psi>|\,\tau_2=\tau_1=0\right].
\tag{I. 77}
$$

où $\vec{a}$ est un vecteur construit à partir des couples (ξ_3,η_3) et

$$
c(\tau_3) = 1+2\tau_3^2\ \vec{r}_1\,.\,\vec{r}_2 + \tau_3^4\ \vec{r}_1^{\,2}.\ \vec{r}_2^{\,2}.
\tag{I. 78}
$$

Nous démontrons dans l'appendice que :

$$
\left[<\Phi\,|\,\Psi>|\,\tau_2=\tau_1=0\right] = \frac{1}{\sqrt{c(\tau_3)}}\ .
\tag{I. 79}
$$

Le développement du second membre de l'expression (I. 77) et sa comparaison avec le premier membre de cette même expression fait apparaître sous une forme nouvelle l'expression de la fonction d'onde couplée de deux harmoniques sphériques $\Psi_{\ell_1\ell_2\ell_3 m_3}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$.

7. 2. Dans le développement de l'expression (I. 77) donnant la fonction d'onde couplée de deux harmoniques sphériques apparaît la fonction $\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)$ dont à notre connaissance, le développement sur la base $\mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1).\ \mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\vec{r}_2)$, n'a jamais été exposé.

Pour effectuer le développement de la fonction $\mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}_1\wedge\vec{r}_2)$ nous nous plaçons dans la base de l'oscillateur harmonique à deux particules et ainsi nous obtenons:

$$
\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{a}^+\wedge\vec{b}^+)|\,00> = \sum_{\substack{n_1\ell_1 m_1\\ n_2\ell_2 m_2}} <n_1\ell_1 m_1, n_2\ell_2' m_2|\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{a}^+\wedge\vec{b}^+)|\,00>|\,n_1\ell_1 m_1>|n_2\ell_2 m_2>
\tag{I. 80}
$$

avec

$$
\vec{a}^+ = (a_x^+,\ a_y^+,\ a_z^+),\qquad \vec{b}^+ = (b_x^+,\ b_y^+,\ b_z^+).
$$

En utilisant l'expression de la fonction d'onde de la base sphérique (I. 54) nous obtenons :

$$\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{a}^+ \wedge \vec{b}^+)|00\rangle = \sum_{\substack{n_1\ell_1 m_1\\ n_2\ell_2 m_2}} \left(\frac{N_{n_1\ell_1} N_{n_2\ell_2}}{n_1!\, n_2!\, 2^{(n_1+n_2+\frac{\ell_1+\ell_2}{2})}}\right)^2 S\begin{pmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 & \ell_3\\ n_2 & \ell_2 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}^{+\,2n_1}\, \mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\vec{a}^+)\, \vec{b}^{+\,2n_2}\, \mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\vec{b}^+)|0\,0\rangle \,. \qquad (I.81)$$

avec

$$S\begin{pmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 & \ell_3\\ n_2 & \ell_2 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = \langle 0\,0|\vec{a}^{\,2n_1}\, \overline{\mathcal{Y}}_{\ell_1 m_1}(\vec{a})\, \vec{b}^{\,2n_2}\, \overline{\mathcal{Y}}_{\ell_2 m_2}(\vec{b})\, \overline{\mathcal{Y}}_{\ell_3 m_3}(\vec{a}^+\wedge\vec{b}^+)|0\,0\rangle \,.$$

A partir de l'expression (I. 56) et de la fonction génératrice de la fonction d'onde de la base sphérique (I. 60) et par un calcul analogue au calcul précédent de la fonction génératrice de la représentation couplée des harmoniques sphériques nous aboutissons à la fonction génératrice des coefficients $S\begin{pmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 & \ell_3\\ n_2 & \ell_2 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$ définis ci-dessus :

$$\langle \phi(\rho_1, \xi_1, \eta_1)\, \phi(\rho_2, \xi_2, \eta_2)\, \exp\,(\vec{r}_3 \cdot (\vec{a}^+ \wedge \vec{b}^+))\,|\,0\,0\rangle$$

$$= \exp\left[\frac{1}{16}\,(\rho_2\,(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3)^2 + \rho\,(\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3) + \frac{1}{8}\,\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3)\right] , \qquad (I.82)$$

où $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ sont des vecteurs de longueur nulle construits à partir des couples (ξ_i, η_i). Nous avons aussi :

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 = 2\,(\xi^1\, \overline{\xi^3})^2, \qquad \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_3 = 2\,(\xi^2\, \overline{\xi^3})^2,$$

$$\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \wedge \vec{r}_3) = +4\,i\,(\xi^1\,\overline{\xi^3})(\xi^2\,\overline{\xi^3})\,\,[\xi^1\,\xi^2] \,. \qquad (I.83)$$

En développant (I. 82) et en utilisant la fonction génératrice des coefficients 3-jm (I. 72) qui devient l'expression (III. 46) dans le cas où ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont fixés, l'expression des coefficients $S\begin{pmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 & \ell_3\\ n_2 & \ell_2 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$ s'écrit :

$$S\begin{pmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 & \ell_3\\ n_2 & \ell_2 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{3\ell_3}{2}}(-1)^{m_3}}{(4\pi)^{3/2}\, 2^{\ell_3}}\; \frac{\sqrt{(J+1)!\,\prod_{i=1}^{3}(J-2\ell_i)!\,(2\ell_i+1)}}{(J-2\ell_3)!} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3\\ m_1 & m_2 & -m_3\end{pmatrix} . \qquad (I.84)$$

où $J = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$, $\quad n_1 = \dfrac{\ell_3 - \ell_1}{2}$, $n_2 = \dfrac{\ell_3 - \ell_2}{2}$. n_1 et n_2 sont entiers.

En fin de compte nous obtenons la formule donnant le développement sur la base $\mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1)\,.\,\mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\vec{r}_2)$ de la fonction $\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$, à savoir :

$$\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) = \sum_{\substack{\ell_1\ell_2 n_1 n_2\\ m_1 m_2}} \left(\frac{N_{n_1\ell_1} N_{n_2\ell_2}}{n_1!\, n_2!\, 2^{\ell_3}}\right)^2 S\begin{pmatrix} n_1 & \ell_1 & m_1 & \ell_3\\ n_2 & \ell_2 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1^{\,2n_1}\, \mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1)\, \vec{r}_2^{\,2n_2}\, \mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\vec{r}_2) \,. \qquad (I.85)$$

avec

$$n_1 = \frac{\ell_3 - \ell_1}{2}, \quad n_2 = \frac{\ell_3 - \ell_2}{2}, \quad |\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2 \quad .$$

La fonction $\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$ est fonction propre de $\vec{L}^2$ $(\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2)$ et de L_z et cette fonction est une généralisation du tenseur sphérique bien connu $T(1\ m) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\vec{x} \wedge \vec{y})$ [voir par exemple Edmonds (1957), expression (5.1.8)] .

8 - Conclusion

La méthode de la fonction génératrice que nous venons d'exposer (voir paragraphes de 1 à 4) et que nous illustrons dans le cas d'un système de bosons (voir paragraphe 5) présente beaucoup d'intérêt car elle ne fait appel qu'à des calculs élémentaires. Non seulement, elle permet d'obtenir les éléments de passage d'une représentation à une autre représentation (calcul des coefficients de passage d'une base cartésienne isotrope ou d'une base cartésienne anisotrope à une base sphérique, par exemple, (voir paragraphe 6)) mais aussi elle nous permet de construire de nouvelles bases, fonctions propres d'un hamiltonien H (voir paragraphe 6). En outre, la fonction génératrice de la base sphérique que nous avons construite (voir paragraphe 6) s'avère particulièrement utile, à la fois dans le calcul des coefficients de Talmi et des coefficients de Moshinsky et de Smirnov (voir chapitre II), dans la construction de la fonction génératrice de la fonction d'onde couplée de deux harmoniques sphériques et dans la détermination pour la première fois à notre connaissance du développement sur la base produit de deux harmoniques sphériques de la fonction $\mathcal{Y}_{\ell_3 m_3}(\vec{r}^{+}_1 \wedge \vec{r}^{+}_2)$ généralisation du tenseur sphérique bien connu T (1 m) (Edmonds 1957).

APPENDICE

Nous avons à calculer

$$I(\tau_3) = \int \exp[\tau_3 [\xi' \xi'']] \ \exp[\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{r}_1}{2} + \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{r}_2}{2}] \ d\mu(\xi^1) \ d\mu(\xi^2)$$

où $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont deux vecteurs de longueur nulle construits à partir des couples $\xi^1 = (\xi_1, \eta_1)$ et $\xi^2 = (\xi_2, \eta_2)$

$$[\xi' \ \xi''] = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$$

En utilisant les relations (I. 29) nous aurons :

$$I(\tau_3) = \int \exp[-\tau_3^2 (\frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{r}_1}{2})] \ \exp[\frac{\bar{\vec{a}}_2 \cdot \vec{r}_2}{2}] \ d\mu(\xi'')$$

$$= \sum_{\ell_1 \ell_2} (-1)^{\ell_1} \tau_3^{2\ell_1} [\frac{4\pi}{2\ell_1+1}]^{\frac{1}{2}} [\frac{4\pi}{2\ell_2+1}]^{\frac{1}{2}} \sum_{m_1 m_2} [\int \Phi_{\ell_1 m_1}(\xi'') \overline{\Phi_{\ell_2 m_2}}(\xi'') \, d\mu(\xi'')$$

$$\times \ \mathcal{Y}^*_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1) \, \mathcal{Y}_{\ell_2 m_2}(\vec{r}_2)]$$

$$= \sum_{\ell_1} (-1)^{\ell_1} \tau_3^{2\ell_1} (\frac{4\pi}{2\ell_1+1}) \sum_{m_1} \mathcal{Y}^*_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_1) \ \mathcal{Y}_{\ell_1 m_1}(\vec{r}_2)$$

$$= \sum_{\ell_1} (-\tau_3^2 |\vec{r}_1| \, |\vec{r}_2|)^{\ell} \ P_\ell (\widehat{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau_3^2 \ \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + \tau_3^4 \ \vec{r}_1^{\,2} \cdot \vec{r}_2^{\,2}}}$$

REFERENCES

Bargmann V 1961 Comm. Parc. App. Math. 14 187

Bargmann V 1962 Rev. of Mod. Phys. 34 4

Bargmann V et Moshinsky M. Nucl. Phys. 18 (1960), 29 (1961) 277

Bergmann S 1950 Mathematical Surveys No 5 New York

Edmonds A R 1957 Angular Momentum in quantum mechanics (Princeton, N J : Princeton University Press)

Gulshani P 1979 Can. J. of Phys. 7 57 998

Hill D L et Wheeler J A 1953 Phys. Rev. 89 1102

Kibble TW 1968 Cargèse Lectures in Phys. Vol. 2 ed. M. Lévy (Cordan and Breach)

Kumar K 1966 J. Math. Phys. 7 671

Messiah A 1965 Mécanique Quantique I (Paris : Dunod)

Moshinsky M 1959 Nucl. Phys. 13 104

Ripka G 1968 Adv. Nucl. Phys. 1 183

Scheweber S 1967 An. of Phys. 41 205

Schwinger J 1965 in Quantum Theory of Angular Momentum Ed. Biedenharn et Van Dam (New York : Academic) pp. 229

Smirnov Yu F 1962 Nucl. Phys. 39 346

Wong C W 1970 Nucl. Phys. A 147 563

CHAPITRE II

COEFFICIENTS DE TALMI ET DE MOSHINSKY ET SMIRNOV

DANS LA BASE DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

La transformation d'une base de représentation en fonction des coordonnées de deux particules (représentation non couplée) en une base de représentation en fonction des coordonnées du centre de masse et des coordonnées relatives (représentation couplée) se rencontre dans de nombreux domaines de la physique. En particulier, elle est utile dans la théorie cinétique des gaz (Kumar 1967), en physique nucléaire [voir par exemple Wong (1970)] et en physique moléculaire (Fieck 1979). De façon générale, elle est fondamentale pour calculer les éléments de la matrice du potentiel à deux corps dans la représentation sphérique de l'oscillateur harmonique. Une expression simple des éléments de la matrice de transformation (coefficients de Talmi et coefficients de Moshinsky et Smirnov) se prêtant à des calculs numériques aisés présente donc un un grand intérêt.

Diverses méthodes (Talmi 1952, Moshinsky 1959, Kumar 1966 a, Gal 1968, Trlifaj 1972 et Raynal 1976) ont conduit leurs auteurs à des expressions des éléments de la matrice de transformation. Certains auteurs (Baranger et Davies 1966, Efros 1973, Dobeš 1977, Fieck 1979) utilisant l'une ou l'autre des méthodes précédentes ont proposé de nouvelles expressions des éléments de la matrice de transformation. Parmi ces travaux nous en distinguerons deux : le travail de Efros (1973) et celui de Kumar (1966 a). Efros (1973) a utilisé la méthode proposée par Moshinsky ainsi qu'une propriété des symboles 9-j [voir Yutsis et Bandzaltis (1965)] pour obtenir, dans le cas où deux nombres quantiques principaux sont nuls, une expression des coefficients qui est à notre connaissance la plus simple de la littérature. Kumar (1966 a) a utilisé une fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur harmonique et a obtenu une fonction génératrice des coefficients de Talmi ainsi qu'une expression de ces coefficients à la fois simple et remarquable par sa symétrie. Mais pour le calcul des coefficients de Talmi, Kumar (1966 a) a développé sa fonction génératrice sur la base de la représentation couplée de quatre moments angulaires ce qui rend inévitable l'introduction dans l'expression de ces coefficients, des symboles 9-j dont le calcul s'avère long.

Le grand intérêt qu'ont suscité, notamment sur le plan théorique, mais aussi sur le plan pratique, les travaux de Schwinger (1965) et de Bargmann (1962) sur le groupe des rotations nous a incité à utiliser leurs résultats et à étendre leurs méthodes au calcul des coefficients de Talmi et des coefficients de Moshinsky et Smirnov. Dans les travaux de Schwinger et de Bargmann les fonctions génératrices utilisées sont choisies de telle sorte que leur développement fasse intervenir exclusivement des monômes complexes dont la puissance est exprimée par des paramètres qui sont fonction de nombres quantiques de la base de la représentation employée; ce qui fait que dans le calcul des éléments de passage d'une base de représentation à une autre, il suffit de connaître ces paramètres pour obtenir les éléments de passage. Dans notre travail nous proposons une fonction génératrice de la base sphérique [voir chapitre I expression (I. 62)] dont le choix est fait comme le font Bargmann et Schwinger et, en n'utilisant que des opérations mathématiques élémentaires, nous obtenons une fonction génératrice des coefficients de Talmi. Par la même méthode en utilisant en outre des résultats des travaux de Bargmann et Schwinger sur le groupe des rotations nous obtenons une fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov.

Dans cette étude nous consacrons la première partie à la définition des coefficients de Talmi et des coefficients de Moshinsky et Smirnov. La deuxième partie présente la nouvelle fonction génératrice des coefficients de Talmi [cf. la relation (II. 9)]. Nous déduisons de cette fonction génératrice une nouvelle expression des coefficients de Talmi [cf. la relation (II. 21)]. De plus, nous obtenons une nouvelle expression de ces coefficients dans un cas particulier [cf. la relation (II. 25)]. Finalement, à l'aide de cette dernière expression et à partir d'une nouvelle formule de récurrence [cf. la relation (II. 27)] nous proposons une nouvelle méthode pour calculer les coefficients de Talmi. Dans la troisième partie nous donnons la nouvelle fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov [cf. la relation (II. 33)]. Nous déduisons de cette fonction génératrice une nouvelle expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov [cf. la relation (II. 38)]. Cette expression permet alors de retrouver la formule obtenue dans le cas particulier traité par Efros (1973). Enfin, la quatrième partie est consacrée à une nouvelle relation entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov [cf. la relation (II. 42)]. Dans l'appendice A nous donnons quelques propriétés de la fonction Z définie à partir du travail de Kumar (1966 b) et utile pour le calcul des coefficients de Talmi et de Moshinsky et Smirnov. Dans l'appendice B nous remarquons que notre fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov se développe de différentes manières et nous exploitons ceci pour dériver une nouvelle expression de ces coefficients [cf. la relation (B. 3)] parallèle à celle de Dobeš (1977).

1 - <u>Préliminaires</u>

La base sphérique de l'oscillateur harmonique se définit dans la représentation $\{\vec{r}\}$ par :

$$|n\ell m(\vec{r})\rangle = N_{n\ell}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}\right) L_n^{(\ell+\frac{1}{2})}(\vec{r}^{\,2})\, \mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}), \qquad \text{(II. 1)}$$

où $\vec{r} = (x, y, z)$, $L_n^{(\ell+\frac{1}{2})}(\vec{r}^{\,2})$ est un polynôme de Laguerre [voir Schwinger (1965)], $\mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r})$ est une harmonique sphérique et

$$N_{n\ell} = \left[\frac{2\pi^{-\frac{3}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})} \right]^{1/2} .$$

La fonction d'onde couplée de deux particules s'écrit dans la représentation $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ sous la forme :

$$|n_1\ell_1(\vec{r}_1)\, n_2\ell_2(\vec{r}_2); \lambda\mu> = \sum_{m_1m_2} <\ell_1\ell_2 m_1 m_2|\lambda\mu>|n_1\ell_1 m_1(\vec{r}_1)> \\ |n_2\ell_2 m_2(\vec{r}_2)>. \qquad \text{(II. 2)}$$

où $<\ell_1\ell_2 m_1 m_2|\lambda\mu>$ désigne un *coefficient de Clebsh et Gordan.*
Pour simplifier nous utiliserons les abréviations :

$|n(\vec{r})> = |n\ell m(\vec{r})>,$

$|n_1(\vec{r}_1)\ n_2(\vec{r}_2); \lambda\mu> = |n_1\ell_1(\vec{r}_1)\ n_2\ell_2(\vec{r}_2); \lambda\mu>,$

$|n_1(\vec{r}_1)\ n_2(\vec{r}_2)> = |n_1(\vec{r}_1)>\ |n_2(\vec{r}_2)>.$

Les coordonnées $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ des deux particules sont liées à la coordonnées relative $\vec{R}_1$ et à la coordonnée du centre de masse $\vec{R}_2$ par une transformation orthogonale que nous écrivons sous la forme générale [voir Smirnov (1962)] :

$$\vec{r}_1 = \cos\varphi\ \vec{R}_1 + \sin\varphi\ \vec{R}_2\ , \qquad \vec{r}_2 = -\sin\varphi\ \vec{R}_1 + \cos\varphi\ \vec{R}_2\ . \qquad \text{(II. 3)}$$

La conservation de l'énergie et de la parité conduit aux règles de sélection suivantes :

$$2(n_1+n_2) + \ell_1 + \ell_2 = 2(N_1+N_2) + L_1 + L_2, \qquad \text{(II. 4)}$$

$$(-1)^{\ell_1+\ell_2} = (-1)^{L_1+L_2}.$$

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2. \qquad \text{(II. 5)}$$

Dans la base de la représentation couplée de deux particules le passage de la représentation $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ à la représentation $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ se fait à l'aide des coefficients de Moshinsky et Smirnov qui s'écrivent $<n_1(\vec{r}_1)\ n_2(\vec{r}_2); \lambda\ |\ N_1(\vec{R}_1)\ N_2(\vec{R}_2); \lambda>$. Les coefficients de Talmi $<n_1(\vec{r}_1)\ n_2(\vec{r}_2)|\ N_1(\vec{R}_1)\ N_2(\vec{R}_2)>$ sont liés aux coefficients de Moshinsky et Smirnov par la transformation :

$$< n_1(\vec{r}_1)\ n_2(\vec{r}_2) \mid N_1(\vec{R}_1)\ N_2(\vec{R}_2) >$$

$$= \sum_{\lambda} < \lambda\mu \mid \ell_1 \ell_2 m_1 m_2 > < \lambda\mu \mid L_1 L_2 M_1 M_2 >$$

$$\times < n_1(\vec{r}_1)\ n_2(\vec{r}_2) ; \lambda \mid N_1(\vec{R}_1)\ N_2(\vec{R}_2) ; \lambda > . \qquad \text{(II. 6)}$$

2 - Coefficients de Talmi

2.1. Expression générale des coefficients de Talmi

En utilisant la fonction génératrice de la base sphérique (I. 62) nous pouvons obtenir la fonction génératrice $G(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi'})$ des coefficients de Talmi. Pour cela nous remplaçons $| n_1(\vec{r}_1) >$, $| n_2(\vec{r}_2) >$, $| N_1(\vec{R}_1) >$ et $| N_2(\vec{R}_2) >$ dans l'expression (II. 6) respectivement par leur fonction génératrice $G(s_1, \xi^1, r_1)$, $G(s_2, \xi^2, r_2)$, $G(\bar{S}_1, \bar{\xi'}^1, R_1)$ et $G(\bar{S}_2, \bar{\xi'}^2, R_2)$.

Nous avons :

$$G(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi'}) = \int \prod_{i=1}^{2} \left[G(s_i, \xi^i, r_i)\ \overline{G(S_i, \xi'^i, R_i)}\ d\vec{R}_i \right]$$

$$= \iint \left[\frac{1}{\pi^2 (1-s_1)(1-s_2)(1-\bar{S}_1)(1-\bar{S}_2)} \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\times \exp\left[-\frac{\vec{r}_1^{\,2}}{2}\frac{1+s_1}{1-s_1} + \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{r}_1}{2(1-s_1)} - \frac{\vec{r}_2^{\,2}}{2}\frac{1+s_2}{1-s_2} + \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{r}_2}{2(1-s_2)} \right.$$

$$\left. - \frac{\vec{R}_1^{\,2}}{2}\frac{1+\bar{S}_1}{1-\bar{S}_1} + \frac{\vec{\bar{A}}_1 \cdot \vec{R}_1}{2(1-\bar{S}_1)} - \frac{\vec{R}_2^{\,2}}{2}\frac{1+\bar{S}_2}{1-\bar{S}_2} + \frac{\vec{\bar{A}}_2 \cdot \vec{R}_2}{2(1-\bar{S}_2)} \right] d\vec{R}_1\, d\vec{R}_2 ,$$

$$\text{(II. 7)}$$

soit encore,

$$G(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi'}) = \sum_{\substack{n_1 n_2 \ell_1 \ell_2 \\ N_1 N_2 L_1 L_2 \\ m_1 m_2 M_1 M_2}} \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2} (2L_i+1)(2\ell_i+1)}} \prod_{i=1}^{2} \frac{s_i^{n_i} \bar{S}_i^{N_i}}{N_{N_i L_i} N_{n_i \ell_i}} \Phi_{\ell_i m_i}(\xi^i)$$

$$\times\ \Phi_{L_i M_i}(\bar{\xi'}^i) < n_1(\vec{r}_1) n_2(\vec{r}_2) \mid N_1(\vec{R}_1) N_2(\vec{R}_2) > , \qquad \text{(II. 8)}$$

où $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ sont des vecteurs de longueur nulle construits à partir des couples (ξ_i, η_i) et (ξ'_i, η'_i) avec $i = 1, 2$.

Après avoir effectué l'intégration de l'expression (II. 7) nous obtenons :

$$G(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi}') = \exp\left[\frac{Q(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi}')}{8\,P(s, \bar{S})}\right] \Big/ \left[P(s, \bar{S})\right]^{\frac{3}{2}}, \tag{II. 9}$$

avec

$$P(s, \bar{S}) = 1 - \sin^2\varphi\,(s_1\bar{S}_2 + s_2\bar{S}_1) - \cos^2\varphi\,(s_2\bar{S}_2 + s_1\bar{S}_1) + s_1 s_2 \bar{S}_1 \bar{S}_2\,,$$

et

$$\begin{aligned} Q(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi}') = {} & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\,(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)\,\sin\varphi\cos\varphi + \vec{a}_1 \cdot \vec{\bar{A}}_1\,(1 - \bar{S}_2 s_2)\cos\varphi \\ & + \vec{a}_1 \cdot \vec{\bar{A}}_2\,\sin\varphi\,(1 - s_2\bar{S}_1) + \vec{a}_2 \cdot \vec{\bar{A}}_1\,(1 - \bar{S}_2 s_1)\sin\varphi \\ & - \vec{a}_2 \cdot \vec{\bar{A}}_2\,\cos\varphi\,(1 - s_1\bar{S}_1) + \vec{\bar{A}}_1 \cdot \vec{\bar{A}}_2\,(s_2 - s_1)\sin\varphi\cos\varphi, \end{aligned}$$

où

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = -2\,[\xi^1 \xi^2]^2, \qquad \vec{a}_i \cdot \vec{\bar{A}}_j = 2(\xi^i\,\overline{\xi'^j})^2, \qquad i, j = 1, 2,$$

avec

$$[\xi^i\,\overline{\xi'^j}] = \xi_i\overline{\eta'_j} - \eta_i\overline{\xi'_j}, \qquad (\xi^i\,\overline{\xi'^j}) = \xi_i\overline{\xi'_j} + \eta_i\overline{\eta'_j}\,.$$

La fonction génératrice des coefficients de Talmi (II. 8) présente un grand intérêt pour le calcul des coefficients de Moshinsky et Smirnov que nous exposerons dans le prochain paragraphe. Le calcul des coefficients de Talmi peut être déduit de la relation (II. 6) dans laquelle il suffit de reporter l'expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov. Mais ici nous allons exposer une autre manière d'obtenir les coefficients de Talmi en partant de leur fonction génératrice (II. 9).

Le développement de $G(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi}')$ s'écrit :

$$G(s, \bar{S}, \xi, \bar{\xi}') = \sum_{ijk\ell mn} \frac{(-1)^m}{2^{2\sigma}} \frac{\{1\}}{i!\,j!\,k!\,\ell!\,m!\,n!} \frac{\{2\}}{[P(s, \bar{S})]^{\sigma + \frac{3}{2}}} (\sin\varphi)^{i+k+\ell+n}\,(\cos\varphi)^{i+j+m+n}, \tag{II. 10}$$

où

$$\{1\} = [\xi^1 \xi^2]^{2i}\,(\xi^1\,\overline{\xi'^1})^{2j}\,(\xi^1\,\overline{\xi'^2})^{2k}\,(\xi^2\,\overline{\xi'^1})^{2\ell}\,(\xi^2\,\overline{\xi'^2})^{2m}\,[\overline{\xi'^1}\,\overline{\xi'^2}]^{2n} \tag{II. 11}$$

$$\{2\} = (\bar{S}_1 - \bar{S}_2)^i\,(1 - \bar{S}_2 s_2)^j\,(1 - s_2\bar{S}_1)^k\,(1 - s_1\bar{S}_2)^\ell\,(1 - s_1\bar{S}_1)^m\,(s_1 - s_2)^n \tag{II. 12}$$

$$\sigma = i + j + k + \ell + m + n\,.$$

La détermination des coefficients de Moshinsky et Smirnov exige que les indices de sommation dans l'expression (II. 10) soient les mêmes que ceux qui interviennent dans l'expression (II. 8). Compte-tenu du fait que les modules ξ^1, ξ'^1, ξ^2 et ξ'^2 ont respectivement pour exposants $2\ell_1$, $2L_1$, $2\ell_2$ et $2L_2$, nous remplaçons dans l'expression (II. 10) la sommation sur i, j, k, ℓ, m, n par une sommation sur ℓ_1, ℓ_2, L_1, L_2, i, j telle que :

$$\left.\begin{array}{lll} i+j+k=\ell_1, & k=\ell_1-i-j, & \Delta=(L_2-L_1+\ell_2-\ell_1)\frac{1}{2} \\ i+\ell+m=\ell_2, & \ell=L_1-\Delta_1-i-j, & \Delta_1=\dfrac{L_1+L_2-(\ell_1+\ell_2)}{2}, \\ j+\ell+n=L_1, & m=\Delta+j & \sigma=(\ell_1+\ell_2+L_1+L_2)\frac{1}{2}. \\ k+m+n=L_2, & n=\Delta_1+i, & \end{array}\right\} \qquad \text{(II. 13)}$$

Par la suite nous conserverons la notation i, j, k, ℓ, m, n. Pour écrire le développement des expressions {1} et {2} nous utilisons des coefficients de couplage $Z=Z\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & L_1 & L_2 \\ m_1 & m_2 & -M_1 & -M_2\end{pmatrix}(i,j)$ où ℓ_i, L_i, m_i et M_i sont les nombres quantiques orbitaux et magnétiques (voir l'Appendice A). Ces coefficients Z possèdent les propriétés de symétrie des coefficients S que Kumar (1966 b) a introduits dans son étude des couplages symétriques du moment angulaire mais ils diffèrent de ces derniers par un facteur de phase (voir l'Appendice A).

