ХФТИ 82-3

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН УССР

В.В.Слезов, А.В.Тур, В.В.Яновский

О ДИФФУЗИОННОМ РОСТЕ ПУЗЫРЬКОВ

Харьков 1982

УДК 532.521

Слезов В.В., Тур А.В., Яновский В.В.

О ДИФФУЗИОННОМ РОСТЕ ПУЗЫРЬКОВ.

Препринт ХФТИ АН УССР, ХФТИ 82-3, Харьков, 1982, 8 с.

Исследуется эволюция пузырьков в жидкости под влиянием диффузии. Изучена линейная стадия, в которой показано возникновение колебаний пузырьков. Нелинейная стадия роста и схлопывания проанализирована в случае доминирования процессов диффузии. (Список лит. - 6 назв.).

В данной работе рассматривается поведение газонаполненного пузырька в жидкости под влиянием диффузии газа из жидкости. Изучение такого явления представляет определенный интерес с нескольких точек зрения. Во-первых, чаще всего пузырьки образуются в пересыщенных газом растворах, в которых рост пузырьков происходит вследствие диффузии. Это влечет за собой, как будет показано ниже, изменение собственных частот колебаний пузырьков, что в принципе влияет на дисперсионные свойства звука, распространяющегося в такой среде [I]. Во-вторых, пересыщенный раствор служит своеобразным коллективизирующим полем, приводящим к ряду коллективных явлений. Влияние таких процессов может оказаться существенным, например, на коалесценцию пузырьков с учетом известного эффекта Бьеркенса [2].

I. Систему уравнений, описывающую эволюцию газонаполненного пузырька, легко получить, используя уравнение Навье-Стокса, что, следуя, например, [3], дает уравнение для радиуса пузырька $R(t)$ в зависимости от давления внутри него. Считая газ идеальным, получаем

$$\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} = -\frac{1}{\rho}\left(P_0 - \frac{3NT}{4\pi R^3} + \frac{\alpha}{R} + \frac{4\mu}{R}\dot{R}\right). \qquad (I)$$

Здесь P_0 – давление на бесконечности; α – коэффициент поверхностного натяжения; μ – вязкость жидкости; N – число частиц газа в пузырьке.

Для замыкания системы необходимо учесть изменение числа атомов газа за счет его диффузии через поверхность пузырька. Следуя работе [4], опишем ее уравнением

$$\dot{N} = 4\pi D^r R\left(\frac{c^r}{\omega} - \frac{3\delta N}{4\pi R^3}\right), \qquad (2)$$

где D^r – коэффициент диффузии; $\frac{c^r}{\omega}$ – количество газа в единице объема пузырька; δ определяет равновесное значение c^r у поверхности пузырька $\delta = e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}$.

Система уравнений (I), (2), дополненная начальными условиями для N, R и $\dot{R}$ при $t = 0$, и определяет изменение размера пузырька со временем.

2. Из выражений (I), (2) легко заметить, что равновесные параметры пузырька определяются соотношениями:

$$R_0 = \frac{\alpha\omega}{\frac{c^r T}{\delta} - P_0\omega};$$

$$N_0 = \frac{4\pi c^r \alpha^3}{3\delta\omega\left(\frac{c^r T}{\delta\omega} - P_0\right)}. \qquad (3)$$

Проанализируем (I), (2) вблизи равновесия. Считая отклонения от равновесия малыми ($R = R_0 + r$, $N = N_0 + n$, $Y = y$, $Y = \dot{R}$) в окрестности положения равновесия, получаем для возмущений r, n, y (при $y \ll \frac{8\mu}{3R_0\rho}$) систему

$$\begin{cases} \dot{r} = y; \\ \dot{n} = 4\pi D^r\left[\left(\frac{c^r}{\omega} - \frac{2\delta N_0}{\frac{4\pi}{3}R_0^3}\right)r - \frac{\delta}{\frac{4\pi}{3}R_0^2}n\right]; \\ \dot{y} = -\frac{1}{\rho R_0}\left[\left(\frac{9N_0T}{4\pi R_0^4} - \frac{\alpha}{R_0^2}\right)r - \frac{3T}{4\pi R_0^3}n + \frac{4\mu}{R_0}y\right]. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение системы (4) будем искать в виде $\sim e^{\lambda t}$. Тогда для λ получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + \tilde{\alpha}\lambda^2 + \beta\lambda + C = 0;$$

