

PPGM — L 140 — 77

PERPUSTAKAAN  
PUSAT PENELITIAN GAMA  
BATAN

✓ 18.0000219  
A11

C1

PERHITUNGAN HARGA PRIBADI DAN VEKTOR PRIBADI  
MATRIX RIIL

Karsono



BADAN TENAGA ATOM NASIONAL  
PUSAT PENELITIAN TENAGA ATOM GAMA  
YOGYAKARTA — INDONESIA

We regret that some of the pages in the microfiche  
copy of this report may not be up to the proper  
legibility standards, even though the best possible  
copy was used for preparing the master fiche.

PERPUSTAKAAN  
PUSAT PENELITIAN GAMA  
BATAN

A 11

Ilmu Fisika  
Fisika Umum  
Fisika matematik dan fisika teori umum

PPGM - L 140 - 77

PERHITUNGAN HARGA PRIBADI DAN VEKTOR PRIBADI  
MATRIX RIIL

Karsono

1977

BADAN TENAGA ATOM NASIONAL  
Pusat Penelitian Tenaga Atom Gama  
Jl. Babarsari Kotakpos 8 Telepon 3661  
YOGYAKARTA - INDONESIA

## A B S T R A K

Beberapa metode perhitungan harga pribadi dan vektor pribadi matrix-matrix (bujur-sangkar) riil diuraikan secara singkat. Untuk matrix-matrix riil-simetris digunakan metode-metode *Jacobi*, *Given* serta *Householder* sedang metode-metode *Lanczos*, *supertriangularisasi* dan *deflasi* digunakan untuk matrix-matrix riil non-simetris.

## A B S T R A C T

Some computational methods for the evaluation of eigenvalues and eigenvectors of (square) real matrices are briefly described. The methods of *Jacobi*, *Given* and *Householder* are used for real-symmetric matrices while *Lanczos's* method, *supertriangularization* and *deflation* methods are used for real-non symmetric matrices.

## DAFTAR ISI

	halaman
A B S T R A K	ii
I. PENDAHULUAN	1
II. TEOREMA DASAR	3
III. BENTUK KANONIK SUATU MATRIX	7
IV. BEBERAPA METODE MENGHITUNG HARGA PRIBADI DAN VEKTOR PRIBADI MATRIX	9
IV.A. Matrix simetris	9
IV.B. Matrix non-simetris	31
V. KESIMPULAN	47
DAFTAR PUSTAKA	51

## I. PENDAHULUAN

Perhitungan harga pribadi (akar karakteristik) serta vektor pribadi (vektor karakteristik) suatu matrix bujur-sangkar kerap kali kita jumpai di bidang Matematika dan Fisika.

Telah kita ketahui, jika  $A = (a_{ij})$  suatu matrix bujur-sangkar maka harga pribadi matrix A itu adalah akar-akar persamaan  $|A - \lambda I| = 0$ , sedang vektor pribadi matrix A yang bertautan (sesuai) dengan harga pribadi  $\lambda$  adalah vektor (bukan vektor-nol)  $\vec{x}$  yang memenuhi persamaan vektor  $A \vec{x} = \lambda \vec{x}$ .

Untuk matrix-matrix berdimensi rendah perhitungan harga pribadi dan vektor pribadinya mudah dikerjakan, langsung diperoleh dari persamaan karakteristik  $|A - \lambda I| = 0$  dan  $(A - \lambda I) \vec{x} = 0$ .

Sebab, beberapa metode mencari harga nol polinomial, misalnya metode *secant*, *Graeffe*, *Laguerre* serta metode eliminasi *Gauss* telah kita kenal dan juga karena dimensi matrixnya rendah kita takkan terlibat dengan proses (operasi) hitung yang berbelit.

Tidak demikian halnya bila kita dihadapkan pada matrix A dengan dimensi yang cukup besar. Harus diusahakan agar kita terhindar dari problem menghitung/mengerjakan operasi hitung yang banyak, atau kalau tetap harus menghadapinya, perhitungan tersebut diusahakan mempunyai bentuk / jalur hitung sederhana.

Bab-bab berikutnya membahas metode-metode penyelesaian harga pribadi dan vektor pribadi matrix riil - simetris atau pun riil-non simetris dengan metode *Jacobi*, *Given*, *Householder*, *Lanczos* dan akhirnya *supertriangularization and deflation methods*. Prinsip dasar adalah

membawa matrix  $A$  dengan transformasi ortogonal atau similar ke bentuk kanoniknya (misalnya diagonal, tri-diagonal), mengingat harga pribadi matrix dalam bentuk kanonik lebih mudah dihitung. Representasi matrix dari transformasi itu merupakan produk (hasil ganda matrix) matrix-matrix yang lebih sederhana, dengan elemen-elemen yang mudah ditentukan karena elemen-elemen matrix-matrix di dalam sekuen matrix itu bersangkutan satu dengan lainnya secara sederhana. Hal ini memberi kesempatan pemakaian komputer *digital* pada pengerjaan operasi hitung yang kita hadapi. Pemilihan matrix, urutan pengerjaan operasi dipilih sedemikian sehingga memudahkan perhitungan harga pribadi serta vektor pribadi yang kita kehendaki. Barang tentu kita harus menelusur lagi jejak yang telah ditempuh ketika transformasi dikerjakan.

## II. TEOREMA DASAR

Pada bab ini kami kemukakan beberapa teorema yang mendasari metode-metode perhitungan harga pribadi dan vektor pribadi yang akan dibahas di bab-bab selanjutnya.

### Teorema II.1

Jika  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  harga-harga pribadi matrix bujur-sangkar  $A = (a_{ij})$  bertipe  $(n \times n)$  dan  $p(x)$  suatu polinomial (dalam  $x$ ) maka harga-harga pribadi matrix  $p(A)$  adalah  $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)$ . Khususnya, harga-harga pribadi matrix  $A^k$  ( $k$  suatu bilangan bulat positif) adalah  $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ .

### Teorema II.2

Harga-harga pribadi dan vektor-vektor pribadi setiap matrix riil-simetris adalah riil; vektor-vektor pribadi yang bertautan dengan harga-harga pribadi yang berbeda adalah saling ortogonal.

### Teorema II.3

Harga-harga pribadi matrix-matrix similar adalah sama, artinya bila  $A$  similar dengan  $B$  dan harga-harga pribadi matrix  $A$  adalah  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  maka harga-harga pribadi matrix  $B$  juga  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

### Teorema II.4

Harga - harga pribadi matrix bujur-sangkar  $A$  merupakan akar-akar persamaan karakteristik matrix  $A$ .

### Teorema II.5 (Cayley-Hamilton)

Setiap matrix bujur - sangkar  $A$  selalu memenuhi persamaan

karakteristiknya masing-masing, artinya jika  $f(\lambda) = 0$  persamaan karakteristik matrix A maka berlakulah kesamaan  $f(A) = 0$ .

Bukti teorema-teorema tersebut bisa diperoleh di dalam buku tentang teori matrix. Selanjutnya akan kita bahas sepintas lalu sekuen Sturm serta beberapa teoremanya.

Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n$  berhingga) adalah sekuen bilangan-bilangan riil, maka angka tunjuk (*index*)  $m$  dinamakan titik balik tanda (*point of sign reversal*) jika  $a_{m-k} a_m < 0$  dan  $a_{m-1} = a_{m-2} = \dots = a_{m-k+1} = 0$ ;  $a_{m-k}$  dan  $a_m$  dikatakan membangun perubahan/tukar tanda (*change of sign*).

Proposisi berikut ini berlaku untuk sekuen bilangan-bilangan riil [2]:

- (a) Cacah pertukaran tanda pada sekuen tidak berubah jika elemen-elemen nol dibuang sedang urutan elemen-elemen sisanya (yang tak dibuang) dipertahankan tetap.
- (b) Cacah pertukaran tanda dalam sekuen juga tak berubah bila padanya ditambahkan beberapa elemen nol atau jika padanya disisipkan elemen-elemen bertanda sama dengan tandanya salah satu elemen di mana sisipan tersebut dikerjakan.
- (c) Cacah pertukaran tanda tidak bertambah bila beberapa elemen sekuen kita buang.
- (d) Jika  $a_j$  dan  $a_k$  ( $j < k$ ) tidak nol, cacah pertukaran tanda pada sekuen  $a_j, a_{j+1}, \dots, a_k$  adalah genap atau ganjil bergantung pada apakah  $a_j$  dan  $a_k$  bertanda sama atau tidak.
- (e) Misalkan  $m$  adalah titik balik tanda pada sekuen  $a_0, a_1, \dots, a_n$

maka cacah pertukaran tanda sekuen itu lebih besar dibanding dengan cacah pertukaran tanda sekuen  $-a_0, -a_1, \dots, -a_{m-1}, a_{m+1}, \dots, a_n$  dan mereka berselisih 1.

Kemudian kita akan mengemukakan beberapa definisi serta teorema mengenai cacah akar riil suatu persamaan aljabar [1, 2], tanpa bukti.

### Teorema II.6 (Aturan *Descartes* tergeneralisir)

Jika fungsi-fungsi  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  dan derivatif-derivatif tingkat  $(n-1)$  atau kurang dari itu kontinyu pada  $(a, b)$  dan jika determinan *Wronski* (*Wronskian determinant*)

$$W[f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_m}] > 0$$

untuk sebarang sekuen  $k_i$  ( $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ ), maka cacah harga nol pada kombinasi

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

di mana para  $a_i$  riil dan tidak semuanya nol, pada  $(a, b)$  tak akan melebihi cacah pertukaran tanda pada sekuen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

### Definisi II.1

Misalkan  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  adalah sekuen polinomial-polinomial dan  $(a, b)$  suatu interval dengan  $a$  atau  $b$  boleh tak berhingga maka sekuen tersebut dinamakan sekuen *Sturm* pada  $(a, b)$  bila dan hanya bila

- $f_m(x)$  tidak identik nol pada  $(a, b)$
- di setiap harga nol dari  $f_k(x)$ ,  $k = 2, 3, \dots, m-1$ ; polinomial-polinomial  $f_{k-1}(x)$  dan  $f_{k+1}(x)$  tidak berharga nol dan mereka berbeda tanda, artinya

$$f_{k-1}(x) f_{k+1}(x) < 0$$

Definisi II.2

Misalkan  $\{f_i(x)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  sekuen *Sturm* pada  $(a, b)$  dan  $x_0$  pada  $(a, b)$  sedemikian sehingga  $f_1(x_0) \neq 0$ .  $V(x_0)$  didefinisikan sebagai cacah pertukaran tanda sekuen  $\{f_i(x_0)\}$  dengan tidak menghiraukan elemen nol. Jika  $a$  berhingga  $V(a)$  didefinisikan sebagai  $V(a + \epsilon)$  di mana  $\epsilon$  dipilih sedemikian sehingga para  $f_i(x)$  tidak identik nol pada interval  $(a, a + \epsilon)$ , begitu pula bila  $b$  berhingga para  $f_i(x)$  tidak identik nol pada interval  $(b - \epsilon, b)$ . Sedang jika  $a = -\infty$  maka  $V(a)$  didefinisikan sebagai cacah pertukaran tanda sekuen  $\{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_i(x)\}$ , jika  $b = +\infty$  maka  $V(b)$  didefinisikan sebagai cacah pertukaran tanda sekuen  $\{\lim_{x \rightarrow \infty} f_i(x)\}$ .

Dengan definisi tersebut di atas, kita berikan teorema berikut [1].

Teorema II.7

Banyaknya harga nol riil yang berlainan dari polinomial  $f(x)$  pada interval  $[a, b]$  adalah  $V(a) - V(b)$ , jika  $f(a)$  dan  $f(b)$  keduanya tidak sama dengan nol. Jika  $f(a)$  atau  $f(b)$  atau kedua-duanya berharga nol dan akarnya adalah akar sederhana (*simple root*) maka hasil di atas tetap berlaku pada  $[a, b]$  asal  $V(x)$  didefinisikan sebagai cacah pertukaran tanda sekuen  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  untuk keadaan di mana  $f_1(x) = 0$ .