Ainsi :

$$\{1\}=\left[\frac{(J+1)!}{\omega_1(i,j)}\right]^{\frac{1}{2}}\sum_m Z\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & L_1 & L_2 \\ m_1 & m_2 & -M_1 & -M_2\end{pmatrix}(i,j)\,(-1)^{L_1+L_2+M_1+M_2} \prod_{i=1}^{2}\phi_{\ell_i m_i}(\xi^i)\,\overline{\phi_{L_i M_i}(\xi'^i)} \qquad \text{(II. 14)}$$

avec

$\omega_1(i,j)=\left((2i)!\,(2j)!\,(2k)!\,(2\ell)!\,(2m)!\,(2n)!\right)^{-1}$, $J=\ell_1+\ell_2+L_1+L_2$.

De même :

$$\{2\}=\left[\frac{(T+1)!}{\omega_2(i,j)}\right]^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{T}{2}-i}\sum_\mu \bar{S}_1^{\,t_1+\mu_1}\,\bar{S}_2^{\,t_2+\mu_2}\,s_1^{\,t_3-\mu_3}\,s_2^{\,t_4-\mu_4}$$

$$\times Z\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4\end{pmatrix}(i,j)\left[\frac{1}{\prod_{i=1}^{4}(t_i+\mu_i)!\,(t_i-\mu_i)!}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{(II. 15)}$$

avec

$\omega_2(i,j)=(i!\,j!\,k!\,\ell!\,m!\,n!)^{-1}$,

$2t_1=\ell_1+\Delta$, $2t_2=\ell_2-\Delta$, $2t_3=L_1+\Delta$, $2t_4=L_2-\Delta$,

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \qquad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{4} \mu_i = 0 .$$

Pour calculer les coefficients Z, nous remarquons que dans le cas où $\mu_4 = t_4$ nous pouvons les exprimer en fonction des symboles 3 - jm , soit :

$$Z\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}(i, j) = (-1)^{\frac{T}{2} - i + 2t_i} \sqrt{\frac{(T'+1)! \prod_{i=1}^{3} (T' - 2t_i')! \, \omega_2(i, j)}{(T+1)!}}$$
$$\times \sqrt{\frac{\prod_{i=1}^{3} (t_i + \mu_i)! \, (t_i - \mu_i)! \, (2t_4)!}{\prod_{i=1}^{3} (t_i' + \mu_i')! \, (t_i' - \mu_i')!}} \begin{pmatrix} t_1' & t_2' & t_3' \\ \mu_1' & \mu_2' & \mu_3' \end{pmatrix} \qquad \text{(II. 16)}$$

où

$$t_1' = t_1 - \frac{k}{2}, \quad t_2' = t_2 - \frac{j}{2}, \quad t_3' = t_3 - \frac{n}{2}, \quad T' = t_1' + t_2' + t_3' ,$$
$$\mu_1' = -\mu_1 - \frac{k}{2}, \quad \mu_2' = -\mu_2 - \frac{j}{2}, \quad \mu_3' = -\mu_3 - \frac{n}{2},$$

et en utilisant la formule de récurrence suivante :

$$\sum_{i=1}^{4} \sqrt{(t_i + \mu_i)(t_i - \mu_i - 1)} \; Z\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_i & t_4 \\ \mu_1 & & \mu_i - 1 & \mu_4 \end{pmatrix}(i, j) = 0 , \qquad \text{(II. 17)}$$

qui est une généralisation de la formule de récurrence des symboles 3 - jm (Edmonds 1957), nous obtenons tous les coefficients Z. Pour le calcul complet des coefficients de Talmi il est nécessaire de connaître les coefficients du développement de $\dfrac{1}{\left[P(s, \bar{S})\right]^{\sigma + \frac{3}{2}}}$.

Nous posons :

$$\frac{1}{[P(s, \bar{S})]^{\sigma + \frac{3}{2}}} = \sum_{\substack{n_1' n_2' \\ N_1' N_2'}} {}^{\sigma}P^{(n_1', n_2')}_{(N_1', N_2')}(\varphi) \, s_1^{n_1'} \, s_2^{n_2'} \, \bar{S}_1^{N_1'} \, \bar{S}_2^{N_2'} . \qquad \text{(II. 18)}$$

le changement de s_1 en $\overline{S_1}$ et s_2 en $\overline{S_2}$ ne modifie pas l'expression ci-dessus de même que le changement de s_1 en s_2 et $\overline{S_1}$ en $\overline{S_2}$ ainsi :

$${}^{\sigma}P^{(n_1', n_2')}_{(N_1', N_2')}(\varphi) = {}^{\sigma}P^{(N_1', N_2')}_{(n_1', n_2')}(\varphi) = {}^{\sigma}P^{(n_2', n_1')}_{(N_2', N_1')}(\varphi) = {}^{\sigma}P^{(N_2', N_1')}_{(n_2', n_1')}(\varphi) .$$

De l'expression (II. 18) nous déduisons :

$$ {}^{\sigma}P^{(n'_1\,,\,n'_2)}_{(N'_1,\,N'_2)}(\varphi) = \sum_m (-1)^m \frac{\Gamma(r+\sigma'-m)}{m!\,\Gamma(r)} \sin\varphi^{2(N'_1-n'_1)} $$

$$ \times \cos\varphi^{2(n'_1+N'_2)-4m} \sum_i \frac{\tan\varphi^{4i}}{i!(N'_1-n'_1+i)!(N'_2-m-i)!(n'_1-m-i)!} \,, \qquad \text{(II. 19)} $$

où

$\sigma' = n'_1 + n'_2 = N'_1 + N'_2$, $\quad r = \sigma + \frac{3}{2}$.

Dans le cas particulier où $n'_1 = 0$ l'expression précédente s'écrit :

$$ {}^{\sigma}P^{(0,\,n'_2)}_{(N'_1,\,N'_2)} = \frac{\Gamma(\sigma+n'_2+\frac{3}{2})}{\Gamma(\sigma+\frac{3}{2})N'_1!\,N'_2!} (\sin\varphi)^{2N'_1} (\cos\varphi)^{2N'_2} . \qquad \text{(II. 20)} $$

Nous obtenons les coefficients de Talmi en reportant dans l'expression (II. 10) le développement des expressions (II. 14), (II. 15) et (II. 18) puis en établissant la comparaison avec l'expression (II. 8). Ceci conduit à l'expression finale :

$$ \langle n_1(\vec{r}_1)\,n_2(\vec{r}_2) | N_1(\vec{R}_1)\,N_2(\vec{R}_2) \rangle = \frac{1}{(4\pi)^2} \prod_{i=1}^{2} N_{n_i\ell_i} N_{N_i L_i} \left[\prod_{i=1}^{2} (2\ell_i+1)(2L_i+1) \right]^{\frac{1}{2}} $$

$$ \times \frac{(-1)^{L_1+L_2-M_1-M_2}\sqrt{(J+1)!}}{2^{2\sigma}} \sum_{ij} \frac{(-1)^m}{\sqrt{\omega_1(i,j)}} \, Z\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & L_1 & L_2 \\ m_1 & m_2 & -M_1 & -M_2 \end{pmatrix}(i,j) $$

$$ \times\, \omega_2(i,j)\, C^{ij}_{(n_1 n_2 N_1 N_2)} (\sin\varphi)^{L_1+\ell_1-2j} (\cos\varphi)^{L_2-\ell_1+2(i+j)} \qquad \text{(II. 21)} $$

avec

$$ C^{ij}_{(n_1 n_2, N_1 N_2)} = \left[\frac{(T+1)!}{\omega_2(i,j)}\right]^{\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{T}{2}-i} \sum_{\mu_1\mu_2\mu_3} Z\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}(i,j) $$

$$ \times \frac{{}^{\sigma}P^{(n'_1\,,\,n'_2)}_{(N'_1\,,\,N'_2)}(\varphi)}{\left[\prod_{i=1}^{4} (t_i+\mu_i)!\,(t_i-\mu_i)!\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(II. 22)} $$

où

$$ \left.\begin{array}{ll} t_1 + u_1 + N'_1 = N_1, & t_3 - u_3 + n'_1 = n_1, \\ t_2 + u_2 + N'_2 = N_2, & t_4 - u_4 + n'_2 = n_2 . \end{array}\right\} \qquad \text{(II. 23)} $$

Il faut noter que l'expression (II. 21) est particulièrement adaptée à un calcul machine. A ce sujet nous pouvons faire les remarques suivantes. Pour calculer les coefficients de Talmi, nous avons utilisé les expressions (II. 16) et (II. 17) qui donnent les coefficients Z les indices i et j devant satisfaire les relations (II. 19), ceci entraîne que le nombre de coefficients Z est limité. Par ailleurs, leurs propriétés de symétrie diminuent considérablement le nombre des coefficients à calculer. Le calcul des coefficients ${}^{\sigma}P^{(n'_1, n'_2)}_{(N'_1, N'_2)}(\varphi)$ s'obtient à l'aide de la relation (II. 19) et le nombre de ces coefficients qu'il faut calculer est grandement diminué du fait des symétries qu'ils présentent. Connaissant les coefficients Z et ${}^{\sigma}P^{(n'_1, n'_2)}_{(N'_1, N'_2)}(\varphi)$, il est aisé de calculer les coefficients $C^{ij}_{(n_1 n_2, N_1 N_2)}$ d'après la relation (II. 22) en tenant compte de (II, 23) qui limite le domaine des valeurs des indices μ_1, μ_2, μ_3 et restreint les opérations de calcul.

2.2. Coefficients $< 0\, \ell_1\, -\ell_1\, (\vec{r}_1)\, 0\, \ell_2\, m_2\, (\vec{r}_2) \mid N_1\, (\vec{R}_1)\, N_2\, (\vec{R}_2) >$ et formules de récurrence

Nous allons traiter un cas particulier où dans l'expression générale des coefficients de Talmi deux nombres quantiques radiaux sont nuls et un nombre quantique magnétique prend sa valeur minimale. Dans le cas où $n_1 = n_2 = 0$ l'expression (II. 22) devient :

$$C^{ij}_{(00, N_1 N_2)} = (-1)^{N_2} \frac{(N_1 + N_2)!}{N_1 !\, N_2 !}\, \delta_{i, N_1 + N_2}\, \delta_{n, 0} \quad , \tag{II. 24}$$

si nous prenons $m_1 = -\ell_1$ nous obtenons à partir de la relation (II. 16) une expression des coefficients Z que nous reportons dans la relation (II. 21). Ceci nous amène à l'expression nouvelle :

$$\begin{aligned} &< 0\, \ell_1\, -\ell_1\, (\vec{r}_1)\, 0\, \ell_2\, m_2\, (\vec{r}_2) \mid N_1\, (\vec{R}_1)\, N_2\, (\vec{R}_2) > \\ &= \frac{(-1)^{N_2}}{N_1 !\, N_2 !} \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{2}(2L_i+1)(2\ell_i+1)}}{(4\pi)^2} \prod_{i=1}^{2}(N_{N_i L_i} N_{0\ell_i}) \sqrt{(2\ell_1)!(\ell_2+m_2)!(\ell_2-m_2)!} \\ &\times \sqrt{\frac{(L_1-M_1)!(L_2-M_2)!}{(L_1+M_1)!(L_2+M_2)!}}\, \sin\varphi^{L_1+\ell_1} \cos\varphi^{\ell_2 - L_1} \\ &\times \sum_j \frac{(2L_1 - 2j)!\,(2\Delta + 2j)!}{(L_1 - M_1 - 2j)!\,(2\Delta - L_2 - M_2 + 2j)!\,(\ell_1 - N_1 - N_2 - j)!} \\ &\times \frac{1}{(\Delta + j)!\,(L_1 - j)!} \frac{(\cotan^2\varphi)^j}{j!} \quad . \end{aligned} \tag{II. 25}$$

Pour le calcul numérique des coefficients de Talmi dans le cas général nous pouvons alors utiliser l'expression précédente conjointement avec deux formules de récurrence que nous établissons maintenant.

Nous reportons la relation (II. 17) dans l'expression (II. 21) et nous obtenons une relation de récurrence entre les coefficients de Talmi (relation de récurrence qui peut aussi être obtenue à partir de l'expression (II. 5)), à savoir :

$$\sum_{i=1}^{2} \sqrt{(\ell_i - m_i)(\ell_i + m_i + 1)} < 0\ell_1 (m_1 + \delta_{i,1})(\vec{r}_1) 0\ell_2 (m_2 + \delta_{i,2}) (\vec{r}_2) | N_1 (\vec{R}_1) N_2 (\vec{R}_2) >$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \sqrt{(L_i + M_i)(L_i - M_i + 1)} < 0\,\ell_1\, m_1\, (\vec{r}_1)\, 0\,\ell_2\, m_2\, (\vec{r}_2) |$$

$$N_1\, L_1\, (M_1 + \delta_{i,1})\, (\vec{R}_1)\, N_2\, L_2\, (M_2 + \delta_{i,2})\, (\vec{R}_2) > . \qquad \text{(II. 26)}$$

Ainsi nous arrivons à calculer tous les coefficients $< 0\,\ell_1\, m_1\, (\vec{r}_1)\, 0\,\ell_2\, m_2\, (\vec{r}_2) \mid N_1\, (\vec{R}_1)\, N_2\, (\vec{R}_2) >$ en utilisant (II. 26) et (II. 25).

Les autres coefficients de Talmi s'obtiennent en utilisant de plus la relation de récurrence suivante :

$$< n_1\, (\vec{r}_1)\, n_2\, (\vec{r}_2) \mid N_1\, (\vec{R}_1)\, N_2\, (\vec{R}_2) >$$

$$= \cos^2\varphi \sqrt{\frac{N_1 + L_1 + \frac{1}{2}}{n_1}} < n_1 - 1 \ell_1\, m_1\, (\vec{r}_1)\, n_2\, (\vec{r}_2) | N_1 - 1\, L_1 M_1 (\vec{R}_1) N_2 (\vec{R}_2) >$$

$$+ \sin^2\varphi \sqrt{\frac{N_2 + L_2 + \frac{1}{2}}{n_2}} < n_1 - 1 \ell_1\, m_1\, (\vec{r}_1) n_2\, (\vec{r}_2) | N_1\, (\vec{R}_1) N_2 - 1 L_2\, M_2 (\vec{R}_2) >$$

$$- \frac{\sin 2\varphi}{n_1} \sum_{\nu=-1}^{+1} \Big\{ (N_1 + L_1 + \tfrac{1}{2})(N_2 + L_2 + \tfrac{1}{2}) [\, n_1 - 1, n_2 | N_1\; L_1 - 1, N_2\; L_2 - 1\,]$$

$$- (N_1 + L_1 + \tfrac{1}{2})\, [n_1 - 1, n_2 \mid N_1\; L_1 - 1, N_2 - 1\; L_2 + 1]$$

$$- (N_2 + L_2 + \tfrac{1}{2})\, [\, n_1 - 1,\, n_2 | N_1 - 1\; L_1 + 1, N_2\; L_2 - 1\,]$$

$$+ [\, n_1 - 1,\; n_2 | N_1 - 1, L_1 + 1,\; N_2 - 1,\; L_2 + 1\,] \Big\} \; , \qquad \text{(II. 27)}$$

avec

$$[n_1', n_2' | N_1' L_1', N_2' L_2'] = \prod_{i=1}^{2} \frac{N_{n_i \ell_i} N_{N_i L_i}}{N_{n_i' \ell_i'} N_{N_i' L_i'}}\; (-1)^{\frac{1}{2}(L_1' + L_2' + L_1 + L_2 + 2)}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & L_1 & L_1' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_2 & L_2' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{2} \sqrt{2 L_i + 1}$$

$$\times < n'_1\, \ell_1\, m_1 (\vec{r}_1)\, n'_2\, \ell_2\, m_2 (\vec{r}_2) | N_1'\, L_1' (M_1 + \nu) (\vec{R}_1) N_2' L_2' (M_2 - \nu) (\vec{R}_2) >$$

[Nous avons obtenu la relation (II. 27) en utilisant les propriétés des polynômes de Laguerre et des harmoniques sphériques.]

L'expression (II. 25) et les formules de récurrence (II. 26) et (II. 27) permettent une autre alternative de calcul des coefficients de Talmi beaucoup plus simple que la méthode habituelle. Habituellement pour calculer les coefficients de Talmi on utilise l'expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov. On part de l'expression donnée par Efros (1973) dans le cas où deux nombres quantiques principaux sont nuls qui est à notre avis l'expression la plus imple des coefficients de Moshinsky et Smirnov dans ce cas particulier puis on utilise des formules de récurrence qui permettent le calcul de tous les autres coefficients de Moshinsky et Smirnov; enfin utilisant ces derniers et la relation (II. 6) on aboutit à l'expression des coefficients de Talmi.

Notre méthode est plus avantageuse que la méthode habituelle parce qu'elle est plus directe; en effet les deux méthodes font intervenir des formules de récurrence analogues mais le calcul de l'expression (II. 25) est plus rapide que le calcul de l'expression de Efros (1973) parce qu'elle ne contient qu'une sommation sur un seul indice et la méthode habituelle est encore plus longue que la notre du fait de l'emploi de la relation (II. 6).

2.3. Autres cas particuliers

Dans le cas où $n_1 = \ell_1 = m_1 = 0$, la relation (II. 21) se simplifie considérablement et, à l'aide des expressions (II. 20) et (II. 16), conduit à :

$$< 0\,(\vec{r}_1),\ n_2\,(\vec{r}_2)\,|\,N_1\,(\vec{R}_1),\ N_2\,(\vec{R}_2) >$$

$$= (-1)^{N_1+N_2+n_2}\ \frac{n_2\,!}{N_1\,!\ N_2\,!}\ \frac{N_{N_1 L_1}\ N_{N_2 L_2}}{N_{00}\ N_{n_2 \ell_2}}\ \sqrt{(2\ell_2+1)\prod_{i=1}^{2}(2L_i+1)}$$

$$\times\begin{pmatrix} \ell_2 & L_1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_2 & L_1 & L_2 \\ -m_2 & M_1 & M_2 \end{pmatrix}\ \sin\varphi^{L_1+2N_1}\ \cos\varphi^{L_2+2N_2}\,.$$

Nous constatons que cette dernière expression est la même que celle obtenue par Kumar (1966 a).

Dans le cas où tous les indices sont nuls sauf les n_i et N_i, nous avons :

$$< n_1\,00\,(\vec{r}_1)\ n_2\,00\,(\vec{r}_2)\,|\,N_1\,00\,(\vec{R}_1)\ N_2\,00\,(\vec{R}_2) >$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{2} N_{n_i 0}\ N_{N_i 0}}{(4\pi)^2}\qquad \sigma_P{}^{(n_1,\ n_2)}_{(N_1,\ N_2)}\ (\varphi)\,.$$

expression qui est difficile à obtenir par la méthode de Kumar (1966 a).

Dans les autres cas particuliers, pour obtenir les autres coefficients par exemple, dans le cas où $n_1 = 0$ et où les autres nombres quantiques sont différents de zéro il suffit de poser $s_1 = 0$ dans l'expression (II. 9) puis de la développer et enfin de la comparer à l'expression (II. 8) où on pose aussi $s_1 = 0$.

3 - Coefficients de Moshinsky et Smirnov

3.1. Fonction génératrice de la base de la représentation couplée

Pour calculer les coefficients de Moshinsky et Smirnov il suffit de construire la fonction génératrice de la base de la représentation couplée. Nous la déduisons de la fonction génératrice de la base sphérique $G(z, \xi^0, r)$ et de la fonction génératrice $\Psi(\xi, \eta, \tau)$ des symboles 3 - jm. La fonction génératrice de la base de la représentation couplée de deux moments angulaires dans l'espace de Bargmann introduite par Schwinger (1965) s'écrit :

$$\Psi(\xi, \eta, \tau) = \sum_{\substack{j_1 j_2 j_3 \\ m_1 m_2 m_3}} \Phi_{j_1 m_1}(\xi^1) \Phi_{j_2 m_2}(\xi^2) \Phi_{j_3 m_3}(\xi^3) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}(\tau)$$

$$= \exp\left(\tau_1 [\xi^2 \xi^3] + \tau_2 [\xi^3 \xi^1] + \tau_3 [\xi^1, \xi^2]\right), \tag{II. 28}$$

où

$$\xi^i = (\xi^i_i, \eta_i).$$

Nous exprimons les harmoniques sphériques en partant de la relation (I. 56) et en utilisant les propriétés de l'espace de Bargmann. Nous obtenons ainsi :

$$\int \overline{\Phi_{\ell m}(\xi)} \left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\vec{b}\,.\,\vec{r})^{\ell}}{2^{\ell}\,\ell\,!}\, d\mu(\xi) = \mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}). \tag{II. 29}$$

En remplaçant dans (II. 2) les coefficients de Clebsch et Gordan par les symboles 3 - jm et les harmoniques sphériques par leur expression (II. 29), nous obtenons :

$$|n_1(\vec{r}_1)\, n_2(\vec{r}_2); \ell_3 m_3> = \frac{(-1)^{\ell_1 - \ell_2 + m_3}}{\pi^{3/2}} N_{n_1 \ell_1} N_{n_2 \ell_2} \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{3} (2\ell_i + 1)}}{4\pi}$$

$$\times \int \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \overline{\Phi_{\ell_1 m_1}(\xi^1)}\, \overline{\Phi_{\ell_2 m_2}(\xi^2)}\, e^{-\frac{\vec{r}_1^{\,2} + \vec{r}_2^{\,2}}{2}}$$

$$\times L_{n_1}^{\ell_1 + \frac{1}{2}}(\vec{r}_1^{\,2})\, L_{n_2}^{\ell_2 + \frac{1}{2}}(\vec{r}_2^{\,2})\, \frac{(\vec{b}_1\,.\,\vec{r}_1)^{\ell_1}}{2^{\ell_1}\,\ell_1\,!}\, \frac{(\vec{b}_2\,.\,\vec{r}_2)^{\ell_2}}{2^{\ell_2}\,\ell_2\,!}$$

$$\times\, d\mu(\xi^1)\, d\mu(\xi^2). \tag{II. 30}$$

En multipliant (II. 30) par

$$4\pi \frac{z_1^{n_1}\, z_2^{n_2}}{N_{n_1 \ell_1} N_{n_2 \ell_2}} \frac{(-1)^{\ell_1 - \ell_2 + m_3}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{3} (2\ell_i + 1)}}\, \overline{\Phi_{\ell_3 m_3}(\xi^3)}\, \overline{\epsilon_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}(\tau)},$$

et en effectuant la sommation sur n_1, ℓ_1, n_2, ℓ_2, ℓ_3, m_3 nous obtenons la fonction génératrice de la représentation couplée que nous noterons $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$:

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\substack{n_1 \ell_1 \\ n_2 \ell_2 \\ m_3 \ell_3}} 4\pi \frac{z_1^{n_1}}{N_{n_1 \ell_1}} \frac{z_2^{n_2}}{N_{n_2 \ell_2}} \frac{(-1)^{\ell_1 - \ell_2 + m_3}}{\sqrt{\prod_{i=1}^{3} (2\ell_i + 1)}}$$

$$\times \overline{\phi_{\ell_3 m_3}(\xi^3)} \; \overline{\epsilon_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}(\tau)} \; |n_1(\vec{r}_1) \; n_2(\vec{r}_2); \ell_3 m_3 >$$

De plus en utilisant une fois l'expression (II.30) et deux fois l'expression (I.62) nous obtenons :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int \Big[\sum_{\substack{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \\ m_1 m_2 m_3}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \overline{\epsilon_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}(\tau)} \prod_{i=1}^{3} \overline{\phi_{\ell_i m_i}(\xi^i)} \Big]$$

$$\times \prod_{i=1}^{2} G(z_i, \xi^i, r_i) \, d\mu(\xi^1) \, d\mu(\xi^2). \qquad \text{(II. 31)}$$

Dans (II. 31) nous pouvons remplacer la quantité entre crochets par le conjugué de l'expression (II. 28). En effet, le développement des fonctions génératrices $G(z_i, \xi^i, r_i)$ s'effectue sur des valeurs entières de ℓ_1 et ℓ_2 et de ce fait l'intégration dans l'expression (II. 31) où le crochet a été remplacé par le conjugué de (II. 28) donne une contribution nulle lorsque ℓ_1 ou ℓ_2 est demi-entier. Nous obtenons ainsi :

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int \overline{\psi(\xi, \eta, \tau)} \prod_{i=1}^{2} G(z_i, \xi^i, r_i) \, d\mu(\xi^1) \, d\mu(\xi^2). \qquad \text{(II. 32)}$$

Notons que ce procédé peut facilement être généralisé pour obtenir la fonction génératrice de la représentation couplée de plusieurs particules : il faut faire varier i de 1 à n dans la relation (II. 32) et il faut remplacer $\psi(\xi, \eta, \tau)$ par la fonction génératrice de la représentation couplée de *n* moments angulaires (Schwinger 1965) dans l'espace de Bargmann.

3.2. Coefficients de Moshinsky et Smirnov

La fonction génératrice G_{MS} des coefficients de Moshinsky et Smirnov est le recouvrement de la fonction génératrice de la représentation couplée dans la représentation $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$ et dans la représentation $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ [voir (II. 32). Ainsi à l'aide de (II. 32) et de (II. 31) nous pouvons écrire l'expression de G_{MS} sous la forme intégrale :

$$G_{MS} = \int G(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\, \overline{G(\vec{R}_1, \vec{R}_2)}\, d\vec{R}_1\, d\vec{R}_2$$

$$= \int \overline{\psi(\xi, \eta, \tau)}\, \psi(\xi', \eta', \tau') \int \prod_{i=1}^{2} \left(G(s_i, \xi^i, r_i)\, \overline{G(S_i, \xi'^i, R_i)} \right) d\vec{R}_1\, d\vec{R}_2$$

$$\times \prod_{i=1}^{2} d\mu(\xi^i)\, d\mu(\xi'^i) , \qquad \text{(II. 33)}$$

ou sous la forme développée en fonction des coefficients de Moshinsky et Smirnov :

$$G_{MS} = \sum_{\substack{n_1 n_2 \ell_1 \ell_2 \\ N_1 N_2 L_1 L_2 \\ \lambda \mu}} \frac{(4\pi)^2}{2\lambda+1} \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{s_i^{n_i}\, \bar{S}_i^{N_i}}{N_{n_i \ell_i}\, N_{N_i L_i}} \right) \overline{\xi_{\lambda\mu}(\xi^3)}\, \xi_{\lambda\mu}(\xi'^3)\, \overline{F_{\ell_1 \ell_2 \lambda}(\tau)}\, F_{L_1 L_2 \lambda}(\tau')$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{2} [\ell_i][L_i]}} < N_1(\vec{R}_1)\, N_2(\vec{R}_2); \lambda \mid n_1(\vec{r}_1)\, n_2(\vec{r}_2); \lambda >, \qquad \text{(II. 34)}$$

avec

$$[L_i] = 2L_i + 1 \quad \text{et} \quad [\ell_i] = 2\ell_i + 1 .$$

La quantité $\int \prod_{i=1}^{2} (G(s_i, \xi^i, r_i)\, \overline{G(S_i, \xi'^i, R_i)})\, d\vec{R}_1\, d\vec{R}_2$ représente la fonction génératrice des coefficients de Talmi et nous la remplaçons par son expression (II. 10). Nous utilisons alors (Bargmann 1962) :

$$\int \overline{\psi(\xi, \eta, \tau)}\, \psi(\xi', \eta', \tau')\, e^{E(t)} \prod_{i=1}^{2} (d\mu(\xi^i)\, d\mu(\xi'^i))$$

$$= \frac{1}{S^2} \exp\left[\frac{\overline{(\xi^3 \xi'^3)}}{S} (-\tau_2' \bar{\tau}_1 t_4 + \tau_2' \bar{\tau}_2 t_2 + \tau_1' \bar{\tau}_1 t_5 - \tau_1' \bar{\tau}_2 t_3) \right] , \qquad \text{(II. 35)}$$

avec

$$E(t) = t_1[\xi^1 \xi^2] + t_2[\xi^1 \overline{\xi'^1}] + t_3(\xi^1 \overline{\xi'^2}) + t_4(\xi^2 \overline{\xi'^1}) + t_5(\xi^2 \overline{\xi'^2}) + t_6 \overline{[\xi'^1 \xi'^2]},$$

où t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 et t_6 sont des paramètres et

$$S = 1 - \bar{\tau}_3 t_1 - \tau_3' t_6 + \tau_3' \bar{\tau}_3 (t_1 t_6 - t_2 t_5 + t_3 t_4).$$

Ainsi nous pouvons effectuer l'intégration dans l'expression (II. 33).

