ИТЭФ – 34

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

А.И.ВЕСЕЛОВ, В.Г.ЛАПЧИНСКИЙ,[*]
В.И.НЕКРАСОВ,[**] Г.Н.ШИКИН[**]

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С КВАНТОВЫМ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

МОСКВА 1982

*) Институт ядерных исследований АН СССР
**) Госкомитет стандартов СССР

УДК 523.I М-I6

Исследованы самосогласованные решения для эволюции изотропных космологических моделей, заполненных квантовым массивным скалярным полем с конформной связью с гравитацией.

В качестве начального состояния принято вакуумное состояние поля, причем вакуум определяется как состояние поля с наименьшей энергией.

Исследованы два возможных типа модификаций уравнений Эйнштейна за счет локального, не зависящего от массы, вклада в поляризацию вакуума конформной аномалии.

Показано, что уравнения гравитационного поля с высшими производными приводят к сингулярностям. Минимальная модификация уравнений Эйнштейна допускает несингулярные космологические модели, однако процессы рождения квазичастиц из вакуума на много порядков меньше необходимых для выхода модели на реалистический фридмановский режим.

I. Введение

В теоретической космологии одной из наиболее острых проблем является проблема дофридмановской фазы эволюции Вселенной, т.е. проблема того первоначального физического состояния Вселенной и тех физических процессов, которые привели к Большому врыву [I - 6].

Моделирование дофридмановской фазы эволюции Вселенной в рамках классической физики, т.е. в предположении о неквантовом характере составляющего Вселенную вещества и индуцируемой им метрики пространства-времени, показало, что в начале этой фазы Вселенная находилась в сингулярном состоянии [I-6, 7]. Хотя в литературе и имеются примеры классических несингулярных моделей, однако большинство их представляется нереалистическими (см. [8] и указанную там литературу).

Надежда на построение регулярных реалистических моделей усилилась в связи с развитием в последнее время общерелятивистской квантовой теории поля. Квантовая теория поля на псевдоримановых многообразиях является полуклассическим приближением к будущей полной теории всех фундаментальных взаимодействий, включая и гравитационное. Её принципиальное значение определяется тем, что, какую бы окончательную форму в дальнейшем ни приняла квантовая теория гравитации в рамках единой квантовой теории, в предельном случае относительно слабых гравитационных полей гравитацию всегда можно будет описывать эффективно в терминах искривлённого пространства-времени, а квантовую материю - как взаимодействие квантовых полей с метрической структурой этого пространства - времени.

Помимо этого общетеоретического аспекта, квантовая теория поля в искривлённом пространстве имеет и важное прикладное значение для исследования физических процессов в условиях экстремально плотной материи, реализующихся на начальных этапах расширения Вселенной (для замкнутых моделей – и при последующем сжатии) и на конечных этапах эволюции массивных звёзд. В частности, она может быть использована для моделирования дофридмановской фазы эволюции Вселенной, причём вся заполняющая Вселенную материя в таком подходе будет представлять собой квантовый объект, удерживаемый как единое целое не микроскопическими силами, а порождаемой им гравитацией, которая, в свою очередь, должна подчиняться классическим уравнениям общей теории относительности.

Исследование непротиворечивости и ковариантного характера квантования волновых полей в произвольном римановом пространстве, а также вопросов, связанных с регуляризацией, перенормировкой и однозначностью вычисления квантовых ожиданий тензора энергии – импульса (ТЭИ) полей, было начато в основополагающих работах [9 – 12]. Со времени их появления было выполнено много работ, посвященных квантованию как безмассовых, так и массивных полей в частном, но очень важном для космологических приложений случае нестационарных однородных и изотропных пространств Робертсона-Уокера, причём исследовались как канонический, так и явно ковариантные методы квантования полей. Для анализа конкретных эффектов, особенно в случае массивных полей, наиболее пригодным оказался канонический метод квантования, основанный на разложении общего решения уравнений движения по полному ортонормированному набору собственных функций данного уравнения при заданной метрике пространства-времени. Исследование квантования скалярных полей в однородном и изотропном пространстве было начато в работах [13 – 17], спинорных полей – в работах [18 - 20] , векторного массивного поля - в работах [21 - 22] . Отметим, что задача квантования массивных полей ковариантными способами в этих пространствах до сих пор не решена до конца - до уровня практических применений.

Главной особенностью теории квантовых полей в искривлённом пространстве является явная неинвариантность основного (вакуумного) состояния квантовых полей относительно временных или пространственных движений, возникающая вследствие отклонений метрических свойств риманова пространства от метрических свойств пространства Минковского. Эта неинвариантность проявляется как поляризация вакуума гравитационным полем, приводящая к ненулевым вакуумным средним оператора ТЭИ поля $\langle 0|T_\mu^\nu(x)|0\rangle$, которые, в свою очередь, способны порождать гравитационные поля. (О некоторых теоретических аспектах неинвариантности вакуума в квантовой теории поля см. в [23 - 24]).

Одной из главных и не решённых до конца проблем при вычислении $\langle 0|T_\mu^\nu(x)|0\rangle$ в настоящее время является устранение из него расходимостей. Все имеющиеся способы вычисления регуляризованного ТЭИ квантовых полей распадаются на две группы: а) регуляризация методом перенормировки физических констант теории, б) регуляризация методом некоторой вычитательной процедуры, более или менее физически обоснованной (см. обзоры [25 - 30] , а также [24]).

Исходным пунктом регуляризации методом перенормировки констант является анализ структуры расходимостей в ТЭИ, т.е. установление типов расходимостей и физической размерности стоящих при них коэффициентов. Различными способами, в основе которых лежит либо представление о слабости гравитационного поля, либо приближение асимптотически плоского пространства, было показано, что расходимости ТЭИ имеют следующую структуру:

$$< T_\mu^\nu(x) >_{div} = g_\mu^\nu(x)\lambda_\infty + G_\mu^\nu(x)\frac{1}{8\pi G_\infty} + \overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)\, d_\infty + \left(\overset{(2)}{H}{}_\mu^\nu(x) - \frac{1}{3}\overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)\right)\beta_\infty . \qquad (I.I)$$

Здесь $\lambda_\infty, G_\infty^{-1}, d_\infty, \beta_\infty$ - расходящиеся константы, не зависящие от геометрии, а $g_\mu^\nu(x), G_\mu^\nu(x), \overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ и $\overset{(2)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ - тензорные величины, характеризующие метрическую структуру пространства-времени. Замечательно, что эти тензорные величины могут быть получены вариацией локальных скалярных величин: $G_\mu^\nu(x)$ - тензор Эйнштейна, который следует из вариации стандартного гравитационного лагранжиана; $\overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ следует из вариации R^2 :

$$\overset{(1)}{H}_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{(-g)^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int d^4x(-g)^{1/2}R^2 = 2\left(\nabla_\mu\nabla_\nu R - g_{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho R\right) + 2R\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Rg_{\mu\nu}\right), \qquad (I.2)$$

а $\overset{(2)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ - вариацией квадратичной комбинации $R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}$:

$$\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} = \frac{2}{(-g)^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}\int d^4x(-g)^{1/2}\left(R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}\right); \qquad (I.3)$$

конкретный вид $\overset{(2)}{H}_{\mu\nu}(x)$ нам не понадобится. Это позволяет обобщить затравочный эйнштейновский лагранжиан, дополнив его квадратичными членами:

$$\mathcal{L}_g = \int d^4x(-g)^{1/2}\left[-\lambda_0 + \frac{1}{16\pi}G_0^{-1}R + d_0R^2 + \beta_0\left(R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}R^2\right)\right], \qquad (I.4)$$

причем $\lambda_0, G_0^{-1}, d_0, \beta_0$ - затравочные бесконечные константы. Из сравнения (I.I) и (I.4) непосредственно видно, что физических констант в теории (I.4) достаточно, чтобы устранить расходимости в (I.I). В настоящее время признано, что других расходимостей при квантовании полей в искривлённом пространстве произвольного вида не возникает [25 - 30].

Однако при перенормировке констант в (I.4) возникает произвол в выборе их ренормированных значений. В частности, если α_{ren} и β_{ren} не равны нулю, то приходим к модифицированному гравитационному лагранжиану (I.4), в котором λ_{ren}, G^{-1}_{ren}, α_{ren}, β_{ren} можно определить из дополнительных соображений, в частности, накладывая определённые граничные условия. В результате получим модифицированные (по отношению к теории Эйнштейна) уравнения гравитационного поля, содержащие третьи и четвёртые производные по X^0. Это - первый источник возникновения модифицированных уравнений СТО при рассмотрении в качестве источника гравитации квантовых полей. В пределах данной статьи мы будем считать, однако, что бесконечная перенормировка констант даёт $\alpha_{ren}=\beta_{ren}=0$. Кроме того, не будем учитывать Λ - член, т.е. считаем $\lambda_{ren}=0$. Это точка зрения Утиямы и Де Витта [9 - 12], считающих, что процедура устранения расходимости в ТЭИ полей не должна приводить к модификации исходных уравнений.

Регуляризации, в основе которых лежит фиксированная вычитательная процедура, в принципе не требуют анализа структуры расходимостей в ТЭИ. По-видимому, наиболее удобной для практических приложений является вычитательная процедура Зельдовича-Старобинского, обобщающая регуляризационную процедуру Паули-Вилларса. В соответствии с этой процедурой, каждой отдельной моде волновой функции, соответствующей состоянию частицы с массой m и импульсом $\vec{k}$, сопоставляется n - волна с числами $(n\,m)$ и $(n\,\vec{k})$ и уменьшенной в $\sqrt{k}$ раз амплитудой. Регуляризованное выражение для ТЭИ квантового поля определяется тогда следующим образом [31 - 32], см. также [24]:

$$< T_\mu^\nu(x) >_{reg} = \lim_{k\to\infty}\left\{\int d\vec{k}\left[< \tau_\mu^\nu(\vec{k},m) - \sum_{\ell=0}^{2}\frac{\partial^\ell}{\partial(k^{-1})^\ell}\frac{1}{\ell!} < \tau_\mu^\nu(k\vec{k},km)>\right]\right\}. \quad (I.5)$$

Как показано в ряде работ, регуляризованное выражение (I.5) совпадает с ТЭИ, полученными другими способами [24]. Существенно то, что в этом подходе вообще не возникает вопрос о модификации уравнений Эйнштейна при устранении расходимостей из ТЭИ. Поэтому в данной работе будем считать в качестве исходных уравнений уравнения Эйнштейна с ТЭИ, полученным методом (I.5).