### III. BENTUK KANONIK SUATU MATRIX

Bentuk kanonik matrix merupakan bagian penting di dalam pembahasan tentang harga pribadi dan vektor pribadi matrix, oleh sebab beberapa sifat matrix, antara lain harga pribadi dan deformasi ruang yang diakibatkan olehnya, lebih mudah dipahami dengan menggunakan bentuk kanoniknya. Beberapa teorema umum tentang diagonalisasi serta bentuk kanonik matrix bujur-sangkar berikut ini kami kemukakan tanpa bukti, berkaitan dengan dasar teori untuk metode perhitungan harga pribadi pada pembahasan bab IV.

#### Teorema III.1

Apabila harga-harga pribadi matrix (bujur-sangkar)  $A$  adalah berlainan maka  $A$  dapat diubah menjadi matrix diagonal  $D$  sedemikian sehingga elemen-elemen diagonal matrix  $D$  adalah harga-harga pribadinya  $A$  dan  $D = S^{-1} A S$  dengan  $S$  suatu matrix non singular.

#### Teorema III.2

Setiap matrix (bujur-sangkar) riil-simetris  $A$  dapat diubah menjadi matrix diagonal  $D$  sedemikian sehingga elemen-elemen diagonal  $D$  adalah harga-harga pribadinya  $A$  dan diagonalisasi tersebut menggunakan matrix ortogonal  $S$  di mana  $D = S^{-1} A S = S^* A S$ .

#### Teorema III.3

Apabila  $A$  matrix (bujur-sangkar) riil-simetris maka dengan transformasi kongruensi,  $A$  dapat dijadikan matrix diagonal  $D$  sedemikian sehingga  $D = P^* A P$ . Matrix diagonal  $D$  tidaklah tunggal.

Teorema III.4

Untuk sebarang matrix (bujur-sangkar)  $A$  dapat ditemukan suatu transformasi uniter  $Q$  sedemikian sehingga  $T = \bar{Q}^* A Q$  dengan  $T$  matrix segitiga (yang mungkin berelemen bilangan-bilangan kompleks).

Teorema pertama mengatakan bahwa dengan suatu transformasi similar, matrix bujur-sangkar  $A$  dapat diubah menjadi matrix diagonal  $D$  asal harga-harga pribadi  $A$  berlainan. Bila harga-harga pribadinya tidak berlainan transformasi semacam itu boleh jadi tidak bisa ditemukan juga. Akan tetapi perlu diingat bahwa jika matrix non singular  $S$  telah ditemukan maka dalam rangka perhitungan praktis, menghitung inversnya  $S$  diikuti proses pergandean matrix tersebut akan merupakan masalah juga. Lebih serasi bila diagonalisasi matrix dapat dikerjakan dengan menggunakan matrix (transformasi) ortogonal atau uniter.

Teorema kedua mengatakan bahwa diagonalisasi dapat dikerjakan dengan transformasi ortogonal (sekaligus merupakan transformasi similar dan kongruen), begitu pula teorema ketiga (diagonalisasi menggunakan transformasi kongruen); tetapi teorema tersebut hanya berlaku untuk matrix (bujur-sangkar) riil-simetris saja.

Teorema terakhir memberi kelonggaran pada bentuk matrix yang bisa ditransformasikan, pun transformasinya ortogonal, hanya matrix  $T$  mungkin berelemen kompleks dan adalah matrix segi-tiga yang belum tentu matrix diagonal.

Metoda perhitungan harga pribadi pada bab berikutnya telah menggunakan teorema-teorema tersebut sebagai dasar pemikiran, dengan mengadakan modifikasi, pendekatan dalam menentukan transformasi (matrix). Ini untuk memperoleh keserasian bagi perhitungan dengan kalkulator/komputer karena metode-metode tersebut adalah metode iterasi.

IV. BEBERAPA METODE MENGHITUNG HARGA PRIBADI  
DAN VEKTOR PRIBADI MATRIX

Di bab ini kita akan membahas beberapa metode perhitungan harga pribadi dan vektor pribadi matrix bujur-sangkar riil bertipe  $(n \times n)$ , baik matrix tersebut simetris atau pun non simetris.

IV.A. Matrix simetris

Tiga metode berikut berdasarkan pada transformasi ortogonal, yang membawa matrix mula ke bentuk kanoniknya (teorema III.2). Ketiga metode berikut dikenal sebagai metode *Jacobi*, metode *Given* dan metode *Householder*.

(1) Metode Jacobi :

Pandanglah matrix riil-simetris  $A = (a_{ij})$  bertipe  $(n \times n)$ . Untuk matrix  $A$  tersebut kita dapat menemukan matrix ortogonal bertipe sama, namakanlah matrix  $Q$  sedemikian sehingga dipenuhi sangkutan :

$$Q^* A Q = D \quad (IV.1)$$

dengan  $D$  adalah matrix diagonal berelemen diagonal harga-harga pribadi matrix  $A$ .

Teknik berikutnya adalah menemukan sekuen  $\{S_k\}$  dari matrix-matrix ortogonal yang memenuhi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_1 S_2 \dots S_k = Q \quad (IV.2)$$

Pada pembicaraan ini kita menggunakan notasi

$$T_k = S_k^* S_{k-1}^* \dots S_1^* A S_1 S_2 \dots S_k, T_0 = A \quad (IV.3)$$

Elemen-elemen matrix  $T_k$  kita tulis dengan  $t_{ij}^{(k)}$  dan elemen-elemen matrix  $S_k$  kita tulis sebagai  $s_{ij}^{(k)}$ .

Kemudian didefinisikan

$$v_k = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n [t_{ij}^{(k)}]^2 \quad \text{dan} \quad w_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [t_{ij}^{(k)}]^2 \quad (\text{IV.4})$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Jadi  $w_k$  adalah kuadrat dari norma (*Euclid*) matrix  $T_k$  dan  $v_k$  jumlahan dari kuadratnya elemen-elemen bukan-diagonal dari matrix  $T_k$ .

Sekuen  $\{S_k\}$  dipilih sedemikian sehingga

$$w_{k+1} = w_k \quad v_{k+1} < v_k \quad \text{untuk semua } k \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{dan limit}_{k \rightarrow \infty} v_k = 0 \quad (\text{IV.6})$$

$$\text{Jelaslah apabila (IV.6) dipenuhi maka limit}_{k \rightarrow \infty} T_k = D \quad (\text{IV.7})$$

Misalkan  $t_{pq}^{(k-1)}$  adalah elemen bukan-diagonal dari matrix  $T_{k-1}$  yang tidak sama nol. Dengan tetap memperhatikan (IV.5) kita berusaha memilih matrix  $S_k$  sehingga elemen  $T_k$  dengan angka tunjuk yang sama (di baris dan kolom yang sama) menjadi nol, atau  $t_{pq}^{(k)} = 0$ .

Sekarang kita ambil, dengan memilih sudut  $\phi_k$  tertentu sehingga  $t_{pq}^{(k)} = 0$ ,

$$\begin{aligned} s_{pp}^{(k)} = s_{qq}^{(k)} = \cos \phi_k, \quad s_{ii}^{(k)} = 1 \quad i \neq p \text{ atau } q \\ s_{pq}^{(k)} = -s_{qp}^{(k)} = \sin \phi_k, \quad s_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{yang lain} \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Matrix ortogonal yang elemen-elemennya ditentukan seperti pada (IV.8) tersebut dikenal sebagai Matrix Rotasi-Bidang (*Plane Rotation Matrix*) oleh karena transformasi yang direpresentasikan oleh matrix  $S_k$  tersebut terdiri atas rotasi sebesar  $\phi_k$  terhadap sumbu-sumbu koordinat ke-p dan ke-q. Berdasarkan (IV.3) kita peroleh bahwa  $T_k = S_k^* T_{k-1} S_k$  (IV.9) sehingga menurut (IV.8) didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\left. \begin{aligned} t_{pj}^{(k)} &= t_{pj}^{(k-1)} \cos \phi_k - t_{qj}^{(k-1)} \sin \phi_k \\ t_{qj}^{(k)} &= t_{qj}^{(k-1)} \cos \phi_k + t_{pj}^{(k-1)} \sin \phi_k \end{aligned} \right\} j \neq p \text{ atau } q \text{ (IV.10)}$$

$$\left. \begin{aligned} t_{ip}^{(k)} &= t_{ip}^{(k-1)} \cos \phi_k - t_{iq}^{(k-1)} \sin \phi_k \\ t_{iq}^{(k)} &= t_{ip}^{(k-1)} \sin \phi_k + t_{iq}^{(k-1)} \cos \phi_k \end{aligned} \right\} i \neq p \text{ atau } q \text{ (IV.11)}$$

$$t_{pp}^{(k)} = t_{pp}^{(k-1)} \cos^2 \phi_k + t_{qq}^{(k-1)} \sin^2 \phi_k - 2t_{pq}^{(k-1)} \sin \phi_k \cos \phi_k$$

$$t_{qq}^{(k)} = t_{pp}^{(k-1)} \sin^2 \phi_k + t_{qq}^{(k-1)} \cos^2 \phi_k + 2t_{pq}^{(k-1)} \sin \phi_k \cos \phi_k$$

$$t_{pq}^{(k)} = t_{qp}^{(k)} = (1/2) [t_{pp}^{(k-1)} - t_{qq}^{(k-1)}] \sin 2\phi_k + t_{pq}^{(k-1)} \cos 2\phi_k \quad \text{(IV.12)}$$

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \quad i \neq p \text{ dan } j \neq q \quad \text{(IV.13)}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan besarnya sudut  $\phi_k$  agar  $t_{pq}^{(k)}$  berharga nol. Dari persamaan terakhir pada (IV.12) diperoleh sangkutan :

$$\operatorname{tg} 2 \phi_k = \frac{-t_{pq}^{(k-1)}}{(1/2) [t_{pp}^{(k-1)} - t_{qq}^{(k-1)}]} \quad \text{(IV.14)}$$

Mengingat (IV.10) hingga (IV.12), dalam perhitungan praktis besar sudut  $\phi_k$  itu tidaklah dihitung melainkan hanya harga  $\sin \phi_k$  dan  $\cos \phi_k$ . Menurut [1], jika kita ambil  $\lambda = -t_{pq}^{(k-1)}$  dan  $\mu = (1/2)[t_{pp}^{(k-1)} - t_{qq}^{(k-1)}]$  maka

$$\cos \phi_k = \left( \frac{v + |\mu|}{2v} \right)^{1/2} \quad \sin \phi_k = \frac{\operatorname{sgn}(\mu)\lambda}{2v \cos \phi_k} \quad \text{(IV.15)}$$

$$\text{dan } v = (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}$$

Tanpa mempedulikan harga  $\phi_k$  kita peroleh juga sangkutan se-  
bagai berikut :

$$\begin{aligned} [t_{pj}^{(k)}]^2 + [t_{qj}^{(k)}]^2 &= [t_{pj}^{(k-1)}]^2 + [t_{qj}^{(k-1)}]^2, \quad j \neq p \text{ atau } q \\ [t_{ip}^{(k)}]^2 + [t_{iq}^{(k)}]^2 &= [t_{ip}^{(k-1)}]^2 + [t_{iq}^{(k-1)}]^2, \quad i \neq p \text{ atau } q \end{aligned} \quad (IV.17)$$

$$\begin{aligned} [t_{pp}^{(k)}]^2 + [t_{qq}^{(k)}]^2 + [t_{pq}^{(k)}]^2 + [t_{qp}^{(k)}]^2 &= [t_{pp}^{(k-1)}]^2 + \\ [t_{qq}^{(k-1)}]^2 + [t_{pq}^{(k-1)}]^2 + [t_{qp}^{(k-1)}]^2. \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Dengan memilih sudut  $\phi_k$  menurut (IV.14) maka  $t_{pq}^{(k)} = t_{qp}^{(k)} = 0$ .

Sangkutan-sangkutan (IV.17), (IV.13) bersama dengan (IV.15) berakibat  
bahwa  $w_k = w_{k+1}$ , sedang (IV.18) menjamin bahwa  $v_{k+1} < v_k$ .

Mengingat bahwa para  $T_k$  adalah matrix-matrix simetris maka (IV.18) me-  
nyebabkan juga bahwa jumlah kuadratnya elemen-elemen bukan-diagonal  
berkurang dengan (sebesar)  $2 [t_{pq}^{(k-1)}]^2$  sedang jumlah kuadrat elemen-  
elemen diagonal bertambah sebesar itu.