En tenant compte de l'expression des coefficients de Clebsch et Gordan [voir Edmonds (1957)] nous obtenons :

$$G_{MS} = \sum_{\substack{\ell_1\ell_2 L_1 L_2\\ \lambda\mu}} \frac{(-1)^{J_2}(J_1+1)!(J_2+1)!}{2^{2\sigma}\sqrt{(J_2-2L_1)!(J_2-2L_2)!(J_1-2\ell_1)!(J_1-2\ell_2)!}}\frac{1}{2\lambda+1}$$

$$\times \sum_{ij}(-1)^m \frac{\sqrt{(2j)!(2k)!(2\ell)!(2m)!}}{\sqrt{(J_1-2i+1)!(J_1-2\lambda-2i)!}}\frac{1}{i!j!k!\ell!m!n!}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \frac{\{2\}}{[P(s,\bar{S})]^{\sigma+\frac{3}{2}}} (\sin\varphi)^{i+k+\ell+n}(\cos\varphi)^{I+j+m+n}$$

$$\times \frac{(\xi_3\bar{\xi}_3)^{\lambda+u}}{(\lambda+u)!}\frac{(\eta_3\bar{\eta}_3)^{\lambda-\mu}}{(\lambda-u)!}$$

$$\times \overline{\tau_1^{J_1-2\ell_1}\tau_2^{J_1-2\ell_2}\tau_3^{J_1-2\lambda}}\,\tau_1'^{J_2-2L_1}\tau_2'^{J_2-2L_2}\tau_3'^{J_2-2\lambda} , \qquad \text{(II. 36)}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} & j_1 = \frac{J_1-J_2}{2}+L_1-i, && j_2 = \frac{J_1-J_2}{2}+L_2-i, && j_3 = \lambda, \\ & m_1 = j_1 - 2j, && m_2 = 2m - j_2, && m_3 = -\ell_2+\ell_1, \\ & J_1 = \ell_1+\ell_2+\lambda, && J_2 = L_1+L_2+\lambda. && \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II. 37)}$$

En remplaçant $\{2\}$ et $\frac{1}{[P(s,\bar{S})]^{\sigma+\frac{3}{2}}}$ par leurs expressions respectives (II. 15) et (II. 18) dans l'expression (II. 36) puis en comparant le résultat obtenu à la relation (II. 34), nous obtenons l'expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov :

$$\langle N_1(\vec{R}_1)N_2(\vec{R}_2);\lambda \;|\; n_1(\vec{r}_1)n_2(\vec{r}_2);\lambda\rangle = \frac{(-1)^{J_2}}{(4\pi)^2\, 2^{2\sigma}}$$

$$\times \sqrt{[\ell_1][\ell_2][L_1][L_2](J_1-2\lambda)!(J_2-2\lambda)!(J_1+1)!(J_2+1)!}$$

$$\times \prod_{i=1}^{2}(N_{n_i\ell_i}N_{N_iL_i})\sum_{ij}(-1)^m$$

$$\times \frac{\sqrt{(2j)!(2k)!(2\ell)!(2m)!}}{\sqrt{(J_1-2i+1)!(J_1-2\lambda-2i)!}\, i!j!k!\ell!m!n!}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$$

$$\times C^{ij}_{(n_1 n_2, N_1 N_2)}(\sin\varphi)^{L_1+\ell_1-2j}(\cos\varphi)^{L_2-\ell_1+2(i+j)} , \qquad \text{(II. 38)}$$

où les coefficients $C^{ij}_{(n_1 n_2, N_1 N_2)}$ sont données par l'expression (II. 22) précédemment exposée ainsi que la méthode qui permet leur calcul numérique.

Comparée à l'expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov donnée par Raynal (1976) [voir (12) et (61)] ou à l'expression donnée par Dobes (1977) [voir (6)], notre expression dont la dérivation ne fait intervenir que des opérations mathématiques élémentaires s'avère nettement moins compliquée que celles de ces auteurs. Le programme de calcul des coefficients de Moshinsky et Smirnov est d'une mise en oeuvre rapide en partie du fait de la simplicité de l'expression formelle et d'autre part parce que les coefficients Z et les polynômes $^{\sigma}P^{(n_1, n_2)}_{(N_1, N_2)}(\varphi)$ qui interviennent dans les étapes du calcul possèdent des propriétés de symétrie et que les indices ont un domaine de variation limité qui permet de réduire considérablement le temps de calcul-machine.

Dans l'Appendice B nous exposons une autre manière d'obtenir une expression formelle permettant le calcul des coefficients de Moshinsky et Smirnov.

3.3. Cas particulier traité par Efros

Dans le cas où deux nombres quantiques principaux sont nuls, c'est-à-dire le cas traité par Efros (1973), nous déduisons simplement de l'expression (II. 38) le résultat obtenu par cet auteur.

Il suffit de poser $n_1 = n_2 = 0$ pour obtenir :

$$C^{ij}_{(0\,0,\ N_1 N_2)} = (-1)^{N_2} \frac{(N_1 + N_2)!}{N_1!\ N_2!}\ \delta_{i,\ N_1 + N_2}$$

et de (II. 37) nous déduisons que :

$$j_1 = L_1 ,\quad j_2 = L_2 ,\quad j_3 = \lambda .$$

Pour suivre la notation de Efros, nous remplaçons j, k, ℓ, m par :

$$\begin{aligned} j &= \frac{1}{2}(\ell'_1 + L_1 - t), \\ k &= \frac{1}{2}(\ell'_1 - L_1 + t), \\ \ell &= \frac{1}{2}(\ell'_2 - L_2 + t), \\ m &= \frac{1}{2}(\ell'_2 + L_2 - t), \end{aligned}$$

avec

$$\ell'_1 = \ell_1 - N_1 - N_2 ,\qquad \ell'_2 = \ell_2 - N_1 - N_2 .$$

En utilisant

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}\ \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}} ,$$

où n est entier, nous obtenons l'expression suivante des coefficients de Moshinsky et Smirnov donnée par Efros (1973) :

$$<0\ell_1(\vec{r}_1)\,0\ell_2(\vec{r}_2);\lambda\ |N_1(\vec{R}_1)\,N_2(\vec{R}_2);\lambda>$$

$$= (-1)^{N_2}(\tan\varphi)^{N_1+N_2}(\cos\varphi)^{\ell_1+\ell_2}$$

$$\times\sqrt{\frac{[L_1][L_2](J_1-2\lambda)!(J_1+1)!\,2^{-(2L_1+2L_2+N_1+N_2)}}{N_1!N_2!(2\ell_1-1)!!(2\ell_2-1)!![2(N_1+L_1)+1]!![2(N_2+L_2)+1]!!}}$$

$$\times\sum_t(-1)^m\frac{\sqrt{(2j)!(2k)!(2\ell)!(2m)!}}{j!\,k!\,\ell!\,m!}\begin{pmatrix}L_1 & L_2 & \lambda\\ \ell_1-t & t-\ell_2 & \ell_2-\ell_1\end{pmatrix}(\tan\varphi)^{2t}\,. \qquad \text{(II. 39)}$$

Remarquons que dans le travail de Efros ces éléments sont notés :

$$<0\ell_1(\vec{r}_1)\ 0\ell_2(\vec{r}_2);\lambda\ \ |N_2(\vec{R}_2)\ N_1(\vec{R}_1);\lambda\ \ >.$$

Efros calcule les coefficients de Moshinsky et Smirnov dans ce cas particulier en utilisant une propriété des symboles 9 - j [voir Yutsis et Bandzaitis (1965)] tandis que dans notre méthode nous avons pas à faire état de cette propriété (qui est implicite) de telle sorte que le calcul se fait simplement en remplaçant, dans l'expression générale des coefficients de Moshinsky et Smirnov, les nombres quantiques par leur valeur particulière dans ce cas.

4 - <u>Relations entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov</u>

Nous allons établir des relations entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov à l'aide de la fonction génératrice de la base sphérique (I. 52) utilisée précédemment par Kumar (1966 a) et Wong (1970). Ces relations sont particulièrement utiles pour vérifier les calculs numériques qui conduisent aux coefficients de Moshinsky et Smirnov.

Nous multiplions l'expression (II. 2) de la base de la représentation couplée par $K(\ell_1, \ell_2, n_1, n_2)\ z_1^{2n_1+\ell_1}\ z_2^{2n_2+\ell_2}$ où

$$K(\ell_1,\ell_2,n_1,n_2) = \frac{N_{n_1\ell_1}N_{n_2\ell_2}(-1)^{n_1+n_2+\ell_1+\ell_2}}{n_1!\ n_2!}\left[\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\begin{pmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \lambda\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

puis nous utilisons l'intégrale de Gaunt de 3 harmoniques sphériques [voir Edmonds (1957)]. En faisant la sommation par rapport à n_1, ℓ_1, m_1, n_2, ℓ_2, m_2 nous obtenons alors :

$$\sum_{\substack{n_1 \ell_1 \\ n_2 \ell_2}} K(\ell_1, \ell_2, n_1, n_2)\, z_1^{2n_1+\ell_1}\, z_2^{2n_2+\ell_2} \,|\, n_1(\vec{r}_1)\, n_2(\vec{r}_2) ; \lambda\mu >$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \iint \mathcal{Y}_{\lambda\mu}(\theta'\varphi') \exp\left[- z_1^2 - z_2^2 + 2\vec{z}_1 . \vec{r}_1 + 2\,\vec{z}_2 . \vec{r}_2 - \frac{1}{2}(\vec{r}_1^{\,2} + \vec{r}_2^{\,2}) \right]$$

$$\times \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' , \qquad \text{(II. 40)}$$

avec $\vec{z}_1 = z_1 \vec{i}$ et $\vec{z}_2 = z_2 \vec{i}$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire du type $\vec{i} = \vec{i}\,(\theta , \varphi)$. Nous reconduisons les mêmes calculs pour la deuxième fonction d'onde $|\, N_1 (\vec{R}_1)\, N_2 (\vec{R}_2) ; \lambda\mu >$. A partir du résultat ainsi obtenu et de l'expression (II. 40) nous déduisons :

$$\sum_{\substack{n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 \\ N_1 L_1 N_2 L_2}} K(L_1, L_2, N_1, N_2)\, K(\ell_1, \ell_2, n_1, n_2)\, z_1'^{\,2n_1+\ell_1}\, z_2'^{\,2n_2+\ell_2}$$

$$\times z_1^{2N_1+L_1}\, z_2^{2N_2+L_2} < N_1(\vec{R}_1)\, N_2(\vec{R}_2) ; \lambda\mu \,|\, n_1(\vec{r}_1)\, n_2(\vec{r}_2) ; \lambda\mu >$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \int \overline{\mathcal{Y}_{\lambda\mu}(\theta,\varphi)}\, \mathcal{Y}_{\lambda\mu}(\theta',\varphi') \exp\left[\Omega(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2) \right] d\vec{R}_1\, d\vec{R}_2 , \qquad \text{(II. 41)}$$

avec

$$\Omega(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{R}_1, \vec{R}_2) = - (z_1^2 + z_2^2 + z_1'^{\,2} + z_2'^{\,2}) + 2(\vec{z}_1 . \vec{r}_1 + \vec{z}_2 . \vec{r}_2 + \vec{z}_1' . \vec{R}_1 + \vec{z}_2' . \vec{R}_2)$$
$$- \frac{1}{2}(\vec{r}_1^{\,2} + \vec{r}_2^{\,2} + \vec{R}_1^{\,2} + \vec{R}_2^{\,2}) ,$$

où

$$\vec{z}_1 = z_1 \vec{i} , \quad \vec{z}_2 = z_2 \vec{i} , \quad \vec{z}_1' = z_1' \vec{j} , \quad \vec{z}_2' = z_2' \vec{j} ,$$

$$\vec{i} = \vec{i}\,(\theta , \varphi) \quad . \quad \vec{j} = \vec{j}\,(\theta' , \varphi').$$

En remplaçant $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ par leur expression (II. 3) en fonction de $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$, puis en effectuant l'intégration dans l'expression (II. 41), nous obtenons une relation nouvelle entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov, à savoir :

$$\sum_{\substack{n_1 \ell_1 n_2 \ell_2 \\ N_1 L_1 N_2 L_2}} K(L_1, L_2, N_1, N_2)\, K(\ell_1, \ell_2, n_1, n_2)$$

$$\times < N_1 (\vec{R}_1)\, N_2 (\vec{R}_2) ; \lambda \,|\, n_1 (\vec{r}_1)\, n_2 (\vec{r}_2) ; \lambda >$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}(-1)^{2N_2+L_2}\,(2n'+\lambda)!}{\Gamma(n'+1)\,\Gamma(n'+\lambda+\frac{3}{2})\sqrt{(2N_1+L_1)!\,(2N_2+L_2)!\,(2n_1+\ell_1)!\,(2n_2+\ell_2)!}}$$

$$\times\ d^{J}_{(M,\ M')}(2\varphi)\ . \qquad \text{(II. 42)}$$

avec

$$n' = (N_1+N_2) + \frac{L_1+L_2-\lambda}{2}\ , \qquad M' = -(N_1-N_2) - \frac{L_1-L_2}{2},$$

$$M = -(n_1-n_2) - \frac{\ell_1-\ell_2}{2}\ , \qquad J = (N_1+N_2) + \frac{L_1+L_2}{2}\ .$$

Enfin $d^{J}_{(M\ ,\ M')}(2\ \varphi)$ est l'élément de la matrice de rotation [voir Edmonds (1957)] . La sommation sur n_1, ℓ_1, n_2, ℓ_2, N_1, L_1, N_2, L_2 est limitée par

$$2n_1+\ell_1 = x, \qquad 2n_2+\ell_2 = y\ .$$
$$2N_1+L_1 = z\ , \qquad 2N_2+L_2 = t\ ,$$

où x, y, z, t sont des *nombres* entiers positifs.

5 - Conclusion

Une fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur harmonique a été construite puis utilisée pour calculer par des opérations mathématiques élémentaires les coefficients de Talmi et les coefficients de Moshinsky et Smirnov en suivant la méthode de travail de Bargamann (1962) et Schwinger (1965).

Le développement de la fonction génératrice des coefficients de Talmi s'impose naturellement dans la base de la représentation symétrique (Kumar 1966 b) et nous donne une expression des coefficients de Talmi qui est nouvelle, qui possède une symétrie équivalente à celle qu'on observe dans l'expression donnée par Kumar (1966 a) et qui ne fait pas intervenir les symboles 9 - j. L'expression des coefficients de Talmi peut être facilement programmée, elle permet un calcul rapide des coefficients en raison des symétries qui apparaissent, du fait que beaucoup de coefficients sont nuls et que les indices de sommation ont un domaine de variation limité. De cette nouvelle expression des coefficients de Talmi nous déduisons naturellement le calcul des coefficients dans des cas particuliers, retrouvant ainsi certains résultats de la littérature et en obtenant de nouveaux. Dans le cas où deux nombres quantiques radiaux sont nuls et où un nombre quantique magnétique est minimal, nous obtenons une expression simple des coefficients de Talmi qui ne contient qu'un seul indice de sommation et qui nous paraît particulièrement inétressante non seulement par elle-même mais surtout parce qu'elle permet la déduction par récurrence de tous les autres coefficients.

De la fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov nous déduisons une expression nouvelle de ces coefficients où n'apparaissent que des symboles 3 - jm et des coefficients de la représentation symétrique (Kumar 1966 b) calculés à partir des symboles 3 - jm.

Tous ces éléments possèdent de remarquables propriétés de symétrie; de plus un grand nombre d'entre eux s'avèrent nuls ce qui diminue considérablement le nombre des opérations de calcul numérique. Notre expression est particulièrement simple en comparaison de l'expression proposée par Raynal (1976) [voir (12) et (61)] et de l'expression récemment proposée par Dobeš (1977) [voir (6)] et elle se prête à un calcul numérique rapide des coefficients de Moshinsky et Smirnov. Dans le cas où deux nombres quantiques principaux sont nuls nous retrouvons, par simple remplacement des indices par leur valeur, l'expression donnée par Efros (1973) sans être obligé de faire appel aux propriétés des symboles 9 - j. Cet exemple est significatif car il illustre l'intérêt de la méthode que nous utilisons; en effet notre méthode se prête à une généralisation dans les cas où la base de la représentation est fonction des coordonnées de plus de deux particules, le calcul des éléments des matrices des transformations de Moshinsky et Smirnov pouvant être effectué sans connaissance préalable des symboles $3n - j$, résultat que les autres méthodes ne peuvent pas atteindre. De la fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov nous déduisons, dans l'Appendice B, une autre expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov qui peut se comparer avantageusement à l'expression donnée par Dobeš (1977) car elle est moins compliquée; de plus elle contient des coefficients qui possèdent des symétries ce qui présente un grand intérêt dans les calculs numériques en minimisant le temps-machine.

Dans ce travail nous avons également obtenu une nouvelle relation entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov qui se révèle utile pour effectuer la vérification des calculs numériques de ces coefficients.

Pour finir, signalons que notre fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur harmonique pourrait être intéressante pour la détermination des éléments de matrice de certains types de potentiel (potentiel Gaussien par exemple). Enfin, notons que notre approche pourrait aussi être utilisée dans d'autres domaines de la physique (physique atomique et moléculaire par exemple); il est possible en effet d'adopter une autre base que la base sphérique de l'oscillateur harmonique et de construire par notre procédé la fonction génératrice de cette nouvelle base.

APPENDICE A

Nous donnons d'abord la définition des coefficients Z, puis nous les comparons aux coefficients *S* introduits par Kumar (1966 b).

Les coefficients Z sont déduits de l'expression ci-dessous :

$$\prod_{i<j} [\xi^{i}\cdot\xi^{j}]^{\alpha_{ij}} \prod_{i=1}^{4} \delta_{\sum_j \alpha_{ij},\ 2j_i} = \sqrt{\frac{(J+1)!}{\omega}} \sum_m Z\begin{pmatrix} j_1 \dots j_4 \\ m_1 \dots m_4 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{4} \phi_{j_i m_i}(\xi^i) . \qquad \text{(A. 1)}$$

$$J = \sum_{i=1} j_i ,$$

où les α_{ij} sont des entiers positifs et où $\omega = (\prod_{i<j} \alpha_{ij}!)^{-1}$ avec i, j = 1, 2, 3, 4. Si nous divisons les deux membres de l'expression (A. 1) par $\prod_{i=1}^{4} \eta_i^{2 j_i}$ et si nous posons $\frac{\xi^i}{\eta_i} = t_i$, nous obtenons le résultat suivant :

$$\sqrt{\frac{\omega}{(J+1)!}} \prod_{i<j} (t_i - t_j)^{\alpha_{ij}} = \sum_m Z\begin{pmatrix} j_1 \dots j_4 \\ m_1 \dots m_4 \end{pmatrix} \prod_{i=1}^{4} \frac{t_i^{\,j_i + m_i}}{\sqrt{(j_i+m_i)!\,(j_i-m_i)!}} \qquad \text{(A. 2)}$$

En comparant l'expression (A. 2) à l'expression (II. 7) donnée par Kumar (1966 b), nous remarquons que la seule différence consiste dans la façon d'ordonner les termes du produit désigné par $\prod_{i<j} (t_i - t_j)^{\alpha_{ij}}$ dans l'expression (A. 2) et noté $\prod_{i,j}^{e} (t_i - t_j)^{\alpha_{ij}}$ dans l'expression (II. 7) de Kumar (1966 b). Ceci explique que les coefficients Z et les coefficients S ne diffèrent que par un facteur de phase. Plus précisément on a :

$$Z = (-1)^{\alpha_{13} + \alpha_{24}} S.$$

Il est clair de ce fait que les coefficients Z possèdent des propriétés de symétrie identiques à celles des coefficients *S*. *Ainsi, en permutant les colonnes* (j_i, m_i) *et* (j_k, m_k), *il vient :*

$$\begin{aligned} Z \begin{pmatrix} \dots j_\ell \dots j_k \dots \\ \dots m_\ell \dots m_k \dots \end{pmatrix} &= (-1)^{\alpha_{13} + \alpha_{24}}\, S \begin{pmatrix} \dots j_\ell \dots j_k \dots \\ \dots m_\ell \dots m_k \dots \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{\alpha_{13} + \alpha_{24}} (-1)^{2(j_k + j_\ell) - \alpha_{k\ell}}\, S \begin{pmatrix} \dots j_k \dots j_\ell \dots \\ \dots m_k \dots m_\ell \dots \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2(j_k + j_\ell) - \alpha_{k\ell}}\, Z \begin{pmatrix} \dots j_k \dots j_\ell \dots \\ \dots m_k \dots m_\ell \dots \end{pmatrix} . \end{aligned} \qquad \text{(A. 3)}$$

De même, on peut montrer que :

$$Z \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & -m_4 \end{pmatrix} = (-1)^{\sum_{i=1}^{4} j_i}\, Z \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix} . \qquad \text{(A. 4)}$$

APPENDICE B

Dans l'expression de la fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov (II. 36) la présence de $\frac{\{2\}}{[P(s, \bar{S})]^{\sigma+\frac{3}{2}}}$ qui peut être développé de plusieurs manières entraîne la possibilité d'obtenir plusieurs types de formules donnant les coefficients de Moshinsky et Smirnov. Nous exposons ici une autre manière d'obtenir une expression formelle, fonction des symboles 3 - jm, qui permet le calcul des coefficients de Moshinsky et Smirnov.

Nous remarquons qu'en posant :

$$S_1 = \frac{\xi_1}{\eta_1}, \quad S_2 = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad s_1 = -\frac{\overline{\xi'_1}}{\overline{\eta'_1}}, \quad s_2 = \frac{\overline{\xi'_2}}{\overline{\eta'_2}} .$$

la quantité dans l'accolade { 2 } de l'expression (II. 36) s'écrit :

$$\{2\} = (-1)^n \frac{\left[[\xi^1\xi^2]^i (\xi^2\overline{\xi'^2})^j (\xi^1\overline{\xi'^2})^k (\xi^2\overline{\xi'^1})^\ell (\xi^1\overline{\xi'^1})^m [\overline{\xi'^2\xi'^1}]^n\right]}{\eta_1^{\,i+k+m}\,\eta_2^{\,i+j+\ell}\,\overline{\eta'_1}^{\,\ell+m+n}\,\overline{\eta'_2}^{\,j+k+n}} . \qquad (B.1)$$

Si $\Phi_{t_1 t_2 (t\mu)}(\xi^1\xi^2)$ désigne la base de la représentation couplée dans l'espace de Bargmann [voir Bargmann (1962)] , la quantité entre crochets dans l'expression (B. 1) que nous noterons [ ] , s'écrit :

$$[\quad] = \sum_{\substack{t_1 t_2 t'_1 t'_2 \\ t\mu\, t'\mu'}} \langle t_1 t_2 t\mu ; t'_1 t'_2 t'\mu' | [\quad] \rangle \, \Phi_{t_1 t_2 (t\mu)}(\xi^1\xi^2)\, \overline{\Phi_{t'_1 t'_2 (t'\mu')}(\xi'^1\xi'^2)},$$

avec

$$\langle t_1 t_2 t\mu ; t'_1 t'_2 t'\mu' | [\quad] \rangle = \int \overline{\Phi_{t_1 t_2 (t\mu)}(\xi^1\xi^2)}\, \Phi_{t'_1 t'_2 (t'\mu')}(\xi'^1\xi'^2)$$

$$\times [\quad] \prod_{i=1}^{2} [d\mu(\xi^i)\; d\mu(\xi'^i)] .$$

Le calcul de l'intégrale dans l'expression ci-dessus peut être mené à bien à l'aide de l'expression (II. 35). Ceci conduit à :

$$\langle t_1 t_2 t\mu ; t'_1 t'_2 t'\mu' | [\quad] \rangle = \sum_{t t_3} (-1)^{T-2t_3} \sqrt{\frac{(T_1+1)!(T_2+1)!\, j!\, k!\, \ell!\, m!}{(T_1-i+1)!\,(T_1-2t-i)!}}$$

$$\times \sqrt{\prod_{\alpha=1}^{2} [(T_1-2t_\alpha)!(T_2-2t'_\alpha)!] (T_1-2t)!(T_2-2t)!}\begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & j'_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}$$

$$\times\, \Phi_{t_1 t_2 (t\mu)}(\xi^1\xi^2)\; \Phi_{t'_1 t'_2 (t\mu)}\overline{(\xi'^1\xi'^2)} . \qquad (B.2)$$

avec

$$T_1 = t_1 + t_2 + t_3 , \qquad T_2 = t'_1 + t'_2 + t'_3, \qquad t_3 = t'_3 = t ,$$

$$t_1 = \frac{\ell_1 + \Delta}{2}, \quad t_2 = \frac{\ell_2 - \Delta}{2}, \quad t'_1 = \frac{L_1 + \Delta}{2}, \quad t'_2 = \frac{L_2 - \Delta}{2},$$

$$\Delta = \frac{L_1 - L_2 + \ell_2 - \ell_1}{2},$$

$$j'_3 = t, \quad j'_2 = \frac{\ell_1 - i}{2}, \quad j'_1 = \frac{\ell_2 - i}{2}, \quad m'_3 = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}, \quad m'_1 = j'_1 - j ,$$

$$m'_2 = j - j'_2 , \qquad T = j'_1 + j'_2 + j'_3 .$$

Dans l'expression (B. 2) nous développons $\Phi_{t_1 t_2 (t\mu)}(\xi^1 \xi^2)$ et $\Phi_{t'_1 t'_2 (t\mu)} \overline{(\xi'^1 \xi'^2)}$ sur les bases $\Phi_{t_1 u_1}(\xi^1)\ \Phi_{t_2 \mu_2}(\xi^2)$ et $\overline{\Phi_{t'_1 u'_1}(\xi'^1)}\ \overline{\Phi_{t'_2 \mu'_2}(\xi'^2)}$ [voir Bargmann (1962)], puis nous utilisons l'expression (II. 32) et nous obtenons alors les coefficients $C^{i\,j}_{(n_1\, n_2,\ N_1\, N_2)}$. Il suffit alors de reporter l'expression de ces coefficients dans (II. 38) pour obtenir les coefficients de Moshinsky et Smirnov sous la forme finale :

$$< N_1(\vec{R}_1)\, N_2(\vec{R}_2); \lambda \ | n_1(\vec{r}_1)\, n_2(\vec{r}_2); \lambda \ > = \frac{(-1)^{J_2}}{(4\pi)^2\ 2^{2\sigma}}$$

$$\times \sqrt{[\ell_1][\ell_2][L_1][L_2]\,(J_1 - 2\lambda)!(J_2 - 2\lambda)!(J_1+1)!(J_2+1)!}$$

$$\times\, N_{n_1 \ell_1}\ N_{n_2 \ell_2}\ N_{N_1 L_1}\ N_{N_2 L_2}$$

$$\times \sum_t (2t+1)(-1)^{T-2t} \sqrt{(T_1+1)!(T_2+1)! \prod_{i=1}^{3} (T_1 - 2t_i)!(T_2 - 2t'_i)!}$$

$$\times \left[\sum_{i\,j} (-1)^m \ \frac{1}{i\,!\,j\,!} \right.$$

$$\times \sqrt{\frac{(2j)!\,(2k)!\,(2\ell)!\,(2m)!\ [j!\,k!\,\ell!\,m!]^{-1}}{(J_1 - 2i + 1)!\,(J_1 - 2\lambda - 2i)!\,(T_1 - i + 1)!\,(T_2 - 2\lambda - i)!}}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & t \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}$$

$$\times \; (\sin\varphi)^{L_1 + \ell_1 - 2j} \, (\cos\varphi)^{L_2 - \ell_1 + 2(i+j)} \Big]$$

$$\times \Big[\sum_{\substack{\mu_1 \mu'_1 \\ \mu_2 \mu'_2}} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t'_1 & t'_2 & t \\ \mu'_1 & \mu'_2 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\times \frac{P_{(N'_1\,,\,N'_2)}^{(n'_1\,,\,n'_2)}(\varphi)}{\sqrt{\prod_{i}^{2} [(t_i+\mu_i)!\,(t_i-\mu_i)!\,(t'_i+\mu'_i)!\,(t'_i-\mu'_i)!]}} \Big] \,, \qquad \text{(B.3)}$$

où

$$t_1 + \mu_1 + N'_1 = N_1 \,, \qquad t'_1 - \mu_3 + n'_1 = n_1 \,,$$

$$t_2 + \mu_2 + N'_2 = N_2 \,, \qquad t'_2 - \mu_4 + n'_2 = n_2 \,.$$

L'expression ci-dessus des coefficients de Moshinsky et Smirnov ressemble à l'expression donnée par Dobeš (1977) mais les quantités entre crochets présentent de nombreuses propriétés de symétrie que n'offre pas l'expression donnée par Dobeš.