В свою очередь, регуляризованное выражение ТЭИ квантового поля, полученное методом (I.5) и другими способами, имеет свою собственную сложную структуру и содержит члены, которые порождают возможность новой модификации уравнений Эйнштейна. На примере квантования бозонных и фермионных полей было показано, что в общем случае ТЭИ квантового поля можно представить в виде

$$< T_\mu^\nu(x) >_{reg} = < T_\mu^\nu(0) > + < T_\mu^\nu(2) > + < T_\mu^\nu(4) > + < T_\mu^\nu(p) >. \quad (I.6)$$

Здесь $< T_\mu^\nu(0) >$ - вклад в ТЭИ, зависящий от метрики и её пространственных производных и от вида поля - так называемый топологический вклад (аналог поляризации вакуума казимировского типа). Структура $< T_\mu^\nu(0) >$ подробно исследована в работах [33 - 39]. Вклад $< T_\mu^\nu(2) >$ зависит от локальных геометрических величин и их производных (не выше второй для производных по X^0) и появляется только при квантовании массивных полей. Вклад $\langle T_\mu^\nu(P) \rangle$ зависит от всей предыстории геометрии и описывает плотность энергии - импульса рождённых частиц. Обычно вклады $\langle T_\mu^\nu(2) \rangle$ и $\langle T_\mu^\nu(0) \rangle$ в теории рождения частиц рассматриваются совместно (см обзоры [24, 40 - 43]) . Вклад $\langle T_\mu^\nu(4) \rangle$ играет особую роль. Он появляется при квантовании любых полей и имеет для всех полей одинаковую структуру:

$$\langle T_\mu^\nu(4) \rangle = K_1 \overset{(3)}{H}{}_\mu^\nu(x) + K_2 \overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x), \qquad (\text{I.7})$$

где вид поля влияет только на численные коэффициенты K_1 и K_2 . Выражение $\overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ определено в (I.2) и содержит третьи и четвёртые производные по X^0 . Выражение $\overset{(3)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ не может быть получено в общем случае вариаций локальных скаляров и равно

$$\overset{(3)}{H}_{\mu\nu}(x) = R_\mu^\sigma R_{\sigma\nu} - \frac{2}{3} R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} g_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R^2, \qquad (\text{I.8})$$

причём в (I.8) не содержатся производные выше второй по X^0 . Вклад (I.7), как видим, зависит только от локальных геометрических величин и может быть перенесён в левую часть уравнений Эйнштейна. Таким образом, снова приходим к модифицированным уравнениям с третьей и четвёртой производной по X^0 , даже если в (I.4) положить $\alpha_{\text{ren}} = \beta_{\text{ren}} = 0$. Однако структура уравнений теперь другая, так как вместо $\overset{(2)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ в них входит теперь $\overset{(3)}{H}{}_\mu^\nu(x)$.

Замечательной особенностью ТЭИ квантовых полей является то, что они часто не удовлетворяют энергетическим условиям $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu > 0$ или $\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) t^\mu t^\nu \geqslant 0$, где $T_{\mu\nu}$ - ТЭИ материи, а t^μ и $T_{\mu\nu} t^\nu$ - времениподобные векторы. Эти условия лежат в основе доказательства теорем о неизбежности сингулярностей в ОТО и в применении к однородным и изотропным пространствам они принимают простую форму соответственно слабого и сильного условий энергодоминантности [7]

$$|p| \leq \epsilon \quad \text{или} \quad |p| \leq \epsilon/3 \quad \text{при} \quad \epsilon > 0. \qquad (I.9)$$

Нарушение условий (I.9) для квантовых ТЭИ и служит оправданием попыток построения несингулярных реалистических космологических моделей [44 - 49, 29, 50 - 53] .

При построении самосогласованных космологических моделей в самом общем случае можно использовать уравнения, следующие из обобщённого лагранжиана (I.4) с ТЭИ (I.6). Влияние вкладов с высшими производными исследовалось с разных сторон в работах [44 - 46, 48 - 50] . В частности, было найдено, что учёт этих членов приводит к нефизическим следствиям - к неустойчивости метрики пространства-времени [49] . Однако учёт дополнительных факторов - рождения частиц, диссипативных эффектов и т.п. - позволяет устранить отрицательные эффекты и получать разумные физические решения. В целом, влияние высших производных, следующих как из (I.4), так и из (I.6), на эволюцию геометрии ещё очень мало исследовано.

Опираясь на результаты [49] , авторы работ [51 - 52] предложили считать, что вклад $\kappa_2 \overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ в $< T_\mu^\nu(4) >$ устраняется конечной перенормировкой α. и β. в (I.4) в дополнение к их бесконечной перенормировке, учитывая, что $\overset{(1)}{H}{}_\mu^\nu(x)$ можно получить вариацией (I.2). По их предложению, следует считать

$$< T_\mu^\nu(4) > = \kappa_1 \overset{(3)}{H}{}_\mu^\nu(x), \qquad (I.10)$$

однако в деталях следствия такого предположения авторы [51-

- 52] не изучили.

В настоящей работе исследована эволюция космологической модели, заполненной массивным заряжённым скалярным полем, причём исследованы случаи: с $< T_\mu^\nu(4) >$ из (I.7) – " строгая" модификация уравнений Эйнштейна; с $< T_\mu^\nu(4) >$ из (I.10) – " минимальная " модификация. В первом случае модель имеет сингулярность и не выходит на фридмановский режим (выход был бы возможен, если бы число рождённых частиц было бы намного больше полученного). Во втором случае модель автоматически избегает сингулярности, если считать, что вакуумное состояние реализуется в области малых $a \sim m^{-1}$. Детально изучены эволюция Вселенной и темп рождения частиц в области $a \sim m^{-1}$ для различных значений m. Сделаны некоторые оценки поведения Вселенной при очень больших a, однако они требуют уточнения.

2. Квантование и формальный ТЭИ поля

Массивное заряженное скалярное поле с конформной связью с гравитацией в римановом пространстве с метрикой $g_{\mu\nu}(x)$ описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}\left[g^{\mu\nu}(x)\overset{*}{\varphi}_{,\mu}(x)\varphi_{,\nu}(x) - \left(m^2 + \frac{R}{6}\right)\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)\right] \quad (2.1)$$

и удовлетворяет уравнению движения

$$\left(\Box + m^2 - \frac{R}{6}\right)\varphi(x) = 0. \quad (2.2)$$

В метрике замкнутого однородного и изотропного пространства

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right], \quad (2.3)$$

где η – конформное время, связанное с синхронным собственным временем преобразованием $a d\eta = c dt$, уравнение (2.2) принимает вид:

$$\ddot{\varphi}(x) + 2(\dot{a}/a)\dot{\varphi}(x) + \left[m^2a^2 + (\ddot{a}/a) + 1\right]\varphi(x) - {}^{(3)}\Delta_2\varphi(x) = 0, \qquad (2.4)$$

где

$${}^{(3)}\Delta_2\varphi(x) = \left[\varphi_{,\chi\chi} + 2\,\mathrm{ctg}\,\chi\cdot\varphi_{,\chi} + \sin^{-2}\chi\,\varphi_{,\vartheta\vartheta} + (\mathrm{ctg}\,\vartheta/\sin^2\chi)\varphi_{,\vartheta} + \sin^{-2}\vartheta\cdot\sin^{-2}\varphi\cdot\varphi_{,\varphi\varphi}\right].$$

В метрике с конформным временем η удобно ввести конформно преобразованное поле $\tilde{\varphi}(x) = a(\eta)\varphi(x)$, тогда вместо (2.4) получим

$$\ddot{\tilde{\varphi}}(x) + \left[m^2a^2(\eta) + 1\right]\tilde{\varphi}(x) - {}^{(3)}\Delta_2\tilde{\varphi}(x) = 0. \qquad (2.5)$$

Разложение общего решения уравнения (2.5) по полному ортонормированному набору собственных функций дано в [24], см. также [38]. Собственные функции (2.5)

$$\tilde{\varphi}_J(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, g_\lambda(\eta)\, \Phi_J(\vec{x}),$$

$$\text{где } J = (\lambda, \ell, m);\ m = -\ell,\dots,+\ell;\ \ell = 0,1,2,\dots,(\lambda-1),$$

$$\lambda = 1,2,3,\dots,\infty;\ \Phi_J = A_J \sin^\ell\chi\, C^{\ell+1}_{\lambda-\ell-1}(\cos\chi)\, P^m_\ell(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi},$$

нормированы условием

$$\int\sqrt{-{}^3g}\, d^3x\, \Phi^*_J(\vec{x})\Phi_{J'}(\vec{x}) = \delta_{JJ'}$$

и имеют кратность вырождения λ^2. Функции $g_\lambda(\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\ddot{g}_\lambda(\eta) + \omega^2_\lambda(\eta) g_\lambda(\eta) = 0, \qquad (2.6)$$

где

$$\omega_\lambda^2(\eta) = (\lambda^2 + m^2 a^2(\eta)), \qquad (2.7)$$

и уравнению

$$g_\lambda(\eta)\dot{g}_\lambda^* - \dot{g}_\lambda(\eta) g_\lambda^*(\eta) = -2i, \qquad (2.8)$$

причём правая часть в (2.3) определяется нормировкой $\tilde{\varphi}_J(x)$ и выбором знака частотности в $\eta = \eta_0$. Определим частотность $g_\lambda(\eta = \eta_0)$ в соотвествтвии с (2.8), тогда функции

$$\tilde{\varphi}_J^{(-)}(x) = g_\lambda^*(\eta) \Phi_J(\vec{x}) \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \tilde{\varphi}_J^{(+)} = g_\lambda(\eta) \Phi_J^*(\vec{x}) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

будут иметь смысл отрицательно- и положительночастотных функций в момент $\eta = \eta_0$, причём $g_\lambda(\eta_0)$ и $\dot{g}_\lambda(\eta_0)$ должны удовлетворять определённым начальным условиям, а разложение

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_J a_J^{(-)} \tilde{\varphi}_J^{(-)}(x) + \sum_J a_J^{(+)} \tilde{\varphi}_J^{(+)}(x)\right], \qquad (2.9)$$

котрое остаётся справедливым при всех $\eta \neq \eta_0$, в начальный момент $\eta = \eta_0$ будет иметь, кроме того, вполне определённый смысл разложения поля $\tilde{\varphi}(x)$ по отрицательно- и положительночастотным функциям. Это означает, что в некоторый начальный момент $\eta = \eta_0$ сохранятся основные соотношения, аналогичные тем, что возникают при квантовании свободных полей в пространстве Минковского.