Jadi pada setiap babakan iterasi *Jacobi*, kita kerjakan hal-  
hal berikut :

- (1) memilih elemen bukan-diagonal yang tidak sama dengan nol;
- (2) menghitung  $\sin \phi_k$  dan  $\cos \phi_k$  menggunakan persamaan (IV.15);
- (3) menghitung elemen-elemen matrix  $T_k$  berdasarkan matrix  $T_{k-1}$  dengan  
(IV.10), (IV.11) dan (IV.12).

Iterasi tersebut dikerjakan berulang hingga memenuhi kriteria (konver-  
gensi) yang kita inginkan.

Vektor-vektor pribadi matrix A juga dicari menggunakan meto-  
de-metode yang telah dikenal. Perlu juga diingat bahwa kolom-kolom ma-

trix-matrix ortogonal yang digunakan untuk mendiagonalisasi  $A$  adalah vektor-vektor pribadi matrix  $A$  tersebut. Untuk memperoleh vektor-vektor pribadi itu kita harus menentukan matrix  $Q$  pada persamaan (IV.2).

Kita tulis (IV.3) sebagai berikut

$$T_k = R_k^* A R_k \quad (IV.19)$$

di mana

$$R_k = S_1 S_2 S_3 \dots S_k \quad (IV.20)$$

Dengan demikian

$$R_{k+1} = R_k S_{k+1} \quad (IV.21)$$

dan mengingat (IV.8) kita dapat menghitung  $r_{ij}^{(k+1)}$ , elemen-elemen matrix  $R_{k+1}$ , menggunakan matrix  $R_k$  dan menyetekannya dengan elemen-elemen  $R_k$ :

$$\begin{aligned} r_{ip}^{(k+1)} &= r_{ip}^{(k)} \cos \phi_{k+1} - r_{iq}^{(k)} \sin \phi_k \\ r_{iq}^{(k+1)} &= r_{ip}^{(k)} \sin \phi_{k+1} + r_{iq}^{(k)} \cos \phi_k \\ r_{ij}^{(k+1)} &= r_{ij}^{(k)}, \quad j \neq p \text{ atau } q. \end{aligned} \quad (IV.22)$$

Yang tetap merupakan persoalan di dalam menggunakan metode *Jacobi* adalah bagaimana kita memilih elemen bukan-diagonal yang harus dimusnahkan pada setiap babakan iterasi. Mestinya, kita memilih elemen dengan magnitud terbesar karena ini akan banyak mengurangi  $v_k$  pada setiap babakan perhitungan; tetapi cara seperti ini jelas kurang menyenangkan bila perhitungan dikerjakan secara otomatis dengan komputer, sebab kita harus menginstruksikan komputer tersebut untuk membandingkan magnitud setiap elemen bukan-diagonal di atas diagonal utama.

Untuk menghindari langkah membandingkan itu bisa digunakan metode *Jacobi-Ambang* (*Threshold Jacobi Method*) yang prinsipnya adalah memusnahkan elemen-elemen bukan-diagonal dengan magnitud melebihi harga ambang yang telah kita tentukan sebelumnya [1].

Metode Jacobi-Ambang :

Didefinisikan  $\gamma_1 = \sqrt{v_0} (1/\sigma)$  dengan  $\sigma$  adalah bilangan positif yang disebut konstan ambang (*threshold constant*).

Apabila  $\sigma > n$  maka paling sedikit satu elemen bukan-diagonal bermagnitud lebih besar atau sama dengan  $\gamma_1$ . Dan bila semua elemen demikian telah musnah, jumlah kuadrat elemen-elemen bukan-diagonal tak melebihi  $(1 - 2/\sigma^2) v_0$ .

Berikutnya didefinisikan

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i (1/\sigma), \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{IV.24})$$

Pada babakan iterasi ke- $i$ , semua elemen dengan magnitud yang sama atau lebih besar dari pada  $\gamma_1$  akan dimusnahkan. Misalkan  $\{\gamma_{i_j}\}$  adalah subsekuen dari sekuen  $\{\gamma_i\}$  sedemikian sehingga pada babakan ke- $i_j$  paling tidak satu elemen telah dimusnahkan. Maka bisa dibuktikan bahwa setelah berlangsung  $i_m$  babak, jumlah kuadrat elemen-elemen bukan-diagonal tak akan lebih besar dari  $(1 - 2/\sigma^2)^m v_0$ . Oleh sebab itu, andaikan kita menghendaki agar jumlah kuadrat elemen-elemen bukan-diagonal kurang dari  $\rho^2 v_0$  ( $\rho$  suatu konstan yang kita pilih) maka hal tersebut telah dipenuhi bila harga ambang akhir  $\gamma_a$  memenuhi ketaksamaan

$$\gamma_a \leq (\rho/n) \sqrt{v_0} \quad (\text{IV.25})$$

Akhirnya telah juga diketahui bahwa untuk mencari elemen bukan-diagonal dengan magnitud terbesar, kita tak usah menyelidiki sebanyak  $n(n-1)/2$  buah elemen di atas dan di bawah diagonal matrix  $A$  karena pada setiap babak perhitungan metode tersebut hanya mengubah dua kolom dan baris matrix  $T_k$ .

Contoh pemakaian metode Jacobi

Sekarang diberikan contoh proses diagonalisasi, perhitungan harga pribadi dan vektor pribadi matrix A berikut ini :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0,25 \\ 0,5 & 0,25 & 2 \end{bmatrix} .$$

Elemen bukan-diagonal dengan magnitud terbesar adalah 1 yang terletak pada baris pertama kolom kedua, jadi  $p = 1$  dan  $q = 2$ .

Menggunakan persamaan-persamaan (IV.15) dan (IV.16) kita peroleh

$$\mu = 0, \quad \lambda = -1, \quad \nu = 1.$$

$$\sin \phi_1 = -(1/\sqrt{2}), \quad \cos \phi_1 = (1/\sqrt{2})$$

Dengan persamaan-persamaan (IV.10), (IV.11) dan (IV.12) kita dapatkan

$$T_1 = S_1^* A S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{3}{4\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{4\sqrt{2}} \\ \frac{3}{4\sqrt{2}} & \frac{-1}{4\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

Bila iterasi semacam itu kita lanjutkan, akhirnya akan diperoleh hasil

$$D = \begin{bmatrix} 2,5365258 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0166473 & 0 \\ 0 & 0 & 1,4801215 \end{bmatrix}$$

dan

$$Q = \begin{bmatrix} 0,53148338 & -0,72120712 & -0,4428106 \\ 0,46147338 & 0,68634928 & -0,56210938 \\ 0,71032933 & 0,09372796 & 0,69760117 \end{bmatrix}$$

(2) Metode Given :

Dasar metode ini adalah menggunakan matrix ortogonal untuk membawa matrix A ke bentuk tri-diagonal, jadi berlainan dengan metode *Jacobi*. Sehingga setelah transformasi, bentuk matrix A berubah sedemikian sehingga elemen-elemen yang tidak sama dengan nol akan terletak pada diagonal utama dan pada dua buah diagonal di dekat diagonal utama (di atas dan di bawah diagonal utama) seperti nampak dari diagram berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dalam menghitung matrix  $T_k$  dari sangkutan  $T_k = S_k^* T_{k-1} S_k$  di dalam uraian metode *Jacobi*, telah digunakan matrix-matrix ortogonal  $S_k$  yang memiliki kemampuan mengubah hanya baris-baris dan kolom-kolom ke- $p$  dan  $q$  dari matrix  $T_{k-1}$ . Tidaklah mentercengangkan bila, dengan mengatur urutan transformasi secara seksama, elemen-elemen bukan-diagonal bisa dimusnahkan dan bertepatan dengan itu elemen-elemen yang menjadi nol (musnah) pada babakan sebelumnya, tetap dipertahankan demikian. Lebih dahulu perlu dicatat bahwa dengan menggunakan  $S_k$  seperti didefinisikan pada (IV.8), tanpa menspesifikasikan sudut  $\phi_k$  lebih dahulu, mungkin bagi kita untuk memusnahkan bukan elemen  $t_{pq}^{(k-1)}$  melainkan elemen lain yaitu  $t_{rq}^{(k-1)}$  dengan  $r$  berbeda dengan  $p$  atau pun  $q$ ; karena simetri juga  $t_{qr}^{(k-1)}$  akan musnah.

Ini bisa diperoleh dari (IV.11) dengan menuliskan

$$0 = t_{rq}^{(k)} = t_{rp}^{(k-1)} \sin \phi_k + t_{rq}^{(k-1)} \cos \phi_k \quad (\text{IV.26})$$

kesamaan di atas dipenuhi oleh

$$\sin \phi_k = -\alpha t_{rq}^{(k-1)} ; \cos \phi_k = \alpha t_{rp}^{(k-1)} \quad (\text{IV.27})$$

$$\alpha = 1 / [ \{ t_{rp}^{(k-1)} \}^2 + \{ t_{rq}^{(k-1)} \}^2 ]^{1/2} \quad (\text{IV.28})$$

Sekarang kita tandai matrix yang elemen-elemennya diberikan oleh (IV.8) dengan harga  $\sin \phi_k$  dan  $\cos \phi_k$  ditentukan dengan (IV.27), (IV.28) sebagai  $S_{pqr}$ ; matrix ini berhubungan dengan matrix representasi transformasi (p,q,r). Bilangan-bilangan bulat positif p, q, r mempunyai makna tertentu dan adalah angka tunjuk baris (kolom) yang mengalami perubahan oleh satu transformasi (p,q,r) yang kita lakukan.

Khususnya, kita perhatikan sekuen transformasi

$$(p,q,r) = (2,i,1) \quad i = 3, 4, \dots, n \quad (\text{IV.29})$$

yang dikerjakan berurutan pada matrix A.

Setiap tripel (2,i,1) menentukan satu transformasi seperti pada (IV.8) atau bila ini dikenakan ke matrix A maka secara matrix berarti sebagai berikut : A digandakan dari kanan dengan matrix  $S_{2i1}$  dan dari kiri dengan matrix  $S_{2i1}^*$  (transposnya  $S_{2i1}$ ). Maka pada langkah pertama didapat hasil matrix  $S_{231}^* A S_{231}$ . (IV.30)

Transformasi (2,3,1) memusnahkan elemen baris (kolom) pertama, kolom (baris) ketiga; jadi sesuai (IV.8) maka p = 2 dan q = 3.

Secara umum dikatakan, transformasi (2,i,1) memusnahkan (mengenolkan) elemen baris (kolom) pertama kolom (baris) ke-i dari matrix yang dikenai transformasi tersebut. Dengan demikian, bila sekuen transformasi (IV.29) dikerjakan seluruhnya secara berurutan maka seluruh elemen baris pertama, kecuali elemen  $a_{11}$  dan  $a_{12}$ , akan musnah (menjadi nol).

Selanjutnya kita perhatikan sekuen transformasi

$$(p,q,r) = (3,i,2) \quad i = 4, 5, \dots, n.$$

Sekuen transformasi ini memusnahkan elemen-elemen  $a_{24}, a_{25}, \dots, a_{2n}$  pada baris kedua. Sedang elemen-elemen bukan - diagonal baris (kolom) pertama tak diubahnya sama sekali sehingga elemen-elemen baris (kolom) ini yang telah dinolkan oleh sekuen transformasi  $(2,i,1)$  di atas, tetap tak berubah.

Berdasarkan pandangan tersebut, kita menyimpulkan bahwa sekuen transformasi

$$(p,q,r) = (j,i,j-1) \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

$$i = j+1, j+2, \dots, n \quad (\text{IV.32})$$

akan mengubah matrix A menjadi

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Keterangan :

Untuk  $j = 2$ , sekuen transformasi  $(2,i,1)$  mengnolkan elemen-elemen baris (kolom) ke-1, kolom (baris) ke-3 hingga ke- $n$  (karena  $i = 3, 4, \dots, n$ ).

Untuk  $j = 3$ , sekuen transformasi  $(3,i,2)$  mengnolkan elemen-elemen baris (kolom) ke-2, kolom (baris) ke-4 hingga ke- $n$  (karena  $i = 4, 5, \dots, n$ ); tanpa mengubah elemen-elemen bukan diagonal baris ke-1.

Untuk  $j = 4$ , sekuen transformasi  $(4, i, 3)$  mengonolkan elemen-elemen baris (kolom) ke-3, kolom (baris) ke-5 hingga ke- $n$  (karena  $i = 5, 6, \dots, n$ ); tanpa mengubah elemen-elemen bukan-diagonal baris ke-1, 2.