REFERENCES

Baranger M et Davies K T R 1966 Nucl. Phys. 49 403

Bargmann V 1962 Rev. Mod. Phys. 34 319

Dobeš J 1977 J. Phys. A Math. Gen. 10 2053

Edmonds A R 1957 Angualr momentum in quantum mechanics (Princeton, N J : Princeton University Press)

Efros V D 1973 Nucl. Phys. A 202 180

Fieck G 1979 J. Phys. B : Atom. Molec. Phys. 12 1063

Gal A 1968 Ann. of Physics 49

Kumar K 1966 a J. Math. Phys. 7 671

Kumar K 1966 b Aust. J. Phys. 19 719

Kumar K 1967 Aust. J. Phys. 20 205

Messiah A 1965 Mécanique Quantique I (Paris : Dunod)

Moshinsky M 1959 Nucl. Phys. 13 104

Raynal J 1976 Nucl. Phys. A 259 272

Schwinger J 1965 in Quantum Theory of Angular Momentum Ed. Biedenharn et Van Dam (New-York : Academic) pp. 229

Smirnov Yu F 1962 Nucl. Phys. 39 346

Talmi I 1952 Helv. Phys. Acta 25 185

Trlifaj L 1972 Phys. Rev. C 5 1534

Wong C W 1970 Nucl. Phys. A 147 563

Yutsis A P et Bandzaitis A (1965) Angular Momentum Theory in Quantum Mechanics (Vilnius)

CHAPITRE III

FONCTION GENERATRICE DES INVARIANTS DE WEYL DU GROUPE SU (N)

L'étude des groupes unitaires prend de plus en plus d'importance en raison du rôle qu'elle joue dans la classification des particules élémentaires à interaction forte et dans l'étude des structures atomiques et nucléaires qui est l'un de leurs principaux domaines d'application (de Swart 1963, Karmer et Moshinsky 1968).

La technique des opérateurs de bosons a été développée par Schwinger (1965), pour le groupe SU(2), puis étendue par Bargmann et Moshinsky (1960, 1961) et d'autres (Moshinsky 1963, Baird et Biedenharn 1963) au groupe unitaire U(N). Dans l'ensemble de ces travaux, les opérateurs infinitésimaux des groupes unitaires exprimés à l'aide des opérateurs de création et d'annihilation des bosons ont été employés pour la construction des vecteurs de l'espace de la représentation dans l'esapce des bosons ainsi que pour le calcul des coefficients de Wigner (Moshinsky 1963, Chacon, Ciftan et Biedenharn 1972). Dans le travail de Schwinger (1965) est exposé une méthode utile pour la construction de la fonction génératrice des symboles 3 - j mais cette méthode est difficile à généraliser au groupe SU(N). Bargmann (1962), Resnikoff (1967) et d'autres auteurs (Hongoh 1974) ont essayé de déduire les symboles 3 - j des invariants de Weyl qu'il leur a fallu construire mais cette construction se révèle difficile en général pour SU(N) quand $N > 2$.

La considération de cette difficulté nous a conduit à procéder autrement. Notre approche consiste à construire la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation de SU(N) dans l'espace de Bargmann (1962) de laquelle nous déduisons la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation. Puis, utilisant ces dernières fonctions et l'intégrale de Gaunt, nous aboutissons à la fonction génératrice des invariants de Weyl. Cette méthode exige l'utilisation des transformations finies et une nouvelle paramétrisation de SU(N) ainsi que la détermination de la mesure invariante sur le groupe. La modification de l'expression de l'intégrale de Gaunt, par l'introduction de paramètres réels et positifs convenablement choisis, permet de la calculer dans l'espace de Bargmann et présente l'intérêt de donner une expression de la fonction génératrice des invariants de Weyl sous une forme compacte et simple.

Notre méthode se caractérise par sa simplicité. En effet, elle n'exige pas de longs calculs, soit qu'il s'agisse de retrouver des résultats bien connus, ou d'obtenir de nouveaux résultats. Elle nous permet de construire simplement la fonction génératrice du groupe SU(2). Elle nous permet de démontrer qu'un ensemble des éléments de la matrice de représentation de SU(N) est solution d'une équation différentielle et que cet ensemble, dans le cas du groupe SU(3) est équivalent à l'ensemble des fonctions harmoniques déterminées par Beg et Ruegg (1965). *Enfin, notre méthode permet de calculer les éléments des matrices de passage d'une représentation* à une autre : coefficients de Talmi, coefficients de Talmi-Moshinsky (voir Wong 1970).

Dans cette étude, nous consacrons les préliminaires au rappel des propriétés de l'espace de Bargmann et des propriétés des groupes unitaires et nous exposons la méthode de travail. L'application de la méthode au groupe SU(2) fait l'objet de la première partie. Dans la deuxième partie, prenant pour point de départ la fonction génératrice des symboles 3 - j de SU(2) nous construisons la fonction génératrice de la base de représentation de SU(3). Nous démontrons que l'ensemble des fonctions harmoniques déterminées par Beg et Ruegg (1965) est équivalent à un ensemble des éléments de la matrice de représentation. Nous construisons une fonction génératrice d'invariants de Weyl. La troisième partie expose une nouvelle paramétrisation de SU(N). Nous déterminons un ensemble des éléments de la matrice de représentation qui est solution d'une équation de Laplace-Beltrami, nous déterminons la mesure invariante sur le groupe SU(N) enfin, nous construisons la fonction génératrice pour un ensemble d'invariants de Weyl. L'appendice 1 est consacré à la résolution de l'équation de Laplace qui nous est utile. Dans l'appendice 2 est exposé le calcul des éléments de la matrice de représentation du groupe SU(3).

1 - Préliminaires

1.1. Espace de Bargmann

Nous résumons ici les propriétés essentielles de l'espace de Bargmann mais pour plus de détails voir chapitre II ou Bargmann 1962.

Nous appelons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des fonctions analytiques entières $f(z)$ où $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est un point de l'espace Euclidien complexe à n dimensions C_n.

Le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ appartenant à C_n est défini par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i, \qquad \text{(III. 1)}$$

où $\bar{a}$ est le conjugué de a.

Nous utiliserons aussi le produit (ab) défini par :

$$(ab) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i . \qquad \text{(III. 2)}$$

1.1.1. Espace de Hilbert $\mathcal{F}_n$

Le produit scalaire de deux éléments f et f' de $\mathcal{F}_n$ s'écrira :

$$(f, f') = \int \overline{f(z)}\, f'(z)\, d\mu_n(z). \qquad \text{(III. 3)}$$

avec la mesure

$$d\mu_n(z) = \pi^{-n} \exp\left[-(\bar{z}z)\right] \prod_{k=1}^{n} dz_k = \rho_n(z) \prod_{k=1}^{n} dz_k , \qquad \text{(III. 4)}$$

où

$$z_k = x_k + iy_k \quad , \qquad dz_k = dx_k\, dy_k \, . \qquad \text{(III. 5)}$$

Le complexe conjugué de $f(z)$ est $\overline{f(z)}$.

De la relation (III. 4) on déduit que :

$$(z_i^{h_i} , z_j^{h_j}) = \delta_{ij}\, \delta_{h_i h_j}\, h_i\, !$$

et
$$(e^{\alpha z_i}, e^{\beta z_j}) = e^{\bar{\alpha}\beta}\, \delta_{ij} \, . \qquad \text{(III. 6)}$$

Les opérateurs z_k et $d_k = \dfrac{\partial}{\partial z_k}$ sont des opérateurs sur $\mathcal{F}_n$ et sont adjoints l'un de l'autre car on vérifie que :

$$(z_k f , g) = (f , d_k g) \quad \text{et} \quad (d_k f , g) = (f , z_k g)$$

et

$$z_k = d_k^* , \; d_k = \frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k}\right) . \qquad \text{(III. 7)}$$

1.1.2. Transformation unitaire $\mathcal{C}_U$

A chaque transformation unitaire U de C_n on fait correspondre un opérateur $\mathcal{C}_U$ défini sur $\mathcal{F}_n$ par :

$$(\mathcal{C}_U f)(z) = f({}^t U z), \qquad \text{(III. 8)}$$

$${}^t\bar{U}\, U = I \, .$$

${}^tU$ et $\bar{U}$ sont respectivement la matrice transposée et la matrice complexe conjuguée de la matrice $U = (U_{ij})$.

$$(\mathcal{C}\, {}^tU) = {}^t\, \mathcal{C}_U \, , \quad \mathcal{C}_{\bar{U}} = \overline{\mathcal{C}_U} . \qquad \text{(III. 9)}$$

La transformation $\mathcal{C}\,U$ étant unitaire, elle possède les propriétés :

Premièrement : $\mathcal{C}\,U$ est un opérateur linéaire et unitaire qui laisse invariante la mesure $d\mu_n(z)$.

Deuxièmement : La matrice U étant unitaire, il en découle (voir Hage Hassan 1970) que dans le déterminant de la matrice U, si nous remplaçons les k vecteurs colonnes $i_1 \ldots i_k$ $(k \leq n)$ par k vecteurs $j_1 \ldots j_k$ choisis parmi les n vecteurs de la base $\{ e_i = (0, 0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0) \}$ le nouveau déterminant est égal à det $(U_{i_m j_{m'}})$ det (U), $m, m' = 1, \ldots k$.

Troisièmement : Si la transformation U_N appartient au groupe unimodulaire SU(N) elle ne dépend que de $N^2 - 1$ paramètres indépendants et le det $(U_N) = 1$. Nous choisissons de remplacer dans la notation ${}^tU_N$ par U_N et de poser $z' = U_N(z)$ dans l'expression (III.8).

1.1.3. Espace produit direct

L'espace produit direct $\mathcal{F}_{(n_1)} \otimes \mathcal{F}_{(n_2)} \ldots \otimes \mathcal{F}_{(n_p)}$ correspond à une décomposition de $\mathcal{F}_{(n)} = \mathcal{F}_{(n_1 + n_2 + \ldots + n_p)}$ avec $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$,

$$
\begin{aligned}
z^1 &= (z^1_1, z^1_2, z^1_3, \ldots, z^1_{n_1}),\\
z^2 &= (z^2_1, z^2_2, z^2_3, \ldots, z^2_{n_2}),\\
&-----------\\
z^p &= (z^p_1, z^p_2, z^p_3, \ldots, z^p_{n_p}),
\end{aligned}
\tag{III.10}
$$

et

$$f(z^i) \in \mathcal{F}(n_i),$$

$$f(z) = \prod_{i=1}^{p} f(z^i) \in \mathcal{F}_{(n)}, \qquad d\mu_n(z) = \prod_{i=1}^{p} d\mu_{n_i}(z^i). \tag{III.11}$$

Si $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n$ l'espace produit direct sera noté $\mathcal{F}^{(p)}_{(n)}$ et dans le cas,

$$T_U f(z) = f({}^tUz^1) \times \ldots \times f({}^tUz^p), \tag{III.12}$$

nous posons :

$$T_U = \mathcal{C}^{(1)}_U \otimes \mathcal{C}^{(2)}_U \otimes \ldots \otimes \mathcal{C}^{(p)}_U .$$

1.2. Représentation du groupe unitaire

1.2.1. Les éléments de base $\mathcal{V}\left[{h \atop (\alpha)}\right]$ de la représentation

Nous considérons l'espace $D_{[h]}$ des polynômes homogènes qui est un sous-espace de $\mathcal{F}^{(n)}_{(n)}$. Toute fonction appartenant à $D_{[h]}$ est définie par :

$$f(\lambda_1 z^1, \lambda_2 z^2, \ldots, \lambda_n z^n) = \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \ldots \lambda_n^{k_n} f(z^1, z^2, \ldots, z^n), \tag{III.13}$$

avec $\quad k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \quad , \quad z^i \in C_n$

et $\quad h_1 = k_1 - k_2 \;,\; h_2 = k_2 - k_3, \ldots, h_n = k_n$.

L'espace produit direct est :

$$D_{[h^1,\, h^2,\, \ldots,\, h^k]} = D_{[h^1]} \otimes D_{[h^2]} \cdots \otimes D_{[h^k]}, \tag{III.14}$$

avec

$$[h^k] = [h_1^k,\, h_2^k,\, \ldots,\, h_n^k].$$

La base de représentation du groupe unitaire qui a été construite (Moshinsky 1963, Baird et Biedenharn 1963) dans l'espace des bosons correspond dans l'espace de Bargmann à l'ensemble des vecteurs orthogonaux appartenant au sous-espace $D_{[h]}$ que nous notons :

$$\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}(z^1,\, z^2,\, \ldots\, z^n). \tag{III.15}$$

Les opérateurs des transformations infinitésimales seront écrits :

$$C^{ij} = (z^i d^j) \quad , \quad C_{ij} = (z_i d_j)\,, \tag{III.16}$$

avec

$$z^i = (z_1^i,\, z_2^i,\, \ldots,\, z_n^i) \quad \text{et} \quad z_i = (z_i^1,\, z_i^2,\, \ldots,\, z_i^n),$$
$$d^j = (d_1^j,\, d_2^j,\, \ldots,\, d_n^j) \quad , \quad d_j = (d_j^1,\, d_j^2,\, \ldots,\, d_j^n).$$

Les éléments de base $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ doivent satisfaire les conditions :

$$C^{ii}\, \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = k_i\, \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}\,,$$
$$C^{ij}\, \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = 0 \quad \text{pour} \quad i < j\,.$$

Notons que

$$\left(\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)},\, \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha')}\right) = \delta_{[h],\,[h]}\, \delta_{(\alpha),\,(\alpha')}, \tag{III.18}$$

avec

$$\delta_{[h],[h']} = \delta_{h_1 h'_1} \ldots \delta_{h_n h'_n} \, .$$

Il en résulte que ces vecteurs de base $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ sont fonction de déterminants indépendants formés de colonnes des matrices (z^i_j), $j \leq i \leq n$.

Pour U_N appartenant à SU(N) la base de représentation $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$ ne dépend que des N-1 premiers vecteurs et $h_N = 0$.

C_{ij} doit être remplacé par :

$$C_{ij} - H\,\delta_{ij}\,, \quad H = \sum_{i=1}^{n} C_{ii}\,. \tag{III. 19}$$

Pour N = 2,

$$\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \mathcal{V}^{j}_{m}\,, \tag{III. 20}$$

et dans cette représentation $\mathcal{V}^{j}_{m}$ est fonction propre du carré du moment angulaire et de sa projection sur l'axe des z.

Pour N = 3,

$$\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(t,t_0,y)}\,, \quad k_1 = \lambda + \mu\,, \; k_2 = \mu\,. \tag{III. 21}$$

Cette représentation est fonction propre du carré du spin isotopique t^2, de sa projection t_z sur l'axe des z et de y qui représente le triple de l'opérateur hypercharge.

Dans la suite de ce travail, il ne sera question que de sous-groupes unimodulaires.

1.2.2. La représentation irréductible $D^{[h]}(U_N)$

Cette représentation est définie par la restriction de l'action T_{U_N} au sous espace $D_{[h]}$

$$T_{U_N}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)} = \sum_{(\alpha')} D^{[h]}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_N)\,\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha')}\,. \tag{III. 22}$$

La matrice de représentation a pour éléments :

$$D^{[h]}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_N) = (\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha')}\,,\, T_{U_N}\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)})\,. \tag{III. 23}$$

Les éléments de la matrice de représentation satisfont l'intégrale de Gaunt :

$$\int D^{[h^1]}_{(\alpha'_1),(\alpha_1)}(U_N)\, D^{[h^2]}_{(\alpha'_2),(\alpha_2)}(U_N)\, D^{[h^3]}_{(\alpha'_3),(\alpha_3)}(U_N)\, dU_N =$$

$$\sum_{\rho} \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha'_1) & (\alpha'_2) & (\alpha'_3) \end{pmatrix}_{\rho} \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3) \end{pmatrix}_{\rho}\,, \tag{III. 24}$$

où dU_N est la mesure invariante sur le groupe SU(N), où ρ exprime la multiplicité et où :

$\begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3) \end{pmatrix}_\rho$ sont les symboles 3-j de Wigner..

Les éléments satisfont ainsi :

$$\begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3) \end{pmatrix}_\rho = \sum_{(\alpha')} D^{[h^1]}_{(\alpha'_1)\,(\alpha_1)}(U_N) \times$$

$$D^{[h^2]}_{(\alpha'_2).(\alpha_2)}(U_N)\; D^{[h^3]}_{(\alpha'_3).(\alpha_3)}(U_N)\; \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha'_1) & (\alpha'_2) & (\alpha'_3) \end{pmatrix}_\rho . \qquad \text{(III. 25)}$$

Soit $G_N(t)$ la fonction génératrice de la base $\mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$

$$G_N(t) = \sum_{(\alpha)\,[h]} (t)^{[h]}_{(\alpha)}\; \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}\;, \quad G_N(t) \in D_{[h]}\;, \qquad \text{(III. 26)}$$

où $(t)^{[h]}_{(\alpha)}$ est l'ensemble d'un produit de paramètres réels ou complexes, constituant en général une base de l'espace de Bargmann à un facteur multiplicatif près, introduits pour donner une forme exponentielle à $G_N(t)$.

Nous écrivons à l'aide de l'expression (III. 22) la fonction génératrice de $D^{h}_{(\alpha'),\,(\alpha)}(U_N)$:

$$G_N(t,\, U_N) = \sum_{(\alpha)\,[h]} (t)^{[h]}_{(\alpha)}\, T_{U_N} \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha)}$$

$$= \sum_{(\alpha)\,(\alpha')\,[h]} (t)^{[h]}_{(\alpha)}\, D^{[h]}_{(\alpha').\,(\alpha)}(U_N)\, \mathcal{V}^{[h]}_{(\alpha')} . \qquad \text{(III. 27)}$$

Dans l'espace produit direct $D_{[h^1,\, h^2,\, \ldots\, h^k]}$ la fonction génératrice sera notée :

$$G^k_N(t,\, U_N) = \prod_{i=1}^{k} G^i_N(t,\, U_N) \qquad \text{(III. 28)}$$

et la transformation unitaire s'écrira :

$$T_{U_N}^{(1,\,2,\,\ldots,\,p)} = T_{U_N}^{(1)} \otimes T_{U_N}^{(2)} \ldots \otimes T_{U_N}^{(p)} . \qquad \text{(III. 29)}$$

De l'expression (III. 24) nous déduisons $G^3_N(t)$:

$$G^3_N(t) = \int G^3_N(t,\, U_N)\, d\, U_N = \sum_{\substack{[h]\,\rho \\ (\alpha)\,(\alpha')}} \mathcal{H}'_\rho(t)\; \mathcal{H}_\rho \qquad \text{(III. 30)}$$

où

$$\mathcal{H}'_\rho(t) = \sum_{(\alpha')} \prod_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} (t) & [h^i] \\ & (\alpha'_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha'_1) & (\alpha'_2) & (\alpha'_3) \end{pmatrix}_\rho$$

$$\mathcal{H}_\rho = \sum_{(\alpha)} \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (\alpha_1) & (\alpha_2) & (\alpha_3) \end{pmatrix}_\rho \prod_{i=1}^{3} \mathcal{V}^{[h^i]}_{(\alpha_i)} \qquad \text{(III. 31)}$$

La relation (III. 25) permet d'écrire :

$$T^{(1,\ 2,\ 3)}_{U_N} \mathcal{H}_\rho = \mathcal{H}_\rho \,. \qquad \text{(III. 32)}$$

$\mathcal{H}_\rho$ est donc un invariant de Weyl.

Les invariants $\mathcal{H}_\rho$ sont fonctions propres d'un ensemble d'opérateurs qui peuvent être déterminés comme l'ont déjà montré Brody, Moshinsky et Renero (1965). Il est important de remarquer que le calcul des symboles 3 - j provient du développement de $\mathcal{H}'_\rho$ (t) développement qui donne aux symboles 3 - j les formes les plus simples que l'on n'obtient pas par le développement des invariants de Weyl. Pour obtenir une expression G^3_N (t) sous une forme compacte, il faut introduire des variables réelles et positives dans G^3_N (t, U_N) et effectuer l'intégration dans l'espace de Bargmann comme le montrera ce qui va suivre.

2 - Cas du groupe SU(2)

La fonction génératrice des éléments de la matrice de rotation $D^j_{m',\,m}(U_2)$ a pour expression :

$$s(x, z) = \exp\left[(xz')\right] = \sum_{jmm'} \mathcal{V}^j_{m'}(x)\, D^j_{m',m}(U_2)\,\mathcal{V}^j_m(z),$$

$$U_2(z) = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(III. 33)}$$

avec

$$a_1 = e^{-\frac{i}{2}(\varphi - \gamma)} \cos\frac{\theta}{2}\,,$$

$$a_2 = e^{-\frac{i}{2}(\varphi + \gamma)} \sin\frac{\theta}{2}\,, \qquad \text{(III. 34)}$$

φ, θ et γ sont les angles d'Euler.

Les éléments $D^j_{m',\,m}(U_2)$ forment un ensemble de polynômes orthogonaux (Edmonds 1957)

$$D^j_{m',m}(U_2) = D^j_{m',m}(\varphi,\theta,\gamma) = e^{-i\varphi m'} d^j_{m',m}(\theta) e^{-i\gamma m},$$

$$d\,U_2 = \frac{1}{2}\sin\theta\ d\theta\ \frac{1}{4\pi}\ d\varphi\ \frac{1}{4\pi}\ d\psi . \qquad \text{(III. 35)}$$

Les éléments de la base D_j sont fonctions propres du carré du moment angulaire J^2 et de sa projection J_z sur l'axe des z.

$$\mathcal{V}^j_m(z_1, z_2) = \frac{z_1^{j+m}\ z_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\ (j-m)!}} ,$$

$$J^2 = J_z(J_z - 1) + J_+^1 J_-^1 , \qquad J_+^1 = C_{12} ,$$

$$J_z = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}) , \qquad J_-^1 = C_{21} . \qquad \text{(III. 36)}$$

Dans ce qui va suivre, nous remplaçons $\Phi(x, z)$ par $\Phi(R_2 x, z)$ où R_2 est un paramètre réel et positif. Nous posons :

$$y_1^2 = R_2 a_1 = \rho_1\ e^{i\varphi_1} ,$$

$$y_2^2 = R_2 a_2 = \rho_2\ e^{i\varphi_2} , \qquad \text{(III. 37)}$$

et $\rho_1 = R_2 \cos\frac{\theta}{2}$, $\rho_2 = R_2 \sin\frac{\theta}{2}$, $\varphi_1 = -\frac{\varphi - \Psi}{2}$, $\varphi_2 = -\frac{\varphi + \Psi}{2}$,

où $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 4\pi$, $0 \leq \Psi \leq 4\pi$.

Il en résulte que :

$$\Phi(R_2 x, z) = \exp\left[y_1^2 x_1 z_1 + y_2^2 x_1 z_2 - \overline{y_2^2} x_2 z_1 + \overline{y_1^2} x_2 z_2 \right] . \qquad \text{(III. 38)}$$

Le développement de cette expression permet d'écrire :

$$R_2^{2j} D^j_{m', m}(U_2) = D^j_{m', m}(y_1^2, y_2^2, \overline{y_1^2}, \overline{y_2^2}) = D^j_{m', m}(\vec{y^2}, \vec{\vec{y^2}}) . \qquad \text{(III. 39)}$$

De l'expression (III. 38) découle

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2\, \partial \overline{y_1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2\, \partial \overline{y_2^2}} \right) \Phi(R_2 x, z) = 0 . \qquad \text{(III. 40)}$$

L'orthogonalité de $\mathcal{V}^j_m$ implique :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2\, \partial \overline{y_1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2\, \partial \overline{y_2^2}} \right) D^j_{m', m}(\vec{y^2}, \vec{\vec{y^2}}) = 0 . \qquad \text{(III. 41)}$$

La résolution de l'équation différentielle (III. 41) dans le cas général est exposée dans l'appendice 1. Nous remarquons que :

$$dy_1^2 \; dy_2^2 = \frac{R_2^3}{4} \sin\theta \; d\varphi_1 \; d\varphi_2 \; dR_2 \tag{III.42}$$

et
$$\int D^{j_1}_{m'_1, m_1} (\vec{y^2}, \vec{\overline{y}^2}) \, D^{j_2}_{m'_2, m_2} (\vec{y^2}, \vec{\overline{y}^2}) \, d\mu_2 (y^2) =$$

$$(2j_1 + 1)! \; \delta_{j_1 j_2} \, \delta_{m_1 m_2} \, \delta_{m'_1 m'_2} . \tag{III.43}$$

Le changement de domaine de variation de φ_1 et φ_2 à $0, 2\pi$ ne modifie pas le résultat de l'expression (III.43).

Ainsi les éléments $D^{j}_{m', m} (\vec{y_2}, \vec{\overline{y}_2})$ appartiennent à un espace homogène qui a la même mesure que l'espace de Bargmann. La fonction génératrice des symboles 3 - j s'obtient par intégration de l'expression :

$$G_2^3 = \int \prod_{i=1}^{3} \left[\; \phi(x^i, z^i) \; \right] d\mu_2 \; (y^2)$$

$$= \int \exp \left[\sum_{i=1}^{3} \; (y_1^2 x_1^i z_1^i + y_2^2 x_1^i z_2^i - \overline{y}_2^2 x_2^i z_1^i + \overline{y}_1^2 x_2^i z_2^i \right] d\mu_2 \; (y^2) . \tag{III.44}$$

Nous obtenons le deuxième membre de l'expression (III.44) en utilisant l'expression (III.38). En regroupant les coefficients de y_1^2, y_2^2, $\overline{y}_1^2$, $\overline{y}_2^2$ et en nous servant de l'expression (III.6) nous obtenons :

$$G_2^3 = \exp \left[\sum_{ij} \left[(x_1^i z_1^i)(x_2^j z_2^j) - (x_1^i z_2^i)(x_2^j z_1^j) \right] \right]$$

$$= \exp \left[[x^1 x^2] \, [z^1 z^2] + [x^1 x^3] [z^1 z^3] + [x^2 x^3] \, [z^2 z^3] \right]$$

$$= \sum_{j_i m_i m'_i} (J+1)! \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\prod_{i=1}^{3} \left(\mathcal{V}^{j_i}_{m_i} (x^i) \, \mathcal{V}^{j_i}_{m'_i} (z^i) \right), \tag{III.45}$$

où $\qquad J = j_1 + j_2 + j_3 \quad$ et $\quad [x^i x^j] = x_1^i x_2^j - x_1^j x_2^i .$

La dernière expression (III.45) est obtenue en effectuant l'intégration de l'expression (III.44) où $\phi\,(x^i, z^i)$ a été remplacé par son développement (III.33). Ensuite de la multiplication de (III.44) par $\prod_{i=1}^{3} \mathcal{V}^{j_i}_{m_i} (z_i)$ et de l'intégration par rapport à $\prod_{i=1}^{3} \; d\mu_2 \; (z_i)$ du résultat obtenu nous déduisons les invariants h^J pour $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \neq 0$ soit

$$h^J = \frac{1}{\sqrt{(J+1)!}} \frac{[x^1x^2]^{J-2j_3}\,[x^1x^3]^{J-2j_2}\,[x^2x^3]^{J-2j_1}}{\left[(J-2j_3)!\ (J-2j_2)!\ (J-2j_1)!\right]^{1/2}}$$

$$= \sum_{j_i m_i} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \mathcal{V}^{j_1}_{m_1}(x^1)\,\mathcal{V}^{j_2}_{m_2}(x^2)\,\mathcal{V}^{j_3}_{m_3}(x^3) . \qquad \text{(III. 46)}$$

Les invariants h^J sont les vecteurs normés appartenant au sous-espace invariant par la transformation :

$$T^{(1,2,3)}_{U_2} = T^{(1)}_{U_2} \otimes T^{(2)}_{U_2} \otimes T^{(3)}_{U_2} \qquad \text{(III. 47)}$$

La construction de la fonction génératrice de la base de représentation de SU(3) nous impose le développement qui suit :

La fonction génératrice des éléments de la base $\left\{ \mathcal{V}^{j_3}_{m_3}(x^1, x^2) \right\}$ de l'espace produit direct $D[j_1, j_2] = D_{j_1} \otimes D_{j_2}$ se déduit de h^J en remplaçant x^3_1 par Z_1 et x^3_2 par $-Z_2$, en multipliant par $(J+1)!\ \phi^{(j_1+j_2+\frac{1}{2})}_{(j_3+\frac{1}{2})}(t_1, t_2)\ \phi^{j_3}_{(j_1-j_2)}(\tau_1, \tau_2)$ et en effectuant la sommation par rapport à j_i du résultat obtenu :

$$\Psi = t_1 \exp\left[t_1t_2[x^1x^2] + t_1\tau_1(x^1Z) + t_1\tau_2(x^2Z)\right]$$

$$= \sum_{j_i m_i} \frac{(J+1)!}{\sqrt{(2j_3+1)}}\ \phi^{(j_1+j_2+\frac{1}{2})}_{(j_3+\frac{1}{2})}(t_1 t_2)\ \phi^{j_3}_{(j_1-j_2)}(\tau_1, \tau_2)$$

$$\phi^{j_3}_{m_3}(Z)\quad W^{j_3}_{m_3}(x^1, x^2) . \qquad \text{(III. 48)}$$

C'est l'introduction du paramètre t_1 que nous faisons ici qui différencie cette expression de la fonction génératrice des symboles 3 - j de l'expression qu'à construite Schwinger (1965) [voir relation (III. 56)] .