Положим в момент $\eta = \eta_0$, что

$$\left[\overset{*}{a}{}_J^{(-)}, a_{J'}^{(-)}\right] = \left[a_J^{(+)}, \overset{*}{a}{}_{J'}^{(+)}\right] = \delta_{JJ'}. \qquad (2.10)$$

Определим вакуумное состояние поля в момент $\eta = \eta_0$ условиями

$$a_J^{(-)}|0(\eta=\eta_0)> = a_J^{(-)}|0> = 0;\ \overset{*}{a}{}_J^{(-)}|0(\eta=\eta_0)> = \overset{*}{a}{}_J^{(-)}|0> = 0$$

и сконструируем фоковское пространство состояний последовательным действием операторов $a_J^{(+)}$ и $\overset{*}{a}{}_J^{(+)}$ на $|0>$. Тогда операторы $a_J^{(\pm)}$ и $\overset{*}{a}{}_J^{(\pm)}$ приобретают физический смысл: $a_J^{(-)}$ и $\overset{*}{a}{}_J^{(-)}$ - операторы уничтожения частицы и античастицы, $\overset{*}{a}{}_J^{(+)}$ и $a_J^{(+)}$ - операторы рождения частицы и античастицы в состоянии J. Эта физическая интерпретация справедлива только в один момент $\eta=\eta_0$. При $\eta\neq\eta_0$ пространство состояний разрушается, и для его восстановления требуется специальная процедура.

Формально можно определить операторы динамических переменных и их средние в $\eta\neq\eta_0$, используя разложение (2.9) и коммутационные соотношения (2.10). Тензор энергии - импульса поля (2.I)

$$T_{\mu\nu}(x) = 2\overset{*}{\varphi}_{,\mu}(x)\varphi_{,\nu}(x) - g_{\mu\nu}(-g)^{-1/2}\mathcal{L} - \frac{1}{3}\left(R_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box\right)\overset{*}{\varphi}(x)\varphi(x)$$

с учётом определений (2.9) и (2.I0) даёт

$$<0|T_0^0|0> = \epsilon = \frac{1}{2\pi^2 a^4(\eta)}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^2\omega(\eta)E_\lambda(\eta), \qquad (2.II)$$

$$<0|T_i^i|0> = -p = -\frac{1}{6\pi^2 a^4(\eta)}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^2\omega(\eta)\cdot \left[E_\lambda(\eta) - \frac{m^2 a^2(\eta)}{\omega(\eta)}|g_\lambda(\eta)|^2\right], \qquad (2.I2)$$

где

$$E_\lambda(\eta) = \frac{1}{2\omega(\eta)}\left[|\dot{g}_\lambda(\eta)|^2 + \omega^2(\eta)|g_\lambda(\eta)|^2\right], \qquad (2.I3)$$

причём в (2.12) суммирования по i нет.

Выражения (2.11) и (2.12) формально правильны, поскольку разложение (2.9) справедливо во все $\eta \neq \eta_0$. Однако в $\eta \neq \eta_0$ функции $\tilde{\mathcal{F}}^{(-)}_J(x)$ и $\tilde{\mathcal{F}}^{(+)}_J(x)$, оставаясь ортонормированными, теряют определённую частотность. В силу этого теряют физический смысл операторы $a_J^{(\pm)}$ и $\overset{*}{a}{}_J^{(\pm)}$ и пространство состояний поля, включая вакуумное состояние. Поэтому (2.12) и (2.13) в момент $\eta \neq \eta_0$ не могут быть физически интерпретированы. Нужна специальная процедура фиксации пространства состояний и операторов над ним для любых $\eta \neq \eta_0$. В рамках канонического квантования такой процедурой является мгновенностатическая диагонализация гамильтониана, которая, как показано в ряде работ, в однородном и изотропном пространстве выполняется непротиворечивым образом (случай более общего вида пространств требует специального рассмотрения). Полагая, что

$$H(\eta) = \int d^3x \sqrt{-{}^3g}\; T_{00}(x),$$

найдём

$$H(\eta) = \sum_J \lambda^2 \omega \Big\{ E_\lambda(\eta) \Big[\overset{*}{a}{}_J^{(+)} a_J^{(-)} + \overset{*}{a}{}_{\bar J}^{(-)} a_J^{(+)} \Big] +$$

$$+ F_\lambda \Big[\overset{*}{a}{}_J^{(+)} a_{\bar J}^{(+)} \Big] + \overset{*}{F}_\lambda(\eta) \Big[\overset{*}{a}{}_{\bar J}^{(-)} a_J^{(-)} \Big], \qquad (2.14)$$

где $E_\lambda(\eta)$ определено в (2.13), $\bar J = (\lambda, \ell, -m)$, а

$$F_\lambda(\eta) = (-1)^m (2\omega)^{-1} \Big[\dot g_\lambda^2(\eta) + \omega^2(\eta) g_\lambda^2(\eta) \Big].$$

Для диагонализации гамильтониана (2.14) воспользуемся каноническими преобразованиями Боголюбова (см. [24, 43]):

$$a_J^{(-)} = \alpha_J^*(\eta) b_J^{(-)}(\eta) - (-1)^m \beta_J(\eta) b_{\bar J}^{(+)}(\eta),$$

$$\overset{*}{a}{}_J^{(-)} = \alpha_J^*(\eta) \overset{*}{b}{}_J^{(-)}(\eta) - (-1)^m \beta_J(\eta) \overset{*}{b}{}_{\bar J}^{(+)}(\eta),$$

$$a_J^{(+)} = \alpha_J(\eta) b_J^{(+)}(\eta) - (-1)^m \beta_J^*(\eta) b_{\bar J}^{(-)}(\eta),$$

$$\overset{*}{a}{}_J^{(+)} = \alpha_J(\eta) \overset{*}{b}{}_J^{(+)}(\eta) - (-1)^m \beta_J^*(\eta) \overset{*}{b}{}_{\bar J}^{(-)}(\eta),$$

$$a_J^{(+)} = \alpha_{\bar J}(\eta) b_{\bar J}^{(+)}(\eta) - (-1)^m \overset{*}{\beta}_{\bar J}(\eta) b_J^{(-)}(\eta),$$

$$\overset{*}{a}{}_J^{(-)} = \alpha_{\bar J}^*(\eta) \overset{*}{b}{}_{\bar J}^{(-)}(\eta) - (-1)^m \beta_{\bar J}(\eta) \overset{*}{b}{}_J^{(+)}(\eta), \qquad (2.15)$$

причём

$$|\alpha_J|^2 - |\beta_J|^2 = 1. \qquad (2.16)$$

Подставляя (2.15) в (2.14), найдем условие диагонализации гамильтониана

$$\left[-E_\lambda(\eta)(-1)^m(\alpha_J\beta_J + \alpha_{\bar J}\beta_{\bar J}) + F_\lambda(\eta)(\alpha_J\alpha_{\bar J}) + F_\lambda^*(\eta)(\beta_{\bar J}\beta_J)\right] = 0,$$

откуда, замечая, что

$$F_\lambda(\eta) F_\lambda^*(\eta) = E_\lambda^2(\eta) - 1,$$

находим

$$|\beta|^2 = \frac{1}{2}\left[E_\lambda^2(\eta) - 1\right]; \ \alpha_\lambda^* \beta_\lambda = \frac{1}{2}(-1)^m F_\lambda(\eta). \qquad (2.17)$$

Выполнение условий (2.17) с учётом (2.16) гарантирует диагональность гамильтониана в $\eta + \eta$. в терминах операторов $b_J^{(\pm)}(\eta)$ и $\overset{*}{b}{}_J^{(\pm)}(\eta)$ с мгновенным вакуумом $|0_\eta\rangle$, уничтожаемым операторами $b_J(\eta)$.

Вместо (2.II) и (2.I2) теперь можно записать

$$<0|T_0^0|0> = \epsilon = \frac{1}{2\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \omega_\lambda(\eta) \left[1 + 2|\beta_\lambda(\eta)|^2\right], \quad (2.I8)$$

$$<0|T_i^i|0> = -p = -\frac{1}{6\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 \omega_\lambda(\eta) \Big[1 +$$

$$+ 2|\beta_\lambda(\eta)|^2 - \frac{m^2 a^2(\eta)}{\omega_\lambda(\eta)} |g_\lambda(\eta)|^2\Big], \quad (2.I9)$$

причём выражение

$$\frac{1}{2\pi^2 a^3(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 2 |\beta_\lambda(\eta)|^2$$

будет иметь теперь смысл плотности числа частиц, рождённых за время от $\eta = \eta_0$ до η [24]. Выражения (2.I8) и (2.I9) можно рассматривать как окончательные формальные выражения для $<0|T_\mu^\nu|0>$, имеющие в $\eta \neq \eta_0$ физическую интерпретацию. Однако они расходящиеся, т.е. требуется их регуляризовать.

3. Регуляризованный ТЭИ поля

Выражения (2.I8) и (2.I9) можно регуляризовать, используя непосредственно процедуру n - волновой регуляризации (I.5). Однако можно (см. [24]) выполнить не (I.5), а эквивалентную ей процедуру. Для этого вместо $g_\lambda(\eta)$ и $\beta_\lambda(\eta)$ введём три функции

$$S_\lambda(\eta) = |\beta_\lambda(\eta)|^2; \; u_\lambda(\eta) = (\alpha\beta e^{-i2\vartheta} + \alpha^*\beta^* e^{i2\vartheta}) = 2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta e^{i2\vartheta});$$

$$v_\lambda(\eta) = -i\left[\alpha\beta e^{-i2\vartheta} - \alpha^*\beta^* e^{i2\vartheta}\right] = 2\,\mathrm{Im}(\alpha\beta e^{i2\vartheta}),$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\dot{S}_\lambda(\eta)=\left(\frac{\dot{\omega}}{2\omega}\right)U_\lambda(\eta);\quad \dot{U}_\lambda(\eta)=\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)\left[1+2S_\lambda(\eta)\right]+2\omega V_\lambda(\eta);$$

$$\dot{V}_\lambda(\eta)=-2\omega U_\lambda(\eta) \qquad (3.I)$$

с начальными условиями

$$S_\lambda(\eta=\eta_0)=U_\lambda(\eta=\eta_0)=V_\lambda(\eta=\eta_0)=0. \qquad (3.2)$$

Решение (3.I) можно найти приближённо, раскладывая S, U, V в ряд по степеням ω^{-1}, полагая $\omega\to\infty$. В результате имеем

$$S_\lambda^{(2)}(\eta)=\frac{1}{16}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)^2=\frac{1}{16}\,\frac{m^4a^2\dot{a}^2}{\omega^6}; \qquad (3.3)$$

$$S_\lambda^{(4)}(\eta)=-\frac{1}{32\omega}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\right]+ \\ +\frac{1}{64}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\right]^2+\frac{3}{256}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)^4; \qquad (3.4)$$

$$S_\lambda^{(6)}(\eta)=\frac{5}{3072}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)^6+\frac{1}{128\omega}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\eta}\left[\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\eta}\left\{\frac{1}{\omega}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\right\}\right]\right\}- \\ -\frac{5}{256\omega}\int\frac{1}{\omega}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right)\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\omega}{\omega^2}\right)\right]^3 d\eta-\cdots \qquad (3.5)$$

$$U_\lambda^{(2)}(\eta)=\frac{1}{4\omega}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega^2}\right). \qquad (3.6)$$