Demikian seterusnya, akhirnya

Untuk  $j = n-1$ , sekuen transformasi  $(n-1, i, n-2)$  mengonolkan elemen baris (kolom) ke- $(n-2)$ , kolom (baris) ke- $n$  (karena  $i = n$ ); tanpa mengubah elemen-elemen bukan-diagonal baris ke-1, 2,  $\dots, n-3$ .

Jelas bahwa untuk setiap harga  $j$  memberikan  $(n-j)$  buah transformasi, sehingga keseluruhan transformasi (IV.32) terdiri atas

$$\sum_{j=2}^{n-1} (n-j) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \text{ transformasi tipe } (p, q, r).$$

Cacah operasi hitung pada metode ini adalah dari orde  $(4/3)n^3$ , [ 1 ].

Bila operasi pengambilan akar pangkat dua kita perhitungkan maka jumlah itu masih harus ditambah dengan  $(n-1)(n-2)/2$  buah operasi.

Sekarang kita tinjau matrix  $\lambda I - B$

$$\lambda I - B = \begin{bmatrix} -b_1 + \lambda & -c_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c_1 & -b_2 + \lambda & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \\ & & & -c_{n-1} & \\ & & & & -b_n + \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

Jika minor utama (*principal minor*) orde- $i$  matriks di atas kita tulis sebagai  $f_{n-i}(\lambda)$  maka

$$f_{n-(i+1)}(\lambda) = (\lambda - b_{i+1}) f_{n-i}(\lambda) - c_i^2 f_{n-(i-1)}(\lambda) \quad (\text{IV.35})$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1$$

di mana  $f_n(\lambda) = 1$  dan  $f_{n-1}(\lambda) = -b_1 + \lambda$ .

Dengan rumus rekurensi tersebut kita dapat memperoleh persamaan karakteristik matrix B, yaitu

$$f_0(\lambda) = 0 \quad (\text{IV.36})$$

Untuk menyelesaikan persamaan terakhir ini, atau untuk mencari harga pribadi matrix B bisa digunakan beberapa metode yang telah kita kenal antara lain metode *secant*, *Graeffe*. Kali ini kita mencoba menyelesaikan problem tersebut dengan menggunakan sekuen *Sturm*.

Jika salah satu dari  $c_i$  pada (IV.33) berharga nol, determinan matrix (IV.34) dapat dinyatakan sebagai hasil ganda dua determinan matrix-matrix tri-diagonal yang berdimensi lebih rendah. Sehingga tanpa mengurangi nilai pembahasan kita bisa mengandaikan bahwa setiap  $c_i$  pada matrix (IV.33) tidak nol. Dengan pengandaian ini, sekuen  $f_0(\lambda), f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$  merupakan sekuen *Sturm* sesuai dengan definisi (II.1). Dengan menghitung  $V(a)$  dan  $V(b)$  untuk berbagai harga  $a$  dan  $b$  kita dapat menentukan jumlah harga nolnya pada  $(a,b)$ . [1]. Meskipun  $f_1(\lambda)$  berbeda dengan  $f'_0(\lambda)$  bila  $f_1(\lambda)$  bertanda sama dengan  $f'_0(\lambda)$  maka teorema (III.7) bisa digunakan untuk sekuen  $\{f_i(\lambda)\}$  jika sekuen tersebut digunakan untuk menghitung  $V(a) - V(b)$ .

#### Lemma IV.1

$i$  buah harga nol  $f_{n-i}(\lambda)$  yaitu  $s_1, s_2, \dots, s_i$  memisah/

menyela  $(i - 1)$  buah harga nol  $f_{n-(i-1)}(\lambda)$  yaitu  $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}$ .

Artinya  $-\infty < s_1 < r_1 < s_2 < r_2 < \dots < r_{i-1} < s_i < +\infty$  (IV.37)

Bukti : dengan induksi matematik.

Untuk  $i = 2$ .

Menurut (IV.35) harga nol dari  $f_{n-1}(\lambda)$  adalah  $r_1 = b_1$ . Dengan (IV.35)

juga diperoleh sangkutan

$$f_{n-2}(\lambda) = (\lambda - b_2) f_{n-1}(\lambda) - c_1^2 f_n(\lambda) \text{ atau}$$

$$f_{n-2}(\lambda) = (\lambda - b_2)(\lambda - b_1) - c_1^2$$

$$f_{n-2}(\lambda) = \lambda^2 - (b_1 + b_2) \lambda - (c_1^2 - b_1 b_2)$$

yang memberikan akar-akar

$$s_1 = \frac{(b_1 + b_2) - \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + 4 c_1^2}}{2} < \frac{(b_1 + b_2) + \sqrt{(b_2 - b_1)^2}}{2}$$

$$s_2 = \frac{(b_1 + b_2) + \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + 4 c_1^2}}{2}$$

Jelas dipenuhi ketaksamaan  $s_1 < r_1 < s_2$ , artinya *Lemma* benar bila-  
na harga  $i = 2$ .

Andaikan *Lemma* juga benar untuk  $i$ , maka harus dibuktikan be-  
nar pula untuk  $(i + 1)$ .

Berdasarkan sifat kedua sekuen *Sturm* untuk setiap  $s_j$ , fung-  
si-fungsi  $f_{n-(i+1)}(\lambda)$  dan  $f_{n-(i-1)}(\lambda)$  berlainan tanda. Anggapan bahwa  
*Lemma* benar untuk  $i$  berarti ketaksamaan (IV.37) dipenuhi, dengan demi-  
kian dari harga nol  $f_{n-1}(\lambda)$  ke harga - harga nol  $f_{n-1}(\lambda)$  berikutnya,  
fungsi  $f_{n-(i-1)}(\lambda)$  akan berubah-ubah tandanya. Di antara  $s_1$  dan  $s_1$  ma-  
ka fungsi  $f_{n-(i+1)}(\lambda)$  memiliki  $(i - 1)$  buah harga nol yang terletak  
di antara (sela-sela) harga-harga nol  $f_{n-1}(\lambda)$ .

Di titik  $s_1$  fungsi  $f_{n-(i+1)}(\lambda)$  berbeda tanda dengan  $f_{n-(i-1)}(\lambda)$ , tetapi begitu bergerak menuju  $-\infty$  mereka akan bertanda sama, karena kedua fungsi tersebut berselisih derajat 2.

Dengan demikian pastilah di antara  $-\infty$  dan  $s_1$  dan di antara  $s_1$  dan  $+\infty$  masing-masing terletak sebuah harga nol fungsi  $f_{n-(i+1)}(\lambda)$ .

Jadi, ketaksamaan (IV.37) berlaku juga untuk  $(i + 1)$ . *Lemma* terbukti.

#### Teorema IV.1

Di setiap harga nol fungsi  $f_0(\lambda)$ , fungsi-fungsi  $f_1(\lambda)$ ,  $f'_0(\lambda)$  bertanda sama.

#### Bukti :

Menurut *Lemma* IV.1 harga-harga nol fungsi-fungsi  $f_0(\lambda)$  dan  $f_1(\lambda)$  saling terpisah, dengan demikian harga-harga nol  $f_0(\lambda)$  berbeda-beda. Akibatnya, di setiap antara dua harga nol fungsi  $f_0(\lambda)$  harus juga terletak harga nol fungsi  $f'_0(\lambda)$ . Dan karena keduanya merupakan polinomial dengan suku pemimpin (*leading term*)  $\lambda^{n-1}$  maka untuk harga  $\lambda$  yang cukup besar  $f_1(\lambda)$  dan  $f'_0(\lambda)$  akan bertanda sama sehingga kedua fungsi tersebut bertanda sama pada harga nol terbesar dari  $f_0(\lambda)$ .

Barang tentu, untuk menghitung harga  $V(x)$  kita harus pula menghitung  $f_{n-1}(\lambda)$  untuk  $\lambda = x$ . Hal ini kita kerjakan dengan menggunakan rumus rekurensi (IV.35).

Metode tri-diagonalisasi adalah suatu metode iterasi berhingga, sehingga kesalahan dalam menentukan matrix B bisa dikendalikan dan harga-harga pribadi matrix ini bisa ditentukan sesuai dengan ketepatan yang diinginkan. Kemudian vektor-vektor pribadi didapat dengan cara di muka, yaitu seperti pada metode *Jacobi*.

Berikutnya akan dibahas teknik penentuan vektor-vektor pribadi matrix A. Misalkan matrix A berhasil dibawa ke bentuk tri-diagonalnya dengan suatu matrix ortogonal S, dan misalkan B bentuk tri-diagonal tersebut (lihat juga IV.33) maka  $B = S^* A S$ .

Untuk mudahnya representasi matrix transformasi (p,q,r) yaitu  $S_{pqr}$  ditulis dengan  $S_i$  dan anggaplah bahwa  $S = S_1 S_2 \dots S_m$  di mana para  $S_i$  adalah matrix-matrix ortogonal juga. Telah dikemukakan sebelumnya vektor pribadi matrix A ditentukan dengan pertolongan vektor pribadinya B (untuk harga pribadi yang sama). Katakanlah bahwa vektor  $\vec{y}$  merupakan vektor pribadi yang bertautan dengan harga pribadi  $\lambda$  dari matrix B.

Maka  $A (S \vec{y}) = (A S) \vec{y} = (S B) \vec{y} = S (B \vec{y}) = S (\lambda \vec{y}) = \lambda S \vec{y}$ , nampak bahwa  $S \vec{y}$  adalah vektor pribadi matrix A yang bertautan dengan  $\lambda$ .

Kesimpulannya demikian :

jika  $\vec{y}$  adalah vektor pribadi matrix B yang bertaut dengan harga pribadi  $\lambda$  (yang juga merupakan harga pribadi matrix A, sebab kedua matrix itu saling similar) maka bila representasi transformasi ortogonal yang membawa matrix A ke bentuk tri-diagonal B adalah sebagai  $B = S^* A S = (S_1 S_2 \dots S_m)^* A (S_1 S_2 \dots S_m)$  kita peroleh konklusi bahwa vektor  $\vec{x} = S \vec{y} = (S_1 S_2 \dots S_m) \vec{y}$  sebagai vektor pribadi matrix A yang bertautan dengan  $\lambda$ .

Sejauh ini kita belum membahas kemungkinan bahwa  $\lambda$  merupakan harga pribadi-lipat (*multiple eigenvalue*) dan sebelum kita ke persoalan itu lebih dahulu akan dibicarakan perhitungan vektor  $\vec{y}$  di atas.

Misalkan  $\vec{y}^* = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Maka dalam menentukan para  $y_i$  kita dihadapkan pada sistem persamaan linier :

$$\begin{aligned}
 (b_1 - \lambda) y_1 + c_1 y_2 + &= 0 \\
 c_1 y_1 + (b_2 - \lambda) y_2 + c_2 y_3 &= 0 \\
 \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots & \\
 c_{n-1} y_{n-1} + (b_n - \lambda) y_n &= 0
 \end{aligned}$$

Dari persamaan itu kita peroleh sangkutan antara para  $y_i$ , yaitu

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 1 \quad (\text{kita ambil begitu}) \\
 y_2 &= (\lambda - b_1)/c_1 \\
 y_{i+1} &= (-1/c_i)[c_{i-1} y_{i-1} + (b_i - \lambda) y_i] \\
 i &= 2, 3, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Algoritma di atas digunakan dalam penentuan vektor pribadi yang bertaut dengan harga pribadi biasa (bukan harga pribadi-lipat).

Selanjutnya kita meninjau keadaan bila  $\lambda$  suatu harga pribadi lipat dari matrix B. Karena itu [1] suatu  $c_i$  berharga nol, misalkanlah  $c_m = 0$ ,  $1 \leq m \leq n-1$ . Telah dikemukakan bahwa determinan matrix B dapat dinyatakan sebagai hasil ganda determinan matrix setipe berdimensi lebih rendah. Sekedar contoh, anggaplah  $\lambda$  harga pribadi lipat-2 dari matrix B; dua buah vektor pribadi yang bertaut dengannya adalah  $\vec{y}_1$  dan  $\vec{y}_2$ . Matrix B kita nyatakan dengan

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & O_1 \\ O_2 & B_2 \end{bmatrix}$$

dengan  $B_1$  dan  $B_2$  adalah matrix-matrix tri-diagonal berturut-turut tipe  $m \times m$  dan  $(n-m) \times (n-m)$ , sedang  $O_1$  dan  $O_2$  matrix-matrix nol dengan tipe (berturut-turut)  $m \times (n-m)$  dan  $(n-m) \times m$ . Jelas  $|B| = |B_1| |B_2|$ .  $\lambda$  bukan harga pribadi-lipat dari  $B_1$  atau pun  $B_2$ .