$W^{j_3}_{m_3}$ *est fonction propre de :*

$$J^2 = J^3(J^3 - 1) + J^+J^- = J_z(J_z - 1) + J^+J^- , \qquad \text{(III. 49)}$$

avec $\quad J_+ = C_{12}\ ,\quad J_- = C_{21}\ ,\quad J_z = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22})\ ,$

et $\quad J^+ = C^{12}\ ,\quad J^- = C^{21}\ ,\quad J^z = \frac{1}{2}(C^{11} - C^{22})\ ,$

A l'aide des relations (III. 6) nous pouvons mettre Ψ sous la forme :

$$\Upsilon = \int t_1 \left[\exp\left[t_1 t_2 [\overline{\xi^1 \xi^2}] + t_1 \tau_1 (\overline{Z\xi^1}) + t_1 \tau_2 (\overline{Z\xi^2}) \right] \right.$$

$$\exp\left[(\xi^1 x^1) + (\xi^2 x^2) \right] d\mu_4(\xi)$$

$$= \mathcal{L}(t, \tau, Z, (\xi^1, \xi^2)) \exp\left[(\xi^1 x^1) + (\xi^2 x^2) \right]. \qquad \text{(III. 50)}$$

Nous remarquons que la fonction génératrice $W^{j_3}_{m_3}(x^1, x^2)$ s'obtient par application de l'opérateur $\mathcal{L}(t, \tau, Z, (\xi^1, \xi^2))$ à la fonction génératrice du produit $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{V}^{j_i}_{m_i}(x^i)$.

3 - Cas du groupe SU(3)

3. 1. Fonction génératrice de la base $D_{[\lambda, \mu]}$

Les vecteurs de base $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(t, t_0, y)}(z^1, z^2)$ *de l'espace* $D_{[\lambda, \mu]}$ sont fonctions propres de l'opérateur de Casimir du second ordre T^2, de la projection T_0 de $\vec{T}$ sur l'axe des z, du triple de l'opérateur hypercharge Y et ont pour valeurs propres respectivement $t(t+1)$, t_0 et y.

Nous avons : $z^1 = (z^1_1, z^1_2, z^1_3)$,

$$z^2 = (z^2_1, z^2_2, z^2_3).$$

$$T_+ = C_{12}, \quad T_- = C_{21}, \quad T_0 = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{22}). \qquad \text{(III. 51)}$$

L'opérateur de Casimir du second ordre s'écrit :

$$T^2 = T_0(T_0 + 1) + T_+ T_-,$$

de plus

$$Y = \sum_{i=1}^{3} C_{ii} - 3\, C_{33}. \qquad \text{(III. 52)}$$

D'après la relation (III. 17) des préliminaires,

$$C^{12}\, \mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)} = 0. \qquad \text{(III. 53)}$$

Les vecteurs $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(t, t_0, y)}(z^1, z^2)$ appartiennent à l'espace $D_{t_1} \otimes D_{t_2} \otimes D_{t_3}$ qui a pour éléments de base $\mathcal{V}^{t_1}_{m_1}(z^1_1, z^2_1)\, \mathcal{V}^{t_2}_{m_2}(z^1_2, z^2_2) \times \mathcal{V}^{t_3}_{m_3}(z^1_3, z^2_3)$ et pour fonction génératrice $\exp[\sum_{i=1}^{3}(x_i z_i)]$.

La fonction génératrice des fonctions propres $W^t_{t_0}(z_1, z_2)$ de T^2 et de T_0 se déduit par l'application de l'opérateur $\mathcal{L}(t, \tau, Z, (x_1, x_2))$ [Cf. relation (III. 50)] à $\exp[\sum_{i=1}^{3}(x_i z_i)]$:

$$\Phi_1 = t_1 \exp[\, t_1 t_2 \Delta_3^{(1,2)} + t_1 Z_1(\tau z_1) + t_1 Z_2(\tau z_2)\,]\; \exp[(x_3 z_3)], \qquad \text{(III. 54)}$$

$$\Delta_3^{(1,2)} = (z^1_1 z^2_2 - z^1_2 z^2_1).$$

En tenant compte des relations (III. 49) et (III. 53) et en appliquant à l'expression (III. 54) l'opérateur $\mathscr{L}\,(t',\ Z',\ \tau^2_1,\ (\tau,\ x^3))$ on peut obtenir la fonction génératrice des vecteurs de base $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(t,\,t_o,\,y)}(z^1,\,z^2)$.

$$\mathscr{L}\,\xi_1 = t_1 t'_1 \exp\Big[t_1 t_2 \Delta_3^{(1,2)} + t'_1 t'_2 (t_1 Z_1 z^1_1 + t_1 Z_2 z^1_2) z^2_3$$

$$- (t_1 Z_1 z^2_1 + t_1 Z_2 z^2_2)\, z^1_3\Big] + t'_1 Z'_1 \big[\tau^2_1 (t_1 Z_1 z^1_1 + t_1 Z_2 z^1_2)$$

$$+ \tau^2_2 (t_1 Z_1 z^2_1 + t_1 Z_2 z^2_2)\big] + t'_1 Z'_2 (\tau^2_1 z^1_3 + \tau^2_2 z^2_3)\Big]. \qquad \text{(III. 55)}$$

Pour que la relation (III. 53) soit satisfaite τ^2_2 doit être égal à zéro et nous obtenons la fonction génératrice $G_3\,(t)$.

$$G_3\,(t) = t_1\, t'_1\ \exp\big[\ t_1\, t_2\, \Delta_3^{(1,2)} + t'_1\, t'_2\, t_1\, (Z_2\, \Delta_1^{(1,2)} - Z_1\, \Delta_2^{(1,2)})$$

$$+ t_1\, t'_1\, Z'_1\, \tau^2_1\, (Z_1\, z^1_1 + Z_2\, z^1_2) + t'_1\, Z'_2\, \tau^2_1\, z^1_3\,\big]$$

$$= \sum_{\substack{pqt\\ \lambda\mu}} (-1)^q \frac{(\mu+p+1)!\,(\mu+\lambda-q+1)!}{\sqrt{(\lambda+1)\,(2t+1)}}\ \frac{t_2^q\, t'^{\,\mu-q}_2\, Z'^{\,p}_1\, Z'^{\,\lambda-p}_2\, t_1^{\mu+p+1}\, t'^{\,(\mu+\lambda-q+1)}_1\, Z_1^{\,t+t_o}\, Z_2^{\,t-t_o}\, \tau^{2\,\lambda}_1}{\sqrt{q!\,(\mu-q)!\,p!\,(\lambda-p)!\,(\mu+p+1)!\,(\mu+\lambda-q+1)!\,(t+t_o)!\,(t-t_o)!\,\lambda!}}$$

$$\times\ \mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}\,(z^1,\,z^2). \qquad \text{(III. 56)}$$

Nous avons :

$$\vec{\Delta}^{(1,2)} = (\Delta_1^{(1,2)},\ \Delta_2^{(1,2)},\ \Delta_3^{(1,2)})$$

$$= \Big((z^1_2\, z^2_3 - z^1_3\, z^2_2),\ (z^1_3\, z^2_1 - z^2_3\, z^1_1),\ (z^1_1\, z^2_2 - z^1_2\, z^2_1)\Big).$$

Dans le cas où $z^1 = (z^1_1,\ \dots,\ z^1_n)$ et $z^2 = (z^2_1,\ \dots,\ z^2_n)$ les mêmes procédés de calcul conduisent à la fonction génératrice de la base $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}\,(z^1,\ z^2)$.

3.2. Eléments de la base de la représentation $D^{\lambda\mu}$

La paramétrisation de SU(3) est déjà connue. Dans ce travail, nous reprenons la paramétrisation de Nelson (1967) à laquelle nous apportons quelques modifications qui vont nous permettre d'établir une nouvelle paramétrisation de SU(N).

Nous pouvons écrire la matrice $U_3 = (U^3_{ij})$ sous la forme :

$$(U^3_{ij}) = U_2\,(\Omega)\ g_3\ U_2\,(\Omega')\ \mathscr{C}_3 \qquad \text{(III. 57)}$$

$$(U^3_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0\\ -\bar{a}_2 & \bar{a}_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & b_1 & b_2\\ 0 & -\bar{b}_2 & \bar{b}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0\\ -\bar{c}_2 & \bar{c}_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_1 & 0\\ 0 & 0 & (\bar{d}_1)^2\end{pmatrix}. \qquad \text{(III. 58)}$$

avec

$$a_1 = e^{-\frac{i}{2}(\varphi-\gamma)} \cos\frac{\theta}{2}\ ,\ \ b_1 = \cos\frac{\nu}{2}\ ,\ c_1 = e^{-\frac{i}{2}(\varphi'-\gamma')}\cos\frac{\theta'}{2}\ ,\ d_1 = e^{+i\beta}\ ,$$

$$a_2 = e^{-\frac{i}{2}(\varphi+\gamma)} \sin\frac{\theta}{2}\ ,\ \ b_2 = \sin\frac{\nu}{2}\ ,\ c_2 = e^{-\frac{i}{2}(\varphi'+\gamma')}\sin\frac{\theta'}{2}\ . \qquad \text{(III. 59)}$$

les modifications portent sur la matrice $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & -\bar{b}_2 & \bar{b}_1 \end{pmatrix}$ que

Nelson (1967) écrivait $\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{b}_2 & 0 & \bar{b}_1 \end{pmatrix}$ et $U_2(\Omega) = U_2^*(\Omega)$.

Comme dans le chapitre précédent [voir (III. 37)] nous remplaçons dans l'expression (III. 56),

$$t_2,\ Z'_2,\ Z_1 \ \text{ et } \ Z_2$$

respectivement par

$$t_2 R_3,\ Z'_2 R_3,\ Z_1 R_2 \sqrt{R_3} \quad \text{et} \quad Z_2 R_2 \sqrt{R_3}\ . \qquad \text{(III. 60)}$$

Dans la fonction génératrice des éléments de la base $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}$ *nous posons* $\mu = q$ *et* $p = 0$ *et nous* écrivons :

$$y_3^3 = R_3 \cos\frac{\nu}{2}\, e^{-2i\beta},$$

$$y_2^3 = R_3 \sin\frac{\nu}{2} \cos\frac{\theta'}{2}\, e^{(+i\beta+\frac{i}{2}(\varphi'-\gamma')+i\pi)},$$

$$y_1^3 = R_3 \sin\frac{\nu}{2} \sin\frac{\theta'}{2}\, e^{(+i\beta+\frac{i}{2}(\varphi'+\gamma'))}. \qquad \text{(III. 61)}$$

En tenant compte de la deuxième propriété des transformations unitaires (Préliminaires) nous pouvons écrire que :

$$G_3(t,U_3)\begin{pmatrix} p=0 \\ \mu=q \end{pmatrix} = t_1 t'_1 e^{\left[(t_1 t_2 (\overline{y_1^3}\Delta_3^{(1,2)} + \overline{y_2^3}\Delta_2^{(1,2)} + \overline{y_3^3}\Delta_1^{(1,2)}) + (y_3^3 z_1^1 + y_2^3 z_2^1 + y_1^3 z_3^1) t'_1 Z'_2 \tau_1^2\right]}\ . \qquad \text{(III. 62)}$$

Par déduction :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^3 \partial \overline{y_1^3}} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^3 \partial \overline{y_2^3}} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^3 \partial \overline{y_3^3}}\right) G_3(t,U_3)\begin{pmatrix} p=0 \\ \mu=q \end{pmatrix} = 0\ . \qquad \text{(III. 63)}$$

Les éléments de base de $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}$ étant orthonormés, nous pouvons écrire :

$$\Delta_1 (R_3^{(\lambda+\mu)} D^{\lambda\mu}_{(\alpha),(\alpha'_o)} (U_3)) = 0,$$

$$(\alpha'_o) = (o, o, -2(\lambda-\mu)) \text{ et } (\alpha) = (t, t_o, y). \tag{III. 64}$$

La résolution de cette équation (voir appendice 1) nous donne l'expression des éléments :

$$D^{\lambda\mu}_{(t,t_o,y),(o,o,-2(\lambda-\mu))}(\nu, \theta', \psi, \varphi, \beta) = \frac{1}{\sin\frac{\nu}{2}} \, d^{\frac{\lambda+\mu+1}{2}}_{\frac{1}{2}(m_1+2t+1),\ \frac{1}{2}(m_1-2t-1)}(\nu) \times$$

$$e^{i(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2+m_3\varphi_3)} \, d^t_{\frac{1}{2}(m_2+m_3),\, t_o}(\theta) \ , \tag{III. 65}$$

avec $\quad m_1 = \frac{1}{3}(\lambda-\mu-y), \quad m_2+m_3 = \frac{1}{3}(y+2(\lambda-\mu)), \quad m_2-m_3 = 2t_o$

et où $\quad d^j_{m',m}(\theta) = D^j_{m',m}(0,\theta,0)$ (voir Edmonds 1957).

Ces éléments sont orthogonaux par rapport à la mesure :

$$d_{\mu_3}(y^3) = d_{\mu_1}(y_1^3) \ d_{\mu_1}(y_2^3) \ d_{\mu_1}(y_3^3) \ . \tag{III. 66}$$

Puisque $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}$ est fonction propre de T^2 et de T_o nous pouvons en déduire que les éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha),(\alpha')}(U_3)$ sont orthogonaux par rapport à :

$$d_\mu{}^3(y) = d_{\mu_3}(y^3) \ d_{\mu_2}(y^2) \ . \tag{III. 67}$$

L'équation différentielle (III. 63) donne les éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha),(\alpha'_o)}(U_3)$ à un facteur de phase près dont la détermination s'effectue à partir des éléments de la matrice (U^3_{ij}).

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont donnés par :

$$\varphi_1 = -2\beta, \quad \varphi_2 = \beta + \frac{\varphi'-\psi'}{2} + \pi, \quad \varphi_3 = \beta + \frac{\varphi'+\psi'}{2}. \tag{III. 68}$$

Le calcul des éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha),(\alpha'_o)}(U_3)$ dans le cas général est exposé dans l'appendice 2. Les éléments de l'expression (III. 65) sont équivalents aux fonctions harmoniques de Beg et Ruegg (1965) et ceci confirme le résultat déjà obtenu par Nelson (1967) après un long calcul.

3.3. Fonction génératrice des symboles 3 - j

Un des intérêts de notre approche réside dans la détermination de la fonction génératrice des symboles 3 - j à l'aide de la méthode d'intégration. Dans l'exposé du cas p = 0 ou $\mu = q$ s'illustre la simplicité de la méthode. Nous utiliserons la relation (III. 30) comme nous

l'avons déjà utilisée pour calculer les symboles 3 - j du groupe SU(2) [voir relation (III. 44)]
Nous posons :

$$[j] = 2(j-1)+1, \quad j = 1, 2, 3, \tag{III.69}$$

la fonction génératrice $G_3^j(t^j, U_3)$ [voir (III. 56)] :

$$G_3^j(t^j, U_3) = t^j t'^j \exp \Big[\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i^j (\Delta_i^{[j],[j]+1})' + \beta_i^j (z_i^{[j]})' \Big] . \tag{III.70}$$

Si dans notre traitement nous nous limitons au cas où q = μ , nous avons à calculer l'expression :

$$G_3(t) = \int [t] \exp \Big[\sum_{j=1}^{3} R_3 (\alpha_3^j (\Delta_3^{[j],[j]+1})' + \beta_3^j (z_3^j)') + \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} R_2 \sqrt{R_3}\, \beta_i^j (z_i^{[j]})' \Big] \, d\mu^3(y),$$

où

$$[t] = \prod_{j=1}^{3} t^j t'^j , \tag{III.71}$$

Nous notons $(z)^1$ et $(z)^2$ les transformés d'un vecteur (z) par U_3 et par U_2 *et nous écrivons* :

$$U_3 = U^2 U^3 \quad , \quad U^2 = U_2$$

et

$$R_2 (z_1^{[j]})' = y_1^2 (z_1^{[j]})^2 + y_2^2 (z_2^{[j]})^2 ,$$

$$R_2 (z_2^{[j]})' = -\overline{y_2^2} (z_1^{[j]})^2 + \overline{y_1^2} (z_2^{[j]})^2 . \tag{III.72}$$

Reportant les expressions *(III. 72) dans l'expression (III. 71) et effectuant* l'intégration *par* rapport à y_i^2 comme dans l'expression (III. 44), nous obtenons :

$$G_3(t) = \int [t] \exp \Big[\sum_{j=1}^{3} R_3 (\alpha_3^j (\Delta_3^{([j],[j]+1)})' + \beta_3^j (z_3^{[j]})' + \sum_{k<j} R_3 (\beta_1^j \beta_2^k - \beta_1^k \beta_2^j)(\Delta_3^{[j],[k]})' \, d\mu_3(y^3) . \tag{III.73}$$

Dans (III. 73) nous avons :

$$(\Delta_3^{([j],[k])})' = (z_1^{[j]})^2 (z_2^{[k]})^2 - (z_1^{[k]})^2 (z_2^{[j]})^2$$

$$= U_3 (z_1^{[j]} z_2^{[k]} - z_1^{[k]} z_2^{[j]}) . \tag{III.74}$$

D'après la deuxième propriété des groupes unitaires (voir Préliminaires),

$$R_3 (z_3^{[j]})' = \sum_i y_i^3 (z_i^{[j]}), \quad R_3 (\Delta_3^{[j],[j]+1})' = \sum_i \overline{y_i^3} (\Delta_3^{[j],[j+1]+1}),$$

de même

$$R_3 (\Delta_3^{[j],[k]})' = \sum_i \overline{y_i^3} (\Delta_i^{[j],[k]}) . \tag{III.75}$$

Reportant les expressions *précédentes* dans (III. 73) et effectuant l'intégration à l'aide de la relation (III. 6) il vient :

$$G_3(t) = \Gamma\, t\,]\, \exp\left[\sum_{jk} \alpha_3^j\, \beta_3^k\, \Delta_4^{([j],\,[j]+1,\,[k])} + \det(\beta^1, \beta^2, \beta^3)\,\Delta_4^{(1,\,3,\,5)} \right], \qquad \text{(III.76)}$$

$\det(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$ est le déterminant construit à partir des composantes des trois vecteurs $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \beta_3^i)$, $i = 1, 2, 3$.

Nous avons exactement le même procédé si au lieu du cas $q = \mu$ nous traitons le cas $p = 0$.

Le développement de G_3 (t) s'exprime en fonction des invariants de Weyl $\mathcal{H}_\rho$ (III.31). Moshinsky (1963) a construit l'opérateur X tel que

$$X \cdot \mathcal{H}_\rho = X(\rho) \cdot \mathcal{H}_\rho \,. \qquad \text{(III.77)}$$

Les valeurs propres $X(\rho)$ de X sont distinctes.

En utilisant cet opérateur, nous pouvons séparer les différents invariants $\mathcal{H}_\rho$, ce qui permet le calcul des symboles 3 - j.

4 - Cas du groupe SU(N)

Pour déterminer les symboles 3 - j dans le cas général, nous sommes amenés à considérer un ensemble de paramètres qui nous permet de construire la matrice (U_{ij}^N) de SU(N) d'une part et de déterminer la mesure invariante sur le groupe d'autre part.

4.1. Paramétrisation du groupe SU(N)

Nous faisons remarquer tout d'abord que si le nombre de paramètres dont dépend $U_{(N-1)}$ est $u = (N-1)^2 - 1$ et si le nombre de paramètres dont dépend U_N est $v = N^2 - 1$ la différence $v - u = 2N - 1$ correspond au nombre d'angles d'un vecteur appartenant à C_n dont le module est égal à 1.

Pour N = 3 ce vecteur est $(U_{31}^3, U_{32}^3, U_{33}^3)$qui compose la dernière ligne de la matrice de U_3 = ($U_3 = (U_{ij}^3)$ et

$$\begin{aligned} U_3 &= U^2\, U^3 \\ &= U_2\, (g_3\, U^2\, \mathcal{C}_3), \\ U^2 &= U_2 \,. \end{aligned} \qquad \text{(III.78)}$$

Pour $N \geq 3$ nous posons U_N sous la forme récurrente :

$$U_N = U_{N-1}\, U^N = U_{N-1}\, (g_N\, U^{N-1}\, \mathcal{C}_N) \,. \qquad \text{(III.79)}$$

Nous imposons au vecteur qui compose la dernière ligne de la matrice (U_{ij}^N) de dépendre des 2 N - 1 paramètres qu'il faut ajouter à ceux dont dépend U_{N-1} pour trouver ceux dont dépend U_N.
Nous notons $\Delta_{N+1}^{(1, \ldots, N)}$ le déterminant de la matrice (z_j^i) i, j = 1, ..., N, et $\Delta_i^{(1, \ldots, N-1)}$ le cofacteur de z_i^N.

D'après la deuxième propriété des transformations unitaires (voir Préliminaires) nous écrivons :

$$(z_N^i)' = \sum_{j=1}^{N} U_{Nj}^N z_j^i ,$$

$$(\Delta_N^{(1,\ldots,N-1)})' = \sum_{j=1}^{N} \overline{U_{Nj}^N} \, \Delta_j^{(1,\ldots,N-1)} . \qquad \text{(III.80)}$$

Les matrices $\mathcal{C}_N$ et g_N sont :

$$\mathcal{C}_N = \begin{pmatrix} e^{+i\beta_N} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{+i\beta_N} & & \vdots \\ 0 & 0 & & e^{-i(N-1)\beta_N} \end{pmatrix}$$

et

$$g_N = \begin{pmatrix} I_{N-2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\nu_N}{2} & \sin\frac{\nu_N}{2} \\ 0 & -\sin\frac{\nu_N}{2} & \cos\frac{\nu_N}{2} \end{pmatrix}$$

avec $\quad 0 \le \nu_N \le \pi \qquad$ **(III.81)**

I_{N-2} **est la matrice unité d'ordre n - 2.**

Il est simple de vérifier que la transformation U_N est unimodulaire et que la dernière ligne de la matrice U_N ne dépend que des paramètres à ajouter à ceux de la transformation U_{N-1} pour obtenir ceux de la transformation U_N.

4.2. La mesure invariante

Les éléments $\mathcal{V}_{(\alpha)}^{[h]}$ de la base de l'espace $D_{[h]}$ tels que :

$$C_{ii} \, \mathcal{V}_{(\alpha)}^{[h]} = k_i \, \mathcal{V}_{(\alpha)}^{[h]} ,$$

$$C_{ij} \, \mathcal{V}_{(\alpha)}^{[h]} = 0 \text{ pour } i < j , \qquad \text{(III.82)}$$

où k_i est défini dans (III.13), forment les éléments de poids maximal de la base et ont pour fonction génératrice :

$$G_N(t)_m = \exp\Big[\sum_{i=3}^{N} t'_i \Delta_i^{(1,\ldots,i-1)} + \sum_{j=1}^{N} t_j (z_j^1) \Big] \qquad \text{(III.83)}$$

et

$$G_N(t, U_N)_m = \exp\Big[\sum_{i=3}^{N} t'_i (\Delta_i^{(1,\ldots,i-1)})' + \sum_{j=1}^{N} t_j (z_j^1)' \Big] . \qquad \text{(III.84)}$$

Nous remplaçons t'_i par $t'_i\,\beta_i$ et t_j par $t_j\,\beta_j$ avec :

$$\beta_1 = \beta_2 = R_2 \sqrt{R_3}$$

et pour $j \geq 3$

$$\beta_j = R_j \sqrt{\beta_{(j+1)}}\,,$$

$$\beta_N = R_N$$

et
$$y_i^N = U_{N_i}^N R_N\,, \tag{III.85}$$

où les paramètres R sont réels et positifs.

Si nous nous limitons au cas particulier où les t_i et les t'_i sont nuls sauf pour $i = N$ et si nous tenons compte des relations (III.80), nous avons :

$$G_N(t,U)_m = \exp\left[\beta_N t'_N (\Delta^{(1,\ldots,N-1)})' + t_N \beta_N (z_N^1)'\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{j=1}^{N} t'_N \Delta_j^{(1,\ldots,N-1)} \overline{y_j^N} + t_N z_j^1 y_j^N\right]. \tag{III.86}$$

Nous remarquons que :

$$\Delta_{N-2}(G'_N(t,U_N)_m) = \left(\sum \frac{\partial^2}{\partial y_i^N \, \partial \overline{y_i^N}}\right) G'_N(t,U_N)_m = 0\,,$$

Et de l'orthogonalité des éléments $\mathcal{U}_{(\alpha)}^{[h]}$ nous déduisons que :

$$\Delta_{N-2} R_N^{(h_1+h_{N-1})} D_{(\alpha),(\alpha'_0)}^{[h_1,0,0\ldots,h_{N-1}]} (U_N) = 0\,. \tag{III.87}$$

La résolution de l'équation (III.87) est développée dans l'appendice 1. Les solutions de cette équation sont orthogonales par rapport à la mesure $d\mu_N(y^N)$ il en résulte que les éléments $D_{(\alpha),(\alpha')}^{[h]}(U_N)$ sont orthogonaux par rapport à la mesure

$$d\mu^N(y) = \prod_{i=2}^{N} d\mu_i(y^i) = \prod_{i=2}^{N} \left(e^{-R_i^2} R_i^{2i-1}\right) dU'_N\,. \tag{III.88}$$

Nous pouvons calculer $d\,U_N \doteq A_N\, d\,U'_N$ sachant que $\int d\,U_N = 1$.

Les opérateurs infinitésimaux C_{ij} ont pour correspondants les opérateurs C_{ij} qui se déduisent de la relation :

$$C_{ij}\, G'_N(t,U)_m = \widehat{C}_{ij}\, G'_N(t,U)_m\,. \tag{III.89}$$

Nous obtenons :

$$\hat{C}_{ij} = (y_j^N \frac{\partial}{\partial y_i^N} - \overline{y_i^N} \frac{\partial}{\partial \overline{y_j^N}}).$$

Les éléments $D^{[h]}_{(\alpha),(\alpha'_o)}(U_N)$ forment un ensemble de fonctions harmoniques. Ce résultat est la généralisation à SU(N) des résultats de Beg et Ruegg (1965) pour SU(3).

4.3. Fonction génératrice des symboles 3-j

Nous considérons la fonction génératrice $G_N^k(t, U)_m$ déduite de l'expression (III.84)

$$G_N^k(t, U_N)_m = \exp\Big[\sum_{i=3}^{N} t'^k_i \beta_i (\Delta_i^{([k],[k]+1,\ldots,[k]+i-2)})'$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} t_j^k \beta_j (z_j^{[k]})'\Big], \tag{III.90}$$

où $[k] = (k-1)(N-1)+1, \quad k = 1,2,3.$

Les éléments des déterminants $\Delta_i^{([k],[k]+1,\ldots,[k]+i-2)}$ sont $(z_n^{[k]+m})$ avec $0 \le m \le i-1$ et $1 \le n \le i$.

En utilisant l'expression (III.30) et les relations (III.80) nous pouvons écrire :

$$\int \prod_{k=1}^{3} G_N^k(t, U_N)_m \, d\mu^N(y) = \int \exp\Big[\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{N} (\delta_j^k)$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} t_j^k \beta_j (z_j^{[k]})'\Big] \prod_{j=2}^{N} d\mu_j (y^j), \tag{III.91}$$

avec $\delta_j^k = t'^k_j \beta_j (\Delta_j^{([k],[k]+1,\ldots,[k]+i-2)})'.$ (III.92)

Comme dans le cas de SU(3) nous sommes amenés à effectuer l'intégration par parties en utilisant les relations (III.80) :

$$G_N^3(t)_m = \int \Big[\exp\Big[\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=3}^{N} (\delta_j^k)'\Big]$$

$$\Big[\int \exp\Big[\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} t_j^k \beta_j (z_j^{[k]})'\Big] d\mu_2(y^2)\Big]\Big] \prod_{i=3}^{N} d\mu_i (y^i)$$

$$= \int \Big[\exp\Big[\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=4}^{N} (\delta_j^k)'\Big]$$

$$\left[\int \exp\left[\sum_{k} \delta_3^{k} + \sum_{k_1 k_2} \beta_3 t_1^{k_1} t_2^{k_2} (\Delta_2^{([k_1],[k_2])})'\right] du_3(y^3)\right]\right] \times$$

$$\times \prod_{i=4}^{N} du_i(y^i)$$

$$= \int \left[\exp\left[\sum_{k=1}^{3} \sum_{j=5}^{N} (\delta_j^{k})'\right]\right.$$

$$\left[\int \exp\left(\sum_{k} \delta_4^{k} + \sum_{k_1 k_2} \beta_4 t'^{k_1}_3 t'^{k_2}_3 \Delta_4^{([k_1],[k_1]+1,[k_2])}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k_1 k_2 k_3} \beta_4 t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} \Delta_4^{([k_1],[k_2],[k_3])}\right] du_4(y^4)\right]\right]$$

$$\times \prod_{i=5}^{N} du_i(y^i) \, . \tag{III. 93}$$

Après intégration, nous obtenons :

$$G_N^3(t)_m = \exp\Big[\sum_{k_N k'_N} t'^{k_N}_N t_N^{k'_N} (\Delta_{N+1}^{([k_N],[k_N]+1, \ldots ,[k_N]+N,[k'_N])})$$

$$+ \sum_{\substack{k_{N-1} k'_{N-1} \\ k'_N}} t'^{k_{N-1}}_{N-1} t_{N-1}^{k_{N-1}} t_N^{k'_N} \times$$

$$(\Delta_{N+1}^{([k_{N-1}],[k_{N-1}]+1, \ldots ,[k_{N-1}]+N-1,[k'_N])})\Big] . \tag{III. 94}$$

Ces calculs montrent que l'intégration ne présente pas de difficultés particulières. *Nous pensons* qu'il existe une méthode simple *pour* effectuer l'intégration dans le cas général sachant que la construction de la fonction génératrice $G_N(t, U_N)$ peut être déduite de la base de la représentation du groupe unitaire dans l'espace des bosons (ou l'espace de Bargmann).