Вместо (2.I8) и (2.I9) можем записать теперь

$$\langle 0|T_0^0|0\rangle=\epsilon-\frac{1}{2\pi^2a^4}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^2(\lambda^2+m^2a^2)^{1/2}+ \\ +\frac{1}{2\pi^2a^4}\sum_{\lambda=1}\lambda^2(\lambda^2+m^2a^2)^{1/2}2S_\lambda(\eta) \qquad (3.7)$$

$$<0|T_i^i|0> = -P = -\frac{1}{6\pi^2 a^4}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^4(\lambda^2+m^2a^2)^{-1/2} - \qquad (3.8)$$

$$-\frac{1}{6\pi^2 a^4}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^4(\lambda^2+m^2a^2)^{-1/2}\left[2S_\lambda(\eta)-\frac{m^2a^2}{\lambda^2}U_\lambda(\eta)\right].$$

Оба выражения (3.7) и (3.8) расходящиеся (из-за первых сумм). В соответствии с общим правилом [24], регуляризация (3.7) и (3.8) методом (I.5) эквивалентна регуляризации первых сумм и вычитанию из (3.7) и (3.8) интегралов, в которых под знаком интеграла стоят выражения как во вторых суммах (3.7) и (3.8), но $S_\lambda(\eta)$ и $U_\lambda(\eta)$ заменены на $S_\lambda^{(2)}(\eta)$, $S_\lambda^{(4)}(\eta)$, $U_\lambda^{(2)}(\eta)$, $U_\lambda^{(4)}(\eta)$.

Первые суммы в (3.7) и (3.8) в точности совпадают с выражениями для плотности энергии и давления вакуума в 3-сфере с $a = const$. Их регуляризация легко может быть осуществлена вычитанием из них соответствующих выражений, определённых в сфере с радиусом $a = const \to \infty$, см [33 - 39]. Вторые суммы в (3.7) и (3.8) сходятся, так как $S_\lambda(\eta) \sim \lambda^{-6}$, $U_\lambda(\eta) \sim \lambda^{-4}$. Регуляризуя первые суммы по [33 - 39], получим конечные выражения

$$<0|T_0^0|0> = \epsilon = <0|T_0^0(0)|0> + <0|T_0^0(P)|0> =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 a^4(\eta)}\int_{ma(\eta)}^{\infty}\frac{d\lambda\cdot\lambda^2}{(e^{2\pi\lambda}-1)}\left(\lambda^2-m^2a^2(\eta)\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2 a^4(\eta)}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\lambda^2(\lambda^2+m^2a^2(\eta))^{1/2}\,2S_\lambda(\eta); \qquad (3.9)$$

$$<0|T_i^i|0> = -P = <T_i^i(0)> + <T_i^i(P)> =$$

$$= -\frac{1}{3\pi^2 a^4(\eta)} \int\limits_{ma(\eta)}^{\infty} \frac{d\lambda \cdot \lambda^4}{(e^{2\pi\lambda}-1)(\lambda^2 - m^2 a^2)^{1/2}} -$$

$$-\frac{1}{6\pi^2 a^4(\eta)} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^4 (\lambda^2 + m^2 a^2(\eta))^{-1/2} \left[2S_\lambda(\eta) - \frac{m^2 a^2(\eta)}{\lambda^2} U_\lambda(\eta)\right]. \qquad (3.10)$$

Выражения (3.9) и (3.10) регулярны, однако нет уверенности, что такая "очевидная" регуляризация сохраняет ковариантный характер $< T_\mu^\nu >$. Выражения (3.9) и (3.10) должны быть согласованы поэтому с теми, которые следуют из ковариантных процедур. Вычитание дополнительных членов из (3.9) и (3.10) эффективно сводится к добавлению к (3.9) и (3.10) членов вида $< T_\mu^\nu(2) >$ и $< T_\mu^\nu(4) >$. Выпишем их подробно.

$$< T_0^0(2) > = -\frac{1}{2\pi^2 a^4(\eta)} \int\limits_0^\infty d\lambda\, \lambda^2 (\lambda^2 + m^2 a^2(\eta))^{1/2}\, 2S_\lambda^{(2)}(\eta), \qquad (3.11)$$

$$< T_i^i(2) > = \frac{1}{6\pi^2 a^4(\eta)} \int\limits_0^\infty d\lambda \cdot \lambda^4 (\lambda^2 + m^2 a^2(\eta))^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[2S_\lambda^{(2)}(\eta) - \frac{m^2 a^2(\eta)}{\lambda^2} U_\lambda^{(2)}(\eta)\right], \qquad (3.12)$$

где $S_\lambda^{(2)}(\eta)$ и $U_\lambda^{(2)}(\eta)$ определены в (3.3) и (3.6). Используя явный вид $S^{(2)}$ и $U^{(2)}$, получим .

$$< T_0^0(2) > = -\frac{m^4 \dot{a}^2}{16\pi^2 a^2} \int\limits_0^\infty d\lambda \cdot \lambda^2 \omega^{-5} = -\frac{m^2 \dot{a}^2}{48\pi^2 a^4}\,; \qquad (3.13)$$

$$< T_i^i(2) > = \frac{m^4}{12\pi^2} \left[\frac{\ddot{a}}{2a} \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda \lambda^2}{\omega^5} + \frac{\dot{a}^2}{4a^2} \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda \lambda^4}{\omega^7} - m^2 \dot{a}^2 \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda \lambda^2}{\omega^7}\right]. \qquad (3.14)$$

Вклады (3.13) и (3.14) – локальные, зависящие от производных по η не выше второй. Они явно зависят от m и исчезают в пределе $m \to 0$. Из $< T_\mu^\nu(4) >$ нам понадобится в дальнейшем только

$$< T_0^0(4) > = -\frac{m^4}{64\pi^2 a^4}\left(\dot{a}^4 - 4a\dot{a}^2\ddot{a} - 2a^2\dot{a}\dddot{a} + a^2\ddot{a}^2\right)\int_0^\infty d\lambda\cdot\frac{\lambda^2}{\omega^7} -$$

$$-\frac{14 m^6}{64\pi^2 a^4}\left(a^2\dot{a}^4 + a^3\dot{a}^2\ddot{a}\right)\int_0^\infty d\lambda\,\frac{\lambda^2}{\omega^9} + \frac{105 m^8}{256\pi^2 a^4}\left(a^4\dot{a}^4\right)\int_0^\infty d\lambda\cdot\frac{\lambda^2}{\omega^{11}} =$$

$$= -\frac{m^4}{64\pi^2 a^4}\left(\dot{a}^4 - 4a\dot{a}^2\ddot{a} - 2a^2\dot{a}\dddot{a} + a^2\ddot{a}^2\right)\left(\frac{2}{15 m^4 a^4}\right) -$$

$$-\frac{14 m^6}{64\pi^2 a^4}\left(a^2\dot{a}^4 + a^3\dot{a}^2\ddot{a}\right)\left(\frac{8}{105 m^6 a^6}\right) +$$

$$+\frac{105 m^8}{256\pi^2 a^4}\left(a^4\dot{a}^4\right)\left(\frac{16}{305 m^8 a^8}\right) =$$

$$= -\frac{1}{480\pi^2 a^4}\left(\frac{\ddot{a}^2}{a^2} + 4\frac{\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - 2\frac{\dot{a}\dddot{a}}{a^2} - \frac{\dot{a}^4}{a^4}\right). \qquad (3.15)$$

Выражение (3.15) не зависит от m и не исчезает для безмассовых полей. То же справедливо и для $< T_i^i(4) >$, который считается аналогично (3.15). Их можно выразить через явно ковариантные геометрические величины. А именно [24]:

$$< T_{\mu\nu}(4) > = \frac{1}{1440\pi^2}\left[\overset{(3)}{H}_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\overset{(1)}{H}_{\mu\nu} - 6 J_{\mu\nu}\right]. \qquad (3.16)$$

Полное выражение для перенормированного ТЭИ в рамках регуляризации (I.5) есть

$$< T_0^0 > = \varepsilon = < T_0^0(0) > + < T_0^0(2) > + < T_0^0(4) > + < T_0^0(p) >, \qquad (3.17)$$

$$< T_i^i > = -p = < T_i^i(0) > + < T_i^i(2) > + < T_i^i(4) > + < T_i^i(p) > \qquad (3.18)$$

Здесь $< T_0^0(0) >$ и $< T_i^i(0) >$ есть первые интегралы в (3.9) и (3.10); $< T_0^0(2) >$ и $< T_i^i(2) >$ определены в (3.13) и (3.14); $< T_0^0(4) >$ определено в (3.15), причём $< T_i^i(4) >$ не выписан, но может быть получен аналогично

(3.15); наконец, $<T_0^0(p)>$ и $<T_i^i(p)>$ есть суммы в правых частях (3.9) и (3.10).

Рассмотрим подробнее $<T_0^0(p)>$ и $<T_i^i(p)>$. В общем случае под знак суммы в (3.9) и (3.10) входят неизвестные $S_\lambda(\eta)$ и $U_\lambda(\eta)$, которые можно найти интегрированием системы уравнений (3.1), т.е. величины $<T_0^0(p)>$ и $<T_i^i(p)>$ есть некие интегралы по η. Однако в области $ma \gg 1$ при очень больших a систему уравнений можно разложить по ω^{-1}, как это сделано в (3.3) - (3.6).