$$\tilde{\alpha} = \left(\frac{3\delta D^r}{R_0^2} + \frac{4\mu}{\rho R_0^2}\right); \qquad (5)$$

$$\beta = \frac{1}{\rho R_0^3}\left(\frac{3\delta D^r 4\mu}{R_0} + \frac{9N_0T}{4\pi R_0^2} - \alpha\right);$$

$$C = -\frac{3D^r\delta\alpha}{\rho R_0^5} - \frac{3TD^rC^r}{\rho R_0^4\omega} + \frac{15D^r\delta N_0 T}{4\pi R_0^7\rho}.$$

Положение равновесия (3) будет устойчивым при $\beta > 0$, $C > 0$. Действительно, в этом случае корни характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть.

Достаточное условие устойчивости можно записать как

$$R_0 > \frac{\alpha\delta\omega}{3TC^r}. \qquad (6)$$

Это означает, что при равновесных размерах пузырька больше критического $R_\kappa = \frac{\alpha\delta\omega}{3TC^r}$ эволюция его хорошо описывается в линейном режиме. Характер стремления к равновесному значению определяется знаком

$$Q = \left(\frac{\beta - \frac{\tilde{\alpha}^2}{3}}{3}\right)^3 + \left(\frac{C - \frac{\tilde{\alpha}\beta}{3} + 2\left(\frac{\tilde{\alpha}}{3}\right)^3}{2}\right)^2.$$

Так при $Q > 0$ (5) имеем два комплексных и один действительный корень, при $Q < 0$ – все корни действительны.

Таким образом, при $Q > 0$ пузырек в процессе эволюции колеблется. Колебания пузырька связаны с инерционными свойствами жидкости. Оценим частоту колебаний Ω в наиболее интересном физическом случае, когда $\mathrm{Re}\lambda \ll \mathrm{Im}\lambda = \Omega$. Тогда при $\beta^2 \gg \tilde{\alpha}(C - 3\tilde{\alpha}\beta)$ и $\beta\sqrt{\beta} \gg (C - 3\tilde{\alpha}\beta)$ частота $\Omega^2 \simeq \beta$. Легко заметить, что частота колебаний зависит от вязкости и коэффициента диффузии. Такая зависимость должна приводить к ряду физических явлений. В частности, изменяется дисперсия звука, распространяющегося в среде с пузырьками при наличии диффузии, и по частоте колебаний можно следить за процессами диффузии. Наконец, возникают коллективные эффекты, связанные с тем, что диффузия является общей для всех пузырьков жидкости. Стимулируя их колебания, она приводит к возникновению сил притяжения и отталкивания между ними в зависимости от соотношения фаз (эффект Бьеркенса, см., например, [2]) колебаний. Наличие таких сил может привести к возникновению новых мод колебаний системы пузырьков типа плазменных. Таким образом, на процессе коалесценции существенно скажется гидродинамическое перемещение пузырьков, приводящее к выживанию пузырьков, колеблющихся в фазе друг с другом. Последующий этап их эволюции сводится к согласованному их росту до равновесного значения. Подобным механизмом возможно объясняется энергетически выгодное возникновение решетки пор в твердых телах под облучением. При $R_0 < R_к$ положение равновесия неустойчиво.

3. Рассмотрим ниже нелинейный этап эволюции пузырьков. При этом случай слабого влияния диффузии на гидродинамическую эволюцию пузырьков рассматривать не будем в силу того, что гидродинамическая стадия изучена достаточно полно в ряде работ (например, в работах [5,6]). Тогда при быстрой подстройке размера пузырька под количество атомов газа внутри него (что означает малость гидродинамических временных масштабов по сравнению с диффузионными) система уравнений (I), (2) принимает вид:

$$P_0 + \frac{\alpha}{R} = \frac{3NT}{4\pi R^3};$$
$$\dot{N} = 4\pi D^r\left[\left(\frac{c^r}{\omega} - \frac{\delta P_0}{T}\right)R - \frac{\alpha\delta}{T}\right]. \qquad (7)$$

Систему уравнений (7) можно записать в виде одного уравнения для R, которое в безразмерных переменных $z = \frac{R}{R_0}$, $\tau = t\,\frac{2R_0^2}{3D^r\delta}$ принимает вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z-1}{z(az+1)}, \qquad (8)$$

где $a = \frac{3P_0}{2\alpha}R_0$. Легко заметить, что в рассматриваемом случае пузырьки, начальный размер которых $R(0) > R_0$, неограниченно растут. Физически это связано с тем, что объем растет быстрее поверхности, и концентрация газа внутри пузырька не может достигнуть равновесной. В случае $R(0) < R_0$ пузырьки схлопываются за конечное время.