Menggunakan algoritma di atas kita dapat menentukan vektor-vektor  $\vec{y}^{(1)}$  dan  $\vec{y}^{(2)}$  yang memenuhi kesamaan  $B_1 \vec{y}^{(1)} = \lambda \vec{y}^{(1)}$ , dan  $B_2 \vec{y}^{(2)} = \lambda \vec{y}^{(2)}$ . Katakanlah bahwa

$$\vec{y}^{(1)*} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \dots, y_m^{(1)})$$

$$\vec{y}^{(2)*} = (y_{m+1}^{(2)}, y_{m+2}^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})$$

Ambillah

$$\vec{y}_1^* = (y_1^{(1)}, \dots, y_m^{(1)}, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{y}_2^* = (0, \dots, 0, y_{m+1}^{(2)}, \dots, y_n^{(2)})$$

Atau

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} \vec{y}^{(1)} \\ 0_3 \end{bmatrix} \quad \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} 0_4 \\ \vec{y}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$B_1$  dan  $\vec{y}^{(1)}$ ,  $B_2$  dan  $\vec{y}^{(2)}$ ,  $B_1$  dan  $0_4$ ,  $B_2$  dan  $0_3$ ,  $\vec{y}^{(1)}$  dan  $0_2$ ,  $\vec{y}^{(2)}$  dan  $0_1$ ,  $0_1$  dan  $0_3$ ,  $0_2$  dan  $0_4$  sepasang demi sepasang dapat dikomposisikan (digandakan secara matrix).

$$B \vec{y}_1 = \begin{bmatrix} B_1 & 0_1 \\ 0_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{y}^{(1)} \\ 0_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \vec{y}^{(1)} \\ 0_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \vec{y}^{(1)} \\ 0_3 \end{bmatrix}$$

$$B \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} B_1 & 0_1 \\ 0_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_4 \\ \vec{y}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_4 \\ B_2 \vec{y}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_4 \\ \lambda \vec{y}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Dari pihak lain kita memperoleh hasil

$$\lambda \vec{y}_1 = \begin{bmatrix} \lambda \vec{y}^{(1)} \\ 0_3 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \lambda \vec{y}_2 = \begin{bmatrix} 0_4 \\ \lambda \vec{y}^{(2)} \end{bmatrix}$$

sehingga  $B \vec{y}_1 = \lambda \vec{y}_1$  dan  $B \vec{y}_2 = \lambda \vec{y}_2$ .

Vektor-vektor pribadi matrix A sudah barang tentu adalah  $\vec{x}_1 = S \vec{y}_1$ ,  
dan  $\vec{x}_2 = S \vec{y}_2$

Contoh berikut ini menunjukkan pemakaian metode tersebut untuk menentukan polinomial karakteristik matrix A..

Contoh :

Kita ambil lagi contoh untuk matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0,5 \\ 1 & 1 & 0,25 \\ 0,5 & 0,25 & 2 \end{bmatrix}$$

Menurut metode ini, kita khusus memperhatikan elemen  $a_{13} = 0,5$ .

Dengan rumus-rumus yang telah diberikan, diperoleh  $p = 2$ ,  $q = 3$ ,  $r = 1$   
 $\alpha = 2/\sqrt{5}$ ,  $\sin \phi = -1/\sqrt{5}$  dan  $\cos \phi = 2/\sqrt{5}$ .

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$S^* A S = \begin{bmatrix} 1 & 5/(2\sqrt{5}) & 0 \\ 5/(2\sqrt{5}) & 1,4 & 0,55 \\ 0 & 0,55 & 1,60 \end{bmatrix}$$

Maka  $f_3(\lambda) = 1$ ,  $f_2(\lambda) = \lambda - 1$ ,  $f_1(\lambda) = \lambda^2 - 2,4 \lambda + 0,15$

$f_0(\lambda) = \lambda^3 - 4 \lambda^2 + 3,6875 \lambda + 0,0625$ .

(3) Metode Householder :

Metode ini adalah variasi metode *Given*, matriks  $A$  ditransformasikan ke bentuk tri-diagonal. Keunggulannya dibanding dengan metode *Given* antara lain bahwa cacah operasi hitung yang dibutuhkan lebih sedikit, kira-kira setengah cacah operasi hitung metode *Given* [1]. Dengan meredusir seluruh baris dan kolom menjadi nol (kecuali tentu saja elemen-elemen tri-diagonalnya) secara bersamaan.

Misalkan  $\vec{v}$  vektor yang dipilih sedemikian sehingga berlaku kesamaan

$$\vec{v} * \vec{v} = 1 \quad (\text{IV.37})$$

Maka matrix

$$P = I - 2 \vec{v} \vec{v} * \quad (\text{IV.38})$$

adalah matrix ortogonal dan simetris.

Ditentukan vektor  $\vec{v}_k$  sebagai vektor dengan  $(k-1)$  komponen pertamanya nol, yaitu

$$\vec{v}_k * = (0, 0, \dots, v_k^{(k)}, v_k^{(k+1)}, \dots, v_k^{(n)}) \quad (\text{IV.39})$$

dan

$$P_k = I - 2 \vec{v}_k \vec{v}_k * \quad (\text{IV.40})$$

Didefinisikan matrix

$$A_1 = A; \quad A_k = P_k * A_{k-1} P_k \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \quad (\text{IV.41})$$

Dengan pemilihan tersebut maka semua elemen di  $(k-2)$  bush baris(kolom) matrix  $A_{k-1} = (g_{ij})$ , kecuali elemen-elemen tri-diagonalnya, adalah 0.

Matrix-matrix  $A_{k-1}$  dan  $P_k$  mempunyai bentuk

$$\begin{bmatrix}
 \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 & \dots & 0 \\
 \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \varepsilon_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{k-2,k-2} & \varepsilon_{k-2,k-1} & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & \varepsilon_{k-2,k-1} & \varepsilon_{k-1,k-1} & \dots & \varepsilon_{k-1,n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_{k-1,n} & \varepsilon_{n,n}
 \end{bmatrix}$$

Matrix  $A_{k-1}$  berbentuk seperti di atas. (IV.42)

Matrix  $P_k$  mempunyai bentuk

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 1-2[v_k^{(k)}]^2 & \dots & -2v_k^{(n)}v_k^{(k)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & 2-v_k^{(n)}v_k^{(k)} & \dots & 1-2v_k^{(n)}v_k^{(n)}
 \end{bmatrix}$$

(IV.43)

Matrix  $A_k$  memiliki elemen-elemen 0 pada posisi seperti posisinya 0 pada matrix  $A_{k-1}$ . Tujuannya adalah memilih  $v_k^{(k)}$ , .....,  $v_k^{(n)}$  yang memenuhi persamaan (IV.37) sedemikian sehingga  $(n - k)$  elemen - elemen bukan-diagonal yang terletak di baris (kolom) ke- $(k-1)$  dari matrix  $A_k$  adalah 0. Didefinisikan

$$S = \sum_{j=k}^n \epsilon_{k-1,j}^2 \quad (\text{IV.44})$$

$$(v_k^{(k)})^2 = (1/2) [ 1 \pm (\epsilon_{k-1,k} / \sqrt{S}) ] \quad (\text{IV.45})$$

$$v_k^{(j)} = \pm \epsilon_{k-1,j} / (2 v_k^{(k)} \sqrt{S}) \quad j = k+1, \dots, n \quad (\text{IV.46})$$

Syarat yang harus dipenuhi oleh vektor  $v_k$  (IV.37) telah termuat, di denisi itu karena

$$\begin{aligned} \vec{v}_k^* \vec{v}_k &= \sum_{j=k}^n \{v_k^{(j)}\}^2 = \{v_k^{(k)}\}^2 + \sum_{j=k+1}^n \pm \epsilon_{k-1,j}^2 / (2 v_k^{(k)} \sqrt{S})^2 \\ &= \frac{S \pm \epsilon_{k-1,k}}{2 \sqrt{S}} + \frac{\sum_{j=k+1}^n \pm (\epsilon_{k-1,j})^2}{2 \sqrt{S} (\sqrt{S} \pm \epsilon_{k-1,k})} \\ &= (1/2\sqrt{S}) [ \sqrt{S} \pm \epsilon_{k-1,k} + \frac{1}{\sqrt{S} \pm \epsilon_{k-1,k}} \sum_{j=k+1}^n (\epsilon_{k-1,j})^2 ] \\ &= (1/2\sqrt{S}) [ \sqrt{S} \pm \epsilon_{k-1,k} ] [ S \pm \epsilon_{k-1,k}^2 \pm 2\sqrt{S} \epsilon_{k-1,k} + \\ &\quad \sum_{j=k+1}^n (\epsilon_{k-1,j})^2 ] \\ &= \frac{S \pm 2\sqrt{S} \epsilon_{k-1,k} + S}{2\sqrt{S} (\sqrt{S} \pm \epsilon_{k-1,k})} = \frac{[ S \pm \epsilon_{k-1,k} ] \sqrt{S}}{\sqrt{S} (S \pm \epsilon_{k-1,k})} = 1. \end{aligned}$$

Dengan definisi tersebut  $A_k$  mempunyai elemen nol di  $(k-1)$  baris pertama pada posisi yang sama seperti  $(k-1)$  buah baris pertama matrix  $A_{k-1}$

Untuk mudahnya katakanlah  $A_k = (a_{ij})$ ,  $A_{k-1} = (\varepsilon_{ij})$  dan  $P = (p_{ij})$ .  
Mengingat bahwa  $A_k$  matrix simetris maka kita tinggal membuktikan bahwa  
 $h = 1, 2, \dots, k-1$  dan  $j = h + 2, h + 3, \dots, n$  elemen-elemen  $a_{hj}$   
adalah nol. Menurut teori matrix dan sifat simetris matrix  $P_k$

$$a_{hj} = \sum_{s=1}^n (p_{hs} \varepsilon_{hs} p_{sj}) = p_{hh} (\varepsilon_{h,h-1} p_{h-1,j} + \varepsilon_{hh} p_{hj} + \varepsilon_{h,h+1} p_{h+1,j}) = p_{hh} (0 + 0 + 0) = 0$$

Setiap suku pada jumlahan itu berharga nol karena daerah jelajah  $j$  tak memuat harga-harga  $(h-1)$ ,  $h$  atau pun  $(h+1)$ .

Secara analog, kita akhirnya akan memperoleh matrix tri-diagonal  $A_{n-1}$  seperti yang kita kehendaki.

Nampak bahwa matrix-matrix  $P_k$  mempunyai peranan besar di dalam usaha memperoleh jawaban yang tepat dan, mengingat (IV.39), komponen-komponen vektor-vektor  $\vec{v}_k$  memegang peranan penting atas ketepatan. Karena itu, mengingat (IV.46), kita harus memilih tanda + atau - sedemikian sehingga magnitud  $v_k^{(k)}$  sebesar mungkin.

Operasi hitung metode ini adalah dari orde  $(2/3) n^3$  ditambah  $(2n - 4)$  operasi penarikan akar (pangkat dua).