Тогда можно разложить

$$<T_0^0(p)> = <T_0^0(p2)> + <T_0^0(p4)> + <T_0^0(p6)> + \\ + <T_0^0(pR)>, \qquad (3.19)$$

где

$$<T_0^0(p2)> = \frac{m^4 \dot{a}^2}{16\pi^2 a^2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\omega^5},$$

$$<T_0^0(p4)> = \frac{m^4}{64\pi^2 a^4}\left(\dot{a}^4 - 4a\dot{a}^2\ddot{a} - 2a^2\dot{a}\dddot{a} + \right.$$
$$\left. + a^2\ddot{a}^2\right)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{\omega^7} + \frac{14m^6}{64\pi^2 a^4}\left(a^2\dot{a}^4 + a^3\dot{a}^2\ddot{a}\right)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{\omega^9} -$$
$$- \frac{105 m^8}{256\pi^2 a^4}\left(a^4\dot{a}^4\right)\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{\omega^{11}},$$

$<T_0^0(p6)>$ есть сумма в правой части (3.9) с $S_\lambda^{(6)}(\eta)$ вместо $S_\lambda(\eta)$, а $<T_0^0(pR)>$ - остальные члены в разложении (3.19). Разложение (3.19) позволяет изучить "локальное" поведение $<T_\mu^\nu(p)>$ при очень больших $a(\eta)$. Можно показать, что при $ma \gg 1$ выполняется условие

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\lambda^2}{\omega^p} \Big/ \int_0^{\infty} d\lambda\, \frac{\lambda^2}{\omega^p}\right) \sim 1 - \frac{1}{m^3 a^3}, \qquad (3.20)$$

т.е. в (3.19) можно заменить суммы на интегралы. Тогда для

$\langle T_0^0(p2)\rangle$ и $\langle T_0^0(p4)\rangle$ получим те же выражения, что и для $\langle T_0^0(2)\rangle$ и $\langle T_0^0(4)\rangle$, но с обратными знаками, т.е. на больших расстояниях они гасят друг друга. Для $\langle T_0^0(p6)\rangle$ можно получить выражение типа $(ma)^{-2}\{\dots\}$, т.е. в разложении (3.I9) только один член $\langle T_0^0(p4)\rangle$ оказывается чисто геометрическим.

В дальнейшем будет, в основном, использоваться синхронное собственное время t, связанное с η преобразованием $a(\eta)d\eta = c\,dt$. Кроме того, будут использованы естественные планковские единицы:

$$
\begin{aligned}
&\ell_p = (\hbar G/c^3)^{1/2} \cong 1{,}6\cdot 10^{-33}\,\text{см};\quad t_p = (\hbar G/c^5) \cong 5{,}3\cdot 10^{-44}\,\text{сек};\\
&m_p = (\hbar c/G)^{1/2} \cong 2{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{г};\quad E_p = m_p c^2 \cong 2{,}2\cdot 10^{16}\,\text{эрг}; \qquad (3.2\mathrm{I})\\
&\rho_p = (c^5/\hbar G^2) \cong 5\cdot 10^{93}\,\text{г/см}^3;\ \epsilon_p = \rho_p c^2 \cong 5\cdot 10^{114}\,\text{эрг/см}^3.
\end{aligned}
$$

Тогда $a = \ell_p A$; $t = t_p T$; $m = m_p M$, где A, T, M – безразмерные величины; $m = M/\ell_p$, $[ma] = [MA]$. Кроме того, $\dot a \equiv \partial a/\partial\eta = a\,da/dt = \ell_p A \mathring{A}$, где $\mathring{A} \equiv dA/dT$; $\ddot a = \ell_p A(\mathring{A}^2 + A\mathring{\mathring{A}})$; $\dddot a = \ell_p A(\mathring{A}^3 + 4A\mathring{A}\mathring{\mathring{A}} + A^2\mathring{\mathring{\mathring{A}}})$.

4. Эволюция космологической модели в "строго" модифицированной теории Эйнштейна

Примем, что ТЭИ поля включает в себя все вклады, перечисленные в (3.I7) и (3.I8). Эволюция однородной и изотропной замкнутой космологической модели с таким ТЭИ подчиняется уравнениям

$$
\frac{3}{a^4}(\dot a^2 + a^2) = \frac{8\pi G}{c^4}\langle T_0^0\rangle,
$$

$$
\frac{1}{a^4}(2a\ddot a - \dot a^2 + a^2) = \frac{8\pi G}{c^4}\langle T_i^i\rangle,
$$

где $(\cdot)$ означает дифференцирование по η, или в единицах (3.2I):

$$(\dot{A}^2+1)=\frac{8\pi}{3}\ell_p^4 A^2 < T_0^0 >, \qquad (4.1)$$

$$(A\ddot{A}+\dot{A}^2+1)=8\pi\ell_p^4 A^2 < T_i^i >, \qquad (4.2)$$

где $(\dot{\,})$ означает дифференцирование по синхронному собственному безразмерному времени T. Последние слагаемые в (3.I7) и (3.I8) включают в себя функции S_λ и U_λ, поэтому к (4.I) и (4.2) следует добавить уравнения (3.I) с начальными условиями (3.2):

$$\dot{S}_\lambda(T)=\frac{dS_\lambda(T)}{dT}=\frac{M^2A\dot{A}^2}{2(\lambda^2+M^2A^2)}U_\lambda(T), \qquad (4.3)$$

$$\dot{U}_\lambda(T)=\frac{dU_\lambda(T)}{dT}=\frac{M^2A\dot{A}}{(\lambda^2+M^2A^2)}\left[1+2S_\lambda(T)\right]+ \\ +2(\lambda^2+M^2A^2)^{1/2}V_\lambda(T), \qquad (4.4)$$

$$\dot{V}_\lambda(T)=\frac{dV_\lambda(T)}{dT}=-2(\lambda^2+M^2A^2)^{1/2}U_\lambda(T), \qquad (4.5)$$

$$S_\lambda(T_0)=U_\lambda(T_0)=V_\lambda(T_0)=0. \qquad (4.6)$$

Пять уравнений (4.I) - (4.5) связывают 4 неизвестные величины $A(T), S_\lambda(T), U_\lambda(T), V_\lambda(T)$. Эта система переопределена, однако известно, что уравнение (4.2) является следствием (4.I) и условия консервативности $< T_\mu^\nu(x) >_{;\nu} = 0$, которое в нашем случае выполняется. Поэтому (4.2) можно опустить.

В предельном случае $MA \ll 1$ положим в $T_0=0$ вакуумное состояние (4.6), тогда членами $< T_0^0(2) >$ и $< T_0^0(p) >$ в (3.I7) можно пренебречь, и вместо (3.I7) будем иметь

$$< T_0^0 > = < T_0^0(0) > + < T_0^0(4) >, \qquad (4.7)$$

где

$$<T_0^0(0)> = \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} \int\limits_{MA}^{\infty} \frac{d\lambda\, \lambda^2}{(e^{2\pi\lambda}-1)} (\lambda^2 - M^2A^2)^{1/2} \equiv \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} J_0,$$

$$<T_0^0(4)> = -\frac{1}{480\pi^2 \ell_p^4 A^4} \left(A^2\ddot{A}^2 - 2A^2\dot{A}\dddot{A} - 2A\dot{A}^2\ddot{A} + 2\dot{A}^4\right).$$

Подставляя (4.7) в (4.I), получим уравнение (остальные исчезают):

$$A^2(2\dot{A}\dddot{A} - \ddot{A}^2) + 2\dot{A}^2(A\ddot{A} - \dot{A}^2) - 180\pi A^2(\dot{A}^2+1) + 480 J_0 = 0. \quad (4.8)$$

При очень малых A из (4.8) следует $2\dot{A}^4 = 480 J_0$. Если $M = 0$, то $J_0 = 1/240$, при $M \neq 0$ интеграл J_0 можно вычислить по приближённым формулам [34, 38 - 39]. В любом случае при $MA \ll 1$ уравнение состояния поляризованного вакуума (казимировского вклада) не нарушает условия энергодоминантности. Из (4.8) находим $A \sim const \cdot T$, т.е. модель имеет сингулярность в начале.

Таким образом, в " строго " модифицированной теории динамика в начале расширения определяется, в основном, членом вида (I.7) и приводит к сингулярному решению.

В случае $MA \gg 1$ выражение для $<T_0^0(p)>$ (см. (3.19)) **также** может быть разложено по степеням ω^{-1}, т.е. его можно представить в виде:

$$<T_0^0(p)> = <T_0^0(p2)> + <T_0^0(p4)> + <T_0^0(pR)>,$$

где

$$<T_0^0(p2)> = \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 (\lambda^2 + M^2A^2)^{1/2} S_\lambda^{(2)}(T) =$$

$$= \frac{1}{16\pi^2 \ell_p^4 A^4} \cdot M^4 A^4 \dot{A}^4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\omega^5}, \quad (4.9)$$

$$< T_0^0(P2) > = \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 (\lambda^2 + M^2 A^2)^{1/2} S_\lambda^{(4)}(T) =$$

$$= \frac{M^4 A^4}{64\pi^2 \ell_p^4 A^4} \left(A^2 \dddot{A}^2 - 2A^2 \dot{A} \ddot{\ddot{A}} - 10 A \dot{A}^2 \dddot{A} - 4\dot{A}^4 \right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\omega^7} +$$

$$+ \frac{14 M^6 A^6}{64\pi^2 \ell_p^4 A^4} \left(2\dot{A}^4 + A\dot{A}^2 \ddot{A} \right) \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\omega^9} - \frac{105 M^8 A^8}{256\pi^2 \ell_p^4 A^4} \dot{A}^4 \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\omega^{11}}, \quad (4.10)$$

а $< T_0^0(pR) >$ вычисляется по (3.9) с заменой $S_\lambda(T)$ на $S_\lambda^{(6)}(T) + S_\lambda^{(8)}(T) + \cdots$. Обозначим

$$< T_0^0(pR) > = \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 (\lambda^2 + M^2 A^2)^{1/2} S_\lambda^{(\geq 6)}(T) = \frac{\mathcal{J}_6}{\pi^2 \ell_p^4 A^4}. \quad (4.11)$$

Можно показать, что при $MA \gg 1$ выполняется условие

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\omega^p} \Big/ \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{\omega^p} \right) \sim 1 - \frac{1}{M^3 A^3}$$

для всех $p = 5, 7, 9, \ldots$. Следовательно, при $MA \gg 1$ можно с большой точностью заменить в (4.9) – (4.11) суммы на интегралы. Тогда

$$< T_0^0(p2) > = \frac{1}{48\pi^2 \ell_p^4 A^4} \cdot M^2 A^2 \dot{A}^2 = -< T_0^0(2) >, \quad (4.12)$$

$$< T_0^0(p4) > = \frac{1}{480\pi^2 \ell_p^4 A^4} \left(A^2 \ddot{A}^2 - 2A^2 \dot{A} \dddot{A} - 2A\dot{A}^2 \ddot{A} + \right.$$

$$\left. + 2\dot{A}^4 \right) = -< T_0^0(4) > . \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) видно, что на больших расстояниях вклады $< T_0^0(2) >$ и $< T_0^0(p2) >$, $< T_0^0(4) >$ и $< T_0^0(p4) >$ взаимно компенсируются. Из (3.5) следует, что $< T_0^0(p6) >$ имеет вид $(MA)^{-2} \{ \ldots \}$, члены высших порядков будут иметь вид $(MA)^{-2n}\{\ldots\}$, где $n=4,6,\ldots$, так что выражением $\langle T_0^0(PR)\rangle$ при $A\gg M^{-1}$ в (4.II) можно пренебречь. Таким образом, при больших A полная энергия рождённых частиц уже не увеличивается. Обозначим её D (в безразмерных единицах). Тогда из (4.I) следует, что на больших расстояниях эволюция космологической модели определяется уравнением

$$(\dot{A}^2+1)=D/A\,. \qquad (4.14)$$

Сменится расширение сжатием или модель будет неограниченно расширяться, зависит от соотношения D/A . В следующем разделе будет показано на примере рождения частиц в модели $a(t)=a_0\,ch(ct/a_0)$, что $D/A<1$ для любых M , начиная с I. Естественно ожидать, что это останется справедливым и в " строго " модифицированной теории. Таким образом, рассматриваемая космологическая модель будет расширяться неограниченно.