Рассмотрим последовательно стадии роста пузырька, начальный размер которого $R(0) \simeq R_0$. Линеаризуя (8) в окрестности I (z = I $+\varepsilon$), легко получить экспоненциальный рост пузырька на малых временах. Действительно $\varepsilon = \exp\frac{\tau}{a+1}$. На временах $a > 1$ экспоненциальный участок сменяется степенным режимом роста, характер которого определяется величиной a. При $a >$ I на первом этапе достигается размер пузырька, при котором выполняется

$R \gg R_0$. Решая выражение (8) при этом условии, получаем

$$R = R_0\sqrt{2\frac{\tau}{a} + C_1}\ . \qquad (9)$$

Таким образом, пузырек на временах $\tau > a +$ I растет корневым образом (C_1 – определяется по решению точной задачи) при $a >$ I. В случае $a <$ I экспоненциальный рост сменяется линейным ростом (так как при $\tau > a+1$, $a < 1$ сначала выполняется $R \gg R_0$ и $R \ll \frac{R_0}{a}$)

$$R = R_0(\tau + C_1)\ . \qquad (10)$$

По мере роста пузырька неравенство $R \ll \frac{R_0}{a}$ нарушается, и мы снова выходим на корневой рост, определяемый выражением (9). Времена выхода на корневой режим, как следует из уравнения (10), $\tau \simeq \frac{1}{a}$. В случае крупных пузырьков $R \gg R_0$ стадия экспоненциального роста отсутствует, а эволюция определяется прежними степенными режимами в зависимости от величины a (при этом $C \simeq$ I). Стадия схлопывания пузырьков, как и стадия роста, определяется величиной a. Рассмотрим схлопывание пузырьков $R(0) \ll R_0$. При $a<1$ ($z \ll 1$) из выражения (8) следует

$$R = R_0\sqrt{2(\tau_0 - \tau)}\ , \qquad (11)$$

т.е. размер пузырька падает корневым образом.

При $a \gg 1$ $\left(\frac{1}{a} \ll z \ll 1\right)$

$$R = R_0\sqrt[3]{\frac{3}{a}(\tau_0 - \tau)}\ . \qquad (12)$$

Здесь τ_0 – время схлопывания пузырька. В первом случае $\tau_0 \simeq \frac{R(0)^2}{2R_0^2}$, а во втором $\tau_0 \simeq R(0)^3 a/3R_0^3$. Полученные выражения описывают все стадии эволюции пузырьков в рассматриваемом режиме доминирования процессов диффузии.

ПРИКНИЖНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.

4. Слезов В.В. Коалесценция системы, дислокационные петли и поры в материале, подверженном облучению. - ФТТ, I967, № I2, вып. 9, с. 3448-3455.
5. Rayleigh. On the pressure developed in liquid during the collapse of a spherical cavity. - Phil. Mag., 1917, vol.34, p.94-98.
6. Zwick S.A. Growth of vapor bubbles in a rapidly heated liquid. - Phys. Fluids, 1960, vol.3(5), p.685.

Виталий Валентинович Слезов, Анатолий Валентинович Тур,
Владимир Владимирович Яновский

О ДИФФУЗИОННОМ РОСТЕ ПУЗЫРЬКОВ

Ответственный за выпуск В.В.Яновский, Л.М.Ракивненко
Редактор, корректор Т.В.Ситнянская

Подписано в печать 22.10.81. Т-27495. Формат 60x84/16.
Бум. офсетн. №1. Офсетн. печ. 0,5 усл.п.л. 0,3 уч.-изд.л.
Тираж 190. Заказ 11. Цена 5 коп. Индекс 3624

Харьков-108, ротапринт ХФТИ АН УССР

5 коп.

Индекс 3624

Препринт ХФТИ 82-3, Харьков, 1982, 1-6.