

DETERMINATION DES INVARIANTS DE WEYL ET CALCUL DES
COEFFICIENTS DE COUPLAGE DES GROUPES UNITAIRES

M. HAGE HASSAN

Institut de Physique Nucléaire (et IN2P3), Université Claude Bernard Lyon I,
43, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex (France).

RESUME. Nous présentons une nouvelle approche pour la détermination des invariants de Weyl des groupes unitaires en prenant comme point d'appui, la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires que nous avons construite dans un travail antérieur. Nous obtenons, pour les invariants de Weyl, deux expressions en termes fonctions des paramètres dont dépend la fonction génératrice et dans l'une d'elles, apparaissent les coefficients de couplage. La comparaison des développements des deux expressions obtenues permet le calcul des coefficients de couplage. L'application de cette approche au calcul des coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du groupe SU (3) nous a donné une expression du facteur isoscalaire où n'intervient aucune sommation, alors que l'expression des coefficients de couplage connue jusqu'à ce jour en comporte cinq.

ABSTRACT. We present a new approach for determining the Weyl invariants of unitary groups. Such an approach is based on the generating function of the basis of the representation for unitary groups built in an earlier work. We obtain two expressions for the Weyl invariants, both including the parameters involved in the generating function. Coupling coefficients appear in one of the expressions. The comparison of the development of the two expressions allow the calculation of the coupling coefficients. The application of this approach to the calculation of the coupling coefficients for the direct product $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ of SU (3) leads to an expression of the isoscalar factor where no summation occurs in contradiction with the known expression for the coupling coefficients which involve five summation.

Adresse permanente : Université Libanaise, Faculté des Sciences,
Section I, HADETH, BEYROUTH, LIBAN.

FR 8301999

1. Introduction

Les coefficients de couplage des groupes unitaires couplent trois états d'une représentation irréductible pour donner un scalaire appelé invariant de Weyl ou invariant de Van der Waerden. Pour spécifier la représentation irréductible des groupes unitaires, Biedenharn, Giovanni et Louck (1969) ont trouvé une solution dans le cas de $SU(3)$ et ont suggéré une extension de leur méthode au cas de $SU(n)$.

Moshinsky a observé qu'un ensemble d'éléments de la base de la représentation irréductible contenue dans le produit direct de p représentations irréductibles de $SU(n)$ peuvent être considérés comme les éléments d'une base de la représentation irréductible de $SU(p(n-1))$ et en appliquant la méthode infinitésimale, Moshinsky (1962) a obtenu une expression des coefficients de couplage $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du produit direct du groupe $SU(3)$ où interviennent cinq sommations. Par la suite, une formule de récurrence donnant les coefficients de couplage des groupes unitaires a été présentée par Brody, Moshinsky et Renero (1972).

Une autre approche, désormais largement connue et déjà présentée par Weyl en 1925 a été exposée par Van der Waerden en 1932, pour le calcul des coefficients de couplage du groupe $SU(2)$: elle consiste en la construction des invariants de Weyl à partir de scalaires élémentaires du groupe $SU(2)$ et en leur développement sur la base de la représentation du groupe $SU(2)$. Cette méthode a été depuis, exploitée par différents auteurs : Chew et Sharp (1967), Resnikoff (1967), Sharp et Lee (1971), Hongoh (1974), qui se sont attachés au calcul des coefficients de couplage des groupes unitaires pour $n \geq 3$ et ont construit, tous les scalaires élémentaires des groupes unitaires. Cependant, dans leur travail, ils se sont heurtés à de grandes difficultés au niveau de la construction des invariants de Weyl.

Notre approche consiste à construire la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires (Hage Hassan 1982) et à extraire l'expression des invariants de Weyl des éléments de la base de la représentation du groupe $SU(3(n-1))$ que nous déterminons. Nous constatons que notre démarche est en accord avec l'observation de Moshinsky citée précédemment.

En effectuant de deux manières différentes le développement de la fonction génératrice des groupes unitaires que nous avons établie (Hage Hassan 1982), nous obtenons deux expressions différentes des invariants de Weyl, en termes faisant appel aux paramètres dont dépend cette fonction. La comparaison des développements des deux expressions obtenues nous donne les coefficients de couplage des groupes unitaires.

Notre méthode se caractérise par sa simplicité et sa généralité, car elle permet sans difficulté, le calcul de tous les coefficients de couplage des groupes unitaires et l'étude de leurs propriétés de symétrie. L'application de cette méthode au calcul des coefficients de couplage $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du produit direct du groupe $SU(3)$, présenté précédemment par Moshinsky, nous donne l'expression de ces coefficients sous la forme d'un produit de deux termes, où l'un des facteurs est le symbole 3-j du groupe $SU(2)$ et l'autre terme est le facteur isoscalaire du groupe $SU(3)$. Il est important de souligner que l'expression du facteur isoscalaire du groupe $SU(3)$ que nous obtenons, ne fait intervenir aucune sommation.

Nous consacrons la première partie de ce travail au rappel des résultats dont nous avons besoin. Dans la deuxième partie nous construisons la fonction génératrice des invariants de Weyl des groupes unitaires. La troisième partie donne la construction de la fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires. Dans la

quatrième partie nous calculons les coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du groupe $U(3)$. Il est important de souligner que ce travail fait suite au travail sur la fonction génératrice de la base de Gel'fand de la représentation du groupe unitaire (Hage Hassan 1982).