5. Эволюция космологической модели в "минимально" модифицированной теории Эйнштейна

Исследуем самосогласованную систему уравнений гравитационного и квантового скалярного полей в том случае, когда часть $\langle T_\mu^\nu(4)\rangle$, соответствующая $\overset{(1)}{H}_{\mu\nu}$, устраняется конечной перенормировкой исходного лагранжиана. Как сказано во Введении, в этом случае можно взять $\langle T_\mu^\nu(4)\rangle_{(3)}$ в виде (I.10). Используя явное выражение (I.8) для $H_{\mu\nu}$, в метрике (2.3) получим:

$$\langle T_0^0(4)\rangle=\frac{1}{480\pi^2a^4}\left(\frac{\dot a^4}{a^4}+2\frac{\dot a^2}{a^2}+1\right)= \qquad (5.1)$$

$$=\frac{1}{480\pi^2 c_0^4 A^4}\left(\dot A^4+2\dot A^2+1\right),$$

$$<T_i^i(4)> = \frac{1}{1440\pi^2 a^4}\left(\frac{4\dot a^2 \ddot a}{a^3} + \frac{4\ddot a}{a} - \frac{5\dot a^4}{a^4} - \frac{6\dot a^2}{a^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{1440\pi^2 \ell_p^4 A^4}\left(4A\ddot A + 4A\dot A^2 \ddot A - \dot A^4 - 2\dot A^2 - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{360\pi^2 \ell_p^4 A^4} A\ddot A\left(1 + \dot A^2\right) - \frac{1}{3} < T_0^0(4) >, \qquad (5.2)$$

куда не входят производные по η (или T) выше второй.

Собирая все вклады вместе, для ТЭИ поля в этом случае получим:

$$<T_0^0> \equiv \epsilon = < T_0^0(0) > + < T_0^0(2) > + < T_0^0(4) > + < T_0^0(P) > =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} J_0 - \frac{M^2 A^2 \dot A^2}{48\pi^2 \ell_p^4 A^4} + \frac{1}{480\pi^2 \ell_p^4 A^4}\left(\dot A^4 + 2\dot A^2 + 1\right) + \frac{1}{\pi^2 \ell_p^4 A^4} J =$$

$$= \frac{1}{480\pi^2 \ell_p^4 A^4}\left[\dot A^4 + 2\dot A^2\left(1 - 5M^2A^2\right) + 480\left(J_0 + J\right) + 1\right], \qquad (5.3)$$

$$<T_i^i> = -p = < T_i^i(0) > + < T_i^i(2) > + < T_i^i(4) > + < T_i^i(P) > =$$

$$= \frac{1}{3\pi^2 \ell_p^4 A^4} \int_{MA}^{\infty} \frac{d\lambda\, \lambda^4 \left(\lambda^2 - M^2A^2\right)^{-1/2}}{\left(e^{2\pi\lambda} - 1\right)} +$$

$$+ \frac{M^4}{12\pi^2 \ell_p^4}\left\{\frac{1}{2}\left(\dot A^2 + A\ddot A\right)\int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{\omega^5} + \frac{1}{4}\dot A^2 \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^4}{\omega^7} -\right.$$

$$-M^2A^2\dot{A}^2\int_0^\infty d\lambda\frac{\lambda^2}{\omega^7}\Big\}+\frac{1}{1440\pi^2\ell_p^4A^4}\Big(4A\ddot{A}+4A\dot{A}^2\ddot{A}-$$

$$-\dot{A}^4-2\dot{A}^2-1\Big)-$$

$$-\frac{1}{3\pi^2\ell_p^4A^4}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{\lambda^4}{(\lambda^2+M^2A^2)^{1/2}}\left[S_\lambda(T)-\frac{M^2A^2}{2\lambda^2}u_\lambda(T)\right]. \quad (5.4)$$

В области $MA\ll 1$ можно пренебречь рождением частиц. Здесь принято, как и в разделе 4, что вакуумное состояние реализуется при малых A. Тогда из (4.I) и (5.3) получим уравнение:

$$\dot{A}^4+2\dot{A}^2(1-90\pi A^2-5M^2A^2)-(180\pi A^2-$$
$$-480J_0-480J-1)=0, \quad (5.5)$$

в котором членом $(-480J)$ можно пренебречь.

Пренебрежём на время казимировским вкладом J_0, а также локальным массивным вкладом. Тогда из (5.5) получим

$$180\pi A^2=(\dot{A}^2+1),$$

откуда следует деситтеровское решение

$$A(T)=\frac{1}{2\sqrt{180\pi}}\left[\exp\left(\pm\sqrt{180\pi}\,T\right)+\exp\left(\mp\sqrt{180\pi}\,T\right)\right]=$$
$$=A_0\,ch\left(\sqrt{180\pi}\,T\right), \quad (5.6)$$

где $A_0=(180\pi)^{-1/2}$. В размерных единицах (5.6) можно записать в виде $a(t)=a_0 ch(ct/a_0)$, где $a_0=$ $=\ell_p(180\pi)^{-1/2}$. Это же решение в конформной метрике имеет вид $a(\eta)=a_0/\cos\eta$. Из (5.6) видно, что на начальных этапах динамика модели, определяемая локальным геометрическим вкладом $\langle T_0^0(4)\rangle$ из (5.I), автоматически не содержит сингулярности, причём $a_{min}=a_0=$

$= \ell_p (180\pi)^{-1/2}$. Минимум сжатия находится внутри планковского масштаба. Отражение от сингулярности объясняется тем, что в точке A_{min} эффективно реализуется уравнение состояния, нарушающее условие энергодоминантности. В самом деле, подставляя решение (5.6) в выражение для ϵ и P из (5.3) и (5.4), находим в точке A_{min} уравнение $\epsilon > 0$, $\epsilon = -P$.

Учёт казимировского вклада $480 J_0$ приводит к уравнению

$$180\pi A^2(\dot{A}^2+1) = 480 J_0 + (\dot{A}^4 + 2\dot{A}^2 + 1). \qquad (5.7)$$

Если $M=0$, то $J_0 = 1/240$. Подставляя это значение в (5.7), найдем приближённо

$$A^2(T) = (1/4)\Big[\exp\big(\pm 2\sqrt{180\pi}\, T\big) + \\ + \big(13/180^2\pi^2\big)\exp\big(\mp 2\sqrt{180\pi}\, T - 1/90\pi\big)\Big], \qquad (5.8)$$

где асимметрия ветвей сжатия и расширения кажущаяся; она устраняется надлежащим выбором постоянной интегрирования T_0. Из (5.8) следует, что вблизи нового $A_{min} > 1/\sqrt{180\pi}$ эволюция не деситтеровская. Однако начиная с $|T| \sim (\sqrt{180\pi})^{-1}$ казимировский вклад становится пренебрежимо малым, и модель выходит на прежний режим (5.6). Если $M \neq 0$, то J_0 можно вычислять, как было сказано в разделе 4, по приближённым формулам [34, 38 - 39]. Приближённые вычисления, а также численное интегрирование (5.7) с J_0 при $M \neq 0$ $(M = 1, 10^{-3}, 10^{-10})$ на БЭСМ-6 показывают, что результаты мало отличаются от режима (5.8). При $M \neq 0$ происходит лишь некоторое увеличение A_{min}, однако всюду он не превышает 0,1 планковской длины. При $T \gtrsim (\sqrt{180\pi})^{-1}$ казимировским вкладом всегда можно пренебречь.

Учёт локального, явно зависящего от массы вклада в $\langle T_0^0 \rangle$ приводит к уравнению

$$180\pi A^2(\ddot{A}^2+1)=480J_0+(\dot{A}^2+1)^2-10M^2A^2\dot{A}^2, \qquad (5.9)$$

т.е. (5.9) является уже полным уравнением (5.5), за вычетом члена $480J$. Из (5.9) приближённо следует

$$A(T)=\frac{1}{2}\Big[\exp\big(\pm\sqrt{180\pi+10M^2}\cdot T\big)+$$

$$+\frac{90\pi+10M^2}{2(90\pi+5M^2)^2}\exp\big(\mp\sqrt{180\pi+10M^2}\cdot T\big)\Big], \qquad (5.10)$$

где асимметрия по T устраняется, как и в (5.8), надлежащим выбором T_0. Из (5.10) видно, что модель эволюционирует несколько быстрее, чем в (5.6) и (5.8). Это естественно, так как включение члена $(-10M^2A^2\dot{A}^2)$ в (5.9) эквивалентно добавлению к материальному источнику вклада с $\epsilon<0$. Однако поправки небольшие; они ещё заметны при $M\sim 1$; если взять реалистическую массу порядка массы нуклона $(M\sim\sim 10^{-20})$, то вкладом $(-10M^2A^2\dot{A}^2)$ можно пренебрегать. В режиме (5.10) увеличивается также A_{min}, однако незначительно.

Таким образом, при $MA\ll 1$ надёжно устанавливается характер космологической модели. Она имеет минимальный радиус $a_{min}\cong 0{,}1\cdot 10^{-33}\,см$ (в пределах планковских масштабов) и из точки a_{min} расширяется симметрично по $|t|$ почти по экспоненциальному закону. В области $MA\ll 1$ казимировским вкладом, локальным массивным вкладом и рождением частиц можно пренебрегать с высокой точностью.