Akar pribadi dan vektor pribadi matrix  $A$  dihitung dengan cara seperti teknik perhitungan pada metode *Given* atau bila  $\vec{y}$  merupakan vektor pribadi matrix  $A_{n-1}$  maka vektor pribadi matrix  $A$  adalah

$$\vec{x} = P_2 P_3 \dots P_{n-1} \vec{y}. \quad (IV.47)$$



similar

$$T = S^{-1} A S \quad (\text{IV.48})$$

Kita konstruksikan sekuen vektor-vektor  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  sedemikian sehingga mereka merupakan kolom-kolom matrix S yang memenuhi persamaan (IV.48). Di samping itu, kita juga mengkonstruksikan sekuen vektor-vektor  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$  sedemikian sehingga  $\{\vec{x}_i\}$  dan  $\{\vec{y}_i\}$  bi-ortogonal, maksudnya

$$\vec{y}_i^* \vec{x}_j = 0 \quad \text{bila } i \neq j \quad (\text{IV.49})$$

Berikutnya kita ikuti rumus rekurensi untuk mengkonstruksikan dua buah sekuen yang kita kehendaki tadi

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= A \vec{x}_k - b_k \vec{x}_k - c_{k-1} \vec{x}_{k-1} \\ \vec{y}_{k+1} &= A^* \vec{x}_k - b_k \vec{x}_k - c_{k-1} \vec{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

dengan  $\vec{x}_0 = \vec{y}_0 = 0$ ,  $\vec{x}_1$  dan  $\vec{y}_1$  vektor-vektor sebarang, para  $b_k$  dan  $c_k$  didefinisikan menurut

$$b_k = (\vec{y}_k^* A \vec{x}_k) / (\vec{y}_k^* \vec{x}_k) \quad (\text{IV.51})$$

$$c_{k-1} = (\vec{y}_{k-1}^* A \vec{x}_k) / (\vec{y}_{k-1}^* \vec{x}_{k-1}); \quad c_0 = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

Mengingat (IV.51), kita harus mengandaikan lebih dahulu bahwa  $\vec{y}_j^* \vec{x}_j \neq 0$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n-1$ .

#### Teorema IV.2

Sistem vektor-vektor yang didefinisikan dengan (IV.50) dan (IV.51) memenuhi (IV.49) untuk harga  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Bukti : Dengan induksi matematik.

Berdasarkan konstruksi di atas diperoleh

$$\vec{x}_2 = A \vec{x}_1 - b_1 \vec{x}_1 = A \vec{x}_1 - (\vec{y}_1^* A \vec{x}_1 / \vec{y}_1^* \vec{x}_1) \vec{x}_1$$

$$\vec{y}_1^* \vec{x}_2 = \vec{y}_1^* A \vec{x}_1 - (\vec{y}_1^* A \vec{x}_1 / \vec{y}_1^* \vec{x}_1) (\vec{y}_1^* \vec{x}_1) = 0$$

Analog,  $\vec{x}_1^* \vec{y}_2 = 0$ . Jadi teorema terbukti benar untuk  $i, j = 1, 2$ .

Andaikan teorema benar juga bila  $i, j = 1, 2, \dots, k$ .

$$\vec{y}_j^* \vec{x}_{k+1} = \vec{y}_j^* A \vec{x}_k - (\vec{y}_k^* A \vec{x}_k / \vec{y}_k^* \vec{x}_k) (\vec{y}_j^* \vec{x}_k) -$$

$$(\vec{y}_{k-1}^* A \vec{x}_k / \vec{y}_{k-1}^* \vec{x}_{k-1}) (\vec{y}_j^* \vec{x}_{k-1})$$

Bila  $j = k$ , suku pertama sama dengan suku kedua sedangkan suku ketiga berharga nol (teorema benar untuk  $i, j = 1, 2, \dots, k$ ); ruas kanan 0.

Bila  $j = k-1$ , suku pertama sama dengan suku ketiga sedangkan suku kedua berharga nol (teorema benar untuk  $i, j = 1, 2, \dots, k$ ); ruas kanan adalah 0. Bila  $j < k-1$ , maka suku kedua dan ketiga berharga nol.

Sehingga

$$\vec{y}_j^* \vec{x}_{k+1} = \vec{y}_j^* A \vec{x}_k = \vec{x}_k^* A^* \vec{y}_j$$

PERPUSTAKAAN  
PUSAT PENELITIAN GAMA  
BATAN

Bila persamaan kedua dalam (IV.50) digandakan dengan  $\vec{x}_k^*$  dari kiri, maka mengingat  $j < k-1$  atau  $j + 1 < k$ , hasilnya adalah nol karena

$$\vec{x}_k^* \vec{y}_{j+1} = \vec{x}_k^* A^* \vec{y}_j - b_j \vec{x}_k^* \vec{y}_j - c_{j-1} \vec{x}_k^* \vec{y}_{j-1}$$

dan ruas kiri berharga nol (hipotesis induksi dan  $j + 1 < k$ ), demikian pula suku kedua dan ketiga di ruas kanan. Suku pertama ruas kanan = 0.

Jadi telah terbukti  $\vec{y}_j^* \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k^* A^* \vec{y}_j = 0$ ; analog bisa diperlihatkan bahwa  $\vec{x}_j^* \vec{y}_{k+1} = 0$ . Teorema benar untuk  $i, j = 1, 2, \dots, k + 1$ .

Terbukti teorema IV.2.

#### Kesimpulan IV.1

Dengan mengandaikan bahwa  $\vec{y}_j^* \vec{x}_j \neq 0$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n$

maka diperoleh bahwa

- (a) Vektor-vektor  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  independen linier.  
 (b) Jika kita menggunakan (IV.50) untuk  $k = n$ , maka  $\vec{x}_{n+1} = \vec{0}$ .

Bukti :

(a) Andaikan bahwa untuk suatu harga  $j < n$ ,  $\vec{x}_j$  merupakan kombinasi linier vektor-vektor  $\vec{x}_k$  dengan  $k < j$ , maka

$$\vec{x}_j = \sum_{k=1}^{j-1} a_k \vec{x}_k$$

Menggunakan bi-ortogonalitas,  $\vec{y}_j^* \vec{x}_j = \sum_{k=1}^{j-1} a_k \vec{y}_j^* \vec{x}_k = 0$ ; kontradiksi dengan pengandaian di atas. Akibat (a) terbukti benar.

(b) Andaikan kita menggunakan (IV.50) untuk menghasilkan  $\vec{x}_{n+1}$  artinya kita mengambil  $k = n$  dan  $\vec{y}_n^* \vec{x} \neq 0$ , maka menurut langkah pembuktian bagian (a) persamaan (IV.49) tetap berlaku untuk sekuen  $\{\vec{x}_i\}$  dan  $\{\vec{y}_i\}$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Akibatnya ialah kesimpulan (IV.a) pun masih benar, artinya kita mendapatkan  $(n + 1)$  buah vektor independen linier di dalam ruang vektor dimensi  $n$ . Hal ini tak mungkin benar. Jadi tak ada kemungkinan lain kecuali bahwa  $\vec{x}_{n+1} = \vec{0}$ .

Menggunakan kesimpulan di atas, bagian pertama rumus rekurensi (IV.50) kita tulis ulang sebagai

$$\begin{aligned} A \vec{x}_1 &= \vec{x}_2 + b_1 \vec{x}_1 \\ A \vec{x}_k &= \vec{x}_{k+1} + b \vec{x}_k + c_{k-1} \vec{x}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \\ A \vec{x}_n &= b_n \vec{x}_n + c_{n-1} \vec{x}_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.52})$$

Sehingga, jika  $S$  adalah matrix non-singular yang mempunyai kolom-kolom  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$  maka mengingat (IV.52) kita memperoleh bentuk  $A S = S T$  berikut ini :

$$AS = S \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & b_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \end{bmatrix} = ST \quad (IV.53)$$

Matrix tri-diagonal T dalam (IV.53) memenuhi kehendak kita dalam persamaan (IV.48), matrix tersebut kita tentukan dengan menghitung  $b_1$  dan  $c_1$  dalam (IV.51) dengan mengambil vektor-vektor  $\vec{x}_1$  dan  $\vec{y}_1$  sebarang.

Polinomial karakteristik matrix T ditentukan dengan cara mirip pada metode *Given*, yaitu dengan rumus rekurensi

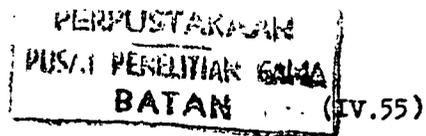
$$f_{n-(i+1)}(\lambda) = (\lambda - b_{i+1}) f_{n-i}(\lambda) - c_i f_{n-(i-1)}(\lambda) \quad (IV.54)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$

dengan  $f_n(\lambda) = 1$  dan  $f_{n-1}(\lambda) = -b_1 + \lambda$ .

Persamaan karakteristiknya adalah

$$f_0(\lambda) = 0$$



Akan tetapi sekuen  $\{f_i(\lambda)\}$  bukan sekuen *Sturm*.

Sejauh ini kita berhasil memaparkan teknik perhitungan untuk metode *Lanczos*, tetapi harus diingat bahwa kita telah mengandaikan (di muka)  $\vec{y}_j^* \vec{x}_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$ .

Bila pengandaian tidak berlaku pada suatu persoalan tertentu atau kita dihadapkan pada problem di mana  $\vec{y}_j^* \vec{x}_j = 0$  untuk suatu harga  $j \leq n$ , maka harus ditinjau lebih dahulu dua kemungkinan sebagai berikut:

(1) Vektor  $\vec{x}_j$  dan  $\vec{y}_j$  keduanya tidak sama dengan vektor  $\vec{0}$ , jadi mereka ortogonal. Keadaan ini memang jarang ditemui, tetapi bila terjadi maka kita harus mulai proses perhitungan dengan memilih vektor-vektor  $\vec{x}_1$  dan  $\vec{y}_1$  yang lainnya.

(2) Salah satu dari  $\vec{x}_j$  atau  $\vec{y}_j$  adalah  $\vec{0}$ , atau keduanya  $\vec{0}$ .

Persamaan (IV.50) dapat ditulis sebagai

$$\vec{x}_j = P_{j-1}(A) \vec{x}_1 \quad \text{dan} \quad \vec{y}_j = P_{j-1}(A^*) \vec{y}_1 \quad (\text{IV.56})$$

dengan  $P_{j-1}$  adalah polinomial derajat  $(j-1)$  dalam  $A$ . Kalau kita lihat lagi persamaan (IV.50) dan (IV.54) maka

$$P_k(A) = f_{n-k}(A) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.57})$$

Misalkanlah bahwa  $\vec{x}_j = \vec{0}$ .

Kita dihadapkan lagi pada dua kemungkinan, yaitu :

(a)  $P_{j-1}(A) \equiv 0$ . Maka  $P_{j-1}(\lambda)$  merupakan kelipatan polinomial minimal sehingga harga-harga pribadi bisa diperoleh dari  $f_{n-j+1}(\lambda)$ .

(b)  $P_{j-1}(A) \not\equiv 0$ . Maka proses bi-ortogonalitas kita lanjutkan dengan :

- memilih vektor  $\vec{x}_j$  yang ortogonal dengan  $\vec{y}_k$  untuk  $k < j$
- memberi harga  $c_{j-1} = 0$  pada persamaan kedua dalam (IV.50), sedangkan  $c_{j-1}$  pada persamaan pertama ditentukan menggunakan (IV.51)
- melanjutkan perhitungan seperti yang telah dikemukakan di muka.

Bisa diperlihatkan bahwa vektor-vektor yang dihasilkan akan bi-ortogonal. Dalam hal ini  $P_{j-1}(\lambda)$  merupakan pembagi (*divisor*) polinomial karakteristik. Jadi, dari kemungkinan (2) kita tinggal membahas keadaan  $\vec{y}_j = \vec{0}$  dan bila  $\vec{x}_j = \vec{0}$  dan  $\vec{y}_j = \vec{0}$  bersamaan. Caranya mirip di atas dengan sedikit modifikasi saja.

Contoh :

Menggunakan metode *Lanczos* kita akan mencari harga-harga pribadi matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Dipilih vektor-vektor

$$\vec{x}_1^* = \vec{y}_1^* = (0,0,1), \text{ maka}$$

$$(A\vec{x}_1)^* = (3,1,-1)$$

$$(A^*\vec{y}_1)^* = (1,3,-1)$$

$$b_1 = -1/1 = -1$$

$$\vec{x}_2^* = (3,1,0)$$

$$\vec{y}_2^* = (1,3,0)$$

$$(A\vec{x}_2)^* = (4,4,6)$$

$$(A^*\vec{y}_2)^* = (5,1,6)$$

$$b_2 = 8/3$$

$$c_1 = 6$$

$$\vec{x}_3^* = (-4,4/3,0)$$

$$\vec{y}_3^* = (7/3,-7,0)$$

$$(A\vec{x}_3)^* = (-32/3,-8/3,0)$$

$$(A^*\vec{y}_3)^* = (-7/3,-35/3,0)$$

$$b_3 = 1/3$$

$$c_2 = -28/9$$

sehingga

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & 8/3 & -28/9 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$f_0(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Dengan demikian harga-harga pribadi matrix A adalah 3, -2, 1.