5 - Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une nouvelle approche dans la détermination des symboles 3 - j des groupes unimodulaires. Notre approche consiste à partir de la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation préalablement déduite de la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation dans l'espace de Bargmann (1962), puis à utiliser l'intégrale de Gaunt pour obtenir la fonction génératrice des invariants de Weyl. Dans l'étude du cas SU(N), nous avons introduit une nouvelle paramétrisation du groupe SU(N). Cette paramétrisation récurrente, peut être symboliquement décrite par $U_N = U^N$ et $U_{N-1} = U^{N-1} \cdot U^{N-2} \ldots U^2$ où la dernière ligne de la matrice de la transformation U_N notée (U^N_{1j}) dépend des $2N - 1$ paramètres qui complètent les paramètres de U_{N-1}.

L'intérêt de la méthode apparaît quand l'ayant appliquée à l'étude du groupe SU(2), nous avons obtenu la fonction génératrice de Schwinger (1965) à partir de laquelle, nous avons construit la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation de SU(3). A partir de la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation de SU(3), nous avons démontré simplement que les fonctions harmoniques déduites par Beg et Ruegg (1965) sont des éléments de la matrice de représentation, ce qui confirme la conclusion que Nelson (1967) a obtenue par une méthode nécessitant un calcul complexe dans le cas de SU(3). Nous montrons que cette conclusion est valable dans le cas général et nous en déduisons la mesure invariante sur le groupe SU(N). Nous donnons aussi l'expression des éléments de la matrice de représentation de SU(3).

Dans le travail de recherche des fonctions génératrices des invariants de Weyl, il nous a paru important d'étudier des cas particuliers qui illustrent bien l'intérêt de notre méthode. Dans l'étude de ces cas particuliers, nous avons été amenés à introduire des paramètres qui nous permettent d'utiliser les propriétés de l'espace de Bargmann (1962) dans le calcul de l'intégrale de Gaunt, ce qui nous donne une expression compacte et simple des fonctions génératrices. L'étude complète des fonctions génératrices des invariants de Weyl, qui n'est pas traitée ici, fera l'objet d'un travail ultérieur.

APPENDICE A

Nous cherchons les solutions de l'équation $\Delta_p \overline{Y} = 0$ sachant que :

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^{p+2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \overline{y}_i} , \qquad (A.1)$$

et
$$
\begin{aligned}
y_1 &= Re^{i\varphi_1} \cos\theta_1 , \\
y_2 &= Re^{i\varphi_2} \sin\theta_1 \cos\theta_2 , \\
y_3 &= Re^{i\varphi_3} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots \\
y_{p+1} &= Re^{i\varphi(p+1)} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_p \cos\theta_{p+1} , \\
y_{p+2} &= Re^{i\varphi(p+2)} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \ldots \sin\theta_{p+1} .
\end{aligned} \qquad (A.2)
$$

Pour exprimer Δ_p en coordonnées polaires, nous devons calculer la métrique

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{p+2} dy_i \, d\overline{y}_i .$$

Si nous posons :

$$
\begin{aligned}
y_i &= R\beta_i^1 , \\
ds^2 &= (dR)^2 + R^2(ds'^2) , \\
ds'^2 &= \sum_{i=1}^{p+1} d\beta_i^1 \, d\overline{\beta_i^1} .
\end{aligned} \qquad (A.3)
$$

et $\beta_j^{i-1} = \sin\theta_i \, \beta_j^i , \; i \leq j \leq p+2 ,$

nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^{p+1} (d\beta_i^1 \, d\overline{\beta_i^1}) = d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1 d\varphi_1^2 + \sin^2\theta_1 (\sum_{i=2}^{p+2} d\beta_i^2 \, d\overline{\beta_i^2}) , \qquad (A.4)$$

$$\sum_{i=1}^{p+2} (d\beta_i^2 \, d\overline{\beta_i^2}) = d\theta_2^2 + \cos^2\theta_2 \, d\varphi_2^2 + \sin^2\theta_2 \, (\sum_{i=3}^{p+2} d\beta_i^3 \, d\overline{\beta_i^3}) . \qquad (A.5)$$

Sachant que $d\beta^{p+2}_{p+2}\, d\overline{\beta^{p+2}_{p+2}} = d\varphi^2_n$ nous pouvons calculer ds^2 et l'expression de Δ_p en coordonnées polaires. En tenant compte du fait que $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, dx_i\, dy_j$ est une métrique, l'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right), g = \det(g_{ij}), g^{ij} = (g^{-1})_{ij} .$$

Si nous posons : $\Delta_p (R^n \Psi_n (\theta_1, \dots, \theta_{p+1}, \varphi_{p+2})) = 0$,

pour $p = 0$

$$\Psi_n(\theta_1, \varphi_1, \varphi_2) = e^{i(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2)}\, d^{\frac{n}{2}}_{\frac{1}{2}(m_1 - m_2), \frac{1}{2}(m_1 + m_2)} (2\theta_1) . \tag{A. 6}$$

$$d^j_{m', m}(\theta) = D^j_{m', m}(0, \theta, 0) \text{ (voir Edmonds 1957)},$$

dans le cas général :

$$\Psi_n(\theta_1, \dots, \theta_{p+1}, \varphi_1 \dots \varphi_{(p+2)}) = \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{(\sin\theta_j)^{[j]}}$$

$$d^{\frac{n_j + [j]}{2}}_{\frac{1}{2}(m_j + [m_j]), \frac{1}{2}(m_j - [m_j])} (2\theta_j)$$

$$d^{\frac{n_{(p+1)}}{2}}_{\frac{1}{2}(m_{(p+1)} + m_{(p+2)}), \frac{1}{2}(m_{(p+1)} - m_{(p+2)})} (2\theta_{p+1})$$

$$. \operatorname{Exp}\left[i \sum_{k=1}^{p+2} m_k \varphi_k \right],$$

$$\text{où } [j] = p+1-j, [m_j] = n_{j+1} + [j] , \; n_1 = n . \tag{A. 7}$$

Les n_i sont des constantes entières et $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \dots \geq n_{p+1} \geq 0$. Les fonctions Ψ_n sont orthogonales entre elles et sont fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ'_p qui a pour métrique ds'^2. La fonction de poids est :

$$g_p = \prod_{i=1}^{p+1} (\sin\theta_i \cos\theta_i) \prod_{i=1}^{p} (\sin\theta_i)^{2(p+1-i)}. \tag{A. 8}$$

APPENDICE B

ELEMENTS DE LA MATRICE DE REPRESENTATION DE SU(3)

Soit $G_1 = \exp[\vec{r}\,.\,\Delta^{(1,\,2)} + \vec{s}\,.\,\vec{z}^{\,1}]\; t_1\, t'_1$ la fonction génératrice de la base de représentation $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha)}$ de SU(3) [relation (II.56)].

avec $r_1 = t'_1\, t'_2\, t_1\, Z_2$, $r_2 = t'_1\, t_1\, t'_2\, Z_1$, $r_3 = t_1\, t_2$,

$s_1 = t_1\, t'_1\, Z'_1\, \tau_1^2\, Z_1$, $s_2 = t_1\, t'_1\, Z'_1\, \tau_1^2\, Z_2$, $s_3 = t'_1\, Z'_2\, \tau_1^2$.

D'après l'expression (III.26) nous écrivons :

$$G_1 = \sum_{\lambda\mu\,(\alpha)} (t,\, Z,\, \tau_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha)}\; \mathcal{V}^{[\lambda\mu]}_{(\alpha)}\,(z^1,\, z^2). \qquad \text{(B.1)}$$

Dans G_1 nous remplaçons respectivement :

$t_1,\, t'_1,\, t_2,\, t'_2,\, Z_1,\, Z_2,\, Z'_1,\, Z'_2,\, \tau_1^2,\, r_1,\, r_2,\, r_3,\, s_1,\, s_2,\, s_3,$

par

$\overline{p_1},\, \overline{p'_1},\, \overline{p_2},\, \overline{p'_2},\, \overline{x_1},\, \overline{x_2},\, \overline{x'_1},\, \overline{x'_2},\, \overline{\gamma_1^2},\, \overline{u_1},\, \overline{u_2},\, \overline{u_3},\, \overline{v_1},\, \overline{v_2},\, \overline{v_3},$

nous obtenons la fonction génératrice de $\mathcal{V}^{\lambda\mu}_{(\alpha')}$ que nous notons :

$$G'_1 = \overline{p_1}\,\overline{p'_1}\; \exp[\vec{\bar{u}}\,.\,\vec{\Delta}^{(1,\,2)} + \vec{\bar{v}}\,.\,\vec{z}^{\,1}] \qquad \text{(B.2)}$$

ou bien

$$G'_1 = \sum_{\substack{\lambda\mu\\(\alpha')}} \overline{(p,\, Z,\, \gamma_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha')}}\; \mathcal{V}^{[\lambda\mu]}_{(\alpha')}\,(z^1, z^2). \qquad \text{(B.3)}$$

La fonction génératrice des éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha),\,(\alpha')}(U_3)$ est

$$D = \int (T_{U_3}\, G_1)\, \overline{G'_1}\; d\mu\,(z) \qquad \text{(B.4)}$$

soit

$$D = \sum_{\substack{\lambda\mu(\alpha)\\(\alpha')}} (t,\, Z,\, \tau_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha)}\; (p,\, Z,\, \gamma_1^2)^{[\lambda\mu]}_{(\alpha')}\; D^{\lambda\mu}_{(\alpha),\,(\alpha')}(U_3). \qquad \text{(B.5)}$$

(B.5) est obtenu en remplaçant G_1 et G'_1 par leur développement respectif [voir relations (B.1) et (B.3)] .

Le calcul de l'intégrale s'effectue par la méthode de la *dérivation sous le signe* somme en considérant les composantes de $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ comme des paramètres et en utilisant la relation (III.7).

Nous obtenons :

$$D = \frac{t_1\, t'_1\, p_1\, p'_1}{(1 - \vec{u} \cdot \vec{r'})^2} \quad \exp\left[\frac{\vec{v} \cdot \vec{s} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,(\vec{v'} \cdot \vec{s'})}{1 - u \cdot v}\right] \qquad (B.6)$$

avec $\vec{S'} = {}^tU_3\,(\vec{s'})$, $\vec{r'} = {}^tU_3\,(\vec{r})$.

La comparaison du développement de l'expression ci-dessus (B.6) et du développement de (B.5) nous permet d'obtenir les éléments $D^{\lambda\mu}_{(\alpha'),\ (\alpha)}(U_3)$.

Ainsi,nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
D^{\lambda\mu}_{(\alpha'),(\alpha)}(U_3) = {} & \frac{\sqrt{(\lambda+1)^2(2t+1)(2t'+1)}}{\lambda!} \\
& C^{p'}_{\lambda}\Big[(\lambda+p+1)!(\lambda+\mu-q+1)!q!(\mu-q)!p!(\lambda-p)! \\
& (\mu+p'+1)!(\lambda+\mu-q'+1)!q'!(\mu-q')!p'!(\lambda-p')!\Big]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \sum_{ijk}(-1)^i \frac{(\lambda+\mu-i)!}{(\lambda+1)!(\mu-q')!j!}\Big[(\lambda-p'+i)!(p'-j)!(q'-i)!(\mu-q'-k)!\Big]^{\frac{1}{2}} \times \\
& C^j_{p'}\, C^k_{\mu-q'}\, C^i_{\lambda-p'}\left[\frac{(j+J_2+M_2)!(k+J_1-M_2)!(\mu-q'+j-k)!(p'-j+k)!}{(J_1+M_1)!(J_1-M_1)!(J_2+M_2)!(J_2-M_2)!}\right] \times \\
& \times\, d^{J_1}_{M_1 M'_1}(\nu)\, d^{J_2}_{M_2 M'_2}(\nu)\, D^{t'}_{t'_o M'}(\Omega')\, D^{t}_{t_o M'_3}(-\gamma,-\theta,-\varphi),
\end{aligned} \qquad (B.7)$$

avec $\Omega' = (\varphi', \theta', \gamma')$, $D^{t'}_{t'_o, M'}(\Omega') = e^{-it'_o\varphi'}\, d^{t'}_{t'_o, M'}(\theta')\, e^{-iM'\gamma'}$,

(voir Edmonds 1957)

et

$$J_1 = \frac{\lambda - (i + j)}{2}, \qquad J_2 = \frac{\mu - (i + k)}{2},$$

$$M'_1 = \frac{\lambda - 2p' + (j - i)}{2}, \qquad M'_2 = \frac{\mu - 2q' + (i - k)}{2},$$

$$M_1 = \frac{\lambda - 2p + (j - i)}{2}, \qquad M_2 = \frac{\mu - 2q + (i - k)}{2},$$

$$M' = \frac{\mu - p' - q'}{2} + (j - k), \quad M'_3 = \frac{\mu - p - q}{2} + (j - k)$$

$$0 \leq i \leq \lambda - p', \qquad 0 \leq k \leq \mu - q', \qquad 0 \leq j \leq p'.$$

REFERENCES

Baird G et Biedenharn L 1963 J. Math. Phys. 4 144.

Bargmann V 1962 Rev. Mod. Phys. 34 829

Bargmann V et Moshinsky M 1960 Nucl. Phys. 18 697

Bargmann V et Moshinsky M 1961 Nucl. Phys. 23 177

Beg M et Ruegg H 1965 J. Math. Phys. 6 677

Brody T, Moshinsky M et Renero I 1965 J. Math. Phys. 6 1540

Chacon E, Ciftan M et Biedenharn L 1972 J. Math. Phys. 13 577

De Swart J J 1963 Rev. Mod. Phys. 35 916

Edmonds A R 1957 Angular Momentum in Quantum Mechanics (Princeton, NJ : Princeton University Press)

Hage Hassan M 1970 Thèse 3ème Cycle Université Cl. Bernard Lyon-I.

Hongoh 1974 3rd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics Marseille

Kramer P et Moshinsky M 1968 Group Teory and its Applications, Ed. Loebl E M (New York : Academic)

Nagel J et Moshinsky M 1965 J. Math. Phys. 6 682

Nelson T 1967 J. Math. Phys. 8 857

Resnikoff M 1967 J. Math. Phys. 8 63

Schwinger J 1965 Quantum Theory of Angular Momentum, Ed. Biedenharn L C and Van Dam H (New York : Academic)

Wong C W 1970 Nucl. Phys. A 147 563

CHAPITRE IV

LA METHODE DE LA FONCTION GENERATRICE

ET LE DEVELOPPEMENT EN QUASI-BOSONS

Les techniques de développement des opérateurs de systèmes de fermions, en fonction d'opérateur de création et d'annihilation de quasi-bosons, se sont révélées efficaces pour étudier les hamiltoniens collectifs et les opérateurs de transition des noyaux pair-pair.

Deux méthode de développement ont été employées, celle de Beliaev et Zelevinsky (Beliaev et Zelevinsky 1962) et celle de Marumori et al (Marumori, Yamamura et Tokunaga 1964). Mais ces développements convergent lentement et ne respectent plus le principe de Pauli. Quand ils sont tronqués nous allons montrer comment la méthode de la fonction génératrice permet de comparer ces développements et de construire les développements en quasi-bosons qui respectent rigoureusement le principe de Pauli et qui par ailleurs sont rapidement convergents. La méthode des "coordonnées génératrices" s'est révélée être tout particulièrement bien adaptée à l'étude des mouvements collectifs des systèmes de fermions en interaction (Hill et Wheeler 1953, Peierls et Yoccoz 1957, Peierls et Thouless 1962, Jancovici et Schiff 1964, Wong 1970). A partir de l'approximation la plus simple qui consiste à décrire ce système par une fonction d'onde $|\phi(\alpha, x)>$ de particules indépendantes placées dans un potentiel moyen V (α) dépendant de paramètres (α) nous construisons une fonction d'essai plus générale en superposant linéairement les états correspondant aux déformations possibles du potentiel.

$$|\Psi(x)> = \int f(\alpha) \, |\phi(\alpha, x)> d\alpha , \qquad \text{(IV. 1)}$$

La meilleure solution $|\Psi(x)>$ est définie par la fonction de poids $f(\alpha)$ qui minimise la fonctionnelle $<\Psi | H | \Psi>$.

On a déjà montré antérieurement (Jancovici et Schiff 1964) comment cette méthode des coordonnées génératrices permet de retrouver l'approximation en quasi-bosons ou la R. P. A. sans toutefois améliorer les précédentes méthodes d'approximation. Nous nous proposons de montrer qu' est très intéressant de choisir pour fonction de poids $f(\alpha)$ des fonctions analytiques $f(Z)$ app tenant à un des sous-espaces fonctionnels de l'espace de Bargmann. Nous pouvons alors définir une fonction $|\Phi(Z,x)>$ génératrice de tous les états $|\Psi(x)>$ du système physique étudié qui établit un isomorphisme entre ce sous-espace $\mathcal{F}'$ de Bargmann et l'espace des états physiques de telle sorte que

$$|\Psi(x)> = \int f(Z)|\Phi(Z,x)> d\mu(Z), \tag{IV.2}$$

$d\mu(Z)$ est la mesure de Bargmann et la fonction $f(Z)$ est l'image dans $\mathcal{F}'$ de l'état $|\Psi(x)>$.

Tout problème de recherche des états propres ou des valeurs propres d'une observable A du système physique est transformé en un problème semblable mais de solution plus aisée qui concerne l'opérateur $\hat{A}$ de A dans le sous-espace $\mathcal{F}'$ de Bargmann. Par ailleurs de l'isomorphisme qui relie les espaces de Bargmann et les espaces des états des oscillateurs harmoniques, il résulte que tout opérateur A concernant un système de fermions admettra pour image un opérateur $(A)_B$ concernant un système de quasi-bosons. La méthode de la fonction génératrice permet d'obtenir des développements rigoureux en termes de quasi-bosons des observables d'un système de fermions, valables jusqu'à un un ordre élevé. Ces développements se révéleront très rapidement convergents et donc très utiles.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude du premier type de développement et à la comparaison avec le développement de Marumori et al. Dans la deuxième partie nous nous intéressons au deuxième type de développement et nous le comparons au développement de Beliaev et Zelevinsky. Le développement des opérateurs à un corps et à deux corps ainsi que le développement de l'Hamiltonien en quasi-bosons fait l'objet de la troisième partie. Dans la quatrième partie nous exposons l'application de notre méthode au modèle de Lipkin. Enfin, une méthode variationnelle pour l'obtention simultanée des équations de Hartree et Fock et des équations de la R.P.A. est proposée dans la cinquième partie.

1 - Premier type de développement

Pour étudier commodément les propriétés d'un système de fermions nous allons voir qu'il est nécessaire d'associer à l'espace $\mathcal{H}_F$ des états liés de ce système un des sous-espaces β' de l'espace de Bargmann (1962) qui notamment fait correspondre à tout opérateur A de $\mathcal{H}_F$ un opérateur $\hat{A}$ de β'. Nous nous proposons de déterminer tout d'abord l'expression de $\hat{A}$ en fonction de celle de A. De l'isomorphisme entre l'espace de Bargmann et l'espace d'un système de bosons nous établissons l'isomorphisme entre le sous-espace β' de Bargmann et l'espace physique du système de bosons correspondant. Nous obtiendrons l'expression de tout opérateur $(A)_B$ sous la forme d'un développement en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons.

1.1. Fonction génératrice de la base d'un système de fermions

La base de l'espace $\mathcal{H}_F$, $\{|n>\}$, sera constituée d'un état de référence $|\Phi>$ (déterminant de Slater qui peut être la solution d'un calcul préalable de Hartree et Fock) et de tous les états n trous n particules déduits de $|\Phi>$.

A toute paire constituée d'un trou α et d'un état particule i nous ferons correspondre une variable complexe $Z_{i\alpha}$ et la fonction génératrice s'écrira alors :

$$| \phi (Z) > = \sum_n \frac{A^n}{n ! \sqrt{n !}} | \phi >$$

$$= \sum_n [\frac{1}{\sqrt{n !}} \sum_p (-1)^P \; Z_{i_1 \alpha_1} \ldots\ldots Z_{i_n \alpha_n}] \, | \, n > \qquad \text{(IV.3)}$$

avec $\qquad A = \sum_{i\alpha} \overline{Z_{i\alpha}} \, a_i^{+} \, a_\alpha$

La base $\mathcal{U}_n (Z) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_p (-1)^P \; Z_{i_1 \alpha_1} \ldots . \; Z_{i_n \alpha_n}$ *est un sous-espace* β' *de l'espace de* Bargmann β_n.

$(-1)^P$ est la signature des permutations p.

Chaque terme d'ordre n du développement précédent apparie un état n trous $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, n particules $(i_1, i_2, \ldots)$ à un vecteur appartenant au *sous-espace* β' de β_n.

Il est intéressant de remarquer que la fonction génératrice n'est autre que la renormalisation de la fonction d'onde de Thouless (1960) :

$$|\phi' (Z) > = \sum_n \frac{A^n}{n !} \, | \, \phi >$$

$$= \mathrm{Exp} \, [\sum_{mi} \overline{Z_{i\alpha}} \, a_i^{+} \, a_\alpha] \, | \, \phi >$$

$$= \sum_n \sqrt{n !} \; \mathcal{U}_n (Z) \, | \, n >$$

$$= \sum_n \mathcal{U}'_n \; (Z) \, | \, n > \qquad \text{(IV.4)}$$

Cette dernière n'est pas normalisée "dans le sens de Bargmann" :

$$\int \overline{\mathcal{U}'_n (Z)} \, \mathcal{U}'_n (Z) \; d\mu \; (Z) \neq \delta_{nn'}$$

$d\mu$ (Z) est la mesure de Bargmann.

Et de ce fait elle peut s'écrire sous la forme (I.7) qui est celle d'une fonction génératrice appariant les états $| \, m >$ de $\mathcal{H}_F$ à des vecteurs $\mathcal{U}_m$ (Z) non normalisés, dans l'espace de Bargmann. Dans ce cas la plupart des propriétés de l'isomorphisme T étudiées précédemment (chapitre I) ne sont plus vérifiées. Il en résulte en particulier que la transformation définie par la fonction génératrice (IV.4) ne conserve plus l'hermiticité bien qu'elle conserve les valeurs propres. Il est important de signaler que nous avons établi la généralisation du développement de Jancovici et Schiff (1964) (voir appendice) et que nous avons constaté que l'hermiticité $(d Z)^+ \neq Z$ n'est pas conservée.

1.2. Images des opérateurs de $\mathcal{H}_F$

Le transformé $\hat{A}$ d'un opérateur A se déduit de l'expression :

$$\hat{A} \, (f \, (Z)) = \int f(Z') < \phi \; (Z) \, | \; A \; | \; \phi \; (Z') > d\mu \; (Z') \qquad \text{(IV.5)}$$

En partant de cette définition de $\hat{A}$ nous déduisons que :

$$\hat{A} \; (f \, (Z)) = 0 \;\; \text{si } f(Z) \text{ n'appartient pas à } \beta' \qquad \text{(IV.6)}$$

L'opérateur $\hat{A}$ n'est autre que l'opérateur nul à l'extérieur de B'. Compte-tenu de l'isomorphisme entre B' et l'espace $\mathcal{H}_B$ des états d'un système de bosons nous déduisons que l'image $(A)_B$ de l'opérateur A dans l'espace des quasi-bosons est nulle à l'extérieur de $\mathcal{H}_B$.

Nous remplaçons $|\Phi(Z)>$ par son expression (IV.3).

Nous avons :

$$< \Phi (Z) | A | \Phi (Z') > = \sum_{ij} \mathcal{U}_i (Z) < i | A | j > \overline{\mathcal{U}_j (Z')}$$

et

$$\hat{A}(f(Z)) = \sum_{ij} \mathcal{U}_i (Z) < i | A | j > \int \overline{\mathcal{U}_j (Z')} f(Z') d\mu(Z') \tag{IV.7}$$

$$= \sum_{ij} \mathcal{U}_i (Z) < i | A | j > (\mathcal{U}_j, f)$$

Le premier vecteur (n = 0) de la base de B peut s'écrire :

$$1 = e^{-\overline{Z'}.Z} e^{\overline{Z'}.Z} = \sum_k (-1)^k \frac{Z^k \overline{Z'}^k}{k!} e^{\overline{Z'} Z}$$

$$= [\sum_k (-1)^k \frac{Z^k}{k!} (\frac{\partial}{\partial k})^k] e^{\overline{Z'}.Z} \tag{IV.8}$$

$$= e^{-(Z, dZ)} e^{\overline{Z'}.Z}$$

Et il en résulte compte tenu de (I.34) et (I.35) :

$$(\mathcal{U}_j, f) = (1, \mathcal{U}_j (dZ) f)$$

$$= \int e^{-(Z, dZ)} e^{\overline{Z'}.Z} \mathcal{U}_j (dZ) f(Z') d\mu(Z') \tag{IV.9}$$

$$= e^{-(Z, dZ)} \mathcal{U}_j (dZ) f(Z),$$

finalement :

$$\hat{A} = \sum_{ij} \mathcal{U}_j (Z) < i | A | j > e^{-(Z, dZ)} \mathcal{U}_j (dZ). \tag{IV.10}$$

En utilisant ensuite l'isomorphisme établi précédemment entre B' et l'espace $\mathcal{H}_B$ qui a pour base :

$$| n) = \mathcal{U}_n (B^+) | 0) = \sum_p (-1)^p B^+_{i_1\alpha_1} B^+_{i_2\alpha_2} \dots B^+_{i_n\alpha_n} | 0)$$

(| 0) est le vide nous obtenons le développement de l'opérateur $(A)_B$ image de A dans le sous-espace des quasi-bosons $\mathcal{H}_B$:

$$(A)_B = \sum_{ij} \mathcal{U}_i (B^+) < i | A | j > e^{-(B^+, B)} \mathcal{U}_j (B) \tag{IV.11}$$

L'opérateur de projection $e^{-(B^+, B)}$ opérateur de Schwinger n'est autre que le projecteur sur le vide $| 0) (0 |$ de l'espace des quasi-bosons. De la relation (IV.6) nous déduisons que :

$$(A)_B \ f(B^+) | 0) = 0 \ \text{si} \ f(B^+) | 0) \ \text{n'appartient pas à} \ \mathcal{H}_B \tag{IV.12}$$

Le développement de l'opérateur $(A)_B$, [voir (IV.11)], en fonction des opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons est analogue au développement de Marumori et al (1964) sauf en ce qui concerne l'expression du projecteur $| 0) (0 |$ que pour notre part nous écrivons $| 0) (0 | = \exp [- (B^+, B)]$.

2 - Deuxième type de développement

Nous nous intéressons dans cette partie à la détermination des images des opérateurs trou-particule dont nous pouvons déduire les images des opérateurs 2-trous et 2-particules et par conséquent l'image de l'hamiltonien (voir 3), ainsi qu'à la comparaison entre les développements que nous obtenons et le développement de Beliaev et Zelevinsky (1962).

Nous adoptons comme fonction génératrice des opérateurs trou-particule l'expression (IV.4) et nous en déduisons l'opérateur image $\hat{A}$ de tout opérateur A de $\mathcal{H}_F$ par application de la relation de définition :

$$\hat{A} \langle \phi(Z) | = \langle \phi(Z) | A . \qquad \text{(IV.13)}$$

2.1. Images des opérateurs trou-particule

Compte-tenu de la conservation du nombre de fermions les seuls opérateurs trou-particule qui ont une signification physique sont :

$a_i^+ a_j$, $a_\alpha a_\beta^+$, $a_\alpha^+ a_i$, avec leurs hermitiques adjointes dont les transformés se déduisent de la relation $\widehat{A^+} = \hat{A}^+$.