Рассмотрим более детально промежуточную область $MA\sim 1$, где происходит интенсивное рождение частиц. В этой области можно пренебречь только казимировским вкладом, так что исходная система уравнений примет вид:

$$180\pi A^2(\ddot{A}^2+1)=(\dot{A}^2+1)^2-10M^2A^2\dot{A}^2+480J, \qquad (5.11)$$

$$J = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^2 (\lambda^2 + M^2 A^2)^{1/2} S_\lambda(T), \qquad (5.12)$$

$$\dot{S}_\lambda(T) = \frac{M^2 A \dot{A}}{2(\lambda^2 + M^2 A^2)} U_\lambda(T), \qquad (5.13)$$

$$\dot{U}_\lambda(T) = \frac{M^2 A \dot{A}}{(\lambda^2 + M^2 A^2)} \left[1 + 2S_\lambda(T)\right] + 2\left[\lambda^2 + M^2 A^2\right] V_\lambda(T), \qquad (5.14)$$

$$\dot{V}_\lambda(T) = -2(\lambda^2 + M^2 A^2)^{1/2} U_\lambda(T), \qquad (5.15)$$

$$S_\lambda(T_0) = U_\lambda(T_0) = V_\lambda(T_0) = 0. \qquad (5.16)$$

Отметим, что J в (5.II) и (5.I2) имеет смысл произведения безразмерной энергии D на безразмерный радиус A, так что приблизительно энергию рождённых частиц можно оценивать соотношением $D \cong J/A$.

Система уравнений (5.II) - (5.I6) интегрировалась численно на БЭСМ-6 для нескольких значений свободного параметра $M = 1, 10^{-5}, 10^{-20}$ (единиц планковской массы $m_p \cong 10^{-5}\,г$). В таблице I приведены результаты численного интегрирования для наиболее характерных случаев $M = 1, 10^{-20}$. В случае $M = 1$ Вселенная достигает комптоновской длины $A = 1$ за $T \cong 0,05$, при этом полная энергия рождённых частиц $D \cong J/A \cong 1$, т.е. рождается всего одна частица планковской массы. В момент $T \approx 0,5$ (максимальное время, до которого был доведён счёт) Вселенная имела размер $A \approx \approx 3 \cdot 10^4\ (\ell_p)$ и содержала 100 частиц планковской массы, которые родились в зоне $A \lesssim 10 M^{-1}$. При $A > 10^4$ Вселенная продолжает расширяться. В случае $M = 10^{-20}$ Все-

Таблица 1

$T \equiv \frac{t}{t_{pe}}$	$M \equiv m/m_{pe} = 1$		$M \equiv m/m_{pe} = 10^{-20}$	
	$A \equiv \frac{d(t/t_{pe})}{\ell_{pe}}$	$480J$	$A \equiv \frac{d(t/t_{pe})}{\ell_{pe}}$	$480J$
2 E - 3	5,263E-I	6,499E-2		
2 E - 2	8,999E-I	I,586E I	8,065E-I	2,686E-79
5 E - 2	I,662E 0	5,I72E 2	I,645E 0	9,905E-78
7 E - 2	2,685E 0	3,325E 3	2,646E 0	7,359E-77
9 E - 2	4,338E 0	I,875E 4	4,258E 0	5,094E-76
I E - I	5,5I4E 0	4,293E 4	6,85IE 0	3,448E-75
I,2E-I	8,209E 0	2,079E 5	8,690E 0	8,944E-75
I,8E-I	3,757E I	6,2I9E 6	4,59IE I	6,987E-72
2,0E-I	6,972E I	4,586E 6	5,824E I	I,808E-7I
2,5E-I	2,9I4E 2	I,597E 7	I,9I2E I	2,I03E-69
3,0E-I	6,686E 2	4,380E 7	6,279E 2	2,445E-67
3,5E-I	2,229E 3	I,504E 8	2,062E 3	2,843E-65
4,0E-I	7,362E 3	4,875E 8	6,77IE 3	3,306E-63
4,3E-I	2,066E 4	I,370E 9	I,382E 4	5,735E-62
4,4E-I	2,I00E 4	I,394E 9	I,753E 4	I,485E-6I
4,5E-I	2,444E 4	I,62IE 9	2,223E 4	3,843E-6I
4,55E-I	2,740E 4	I,8I7E 9		
5,0E-I			I,30IE 4	4,468E-59
I,0E 0			I,350E I0	5,22IE-38
I,5E 0			I,55IE I5	9,I05E-I8
2,0E 0			2,26IE 20	2,96IE 3
2,IE 0			2,438E 2I	6,498E 6
2,2E 0			2,757E 22	6,I05E 7
2,25E 0			8,633E 22	I,85IE 8
2,27			I,389E 23	2,922E 8
2,29			I,984E 23	7,086E 8

ленная достигает комптоновских размеров $A \approx 10^{10}$ за $T = 2,0(t_p)$, при этом полная энергия рожденных частиц достигает 10^{-16} от планковской энергии, что соответствует примерно 10^{4} частицам. При $A > 10^{10}$ происходит дальнейшее расширение (см. рис. I). На рисунке приведён также предельный случай $M = 0$ (неограниченное деситтеровское расширение). Более быстрый характер расширения для всех $M \neq 0$ связан с влиянием локального члена $< T_0^0(\gamma) >$, см. (5.I0).

Наконец, рассмотрим асимптотическое поведение космологической модели с $M \neq 0$ при $A \gg M^{-1}$. В этом случае, как и в предыдущем разделе, можно разложить $< T_0^0(p) >$ по степеням ω^{-1} и оценивать его локально, причём

$$< T_0^0(p2) > = \frac{1}{48\pi^2 \ell_p^4 A^4} M^2 A^2 \dot{A}^2 = - < T_0^0(2) >, \qquad (5.I7)$$

$$< T_0^0(p4) > = \frac{1}{480\pi^2 \ell_p^4 A^4} \Big[A^2 \ddot{A}^2 - 2A^2 \dot{A} \dddot{A} - $$

$$- 2A\dot{A}^2 \ddot{A} + 2\dot{A}^4 \Big] \neq < T_0^0(4) > . \qquad (5.I8)$$

В (5.I7) модули вкладов $< T_0^0(2) >$ и $< T_0^0(p2) >$ естественно совпадают, а в (5.I8), в отличие от (4.I3), неравенство возникает потому, что теперь в качестве $< T_0^0(4) >$ принято не (3.I6), а выражение (5.I), составляющее часть (3.I6). Высшими членами разложения $< T_0^0(p) >$ по ω^{-1} с высокой точностью пренебрегаем.

Тогда, с учётом (5.I7) и (5.I8) и нелокальной части $< T_0^0(p) >$, которая эффективно увеличивалась до $A \sim 10^3$, а при $A \gtrsim 10^3$ считается постоянной, получим уравнение

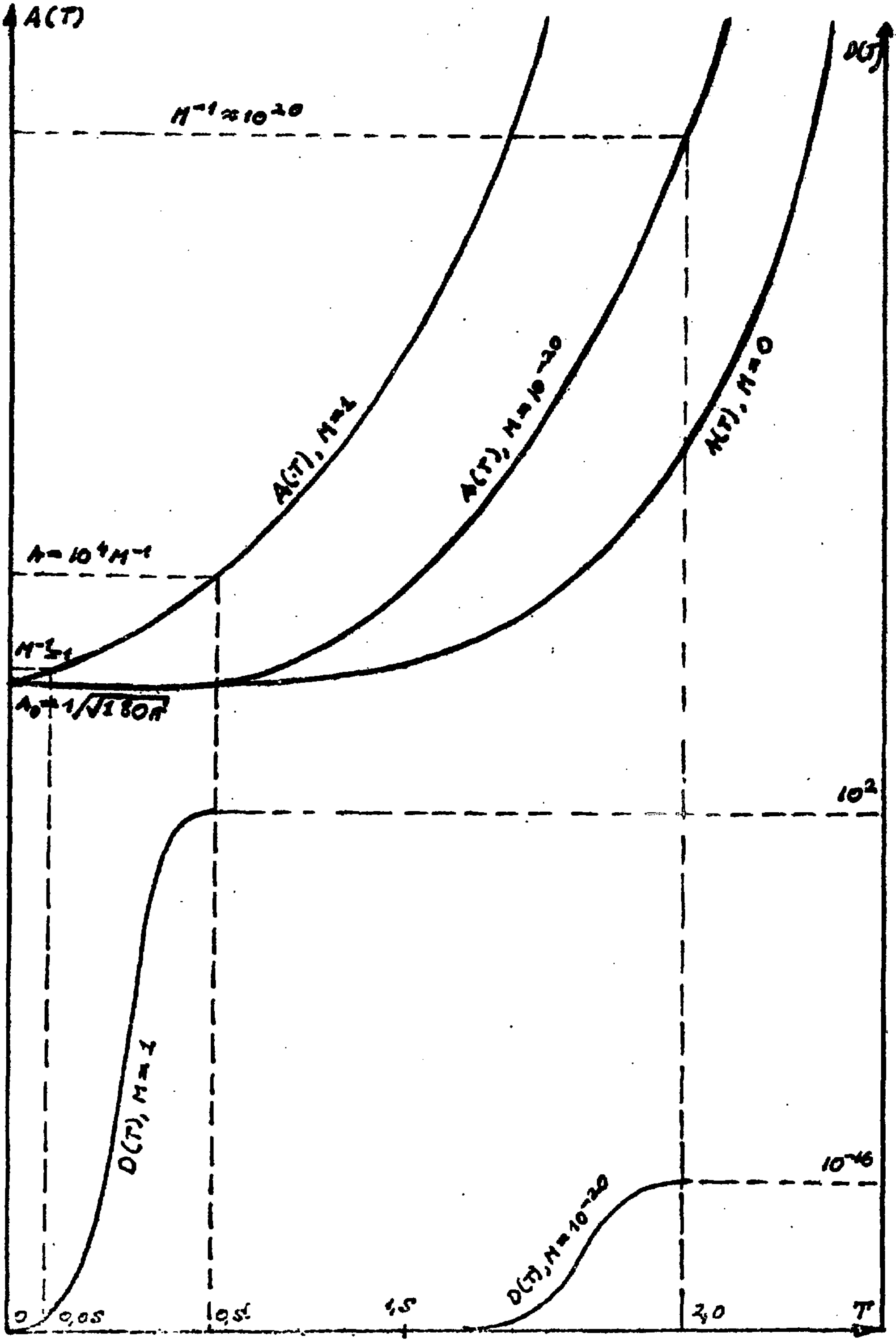
$$180\pi A^2(\dot{A}^2+1)=\Big\{A^2(\ddot{A}^2-2\dot{A}\dddot{A}+$$

$$+\dot{A}^2(3\ddot{A}^2-2A\ddot{A})+2\dot{A}^2+1\Big\}+DA. \qquad (5.19)$$

Уравнение (5.19) отличается от (4.14) геометрическими членами в фигурных скобках, которые представляют собой разность $(<T_0^0(p2)>-<T_0^0(2)>)$. Исследуем возможность остановки сжатия при больших A . Пусть $\dot{A}=0$, тогда в точке максимума должно выполняться равенство

$$\ddot{A}^2=(180\pi-D/A),$$

что возможно. Возможность остановки для $M\neq 0$ определяется тем, насколько справедливо разложение по ω^{-1} вклада $<T_0^0(p)>$ при больших A . Этот вопрос требует дальнейшего выяснения.