Sekarang, andaikan bahwa kita memilih vektor-vektor

$$\vec{x}_1^* = \vec{y}_1^* = (1,0,0); \text{ maka}$$

$$(\overrightarrow{Ax}_1)^* = (2,1,1) \qquad (A^* \overrightarrow{y}_1)^* = (2,-2,3)$$

$$b_1 = 2$$

$$\overrightarrow{x}_2^* = (0,1,1)$$

$$\overrightarrow{y}_2^* = (0,-2,3)$$

$$(\overrightarrow{Ax}_2)^* = (1,2,2)$$

$$(A^* \overrightarrow{y}_2)^* = (1,7,-5)$$

$$b_2 = 2$$

$$c_1 = 1$$

$$\overrightarrow{x}^* = (0,0,0) = \vec{0}.$$

Jadi kita sampai ke keadaan di mana metode seperti di atas tak berlaku sehingga kita harus menghitung ulang dengan mengikuti petunjuk di muka

$$\overrightarrow{x}_1^* = \overrightarrow{y}_1^* = (1,0,0)$$

$$b_1 = 2$$

$$\overrightarrow{x}_2^* = (0,1,1)$$

$$\overrightarrow{y}_2^* = (0,-2,3)$$

$$b_2 = 2$$

$$c_1 = 1$$

kemudian dipilih vektor  $\overrightarrow{x}_3$  yang ortogonal dengan  $\overrightarrow{y}_1$  dan  $\overrightarrow{y}_2$ , misalnya :

$$\overrightarrow{x}_3 = (0,3,2)$$

$$(\overrightarrow{Ax}_3)^* = (0,5,7)$$

$$\overrightarrow{y}_3 = A^* \overrightarrow{y}_2 - b_2 \overrightarrow{y}_2 - 0 \cdot \overrightarrow{y}_1 = (1,11,-11)^*$$

$$b_3 = -2$$

$$c_2 = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Kita dapatkan bahwa

$$P_2(A) = A^2 - 4A + 3I \neq 0 \text{ (matrix)}$$

Menggunakan (IV.54) dalam menentukan harga-harga pribadi, diperoleh :

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \text{ dan } f_0(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Harga-harga pribadi matrix A adalah 3, -2, 1.

(2) Supertriangularization and deflation :

Dari uraian tentang metode *Given* dan *Householder* kita kenal bahwa matrix simetris-riil  $A$  dibawa ke bentuk tri-diagonalnya, menggunakan transformasi-transformasi, dengan cara mengenkolkan elemen-elemen di atas diagonal utama kecuali elemen-elemen  $a_{i(i+1)}$ . Kemudian karena sifat simetri matrix  $A$  elemen-elemen di bawah diagonal utama yang simetris dengan elemen-elemen tersebut juga menjadi nol sehingga diperoleh matrix tri-diagonal. Jelas, jika transformasi tersebut dikenakan pada matrix non-simetris  $A$  akan diperoleh matrix baru dalam bentuk matrix *Hessenberg* atas. Bila transformasi ortogonal kita ganti eliminasi *Gauss* akan diperoleh juga hasil yang sama, yaitu matrix dalam bentuk *Hessenberg* atas, dengan keuntungan berkurangnya komputasi yang diperlukan; metode lebih stabil bila digunakan *positioning for size* [1].

Misalkan kita telah berhasil, dengan menggunakan transformasi similar, mengenkolkan elemen-elemen bukan-diagonal (segi-tiga atas) pada baris-baris pertama, kedua, ....., ke-( $k-1$ ). Katakanlah pada babak ini elemen matrixnya adalah  $a_{ij}$ . Untuk baris ke- $k$ , kita lakukan :

a. di antara elemen-elemen  $a_{k(k+1)}, a_{k(k+2)}, \dots, a_{kn}$  kita pilih  $a_{kl}$  dengan magnitud terbesar, kemudian pertukarkan kolom ke- $l$  dan ke- $(k+1)$ ,

b. dihitung

$$m_{kj} = -(a_{kj} / a_{k(k+1)}) \quad j = k+2, k+3, \dots, n \quad (\text{IV.58})$$

magnitud  $m_{kj}$  tak akan melebihi 1 karena langkah a.

c. kolom ke- $j$  ditambah dengan  $m_{kj}$  kali kolom ke- $(k+1)$  untuk  $j = k+2, k+3, \dots, n$ .

Langkah a bersama setiap langkah c tak lain adalah menggandakan matrix tersebut dengan matrix-matrix kolom elementer dari kanan. Jelas, elemen yang sama dengan nol pada baris-baris pertama, kedua, ....., ke-(k-1) tetap tak berubah. Dari kiri digandakan dengan invers matrix-matrix elementer. Dengan mengerjakan berulang untuk  $k = 1, 2, \dots, n-2$  akan diperoleh matrix  $B = (b_{ij})$  dalam bentuk *Hessenberg*. Karena magnitud  $m_{kj}$  tak melebihi 1 (IV.58), maka metode ini stabil terhadap kesalahan pembulatan [1].

Cacah operasi hitungnya adalah  $(2/3)n^3 + \text{orde}(n^2)$ , sedang metode *Householder* bila digunakan untuk matrix non-simetris memerlukan  $(4/3)n^3 + \text{orde}(n^2)$  ditambah dengan  $(n-2)$  kali operasi penarikan akar pangkat dua.

Berikutnya kita perhatikan bagaimana harga pribadi dan vektor pribadi ditentukan, juga bagaimana matrix B dideflasi ke suatu matrix bertipe  $(n-1) \times (n-1)$ .

Kita andaikan bahwa setiap  $b_{i(i+1)}$  tidaklah nol. Pengandaian ini tidak membatasi ke-umum-an pembahasan sebab bila suatu  $b_{i(i+1)}$ , misalnya, sama dengan nol maka B dapat diubah menjadi

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{bmatrix} \quad B_1 \text{ bertipe } (1) \times (1)$$

di mana  $B_1$  dan  $B_2$  adalah matrix-matrix *Hessenberg*.

Bila  $\vec{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , sistem persamaan yang diperoleh dari persamaan matrix  $(B - \lambda I) \vec{x} = 0$  adalah

$$\begin{aligned}
 (b_{11} - \lambda) x_1 + b_{12} x_2 &= 0 \\
 b_{21} x_1 + (b_{22} - \lambda) x_2 + b_{23} x_3 &= 0 \\
 \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots & \\
 b_{n1} x_1 + b_{n2} x_2 + \dots\dots\dots + (b_{nn} - \lambda) x_n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.59}$$

Ambillah suatu harga  $\lambda$  dan  $x_1 = 1$  untuk persamaan pertama (IV.59).  
 (n-1) buah persamaan pertama (IV.59) dapat diselesaikan, memberi harga parameter  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Harga  $\lambda$ , para  $x_i$  yang didapat akan memenuhi persamaan terakhir (IV.59) hanya bila  $\lambda$  yang kita ambil di atas adalah suatu harga pribadi matrix B.

Ruas kiri persamaan terakhir kita tulis sebagai  $F(\lambda)$ , diperlihatkan bahwa  $F(\lambda)$  merupakan kelipatan persamaan karakteristiknya.

Matrix  $B - \lambda I$  mempunyai bentuk

$$\begin{bmatrix}
 b_{11} - \lambda & b_{12} & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\
 b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} & \dots\dots\dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & b_{n-1(n)} \\
 b_{n1} & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & b_{nn} - \lambda
 \end{bmatrix}
 \tag{IV.60}$$

Kolom pertama matrix di atas kita gandakan dengan  $x_1$  kemudian untuk  $i=2, 3, \dots, n$  kolom ke-i matrix (IV.60) digandakan dengan  $x_i$  dan ditambahkan pada kolom pertama tadi untuk memperoleh matrix

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccc}
 0 & b_{12} & 0 & \dots \dots \dots 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & b_{22} - \lambda & b_{23} & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
 F(\lambda) & b_{n2} & \dots \dots \dots & b_{nn} - \lambda
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (IV.61)$$

Maka

$$|B - \lambda I| = F(\lambda) \prod_{i=1}^{n-1} b_{i,i+1} = c F(\lambda) \quad (IV.62)$$

di mana  $c \neq 0$ , oleh sebab pengandaian bahwa setiap  $b_{i(i+1)} \neq 0$ .

Untuk mencari harga nol  $F(\lambda)$  kita bisa menggunakan metode *secant* atau *Laguerre*.

Setelah harga-harga pribadi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ditentukan kemudian dengan (IV.59) ditentukan vektor-vektor pribadi yang bertaut dengannya.

Misalkan kita telah mendapatkan harga pribadi  $\lambda_1$ .

$S_{n-1,n}$  adalah matrix rotasi bidang pada (IV.8) dengan  $p = n-1$  dan  $q = n$ , sedangkan

$$B_{\lambda} = B - \lambda_1 I \quad (IV.63)$$

Elemen baris ke- $n$  kolom ke- $n$  matrix  $S_{n-1,n} B$  adalah

$$-\sin \phi b_{n-1,n} + \cos \phi (b_{nn} - \lambda_1) \quad (IV.64)$$

Bila sudut  $\phi$  kita pilih sedemikian sehingga  $\text{tg } \phi = (b_{nn} - \lambda_1) / b_{n-1,n}$  maka elemen tersebut adalah nol.

Langkah berikutnya adalah memilih matrix rotasi bidang  $S_{n-2,n}$  yang memusnahkan elemen baris ke-n kolom ke-(n-1) matrix  $S_{n-1,n} B_\lambda$ , dan tanpa mengubah elemen baris ke-n kolom ke-n. Dengan cara itu kita mengambil sekuen matrix rotasi bidang  $S_{in}$ ,  $i = n, n-1, \dots, 1$  sehingga

$$T = S_{1n} S_{2n} \dots S_{n-1,n} B = S B \quad (\text{IV.65})$$

bersifat elemen-elemen baris terakhir kolom ke-2, 3, ..., n adalah nol. Dengan kata lain, setiap matrix rotasi bidang dipilih sedemikian sehingga memusnahkan  $(i + 1)$  buah elemen pertama baris terakhir.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & t_{22} & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & t_{n-1,2} & \dots & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ t_{n1} & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.66})$$

Jika setiap elemen  $b_{i,i+1}$  dari matrix B tidak sama dengan nol maka begitu pula setiap elemen  $t_{i,i+1}$ .

$$\text{Det}(T) = (-1)^{n-1} t_{n1} \prod_{i=1}^{n-1} t_{i,i+1} \quad (\text{IV.67})$$

Berdasarkan (IV.65) dan mengingat  $\lambda_1$  suatu harga pribadi matrix B

$$\text{Det}(T) = \text{Det}(S) \cdot \text{Det}(B) = 0 \quad (\text{IV.68})$$

Karena itu maka  $t_{n1} = 0$ ; jadi seluruh elemen baris terakhir adalah 0.

Juga diperoleh

$$S B S^* = S B_\lambda S^* + \lambda_1 I \quad (\text{IV.69})$$

berbentuk sebagai

$$S B S^* = \begin{bmatrix} & & & \alpha_{1n} \\ & B_1 & & \\ & & & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

dengan  $\alpha_{jn}$  adalah konstan-konstan, matrix  $B_1$  berbentuk *Hessenberg*. Matrix  $S$  telah dihitung karena dia adalah hasil ganda matrix-matrix rotasi bidang. Hingga sejauh ini kita telah membahas metode deflasi matrix; setiap kali harga pribadi kita mendeflasi matrix *supertriangular* yang diperoleh. Menurut [1], teknik deflasi matrix kadang-kadang tidak stabil.

Untuk harga pribadi kompleks murni kita akan terlibat arithmetik bilangan-bilangan kompleks dan matrix rotasi bidang diganti oleh transformasi uniter.

Metode deflasi membuka kemungkinan menghitung polinomial karakteristik matrix  $B$  untuk berbagai harga pribadi. Bila  $\lambda_1$  pada persamaan (IV.63) bukan suatu harga pribadi maka  $t_{n1}$  belum tentu 0, tetapi karena determinan setiap matrix rotasi bidang adalah 1 maka

$$\text{Det}(T) = \text{Det}(S) \text{Det}(B - \lambda_1 I) = \text{Det}(B - \lambda_1 I) \quad (\text{IV.71})$$

sehingga persamaan (IV.67) untuk  $\lambda = \lambda_1$  memberikan harga nol persamaan karakteristik matrix  $B$ . Dengan cara sama, kita peroleh harga pribadi (dengan metode *secant*) jika kita hitung determinan tadi untuk sekuen harga-harga  $\lambda$ .