2.1.1. Après avoir démontré par récurrence la validité de la relation

$$[(A^+)^n , a_i^+] = \sum_\gamma Z_{i\gamma} (A^+)^{n-1} a_\gamma^+ , \qquad \text{(IV.14)}$$

il est aisé de déterminer l'image de l'opérateur $a_i^+ a_j$:

$$(\widehat{a_i^+ a_j})_{II} = \hat{A}_{ij} = \sum_\gamma Z_{i\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{j\gamma}} \qquad \text{(IV.15)}$$

$$(\widehat{a_i^+ a_j})_{II} f(Z) = 0 \quad si\ f(Z) \notin B' .$$

2.1.2. De même nous établissons la relation

$$[a_\alpha , (A^+)^n] = n \sum_j Z_{j\alpha} (A^+)^{n-1} a_j . \qquad \text{(IV.16)}$$

et nous en déduisons l'opérateur image de $a_\alpha a_\beta^+$ à savoir :

$$(\widehat{a_\alpha a_\beta^+})_{II} = \sum_j Z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} . \qquad \text{(IV.17)}$$

$$(a_\alpha a_\beta^+)_{II} f(Z) = 0 \quad \forall f(Z) \notin B' .$$

2.1.3. Enfin un raisonnement par récurrence permet d'établir l'image de l'opérateur $a_\alpha^+ a_i$ soit :

$$(\widehat{a_\alpha^+ a_i})_{II} = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \alpha_1 \sum_\beta A_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} + \alpha_2 \sum_{\beta\gamma} A_{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} + \dots \qquad \text{(IV.18)}$$

$$(a_\alpha^+ a_i)_{II} f(Z) = 0 \quad si\ f(Z) \notin B' ,$$

avec $\qquad A_{\alpha\beta} = \sum_j Z_{j\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}}$

et la convention de notation suivante :

$$\Lambda_{\alpha\beta}\,\Lambda_{\beta\gamma}\,\frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} = \sum_{jk} Z_{j\beta}\;Z_{k\gamma}\;\frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}}\;\frac{\partial}{\partial Z_{k\beta}}\;\frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}}$$

Le calcul des des coefficients $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ s'effectue en exigeant que les éléments de la matrice de l'opérateur $a_\alpha^+ a_i$ soient conservés par la transformation et en remarquant que l'action des éléments d'ordre supérieur à n + 1 dans l'expression $\widehat{a_\alpha^+ a_i} < \phi \mid n > = < \phi \mid a_\alpha^+ a_i \mid n >$ est nulle. Le terme général est défini par la relation de récurrence :

$$n\,\alpha_o - n(n-1)\,\alpha_1 + n(n-1)(n-2)\,\alpha_2 + \ldots\ldots + (-1)^n n\,!\,\alpha_{n-1} = n\sqrt{n}\,, \qquad \text{(IV. 19)}$$

avec $\alpha_o = 1$.

Les développements des opérateurs ainsi obtenus sont rapidement convergents (voir tableau page 86). Des développements précédemment établis dans l'espace de Bargmann (1962) nous déduisons les développements correspondants en quasi-bosons : il suffit pour cela d'utiliser l'isomorphisme établi entre B' et $\mathcal{H}_B$ et de remplacer :

$Z_{i\alpha}$ par $B_{i\alpha}^+$

et $\frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}$ par $B_{i\alpha}$,

ce qui nous donne :

$$(a_i^+ a_j)_{II} = \sum_\gamma B_{i\gamma}^+\;B_{j\gamma}$$

$$(a_\alpha^+ a_\beta^+)_{II} = \sum_j B_{j\alpha}^+\;B_{j\beta}$$

$$(a_\alpha^+ a_i)_{II} = \alpha_o\,K_o + \alpha_1\,K_1 + \alpha_2\,K_2 + \ldots \qquad \text{(IV. 20)}$$

avec

$$K_o = B_{i\alpha}\,,$$

$$K_1 = \sum_{\beta j} B_{j\beta}^+\;B_{j\alpha}\;B_{i\beta}$$

....

2. 2. Comparaison des développements des opérateurs trou-particule avec le développement de Beliaev - Zelevinsky

2. 2. 1. Le développement des opérateurs trou-particule par la méthode de Beliaev - Zelevinsky (1962) s'opère en respectant les relations de commutation suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
&[\,(a_i^+ a_j)_B\,,\,(a_k^+ a_\ell)_B\,] = \delta_{jk}\,(a_i^+ a_\ell)_B - \delta_{\ell i}\,(a_k^+ a_j)_B\,,\\
&[\,(a_\alpha\, a_\beta^+)_B\,,\,(a_\gamma\, a_\delta^+)_B\,] = \delta_{\gamma\beta}\,(b_\alpha^+ b_\beta)_B - \delta_{\gamma\alpha}\,(a_\gamma\, a_\beta^+)_B\\
\text{et}\quad&[\,(a_i^+ a_\alpha)_B\,,\,(a_j^+ a_\beta)_B\,] = [\,(a_\alpha^+ a_i)\,,\,(a_\beta^+ a_j)_B\,] = 0\,,\\
&[\,(a_\alpha^+ a_i)_B\,,\,(a_j^+ a_\beta)_B\,] = \delta_{ij}\,\delta_{\beta\alpha} - \delta_{ij}\,(a_\beta\, a_\alpha^+) - \delta_{\beta\alpha}\,(a_j^+ a_i)_B\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV. 21)}$$

et nous obtenons :

$$(a_i^+ a_j)_B = \sum_\gamma B_{i\gamma}^+\;B_{j\gamma}\,,$$

$$(a_\alpha^+ a_\beta^+)_B = \sum_j B_{j\alpha}^+\;B_{j\beta}$$

et

$$(a^+_\alpha a_i)_B = \sum_{i=0} \alpha'_i K'_i \qquad \text{(IV. 22)}$$

avec

$$K'_1 = B_{i\alpha}\ , \quad K'_2 = \sum_{\alpha_1 \alpha_2 i_1 i_2} B^+_{i_1\alpha_1} B_{i_1\alpha} B^+_{i_2\alpha_2} B_{i_2\alpha_1} B_{i\alpha_2}$$

$$= \sum_{\alpha_1\alpha_2} A_{\alpha\alpha_1} A_{\alpha_1\alpha_2} B_{i\alpha_2}\ ,$$

$$K'_n = \sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} A_{\alpha\alpha_1} A_{\alpha_1\alpha_2} \ldots A_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}} A_{\alpha_{n-1}\alpha_n} B_{i\alpha_n}\ ,$$

$$A_{\beta\alpha} = \sum_i B^+_{i\alpha} B_{i\beta}\ .$$

Les coefficients α_i sont déduits de la formule de récurrence (IV. 19) tandis que les coefficients α'_i *sont donnés par :*

$$\alpha'_1 = -\frac{1}{2}\ , \quad \alpha'_n = -\frac{1}{2} \sum_{m=-1}^{n-1} C_m\, C_{n-m} \quad \text{avec } n \geq 2\ . \qquad \text{(IV. 23)}$$

2. 2. 2. **De l'expression (I. 23) nous *déduisons que les opérateurs* images des trou-particule du deuxième type de développement vérifient les relations de commutation (IV. 21) et** par suite les opérateurs images trou-particule sont identiques dans le deuxième type de développement **et dans le développement de Beliaev et Zelevinsky (1962). Pour passer de la forme du développement de Beliaev et Zelevinsky à la forme du deuxième type de développement, nous** remarquons que les images des opérateurs $a^+_i a_j$ et $a^+_\alpha a^+_\beta$ sont identiques. La comparaison entre **les deux méthodes se réduit donc à montrer l'identité des images de l'opérateur** $a^+_\alpha a_i$. En tenant **compte de la relation** $B_{j\beta} B_{i\alpha} + B_{j\alpha} B_{i\beta} = 0$, **propriété valable uniquement dans l'espace B et** des relations de commutation suivantes :

$$[\, B_{i\alpha}\, ,\, B^+_{i'\alpha'}\,] = \delta_{ii'}\delta_{\alpha\alpha'}\ ,$$

$$[\, B_{i\alpha}\, ,\, B_{i'\alpha'}\,] = [\, B^+_{i\alpha}\, ,\, B^+_{i'\alpha'}\,] = 0\ , \qquad \text{(IV. 24)}$$

il vient

$$K_i = \sum_{j=1}^{i} S^j_i\, K'_i\ , \qquad \text{(IV. 25)}$$

où les coefficients S^j_i **sont solutions du système d'équations linéaires :**

$$-S^n_1 + S^n_2 (j-1) - S^n_3 (j-1)^2 + \ldots + (-1)^n S^n_n (j-1)^{n-1} = 0 \qquad \text{(IV. 26)}$$

avec $\quad j = 2, 3, \ldots, n \quad$ **et** $\quad S^j_j = 1 \;\; \forall\, j.$

Nous avons, d'une part :

$$(a^+_\alpha a_i)_{II} = \sum_i \alpha_i K_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j S^j_i \Big) K'_i\ , \qquad \text{(IV. 27)}$$

d'autre part :

$$(a^+_\alpha a_i)_{II} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i K'_i\ , \qquad \text{(IV. 28)}$$

Nous écrirons donc :

$$\alpha'_i = \sum_{j=i}^{\infty} \alpha_j S^j_i\ . \qquad \text{(IV. 29)}$$

En utilisant les relations de récurrence (IV.19) entre les coefficients α_i et les deux expressions (IV.23) et (IV.29) des coefficients α'_i nous avons calculé jusqu'à l'ordre 8 les valeurs de ces coefficients que nous donnons dans le tableau ci-dessous :

$(\alpha_i)_{II}$	- 0,14142	- 0,04818	- 0,00774	- 0,00118	- 0,00016	- 0,00002	- 0,0	- 0,0
$(\alpha'_i)_{BZ}$	- 0,5	- 0,125	- 0,0625	- 0,03906	- 0,02734	- 0,0205	- 0,01611	- 0,01309
$(\alpha'_i)_{CI}$	- 0,49305	- 0,10231	- 0,02891	- 0,00624	- 0,00086	- 0,00006	- 0,0	- 0,0

Dans l'expression (IV.27) si nous limitons i à n les éléments de matrice de l'opérateur $a^+_\alpha a_i$ sont les mêmes que ceux de l'opérateur $(a^+_\alpha a_i)_{II}$ dans la base $\mathcal{F}_T = (|\phi>, |1t-1p>, \ldots |nt-np>)$ et dans l'image de cette base B_T dans l'espace des quasi-bosons. Dans le calcul des coefficients α'_i à partir de l'expression (IV.29) [voir aussi le tableau ci-dessus] nous remarquons que la convergence de la série (IV.29) est très lente; par conséquent si on limite i à n dans (IV.28) les éléments de matrice de l'opérateur $(a^+_\alpha a_i)_{BZ}$ ne sont pas conservés ce qui fait que l'usage du développement de Beliaev - Zelevinsky (1962) ne donne pas de résultats satisfaisants [voir aussi Sorensen (1970)]. *Par contre le deuxième type de développement s'avère intéressant car* lorsqu'on limite i à n dans l'expression (IV.27) les éléments de matrice de l'opérateur $a^+_\alpha a_i$ sont les mêmes que ceux de l'opérateur $(a^+_\alpha a_i)_{II}$ jusqu'à l'ordre de la troncature c'est-à-dire dans $\mathcal{F}_T$ et dans B_T.

On peut encore choisir une base de $\mathcal{H}_F$ constituée d'un état $|\phi>$ vide de quasi-particules et des états qui s'en déduisent par action des opérateurs $\{a^+_\alpha a^+_\beta\}$ créateurs de quasi-particules.

La fonction génératrice correspondant à cette nouvelle base peut s'écrire :

$$\phi(Z) = \sum_n \frac{A^n}{2^n \, n! \sqrt{(2n+1)!}} |\phi>$$

avec

$$A = \sum_{\alpha\beta} \overline{Z}_{\alpha\beta} \, a^+_\alpha \, a^+_\beta .$$

Le calcul des opérateurs images correspondants à cette nouvelle fonction génératrice s'effectue en appliquant la même méthode que précédemment.

3 - Développement des opérateurs à un corps et à deux corps et développement en quasi-bosons de l'hamiltonien

L'hamiltonien du système étudié a la forme générale :

$$H = \sum_{ij} h_{ij} \, a^+_i \, a_j + \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ij,k\ell} \, a^+_i \, a^+_j \, a_\ell \, a_k \qquad \text{(IV.30)}$$

où h_{ij} désignent les éléments de matrice d'un opérateur à un corps h et $V_{ij,k\ell}$ désignent les éléments de matrice anti-symétrisés de l'interaction V à deux corps.

Si nous choisissons pour nouveau vide de référence un état $|\phi_0>$ d'énergie moyenne

E_o, ce nouveau vide définit des quasi-particules dont certaines sont des trous repérés par des *indices grecs : α, β, γ ... Nous noterons respectivement a^+ et b^+ les opérateurs de création* d'états "particule" et d'états "trou". L'hamiltonien s'écrit alors :

$$H = E_o + H_{11} + (H_{20} + H_{20}^+) + H_{22} + (H_{40} + H_{40}^+) + H'_{22} + (H_{31} + H_{31}^+) \qquad \text{(IV.31)}$$

avec

$$E_o = \langle \Phi_o | H | \Phi_o \rangle = \sum_\alpha h_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta,\alpha\beta}$$

$$H_{11} = \sum_{ij} (h_{ij} + \sum_\alpha V_{i\alpha,j\alpha})\, a_i^+ a_j - \sum_{\alpha\beta} (h_{\alpha\beta} + \sum_\gamma V_{\alpha\gamma\beta\gamma})\, b_\alpha^+ b_\beta$$

$$H_{20} = \sum_{i\alpha} (h_{i\alpha} + \sum_\beta V_{i\beta,\alpha\beta})\, a_i^+ b_\alpha^+$$

$$H_{22} = \sum_{i\alpha\gamma\beta} V_{i\beta,\alpha j}\, a_i^+ b_\alpha^+ b_\beta a_j$$

$$H_{40} = \frac{1}{4} \sum_{i\alpha\gamma\beta} V_{ij,\alpha\beta}\, a_i^+ b_\alpha^+ a_j^+ b_\beta^+$$

$$H'_{22} = \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ij,k\ell}\, a_i^+ a_j^+ a_\ell a_k + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\gamma\delta}\, b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha b_\beta$$

$$H_{31} = \frac{1}{2} \sum_{ijk\alpha} V_{ij,\alpha k}\, a_i^+ b_\alpha^+ a_j^+ a_k + \frac{1}{2} \sum_{i\alpha,\beta\gamma} V_{i\alpha,\beta\gamma}\, a_i^+ b_\gamma^+ b_\beta^+ b_\alpha$$

Dans le cas où l'état de référence $|\Phi_o\rangle$ choisi est un état de Hartree-Fock le terme H_{20} est nul.

Nous avons donné précédemment les développements en opérateurs de quasi-bosons des opérateurs de création et d'annihilation des paires "trou-particule". Il nous reste à calculer les opérateurs qui figurent dans les expressions des termes d'interaction à deux corps, H_{22}, H_{40} ou H_{40}^+, H'_{22}, H_{31} ou H_{31}^+. Ces opérateurs peuvent évidemment s'écrire sous la forme de produits de deux développements d'opérateurs à deux corps cependant les calculs directs qui suivent permettent d'obtenir des développements plus convergents. Dans ce qui suit nous nous sommes toujours limités au calcul des termes d'ordre inférieur ou égal à 4.

3.1. Image de l'opérateur $a_i^+ b_\alpha^+ b_\beta a_j$

$$\langle \Phi(Z) | a_i^+ b_\alpha^+ b_\beta a_j = \sum_k \langle \Phi | \frac{(k \sum_\alpha b_\alpha A^{k-1} Z_{i\alpha} + a_i^+ A^k)}{k!\sqrt{k!}}\, b_\alpha^+ b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \langle \Phi | \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \sum_\gamma Z_{i\gamma}\, b_\gamma A^{k-1} b_\alpha^+ b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \langle \Phi | \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \sum_\gamma Z_{i\gamma}\, b_\gamma \left[-(k-1) \sum_m Z_{m\alpha}\, a_m A^{k-2} + b_\alpha^+ A^{k-1} \right] b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \left[\langle \Phi | \frac{-k(k-1)}{k!\sqrt{k!}} \sum_{m\gamma} Z_{i\gamma}\, b_\gamma Z_{m\gamma}\, a_m A^{k-2} + \langle \Phi | \frac{k}{k!\sqrt{k!}} Z_{i\alpha} A^{k-1} \right] b_\beta a_j$$

$$= \sum_k \sum_{m\gamma} Z_{i\gamma} Z_{m\alpha} < \Phi \Big| \frac{-k(k-1)}{k!\,\sqrt{k!}} \; A^{k-2} \, b_\gamma a_m b_\beta a_j + Z_{i\alpha} < \Phi \Big| \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \; A^{k-1} b_\beta a_j$$

$$= \Big[Z_{i\alpha} \; \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \; - \sum_{m\gamma} Z_{i\gamma} \, Z_{m\alpha} \; \frac{\partial}{\partial Z_{m\gamma}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \; \Big] < \Phi(Z) \Big|$$

En utilisant l'isomorphisme établi précédemment entre l'espace de Bargmann β et l'espace $\mathcal{H}_B$ des quasi-bosons, il suffit de remplacer dans les développements $Z_{i\alpha}$ par $B^+_{i\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}$ par $B_{i\alpha}$ pour obtenir le développement de l'opérateur considéré en fonction des opérateurs de création $B^+_{i\alpha}$ de quasi-bosons. Nous obtenons ainsi :

$$(a_i^+ \, b_\alpha^+ \, b_\beta \, a_j)_B \; = \; B^+_{i\alpha} \; B_{j\beta} - \sum_{m\gamma} \; B^+_{i\gamma} \; B^+_{m\alpha} \; B_{m\gamma} \, B_{j\beta} + \dots \qquad \text{(IV.32)}$$

3.2. Image de l'opérateur $b_\beta \, a_j \, b_\alpha \, a_i$

$$< \Phi(Z) \Big| \; b_\beta \; a_j \, b_\alpha \; a_i \; = \; \sum_\alpha < \; \Phi \Big| \frac{A^k}{k!\,\sqrt{k!}} \; b_\beta \, a_j \, b_\alpha \, a_i$$

$$= \Big[\alpha_o \, \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} \; + \alpha_1 \sum_\gamma A_{\beta\gamma} \, \frac{\partial}{\partial Z_{j\gamma}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \dots \; \Big] < \Phi(Z) \Big|$$

et par suite :

$$(b_\beta a_j b_\alpha a_i)_B \; = \; \alpha_1 \; B_{j\beta} \; B_{i\alpha} \; + \; \alpha_2 \sum_{k\gamma} \; B^+_{k\gamma} \; B_{k\beta} \; B_{j\gamma} \; B_{i\alpha} + \dots \qquad \text{(IV.33)}$$

avec $\alpha_1 = \sqrt{2}$ $\quad \alpha_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6} = -1{,}035$

Le troisième terme admet pour coefficient

$$\alpha_3 \; = \; \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{6})}{2} \; \# \; - 0{,}01 \quad ,$$

il est donc négligeable.

3.3. Image de l'opérateur $a^+_k \, a_j \, b_\alpha \, a_i$

$$< \Phi(Z) \mid a^+_k \, a_j \, b_\alpha a_i \; = \; \sum_n \; < \Phi \mid \; \frac{A^n}{n!\,\sqrt{n!}} \; a^+_k \, a_j \, b_\alpha \, a_i$$

$$= \sum_n < \Phi \mid \; \frac{n}{n!\,\sqrt{n!}} \; A^{n-1} \; Z_{k\beta} \, b_\beta \, a_j \, b_\alpha \, a_i$$

$$= (\sqrt{2} \; \sum_\beta \; Z_{k\beta} \; \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}} + \dots \;) < \Phi(Z) \mid \; ,$$

et par suite :

$$(a^+_k \, a_j \, b_\alpha \, a_i)_B \; = \sqrt{2} \; \sum_\beta \; B^+_{k\beta} \; B_{j\beta} \; B_{i\alpha} \; + \; \dots \qquad \text{(IV.34)}$$

3.4. Image de l'opérateur $a_i^+ \; a_j^+ \; a_\ell \; a_k$

$$< \phi(Z) | a_i^+ \; a_j^+ \; a_\ell \, a_k = \sum_k < \phi | \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \sum_\alpha Z_{i\alpha} \; b_\alpha \; A^{k-1} \; a_j^+ \; a_\ell \, a_k$$

$$= \sum_k < \phi | \frac{k(k-1)}{k!\sqrt{k!}} \sum_{\alpha\beta} Z_{i\alpha} \; Z_{j\beta} \; A^{k-2} b_\alpha \, b_\beta \, a_\ell \, a_k$$

$$= - \sum_{\alpha\beta} Z_{i\alpha} \; Z_{j\beta} \; \frac{\partial}{\partial Z_{\ell\alpha}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{k\beta}} < \phi \, (Z) |$$

et donc :

$$(a_i^+ \; a_j^+ \; a_\ell \; a_k)_B = - \sum_{\alpha\beta} B_{i\alpha}^+ \; B_{j\beta}^+ \; B_{\ell\alpha} \; B_{k\beta} + \ldots\ldots \qquad \text{(IV.35)}$$

3.5. Image de l'opérateur $b_\delta^+ \; b_\gamma^+ \; b_\alpha \; b_\beta$

$$< \phi(z) | b_\delta^+ \; b_\gamma^+ \, b_\alpha \, b_\beta = \sum_k < \phi | \frac{A^k}{k!\sqrt{k!}} \; b_\delta^+ \; b_\gamma^+ \, b_\alpha \, b_\beta$$

$$= \sum_k < \phi | \frac{k(k-1)}{k!\sqrt{k!}} \sum_{mn} Z_{n\delta} \; Z_{n\gamma} \; a_m \; a_n \; A^{k-1} \; b_\alpha \; b_\beta$$

$$= - \sum_{mn} Z_{m\delta} \, Z_{n\gamma} \; \frac{\partial}{\partial Z_{m\alpha}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{n\beta}} < \phi \, (Z) |$$

et donc :

$$(b_\delta^+ b_\gamma^+ b_\alpha \; b_\beta)_B = - \sum_{mn} B_{m\delta}^+ \; B_{n\gamma} \; B_{m\alpha} \; B_{n\beta} + \ldots \qquad \text{(IV.36)}$$

3.6. Image de l'opérateur $b_\alpha^+ \; b_\beta \; b_\gamma \; a_i$

$$<\phi(Z)| b_\alpha^+ b_\beta b_\gamma a_i = \sum_\gamma -< \phi | \frac{k}{k!\sqrt{k!}} \sum_m Z_{m\alpha} \; A^{k-1} \; a_m b_\beta b_\gamma \; a_i$$

$$= (\sum_m \sqrt{2} \;\; Z_{m\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{m\beta}} \; \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}} + \ldots) < \phi \, (Z) |$$

et par suite :

$$(b_\alpha^+ b_\beta b_\gamma a_i)_B = \sqrt{2} \sum_m B_{m\alpha}^+ \; B_{m\beta} \; B_{i\gamma} \qquad \text{(IV.37)}$$

3.7. Image de l'Hamiltonien

Il suffit maintenant de rassembler les résultats partiels précédents et de porter les développements obtenus dans l'expression (IV.31) pour obtenir le développement de l'hamiltonien jusqu'au 4ème ordre :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_o = \; & E_o + \sum_{i\alpha} (e_i - e_\alpha)\, B^+_{i\alpha} B_{i\alpha} + \sum_{i\alpha j\beta} V_{i\beta,\alpha j}\, B^+_{i\alpha} B_{j\beta} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{ij\alpha\beta} \left[V_{ij,\alpha\beta}\, B^+_{i\alpha} B^+_{j\beta} + h\,c \right] \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{ijk\alpha\beta} \left[V_{ij,\alpha k}\, B^+_{i\alpha} B^+_{j\beta} B_{k\beta} + h\,c \right] \\
& + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{lm\alpha\beta\gamma} \left[V_{l\alpha,\beta\gamma}\, B^+_{l\gamma} B^+_{m\beta} B_{m\alpha} + h\,c \right] \\
& - \sum_{ljm\alpha\beta\gamma} V_{i\beta,\alpha\gamma}\, B^+_{i\gamma} B^+_{m\alpha} B_{m\gamma} B_{j\beta} - \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell\alpha\beta} V_{ij,k\ell}\, B^+_{i\alpha} B^+_{j\beta} B^+_{\ell\alpha} B_{k\beta} \\
& - \frac{1}{4} \sum_{mn\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\gamma\delta}\, B^+_{m\delta} B_{n\gamma} B_{m\alpha} B_{n\beta} \\
& + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sum_{ijk\ell\alpha\beta\gamma} \left[V_{ij,\alpha\beta}\, B^+_{i\alpha} B^+_{j\gamma} B^+_{k\beta} B_{k\gamma} + h\,c \right]
\end{aligned}
\qquad \text{(IV. 38)}
$$

Ce développement limité aux termes du second ordre est différent de l'hamiltonien de la R. P. A. Dans ce développement nous avons conservation des éléments de la matrice de H pour $|\, n>$, $n = 0, 1, 2$ et par conséquent ce développement fournit des équations du mouvement du système étudié différentes de celles de la R. P. A. bien que d'apparence formelle identique.

4. - Application au modèle de Lipkin

La méthode qui vient d'être développée sera maintenant appliquée au modèle de Lipkin (1965) afin de comparer notre méthode à la méthode de Beliaev et Zelevinsky (1962) et à la méthode de Marumori et al. (1964).

Puisque ce modèle a déjà été amplement commenté par ses inventeurs nous renvoyons le lecteur aux articles originaux [Pang, Klein et Dreizler (1968); Lipkin, Meshkov et Lick (1965), Agassi, Lipkin et Meshkov (1966)].

L'hamiltonien du système étudié s'écrit :

$$H = \epsilon\; J_o + \frac{1}{2} V (J_+^2 + J_-^2)$$

avec :

$$[J_+ \,,\, J_-] = 2 J_o \qquad [J_o \,,\, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad \text{(IV. 39)}$$

la base $|\, n>$ de la représentation adoptée est définie par :

$$
\begin{aligned}
J_o \,|\, n> &= (n - J)\,|\, n> , \\
J_+ \,|\, n> &= [\,(2J - n)(n+1)\,]^{\frac{1}{2}}\; |\, n+1> , \\
J_- \,|\, n> &= [\,(2J - n + 1)\, n\,]^{\frac{1}{2}}\; |\, n-1>
\end{aligned}
\qquad \text{(IV. 40)}
$$

et

$$J_+^{N+1} | n > = 0 \quad \forall\, n \qquad N = 2J,$$

la fonction génératrice s'écrit :

$$| \phi (Z) > = \sum_{i=0}^{N} \frac{\overline{Z^i}}{\sqrt{i\,!}} \; | i > \tag{IV.41}$$

4.1. Image de J_o

$$\hat{J}_o < \phi(Z) | = < \phi(Z) | J_o = \sum_{k=0}^{N} \frac{Z^k}{k\,!} < k | J_o = (Z \frac{\partial}{\partial Z} - J) \sum_{k=0}^{N} \frac{Z^k}{\sqrt{k!}} < k |$$

$$= (Z \frac{\partial}{\partial Z} - J) < \phi (Z) |$$

et par suite :

$$\hat{J}_o = Z \frac{\partial}{\partial Z} - J \tag{IV.42}$$

4.2. Image de J_+

$$\hat{J}_+ < \phi (Z) | = \sum_{n=0}^{N} \frac{Z^n}{\sqrt{n!}} < n | J_+ = \sum_{n=1}^{N} \frac{Z^k}{\sqrt{k\,!}} < n-1 | \Big[(2J - n + 1)\, n \Big]^{1/2}$$

On remarque que J_+ doit être développé sous la forme :

$$\hat{J}_+ = a_o Z + a_1 Z^2 \frac{\partial}{\partial Z} + a_2 Z^3 (\frac{\partial}{\partial Z})^2 + \ldots\ldots$$

$$\hat{J}_+ < \phi (Z) | = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{\infty} a_j Z^{j+1} (\frac{\partial}{\partial Z})^j \frac{Z^i}{\sqrt{i\,!}} < i |$$

$$= \sum_{ij} a_j \frac{(i-1) \quad Z^i}{(i-1)\,!\,(i-j-1)!} < i - 1 |$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{Z^i}{\sqrt{i\,!}} \Big[(2J - i + 1)\, i \Big]^{1/2} < i - 1 |$$

Les vecteurs i étant linéairement indépendants nous en déduisons que :

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{(n-1)\,!}{(n-j-1)!} = \Big[(2J - n + 1) \Big]^{1/2} \tag{IV.43}$$

Le calcul des coefficients a_j se fait par récurrence.

4.3. Image de J_+^2

En opérant comme précédemment (calcul de J_+) nous obtenons la relation suivante :

$$\sum_{j=0}^{n-2} \beta_j \frac{(n-2)\,!}{(n-j-2)\,!} = \Big[(2J - n + 2) \Big]^{1/2} \tag{IV.44}$$

et

$$\hat{J}_+^2 = \beta_o Z^2 + \beta_1 Z^3 \frac{\partial}{\partial Z} + \beta_2 Z^4 (\frac{\partial}{\partial Z})^2 + \ldots,$$

Des relations (IV.43) et (IV.44) nous déduisons les premières valeurs de α_i et β_i :

$$\alpha_0 = \sqrt{2J}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{2J-1} - \sqrt{2J}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2J-2} - \sqrt{2J-1} + \frac{1}{2}\sqrt{2J}$$

$$\beta_0 = \sqrt{2J(2J-1)}$$

$$\beta_1 = \sqrt{(2J-1)(2J-2)} - \sqrt{2J(2J-1)}$$

$$\beta_2 \quad \frac{1}{2}\sqrt{(2J-2)(2J-3)} - \sqrt{(2J-1)(2J-2)} + \frac{1}{2}\sqrt{2J(2J-1)}$$

Il est important de remarquer que les transformés des opérateurs J_0, J_+, ... 4 sont des opérateurs nuls à l'extérieur du sous-espace $[1, \ldots Z^n]$.