A(T)
D(T)
$M^{-1} \approx 10^{20}$
A(T), M=1
A(T), $M=10^{-20}$
A(T), M=0
$A=10^4 M^{-1}$
$M^{-\frac{1}{2}}$
$A_0 = 1/\sqrt{180\pi}$
10^2
D(T), M=1
10^{-16}
D(T), $M=10^{-20}$
0
0,05
0,5
1,5
2,0
T

Литература

I. Weinberg S. Gravitation and cosmology.-N.-Y.-L: 1972. Русский перевод: Вейнберг С. Гравитация и космология. - М.: Мир, 1975.

2. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A. Gravitation.- -San-Fr: Freeman, 1973 . Русский перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977, т. I-3.

3. Rees M., Ruffini R., Wheeler J.A. Black Holes, gravitational waves and cosmology.-N.-Y.-L: Gordon and Breach, 1974 . Русский перевод: Рис М., Руффини Р., Уилер Дж. Чёрные дыры, гравитационные волны и космология. М.: Мир, 1977.

4. Confrontation of cosmological theories with observational data.-Cambr. Univ. Press/ed M. Longair, 1974. Русский перевод: Космология: теории и наблюдения, под ред. А.Я.Зельдовича, И.Д.Новикова.-М.: Мир, 1978.

5. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.

6. Weinberg S. The first three minutes: a modern view of the origin of the Universe.-N.-Y.-L: Basic Books Inc., 1977 . Русский перевод: Вейнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. М.: Энергоиздат, 1981.

7. Hawking S.W., Ellis G.F.R. The large scale structure of spacetime.-Cambr. Univ. Press, 1973 . Русский перевод: Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.

8. Лапчинский В.Г. Несингулярные решения уравнений классической общерелятивистской динамики сплошных сред и волновых полей в собственных гравитационных полях. - Ин-т ядерн. исслед. АН СССР. Препринт, П-0249, 1982.

9. Utiyama R. Renormalization of quantum electrodynamics in a classical gravitational field.-Phys. Rev., 1962, v. 125, No.5, p. 1727-1740.

10. Utiyama R.,De Witt B.S. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter.- Journ. Math. Phys., 1962,v. 3,No. 4, p. 608-618.

11. De Witt B.S. Dynamical theory of groups and fields.- -N.-Y.: Gordon and Breach, 1965.

12. De Witt B.S. Quantum theory of gravity. The manifestly covariant theory, II,III.-Phys. Rev.,1967,v. 162,No. 5, p. 1194-1239, 1239-1256.

13. Chernikov N.A.,Tagirov E.A. Quantum theory of scalar field in De-Sitter spacetime.-Ann. Inst. H. Poincare, 1968,v.9A, No.2, p. 109-141.

14. Бронников К.А., Тагиров Э.А. Квантовая теория скалярного поля в изотропном мире. - ОИЯИ. Препринт Р2 - 4151, Дубна, 1968, 13 с.

15. Parker L. Quantized fields and particle creation in expanding Universe,I.-Phys. Rev., v.183, No.5, p. 1057-1068.

16. Гриб А.А., Мамаев С.Г. К теории поля в пространстве Фридмана. - Ядерн. физика, 1969, т. 10, № 6, с. 1176 - 1181.

17. Гриб А.А., Мамаев С.Г. Рождение вещества во фридмановской модели Вселенной. - Ядерн. физика, 1971, т. 14, № 4, с. 800 - 805.

18. Parker L. Quantized fields and particle creation in expanding Universe, II.-Phys. Rev.D, 1971, v.3, No.2, p. 346-356.

19. Левитский Б.А. Квантованное спинорное поле в пространстве-времени постоянной кривизны. - Вестник Ленингр. Ун-та, 1973, № 4, с. 7 - 12.

20. Черников Н.А., Шавохина Н.С. Метод инвариантного ящика в квантовой теории спинорного поля. - Теор. и мат. физика, 1973, т. 15, № 1, с. 91 - 99.

21. Веряскин А.В., Лапчинский В.Г., Рубаков В.А. О спонтанном нарушении симметрии в замкнутой космологической модели Фридмана. - Теор. и матем. физика, 1980, т. 45, № 3, с. 407 - 420 (приложение).

22. Веряскин А.В., Лапчиский В.Г., Рубаков В.А. Квантование векторного массивного поля в однородном и изотропном пространстве. - Ин-т. ядерн. исслед. АН СССР, Препринт П-0198, 1981, 31 с.

23. Гриб А.А. Проблема неинвариантности вакуума в квантовой теории поля. - М.: Атомиздат, 1978.

24. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.

25. De Witt B.S. Quantum Field theory in curved spacetime.- -Phys. Reports C, 1975, v.19, No. 6, p. 296-357.

26. Davis P.C.W., Fulling S.A., Christensen S.M., Bunch T.S. Energy-momentum tensor of a massles scalar quantum field in a Robertson-Walker universe.-Ann. of Phys., 1977, v.109, No. 1, p. 108-142.

27. Bernard C., Dunkan A. Regularization and renormalization

of quantum field theory in curved spacetime.-Ann. of Phys., 1977, v.107, No.1, p. 201-221.

28. Cristensen S.M. Regularization, renormalization and covariant geodesic point separation.-Phys. Rev.D, 1978, v.17, No.4, p. 946-963.

29. Wald R.M. Axiomatic renormalization of the stress tensor of a conformally invariant field in a conformally flat spacetime.-Ann. of Phys.,1978, v.110, No.2,p.472-486.

30. Brown L.S.,Collins J.C. Dimensional renormalization of scalar field theory in curved spacetime.-Ann. of Phys. 1980, v.130, No.1, p. 215-248.

31. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А. Рождение частиц и поляризация вакуума в анизотропном гравитационном поле. - ЖЭТФ, 1971, т. 61, № 6, с. 2161 - 2175.

32. Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М., Старобинский А.А. Рождение частиц из вакуума вблизи однородной и анизотропной сингулярности. - ЖЭТФ, 1976, т. 70, № 5, с. 1577 - 1591.

33. Ford L. Quantum vacuum energy.-Phys. Rev. D, 1975, v.11, No. 12, p. 3370-3377.

34. Ford L. Quantum vacuum energy in a closed universe.- Phys. Rev. D, 1976, v.14, No. 12, p. 3304-3313.

35. Dowker J.S., Altaie B.M. Spinor fields in an Einstein Universe: the vacuum averaged stress-energy tensor.- -Phys. Rev. D, 1978, v.17, No. 2, p. 417-422.

36. Мамаев С.Г., Трунов М.М. О зависимости вакуумных средних тензора энергии - импульса от геометрии и топологии многообразия. - Теор. и мат. физика, 1979, т. 38, № 3, с. 345 - 354.

37. Lapchinsky V.G.,Rubakov V.A.,Verjaskin A.V. The massive vector field in the Einstein Universe: the vacuum polarization.-In: Abstracts of 9-th Intern. Conf. on Gen. Rel. and Gravit. 1980 , Jena, 1980, p. 322-323.

38. Кречет В.Г., Лапчинский В.Г., Некрасов В.И., Шикин Г.Н. Тензор энергии-импульса вакуума массивного скалярного поля в замкнутых космологических моделях. - В сб.:Проблемы теор. грав. и элем. частиц. М.: Энергоиздат, 1981, вып. 12, с. 48 - 59.

39. Веряскин А.В., Лапчинский В.Г., Некрасов В.И. Поляризация вакуума массивных бозонных и фермионного полей гравитационным полем: топологический вклад. - Ин-т ядерн. исслед. АН СССР, Препринт П-0241, 1982.

40. Lukash V.N.,Novikov I.D.,Starobinsky A.A.,Zeldovich Ya.B. Quantum effects and evolution of cosmological models.-Nuovo Cim. B, 1976, v.35, No.2, p. 293-307.

41. Parker L. The production of elementary particles by strong gravitational fields.-In "Asymp. Structure of spacetime. Proc. Sympos. Cincin. Ohyc, 1976."-N.-Y.-L: 1977, p. 107-116.

42. Гриб А.А. Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Рождение пар частиц в расширяющейся изотропной Вселенной. - Пробл. теор. грав. и элем. частиц. М.: Атомиздат, 1978, вып.9, с. 7 - 27.

43. Bonametto S.A.,Pollock M.D. The unitary Bogolubov transformation for a quantized scalar field in a Friedman spacetime.-Gen. Rel. and Gravit., 1980, v.12,No.7, p. 511-520.

44. Рузмайкина Т.В., Рузмайкин А.А. Квадратичные добавки к лагранжевой плотности гравитационного поля и сингулярность. - ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 2, с. 680 - 685.

45. Nariai M. On the removel initial singularity in a Big Bang Universe in terms of a renormalized theory of gravitation,I. Progr. theor. phys., 1971, v.46, No. 2, p. 433-438.

46. Nariai H.,Tomita K.On the removel initial singularity in a Big Bang Universe in terms of a renormalized theory of gravitation,II.-Progr. theor. phys., 1971, v. 46, No. 3, p. 776-786.

47. Parker L.,Fulling S.A. Quantized matter fields and the avoidence of singularities in Gen. relativity.- Phys. Rev. D, 1973, v.7, No. 8, p. 2357-2372.

48. Jones J.E. Quantum vacuum cosmology.-Ann. of Phys., 1976, v. 101, No. 3, p. 380-393.

49. Horowitz G.T., Wald R.M. Dynamics of Einstein's equation modified by a higher-order derivative term.- -Phys. Rev. D, 1978,v.17, No. 2, p. 414-416.

50. Гурович В.Ц., Старобинский А.А. Квантовые эффекты и регулярные космологические модели. - ЖЭТФ, 1979, т. 71, № 5, с. 1683 - 1700.

51. Мостепаненко В.М. О влиянии квантовых полей на метрику пространства-времени в космологии. - Ядерн. физика, 1980, т. 31. № 6, с. 1690 - 1695.

52. Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. Изотропные космологические модели, определяемые вакуумными квантовыми эффектами. - ЖЭТФ, 1980, т. 78, № 1, с. 20 - 27.

А.И.Веселов и др.
Космологические модели с квантовым скалярным полем
Редактор И.Н.Ломакина Корректор О.Ю.Ольховникова
Работа поступила в ОНТИ 10.03.82г.

Подписано к печати 18.03.82 Т06933 Формат 60x90 1/16
Офсетн.печ. Усл.-печ.л.2,5. Уч.-изд.л.1,8. Тираж 290 экз.
Заказ 34 Индекс 3624 Цена 27 коп.

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская, 25

27 коп

ИНДЕКС 3624

М., ПРЕПРИНТ ИТЭФ, 1982, № 34, с.1-41