Ccontoh :

Berikut ini kami kemukakan contoh penggunaan eliminasi *Gauss* dan metode deflasi untuk matrix [1]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Jika kita tukarkan kolom kedua dan ketiga kemudian elemen baris pertama kolom ketiga dieliminasi, diperoleh matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5/3 \\ 1 & -1 & 7/3 \end{bmatrix}$$

Atau, matrix di atas diperoleh dengan menggandakan dari kanan matrix A dengan matrix elementer  $E_{23}$  dan  $E_{23}^{-1}(2/3)$  di mana

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{23}^{-1}(2/3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Menurut metode ini, maka

$$B = E_{23}^{-1}(2/3) E_{23}^{-1} A E_{23} E_{23}^{-1}(2/3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1/3 & -5/3 & 11/9 \\ 1 & 1 & 5/3 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung harga pribadi matrix B, kita ambil pendekatan awalnya  $\lambda = 0$  dan  $\lambda = 1/2$  kemudian menggunakan (IV.59) kita menghitung harga  $F(0) = -18/11$  dan  $F(1/2) = -75/88$ . Pendekatan kedua, dihitung dengan metode *secant*, adalah  $\lambda = 24/23$ . Begitu seterusnya, akhirnya menuju ke

harga  $\lambda = 1$ .

Anggaplah bahwa kita telah memperoleh harga  $\lambda = 1$  tersebut.

Maka

$$B_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1/3 & -8/3 & 11/9 \\ 1 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

yang dideflasikan menggunakan (IV.64) dengan mengambil  $\sin \phi = 6/\sqrt{157}$   
dan  $\cos \phi = 11/\sqrt{157}$ .

Mengingat  $S_{23}$  maka kita peroleh

$$S_{23} B_{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 29/3\sqrt{157} & -70/3\sqrt{157} & \sqrt{157}/9 \\ 9/\sqrt{157} & 27/\sqrt{157} & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk memusnahkan elemen lainnya di baris ketiga kita gunakan matrix :

$$S_{13} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{157}}{\sqrt{238}} & 0 & \frac{9}{\sqrt{238}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-9}{\sqrt{238}} & 0 & \frac{\sqrt{157}}{\sqrt{238}} \end{bmatrix}$$

Akhirnya didapat  $S_{13} S_{23} B_{\lambda} S_{23}^* S_{13}^* + \lambda_1 I$  sebagai

$$\begin{bmatrix} 152/157 & 33\sqrt{238}/157 & -27/\sqrt{157} \\ 13,514/471\sqrt{238} & 5/157 & 2204/(9\sqrt{157}\sqrt{238}) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Minor utama, tipe (2 x 2), akan mempunyai harga-harga pribadi -2 dan 3.

## V. KESIMPULAN

Kita sekarang berusaha menarik beberapa kesimpulan umum tentang metode-metode perhitungan harga pribadi dan vektor pribadi yang telah dibahas di muka.

- (1) Metode *Jacobi* digunakan untuk matrix-matrix riil-simetris.

Matrix A yang akan kita hitung harga pribadi dan vektor pribadinya dikenai suatu transformasi ortogonal agar dia berbentuk matrix diagonal yang similar dengan A. Harga-harga pribadi matrix A dengan demikian mudah diketahui berdasarkan pengamatan atas matrix diagonal tersebut. Matrix ortogonal yang merepresentasikan transformasi itu kolom-kolomnya adalah vektor-vektor pribadi matrix A dan merupakan hasil ganda matrix-matrix rotasi bidang. Matrix rotasi bidang dipilih sedemikian sehingga memusnahkan (mengenolkan) elemen bukan diagonal dengan magnitud terbesar dari matrix yang dikenai transformasi rotasi bidang itu. Setiap babak perhitungan memusnahkan satu buah elemen demikian itu. Metode *Jacobi* juga memberikan sangkutan antara elemen-elemen matrix pada sekuen matrix rotasi bidang (rumus rekurensi IV.8 - IV.16). Metode ini banyak digunakan di dalam komputasi menggunakan komputer *digital* dan adalah metode iterasi tak berhingga.

- (2) Menentukan elemen bukan-diagonal mana yang harus dimusnahkan memaksa kita (komputer) membandingkan magnitud elemen-elemen bukan-diagonal di atas diagonal matrix. Ini pekerjaan yang rumit dan sudah barang tentu membutuhkan waktu hitung. Pula, bisa terjadi bahwa elemen yang telah musnah pada suatu babak perhitungan akan

berubah harganya pada akhir babak berikutnya. Salah satu jalan ke luar yaitu memakai metode ambang-*Jacobi* di mana elemen matrix dengan magnitud melewati harga ambang yang telah ditentukan dianggap pantas untuk dimusnahkan.

- (3) Ketelitian dalam proses penarikan akar pangkat dua (IV.15) mempunyai andil besar dalam usaha menghasilkan jawab yang teliti.
- (4) Untuk matrix riil-simetris kita mempunyai metode kedua yaitu metode *Given*. Berbeda dengan metode *Jacobi*, dalam hal ini matrix  $A$  ditransformasikan ke bentuk tri-diagonal dengan transformasi ortogonal yang representasinya merupakan hasil ganda matrix-matrix ortogonal  $S(p,q,r)$ . Sub-sekuen matrix-matrix ini akan memusnahkan elemen-elemen bukan-diagonal dari baris ke- $r$ . Oleh pengaturan urutan operasi transformasi maka elemen-elemen bukan-diagonal yang telah dimusnahkan pada suatu babakan perhitungan takkan berubah dengan berakhirnya babak selanjutnya.

Jadi, transformasi (perhatikan urutan)

$$S(j,i,j-1) \quad \begin{array}{l} j = 2, \dots, n-1 \\ i = j+1, \dots, n \end{array}$$

membawa matrix  $A$  ke bentuk tri-diagonalnya.

- (5) Elemen-elemen matrix  $S(p,q,r)$  ditentukan dengan (IV.26 - IV.28) dan sangkutan antara elemen-elemen sekuen matrix  $S(p,q,r)$  telah diberikan. Metode *Given* adalah metode iterasi berhingga, lebih disukai dibandingkan metode *Jacobi*. Harga-harga pribadi ditentukan dari persamaan karakteristik yang diperoleh dengan rumus rekurensi dan bantuan matrix tri-diagonal yang dihasilkan oleh transformasi

ortogonal di atas. Dengan memperhitungkan operasi hitung untuk pembagian seharga dengan untuk pergandaan, tanpa memperhitungkan operasi penjumlahan atau pun pengurangan, maka metode ini memerlukan  $\frac{4}{3} n^3$  operasi hitung ditambah dengan  $(n-2)(n-1)/2$  operasi penarikan akar pangkat dua (orde cacah operasi).

- (6) Vektor-vektor karakteristik dihitung dengan bantuan matrix-matrix  $S(p,q,r)$  dan matrix tri-diagonal.
- (7) Metode ketiga untuk matrix riil-simetris adalah metode Householder. Ini merupakan modifikasi metode *Given*, representasi matrix dari transformasi ortogonalnya adalah suatu matrix ortogonal-simetris. Transformasi itu membawa matrix  $A$  ke bentuk (IV.42), sedangkan matrix representasinya merupakan hasil ganda matrix-matrix  $P_k$  dengan kolom-kolom tertentu yang ditentukan dengan (IV.40).
- (8) Harga pribadi dan vektor pribadi ditentukan seperti pada metode *Given*, yaitu dengan rumus rekurensi ditentukan persamaan karakteristiknya lantas dicari harga nol polinomial karakteristik itu dengan metode-metode yang telah dikenal, antara lain *Laquerre*, *secant*, *graeffe*.
- (9) Beda antara metode *Given* dan *Householder* adalah dalam cacah operasi hitung yang diperlukan. Di sini kita terlibat dalam (orde)  $\frac{2}{3} n^3$  operasi pergandaan dan pembagian ditambah  $(n-2)$  kali penarikan akar pangkat dua.
- (10) Metode pertama untuk matrix-matrix riil-non simetris adalah metode *Lanczos*. Kalau pada metode *Given* transformasi ortogonal akan membawa  $A$  ke bentuk matrix tri-diagonal maka pada metode ini  $A$  di-

bawa ke matrix segi-tiga dengan suatu transformasi similar (kadang-kadang ortogonal). Sifat simetri matrix riil-simetris  $A$  memungkinkan transformasi ortogonal mengubahnya ke bentuk matrix diagonal atau tri-diagonal. Akan tetapi bila  $A$  non simetris maka transformasi semacam itu boleh jadi tak membawa ke matrix-matrix dalam bentuk di atas melainkan ke bentuk *Hessenberg*. Metode ini juga dikenal sebagai metode iterasi minimum. Dalam pembahasan di muka dikemukakan juga bagaimana metode ini menentukan elemen-elemen matrix segi-tiga dengan rumus rekurensi. Setelah matrix segi-tiga tersebut dihitung maka ditentukan (dengan cara seperti metode *Householder*, *Given*) persamaan karakteristik dan harga-harga nol persamaan ini. Sehingga kita memperoleh harga-harga pribadinya  $A$ .

- (11) Dalam menentukan elemen-elemen matrix segi-tiga menurut metode ini, telah dikonstruksikan dua buah sekuen vektor-vektor yang bi-ortogonal. Untuk matrix-matrix berdimensi besar kesulitan mengkonstruksikan vektor-vektor yang demikian itu sangat terasa, mungkin menyebabkan ketaktelitian pada matrix segi-tiga yang diinginkan. Juga kadang-kadang diperlukan modifikasi pada teknik perhitungannya.
- (12) Metode kedua untuk matrix-matrix non simetris dan adalah metode terakhir yang dibahas, yaitu metode *supertriangularization and deflation*. Untuk membawa  $A$  ke bentuk *Hessenberg* digunakan transformasi similar, mungkin juga dengan eliminasi *Gauss* karena cara ini memerlukan operasi hitung yang lebih sedikit dibandingkan metode *Lanczos*, dan proses menggandakan matrix  $A$  dengan matrix -

matrix elementer. Harga-harga pribadi ditentukan dengan metode *secant* atau *Laguerre* dari persamaan karakteristiknya. Dengan telah diketahuinya harga-harga pribadi maka dengan (IV.59) dihitung vektor-vektor pribadi matrix A. Cacah operasi hitung (pengandaan dan pembagian) yang diperlukan adalah dari orde  $2/3 n^3$ .

Beberapa faktor penting dalam bidang komputasi, antara lain konvergensi penyelesaian dan akselerasinya atau stabilitas penyelesaian dan batas (atas, bawah) harga pribadi, belum sempat dibahas secara terperinci.

D A F T A R P U S T A K A

1. Anthony Ralston, "*A First Course in Numerical Analysis*", McGraw-Hi;; Kogakusha, Ltd; 1965.
2. L.S. Beresin and N.P.Zidkov, "*Computing Methods Volume 2*", Pergamon Press, Great Britain; 1965 (translation).
3. Robert M.Thrall and Leonard Torn heim, "*Vector spaces and Matrices*", John Weley & Sons. Inc., New York; 1958.
4. I. N. Herstein, "*Topics in Algebra*", Xerox College Publishing, Lexington Massachusett; 1964.
5. G. Horvay, "*Solution of Large Equation Systems and Eigenvalue Problems by Lanczos's Matrix Iteration Method*", KAPL-1004, Knolls Atomic Power Laboratory Schenectady, New York; 1953.
6. G. Bilodeau and L. Hageman, "*A Survey of Numerical Methods in the Solution of Diffusion Problems*", WAPD-TM-64, Bettis Plant Pittsburgh, Pennsylvania; 1957.
7. Gerald Goertzel and Nunzio Tralli, "*Some Mathematical Methods of Physics*", McGraw-Hill Book Company, Inc., New York; 1960.
8. Garrett Birkhoff and Saunders Mac Lane, "*A Survey of Modern Algebra (revised edition)*", The Macmillan Company, New York; 1964.