L'expression de l'hamiltonien pour l'ordre quatre est donc :

$$\hat{H} = Z\frac{\partial}{\partial Z} - J + \frac{1}{2} V[\beta_0 Z^2 + \beta_1 Z^3\frac{\partial}{\partial Z} + \beta_0 (\frac{\partial}{\partial Z})^2 + \beta_1 Z(\frac{\partial}{\partial Z})^3] . \qquad \text{(IV.45)}$$

Dans l'espace des quasi-bosons nous aurons :

$$H_B = B^+ B + \frac{1}{2} V(\beta B^{+2} + \beta_1 B^{+2} B + \beta_0 B^2 + \beta_1 B^+ B^3) - J . \qquad \text{(IV.46)}$$

Notre méthode permet donc d'obtenir rapidement la forme condensée des coefficients du développement. L'étude qui a été faite par Pang et al. (1968) de ce modèle par la méthode des quasi-bosons montre que l'approximation ou bien la limitation à l'ordre quatre *sont très satisfaisantes*.

5 - Généralisation de la méthode de la R.P.A.

Nous allons déduire de la transformation de l'hamiltonien dans l'espace des quasi-bosons une généralisation de la méthode de Hartree-Fock et de la méthode de la R.P.A.

Nous remarquons que l'image de l'hamiltonien H dans l'espace des quasi-bosons peut être déterminée sans que la fonction d'onde $|\phi\rangle$ soit la fonction d'onde de Hartree-Fock, nous supposons que $|\phi\rangle$ est un déterminant de Slater construit à partir des états à une particule $|\lambda\rangle$ dont les développements sur une base choisie restent à déterminer :

$$|\lambda\rangle = \sum_j C_j^\lambda |j\rangle .$$

L'image de l'hamiltonien H dans l'espace des quasi-bosons s'obtient à l'aide des développement en quasi-bosons des opérateurs à un corps et à deux corps. Nous avons donc :

$$(H)_B = \sum_\alpha h_{\alpha\alpha} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta,\alpha\beta} + \hat{H}_{11} + (\hat{H}_{20} + \hat{H}_{20}^+) + \hat{H}_{22}$$
$$+ (\hat{H}_{40} + \hat{H}_{40}^+) + \hat{H}_{22} + (\hat{H}_{31} + \hat{H}_{31}^+) . \qquad \text{(IV.47)}$$

Nous considérons une transformation de Bogoliubov dans l'espace des quasi-bosons de la forme :

$$A_{m\alpha} = \sum_r X^r_{m\alpha} S^+_r + \mathcal{Y}^r_{m\alpha} S_r ,$$

$$A^+_{m\alpha} = \sum_r X^{*r}_{m\alpha} S_r + \mathcal{Y}^{*r}_{m\alpha} S^+_r . \qquad \text{(IV.48)}$$

S_r et S^+_r sont des opérateurs de création et d'annihilation des bosons :

$$[S_r , S_{r'}] = [S^+_r , S^+_{r'}] = 0 ,$$

$$[S_r , S^+_{r'}] = \delta_{rr'}$$

et

$$S_r \mid 0)' = 0 . \qquad \text{(IV.49)}$$

La recherche de l'état fondamental $\mid 0)'$ se fait en minimisant $E(C, X, Y) = '(0 \mid H \mid 0)'$. Les contraintes dont nous devons tenir compte sont :

1 . La normalisation des états à une particule

$$N(\lambda_i , \lambda_j) = \langle \lambda_i \mid \lambda_j \rangle = \sum_k C^{\lambda_i *}_k C^{\lambda_j}_k = \delta_{\lambda_i \lambda_j} \qquad \text{(IV.50)}$$

2. La condition d'orthogonalité

$$0(m_i , m'_i) = \sum_r \mathcal{Y}^r_{m\alpha} \mathcal{Y}^{*r}_{m'\alpha'} - X^r_{m\alpha} X^{*r}_{m'\alpha'} = \delta_{mm'} \delta_{\alpha\alpha'} \qquad \text{(IV.51)}$$

3. La restriction à l'espace physique

$$R(m\alpha, m'\alpha') = \sum_r \left[[\mathcal{Y}^r_{m\alpha} X^r_{m'\alpha'} - X^r_{m\alpha} \mathcal{Y}^r_{m'\alpha'}] + [\mathcal{Y}^r_{m\alpha'} X^r_{m'\alpha} - X^r_{m\alpha'} \mathcal{Y}^r_{m\alpha}] \right]$$
$$= 0 \qquad \text{(IV.52)}$$

Faute d'une généralisation du théorème de Bloch et Messiah (1962) au système des bosons, nous sommes obligés de rendre symétrique l'hamiltonien $(H)_B$ en fonction de $A_{m'i'}$ et de A^+_{mi} c'est-à-dire que nous devons remplacer $A^+_{mi} A_{m'i'}$ par $\frac{1}{2}[A^+_{m\alpha_i} A_{m'i'} + A_{m'i'} A^+_{mi} - \delta_{mm'} \delta_{\alpha\alpha'}]$ pour pouvoir aboutir par la méthode variationnelle aux équations de la R. P. A.

Posons :

$$F(C, X, \mathcal{Y}) = E(C, X, \mathcal{Y}) - e_{\lambda_i \lambda_j} N(\lambda_i \lambda_j) - \mu_{mi, m'i'} \theta(mi, m'i')$$
$$+ \lambda_{m\alpha, m'\alpha'} R(m\alpha, m'\alpha'), \qquad \text{(IV.53)}$$

la minimisation nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial C^{\lambda *}_i} (F(C, X, \mathcal{Y})) = 0, \qquad \text{(IV.54)}$$

$$\frac{\partial}{\partial X^*_{m\alpha}} (F(C, X, \mathcal{Y})) = 0 , \qquad \text{(IV.55)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{Y}^*_{m\alpha}} (F(C, X, \mathcal{Y})) = 0 \cdot \qquad \text{(IV.56)}$$

La première équation représente une généralisation des équations de Hartree-Fock.

La deuxième et troisième relations constituent un système d'équations qui est une généralisation de la R. P. A.

En posant $X_{mi} = \mathcal{Y}_{mi} = 0$ nous obtenons l'équation de Hartree-Fock. Mais si nous négligeons les termes anharmoniques dans le système [(IV.55), (IV.56)] nous obtenons des équations qui ressemblent aux équations de la R.P.A. Cela est dû à la conservation des éléments de matrice H par la transformation $\mathcal{F} - \mathcal{H}_B$.

Parmi les méthodes proposées [Faesler et Plastino (1969); Mihaïlovic et Rosina (1969); Providencia (1968); Dreizler, Klein, Kreys et Dreiss (1971)], la méthode précédente qui tient compte des corrélations dans les équations de Hartree-Fock nous semble être la plus simple, la limitation au quatrième ordre du développement de l'hamiltonien étant une bonne approximation.

6 - <u>Conclusion</u>

La méthode de la fonction génératrice exposée au chapitre I permet la transposition de tout problème de mécanique quantique posé dans l'espace $\mathcal{H}_F$ ou $\mathcal{H}_B$ des systèmes de fermions ou de bosons en un autre problème à traiter dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ que l'on choisit. En appliquant cette méthode dans le cas où l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ est l'espace de Bargmann il a été facile d'exprimer rigoureusement tout opérateur de $\mathcal{H}_F$ notamment l'hamiltonien, en un développement d'opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons. Les développements ainsi obtenus sont rigoureux et semblables à ceux de Beliaev et Zelevinsky et de Marumori. Ils en diffèrent d'une part par l'ordre des termes, en ce qui concerne les développements de Beliaev et Zelevinsky et d'autre part par l'absence de termes excédentaires dont l'action est nulle dans le sous-espace dans lequel ils agissent. Les développements ainsi obtenus sont donc plus simples et plus rapidement convergents.

APPENDICE

La méthode dite des coordonnées génératrices, cherche à minimiser la fonctionnelle :

$$<\Psi | H | \Psi>$$

en adoptant pour fonction d'essai :

$$|\Psi> = \int f(Z) \; |\phi(Z)> dZ$$

Z désignant ici l'ensemble des paramètres complexes $Z_{i\alpha}$ qui définissent la fonction d'onde de Thouless :

$$|\phi(Z)> = \exp\left[\sum_{i\alpha} \bar{Z}_{i\alpha} \; a_i^+ a_\alpha\right] |\phi>$$

$|\phi>$ désignant un déterminant de Slater, solution des équations de Hartree-Fock.

La minimisation de la fonctionnelle conduit à l'équation intégrale :

$$\int [<\phi(Z) | H | \phi(Z')> - E <\phi(Z) | \phi(Z')>] \; f(Z') \; dZ' = 0$$

La transformation complète et rigoureuse de l'équation intégrale ci-dessus en une équation différentielle en Z, $\partial/\partial Z$ est réalisée en utilisant les résultats préliminaires suivants :

(a) $$<\phi(Z) | \phi(Z')> = \det(\Lambda_{\alpha\beta})$$

avec :

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i=N+1}^{\infty} Z_{i\alpha} \; \bar{Z}'_{i\beta}$$

(b) $$<\phi | a_\beta^+ a_i \; \exp\left[\sum_{m\alpha} Z_{m\alpha} \; a_\alpha^+ a_m\right] | \phi(Z')> = \frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} <\phi(Z') | \phi(Z')>$$

Avec la notation $R = \exp\left[\sum_{m\alpha} Z_{m\alpha} \; a_\alpha^+ \; a_m\right]$, on établit les relations suivantes :

$$R\, a_\alpha^+ = a_\alpha^+ \, R$$

$$R\, a_\alpha = \left(a_\alpha - \sum_{j=N+1}^{\infty} Z_{j\alpha} \; a_j\right) R$$

$$R\, a_i = a_i \, R$$

$$R\, a_i^+ = \left(a_i^+ + \sum_{\alpha=1}^{N} Z_{i\alpha} \; a_\alpha^+\right) R$$

d'où l'on déduit :

$$<\phi | a_\beta^+ a_i R | \phi(Z')> = \frac{\partial}{\partial Z_{i\beta}} <\phi(Z) | \phi(Z')>$$

$$<\phi | R\, a_p^+ a_q | \phi(Z')> = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} Z_{p\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{q\alpha}}\right) <\phi(Z) | \phi(Z')>$$

$$<\phi | R\, a_\beta a_\gamma^+ \; \phi(Z')> = \left(\sum_{i=N+1}^{\alpha_1} Z_{i\beta} \; \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}}\right) \quad <\phi(Z \; | \phi(Z')>$$

$$< \phi \mid R\, a_n^+ a_\alpha \ \Phi(Z') > \; = \; (Z_{n\alpha} - \sum_{j,\beta} Z_{n\beta} Z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}}) < \Phi(Z') \mid \Phi(Z') >$$

En utilisant les résultats partiels précédents, on obtient le développement suivant de l'hamiltonien (31) :

$$H(Z, \frac{\partial}{\partial Z}) = \sum_{i\alpha} (e_i - e_\alpha) Z_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}$$

$$+ \sum_{i\alpha\, j\beta} V_{i\beta,\alpha j} \, [Z_{i\alpha} - \sum_{n\gamma} Z_{i\gamma} Z_{n\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{n\gamma}}] \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ij,\alpha\beta} V_{ij,\alpha\beta} [Z_{i\alpha} - \sum_{n\gamma} Z_{i\gamma} Z_{n\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{n\gamma}}] [Z_{j\beta} - \sum_{m\gamma} Z_{j\gamma} Z_{m\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{m\gamma}}]$$

$$+ V^*_{ij,\alpha\beta} [\frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}] + \frac{1}{4} \sum_{ijk\ell} V_{ij,k\ell} \sum_{\alpha\beta} Z_{i\alpha} Z_{j\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{k\alpha}} \frac{\partial}{\partial Z_{\ell\beta}}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\gamma\delta} \sum_{ij} Z_{j\delta} Z_{i\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}} \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{ij,\alpha k} [V_{ij,\alpha k} (Z_{i\alpha} - \sum_{n\beta} Z_{n\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{m\beta}}) (\sum_{\gamma} Z_{j\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{k\gamma}})$$

$$+ V^*_{ij,\alpha k} (\sum_{\beta} Z_{k\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{j\beta}}) \frac{\partial}{\partial Z_{i\alpha}}]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i\alpha\beta\gamma} [V_{i\alpha,\beta\gamma} (Z_{i\gamma} - \sum_{n\delta} Z_{i\delta} Z_{n\gamma} \frac{\partial}{\partial Z_{n\delta}}) (\sum_{j} Z_{j\beta} \frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}})$$

$$+ V^*_{i\alpha,\beta\gamma} (\sum_{j} Z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial Z_{j\alpha}}) \frac{\partial}{\partial Z_{i\gamma}}]$$

REFERENCES

Bargmann V 1961 Com. Pure Appl. Math 14 187

Bargmann V 1962 Rev. of Mod. Phys. 34 4

Beliaev S. T. et Zelevinsky V G 1962 Nucl. Phys. 39 582

Beltrametti E G and Luzatto G 1967 Nuovo Cimento 1 167

Bloch C et Messiah A 1962 Nucl. Phys. 39 65

Dreizler R M Klein A Krejs F R et Dreiss G 1971 Nucl. Phys. 166 624

Faessler A et Plastino A 1969 Z Phys. 220 88

Hill D L et Wheeler J A 1953 89 1102

Jancovici B et Schiff D H 1964 Nucl. Phys. 58 678

Lipkin H J Meshkov N et Lick A J 1965 Nucl. Phys 62 188
D. Agassi, Lipkin H J et Meshkov N 1966 Nucl. Phys. 86 321

Marumori T Yamamura M et Tokunaga A 1964 Prog. Theor. Phys. 31 726

Mihailovic M V et Rosina M 1969 Nucl. Phys. 130 386

Pang S C Klein A et Dreizler R M 1965 Ann. of Phys. 49 477

Peierls R E et Yoccoz J 1957 Proc. Phys. Soc. A 70 381

Peierls R E et Thouless D J 1962 Nucl. Phys. 38 154

Providencia J D 1968 Nucl. Phys. 108 589

Roman P 1969 Introduction to Quantum Field Theory Wiley

Schwinger J 1952 " On Angular Momentum" U. S. A. E. C. Nyo - 3071

Thouless D J 1960 Nucl. Phys. 21 225

Wong C W 1970 Nucl. Phys. 147 545

Wong C W 1970 Nucl. Phys. A 147 563

CONCLUSION GENERALE

En prenant pour point de départ la méthode de Hill et Wheeler (1953) nous avons construit un formalisme appelé méthode de la fonction génératrice qui permet de simplifier les calculs qui s'introduisent dans l'étude des mouvements collectifs des noyaux. Cette méthode repose sur l'idée de base suivante : on essaie de transposer le problème quantique posé dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ en un problème à traiter dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ que l'on a choisi. L'essentiel est de définir dans $\mathcal{F}$ une base orthonormée $P_m(Z)$ correspondant au choix d'une métrique $u(Z)$, la variable Z pouvant être réelle ou complexe

$$(P_m, P_n) = \int \overline{P_m(Z)} \; P_n(Z)\, u(Z)\, dZ = \delta_{mm'} \; .$$

Cette base $\{P_m\}$ permet d'étudier une correspondance biunivoque avec une base $\{|m>\}$ de $\mathcal{H}$ et de définir une fonction :

$$|\Phi(Z)> = \sum_m \overline{P_m(Z)}\, |m> \; ,$$

génératrice de tout vecteur $|\Psi> \in \mathcal{H}$.

Tout état $|\Psi> \in \mathcal{H}$ admet ainsi une image $f(Z)$ et tout vecteur A agissant dans $\mathcal{H}$ admet un opérateur image $\hat{A}$ agissant dans $\mathcal{F}$ tels que

$$\hat{A}\, f(Z) = \int <\Phi(Z)|\, A\, |\Phi(Z')>\, f(Z')\, u(Z')\, dZ' \, .$$

La signification physique des paramètres Z ainsi introduits dépend évidemment du problème étudié.

En appliquant notre méthode dans le cas où $\mathcal{H}$ est l'espace de l'oscillateur harmonique à trois dimensions nous avons retrouvé les résultats essentiels d'une façon très simple, à savoir la méthode de détermination des éléments de passage d'une représentation à une autre, qui s'avère très utile dans les calculs en physique nucléaire ainsi que la construction d'une nouvelle fonction génératrice de la base sphérique et d'une nouvelle fonction génératrice de la base de la représentation couplée des harmoniques sphériques qui nous a permis d'entreprendre pour la première fois à notre connaissance, le développement sur la base produit de deux harmoniques sphériques de la fonction $\mathcal{Y}_{\ell m}(\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2)$ généralisation du tenseur sphérique bien connu T (1 m).

La fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur harmonique précédemment construite est utilisée pour calculer par des opérations mathématiques élémentaires les coefficients de Talmi et les coefficients de Moshinsky et Smirnov en suivant la méthode de travail de Bargmann (1962) et Schwinger (1965).

Le développement de la fonction génératrice des coefficients de Talmi s'impose naturellement dans la base de la représentation symétrique (Kumar 1966 b) et nous donne une expression des coefficients de Talmi qui est nouvelle, qui possède une symétrie équivalente à celle qu'on observe dans l'expression donnée par Kumar (1966 a) et ne fait pas intervenir les symboles 9 - j. L'expression des coefficients de Talmi peut être facilement programmée, elle permet un calcul rapide des coefficients en raison des symétries qui apparaissent du fait que beaucoup de coefficients sont nuls et que les indices de sommation ont un domaine de variation limité. De cette nouvelle expression des coefficients de Talmi nous déduisons naturellement le calcul des coefficients dans des cas particuliers, retrouvant ainsi certains résultats de la littérature et en obtenant de nouveaux. Dans le cas où deux nombres quantiques radiaux sont nuls et où un nombre quantique magnétique est minimal, nous obtenons une expression simple des coefficients de Talmi qui ne contient qu'un seul indice de sommation et qui nous parait particulièrement intéressante non seulement par elle-même mais surtout parce qu'elle permet la déduction par récurrence de tous les autres coefficients.

De la fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov nous déduisons une expression nouvelle de ces coefficients où n'apparaissent que des symboles 3 - jm et des coefficients de la représentation symétrique (Kumar 1966 b) calculés à partir des symboles 3 - jm. Tous ces éléments possèdent de remarquables propriétés de symétrie, de plus un grand nombre d'entre eux s'avèrent nuls ce qui diminue considérablement le nombre des opérations de calcul numérique. Notre expression est particulièrement simple en comparaison de l'expression proposée par Raynal (1976) [voir (12) et (61)] et de l'expression récemment proposée par Dobeš (1977) [voir (6)] et elle se prête à un calcul numérique rapide des coefficients de Moshinsky et Smirnov. Dans le cas où deux nombres quantiques principaux sont nuls nous retrouvons, par simple remplacement des indices par leur valeur, l'expression donnée par Efros (1973) sans être obligé de faire appel aux propriétés des symboles 9 - j. Cet exemple est significatif car il illustre l'intérêt de la méthode que nous utilisons; en effet notre méthode se prête à une généralisation dans les cas où la base de la représentation est fonction des coordonnées de plus de deux particules, le calcul des éléments des matrices des transformations de Moshinsky et Smirnov pouvant être effectué sans connaissance préalable des symboles 3 n - j, résultat que les autres méthodes ne peuvent pas atteindre. De la fonction génératrice des coefficients de Moshinsky et Smirnov nous déduisons une autre expression des coefficients de Moshinsky et Smirnov qui peut se comparer avantageusement à l'expression donnée par Dobeš (1977) : elle est moins compliquée, de plus elle contient des coefficients qui possèdent des symétries ce qui présente un grand intérêt dans les calculs numériques en minimisant le temps-machine.

Dans ce travail nous avons également obtenu une nouvelle relation entre les coefficients de Moshinsky et Smirnov qui se révèle utile pour effectuer la vérification des calculs numériques de ces coefficients.

Nous signalons que notre fonction génératrice de la base sphérique de l'oscillateur harmonique pourrait être intéressante pour la détermination des éléments de matrice de certains types de potentiel (potentiel Gaussien par exemple). Notre approche pourrait aussi être utilisée dans d'autres domaines de la physique (physique atomique et moléculaire par exemple); il est possible en effet d'adopter une autre base que la base sphérique de l'oscillateur harmonique et de construire par notre procédé la fonction génératrice de cette nouvelle base.

Dans ce travail, nous avons présenté une nouvelle approche dans la détermination des symboles 3 - jm des groupes unimodulaires. Notre approche consiste à partir de la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation préalablement déduite de la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation dans l'espace de Bargmann (1962) puis à utiliser l'intégrale de Gaunt pour obtenir la fonction génératrice des invariants de Weyl. Dans l'étude du cas SU(N), nous avons introduit une nouvelle paramétrisation du groupe SU(N). Cette paramétrisation récurrente, peut être symboliquement décrite par $U_N = U^N$ et $U_{N-1} = U^{N-1} \cdot U^{N-2} \ldots U^2$ où la dernière ligne de la matrice de la transformation U_N notée (U^N_{ij}) dépend des 2 N - 1 paramètres qui complètent les paramètres de U_{N-1}.

L'intérêt de la méthode apparaît quand l'ayant appliquée à l'étude du groupe SU(2), nous avons obtenu la fonction génératrice de Schwinger (1965) à partir de laquelle, nous avons construit la fonction génératrice des vecteurs de la base de représentation de SU(3). A partir de la fonction génératrice des éléments de la matrice de représentation de SU(3), nous avons démontré simplement que les fonctions harmoniques déduites par Beg et Ruegg (1965) sont des éléments de la matrice de représentation, ce qui confirme la conclusion que Nelson (1967) a obtenue par une méthode nécessitant un calcul complexe dans le cas de SU(3). Nous montrons que cette conclusion est valable dans le cas général et nous en déduisons la mesure invariante sur le groupe SU(N). Nous donnons aussi l'expression des éléments de la matrice de représentation de SU(3).

Dans le travail de recherche des fonctions génératrices des invariants de Weyl, il nous a paru important d'étudier des cas particuliers qui illustrent bien l'intérêt de notre méthode. Dans l'étude de ces cas particuliers nous avons été amenés à introduire des paramètres qui nous permettent d'utiliser les propriétés de l'espace de Bargmann (1962) dans le calcul de l'intégrale de Gaunt, ce qui nous donne une expression compacte et simple des fonctions génératrices.

En appliquant notre méthode dans le cas où l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$ est l'espace de Bargmann, il a été facile d'exprimer rigoureusement tout opérateur de $\mathcal{H}_F$ notamment l'hamiltonien, en un développement d'opérateurs de création et d'annihilation de quasi-bosons. Les développements ainsi obtenus sont rigoureux et semblables à ceux de Beliaev et Zelevinsky et de Marumori. Ils en diffèrent d'une part par l'ordre des termes en ce qui concerne les développements de Beliaev et Zelevinsky et d'autre part par l'absence de termes excédentaires dont l'action est nulle dans le sous-espace dans lequel ils agissent. Les développements ainsi obtenus sont donc plus simples et plus rapidement convergents.

Notre méthode ne s'applique pas seulement aux cas que nous avons traités, elle a un champ d'application étendu. En effet elle permet le calcul des éléments de passage d'une base de n'importe quelle représentation à une autre (calcul des coefficients de Raynal et Revai entre autres). Non seulement elle est utile pour l'étude des groupes unitaires mais encore elle peut être étendue à l'étude des groupes compacts dont le rôle en physique n'est plus à démontrer.

REFERENCES GENERALES

Baird G et Biedenharn L 1963 J. Math. Phys. 4 1449

Baranger M et Davies K T R 1966 Nucl. Phys. 49 403

Bargmann V 1961 Comm. Parc. Appl. Math. 14 187

Bargmann V 1962 Rev. of Mod. Phys. 34 - 4

Bargmann V et Moshinsky M 1960, 1961 Nucl. Phys. 18 29 277

Beg M et Ruegg H 1965 J. Math. Phys. 6 677

Beliaev S T et Zelevinsky V G 1962 Nucl. Phys. 39 582

Beltrametti E G et Luzatto G 1967 Nuovo Cimento 1 167

Bergmann S 1950 Mathematical Surveys No 5 New-York

Bloch C et Messiah A 1962 Nucl. Phys. 39 65

Brody T Moshinsky M et Renero I 1965 J. Math. Phys. 6 1540

Chacon E Ciftan M et Biedenharn L 1972 J. Math. Phys. 13 577

Chacon E Frank A and Moshinsky M 1979 J. Math. Phys. 20 35

De Swart J J 1963 Rev. Mod. Phys 35 916

Dobeš J 1977 J. Phys. A Math. Gen. 10 2053

Dreizler R M Klein A Krejs F R et Dreiss G 1971 Nucl. Phys. 166 624

Edmonds A R 1957 Angular Momentum in Quantum Mechanics (Princeton N. J. : Princeton University Press)

Efros V D 1973 Nucl. Phys. A 202 180

Faessler A et Plastino A 1969 Z Phys. 220 88

Fieck G 1979 J. Phys. B : Atom. Molec. Phys. 12 1063

Gal A 1968 Ann. of Phys. 49

Gulshani P 1979 Can. J. of Phys. 7 57 998

Hage Hassan M 1970 Thèse 3ème cycle Université Cl. Bernard Lyon I

Hage Hassan M et Lambert M 1972 Nucl. Phys. A 188 545

Hage Hassan M 1979 J. Phys. A : Math. Gen. Vol. 12 No 10

Hage Hassan M (à paraitre) J. Phys. A : Math. Gen.

Hage Hassan M Grenet G Gazeau J P et Kibler M à paraitre

Hill D L et Wheeler J A 1953 Phys. Rev. 89 1102

Hongoh 1974 3rd International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics Marseille

Jancovici B et Schiff D H 1964 Nucl. Phys. 58 678

Kibble T W 1968 Cargese lectures in Phys. Vol. 2 ed. M Lévy (Gordon and Breach)

Kibler M et Grenet G 1980 J. Math. Phys. 21 422

Kramer P et Moshinsky M 1968 Group Theory and its Applications Ed. Loebl E M
(New-York : Academic)

Kumar K 1966 a J. Math. Phys. 7 671

Kumar K 1966 b Aust. J. Phys. 19 719

Kumar K 1967 Aust. J. Phys. 20 205

Lipkin H J Meshkov N et Lick A J 1965 Nucl. Phys. 62 188
Agassi D Lipkin H J et Meshkov N 1966 Nucl. Phys. 86 321

Marumori T Yamamura M et Tokunaga A 1964 Prog. Theor. Phys. 31 726

Mattis D C 1965 The Theory of Magnetism (Harper and Row)

Messiah A 1965 Mécanique Quantique I (Paris : Dunod)

Mihailovic M V et Rosina M 1969 Nucl. Phys. 130 386

Moshinsky M 1959 Nucl. Phys. 13 104

Nagel J et Moshinsky M 1965 J. Math. Phys. 6 682

Nelson T 1967 J. Math. Phys. 8 857

Otsuka T Arima A and Iachello F 1978 Nucl. Phys. A 309

Pang S C Klein A et Dreizler R M 1965 Ann. of Phys. 49 477

Peierls R E et Yoccoz J 1957 Proc. Phys. Soc. A 70 381

Peierls R E et Thouless D J 1962 Nucl. Phys. 38 154

Providencia J P 1968 Nucl. Phys. 108 589

Rashid 1979 Communication privée

Raynal J et Revai J 1970 Nuovo Cimento 68 612

Raynal J 1973 La Toussuire

Raynal J 1976 Nucl. Phys. A 259 272

Resnikoff M 1967 J. Math. Phys. 8 857

Ripka G 1968 Adv. Nucl. Phys. 1 183

Scheweber S 1967 Ann. of Phys. 41 205

Schwinger J 1965 in Quantum Theory of Angular Momentum
Ed. Biedenharn et Van Dam (New-York : Academic)

Smirnov Yu F 1962 Nucl. Phys. 39 346

Sorensen B 1967 Nucl. Phys. A 97 1

Sorensen B 1970 Nucl. Phys. A 142 392

Talmi I 1952 Helv. Phys. Acta 25 185

Thouless D J 1960 Nucl. Phys. 21 225

Trlifaj L 1972 Phys. Rev. C 5 1534

Wong C W 1970 Nucl. Phys. 147 545

Wong C W 1970 Nucl. Phys. 147 563

Yuts'- A P et Bandzaitis A Angular Momentum Theory in Quantum Mechanics (Vilnius)

TABLE DES MATIERES