2. L'espace de la représentation de Bargmann-Moshinsky des groupes unitaires

2.1. Espace de Bargmann

Nous appelons \mathcal{F}_n l'ensemble des fonctions analytiques entières $f(z)$, où $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ est un point de l'espace Euclidien complexe à n dimensions de C_n .

Le produit scalaire de deux éléments f et f' de \mathcal{F}_n s'écrira :

$$(f, f') = \int \overline{f(z)} f'(z) d\mu_n(z), \quad (1)$$

avec la mesure

$$d\mu_n(z) = \pi^{-n} \exp[-(\bar{z} z)] \prod_{k=1}^n dz_k \quad (2)$$

$$\text{où } z_k = x_k + i y_k, \quad dz_k = dx_k dy_k, \quad (\bar{z} z) = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k z_k.$$

Le complexe conjugué de $f(z)$ est $\overline{f(z)}$.

A chaque transformation unitaire U_n de C_n on fait correspondre un opérateur T_{U_n} défini par :

$$(T_{U_n} f)(z) = f({}^t U_n(z)), \quad (3)$$

${}^t U_n$ est le transposé de U_n

2.2. Représentation de Bargmann-Moshinsky

Nous considérons l'espace $D_{[h]}$, avec $[h] = [h_1, \dots, h_n]$, des polynômes homogènes qui est un sous-espace de $\tilde{\mathcal{F}}_n$. Toute fonction appartenant à $D_{[h]}$ est définie par:

$$f(\lambda_1 z^1, \lambda_2 z^2, \dots, \lambda_n z^n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k_i} f(z^1, \dots, z^n), \quad (4)$$

avec

$$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \dots \geq k_n, \quad z^i \in C_n,$$

$$h_1 = k_1 - k_2, \quad h_2 = k_2 - k_3, \dots, \quad h_n = k_n.$$

Les vecteurs de la base du sous-espace $D_{[h]}$, base de Bargmann-Moshinsky, sont des polynômes homogènes $\Gamma_n \left(\begin{smallmatrix} [h] \\ (h) \end{smallmatrix} \right) (z_1, \dots, z_n)$ qui

satisfont les conditions suivantes :

$$C^{ii} \Gamma_n \left(\begin{smallmatrix} [h] \\ (h) \end{smallmatrix} \right) (z_1, \dots, z_n) = h_i \Gamma_n \left(\begin{smallmatrix} [h] \\ (h) \end{smallmatrix} \right) (z_1, \dots, z_n), \quad (5)$$

$$C^{ij} \Gamma_n \left(\begin{smallmatrix} [h] \\ (h) \end{smallmatrix} \right) = 0 \quad \text{pour } i < j \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (6)$$

où h_i sont des entiers positifs, et on note :

$$C^{ij} = \sum_{k=1}^n z_k^i \frac{\partial}{\partial z_k^j}. \quad (7)$$

Les vecteurs $\Gamma_n \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix}$ forment une base de la représentation irréducible de $U(n)$, de plus ils sont fonction de déterminants

$\Delta_{j_1 j_2 \dots j_\ell}(z) = \det \begin{pmatrix} z_{j_a}^{j_b} \end{pmatrix}_{j_b}$, $a, b = 1, \dots, \ell$. Dans la suite de ce travail nous utiliserons, soit $\Gamma_n \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix}(z_1, \dots, z_n)$, soit $\Gamma_n \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix}(\Delta)$.

Nous nous limitons à l'étude des groupes $SU(n)$, dont la base $\Gamma_n \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix}$ n'est fonction que de $n-1$ vecteurs seulement (Moshinsky 1963) et $h_n = 0$.

Dans le cas où $n = 3$, les vecteurs de la base de la représentation sont donnés dans les notations de Gel'fand par :

$$T_3 \begin{pmatrix} h_{13} & h_{23} & 0 \\ & h_{12} & h_{22} \\ & & h_{11} \end{pmatrix} (z^1, z^2) \text{ avec } z^i = (z_1^i, z_2^i, z_3^i), \quad (8)$$

ou bien encore (Resnikoff 1967) :

$$T_3 \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ y & t \quad t_z \end{pmatrix} (z^1, z^2), \quad (9)$$

avec,

$$\begin{aligned} h_{23} &= \mu, & t &= \frac{1}{2} (h_{12} - h_{22}), \\ h_{13} &= \lambda + \mu, & t_z &= h_{11} - \frac{1}{2} (h_{12} + h_{22}), \\ & & y &= h_{12} + h_{22} - \frac{2}{3} (h_{13} + h_{23}). \end{aligned}$$

et,

$$y = -(2\lambda + u) + 3(p + q), \quad 0 \leq p \leq \lambda$$

$$t = \frac{\mu}{2} + \frac{1}{2}(p - q), \quad 0 \leq q \leq \mu$$

$$t_z = t - r, \quad r = 0, 1, \dots, 2t,$$

où y est l'hypercharge, t et t_z sont respectivement, l'isospin et sa projection sur l'axe des z .

2.3. Espace produit direct et représentation irréductible continue dans le produit direct

2.3.1. L'espace produit direct $\mathfrak{F}_{n_1} \boxtimes \mathfrak{F}_{n_2} \boxtimes \mathfrak{F}_{n_3} \boxtimes \dots \boxtimes \mathfrak{F}_{n_p}$

correspond à une décomposition de $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_{(n_1 + n_2 + \dots + n_p)}$ avec

$$n = \sum_{i=1}^p n_i.$$

$$f(z) = \prod_{i=1}^p f_i(z^i) \in \mathfrak{F}_n, \quad f_i(z^i) \in \mathfrak{F}_{n_i}. \quad (10)$$

Si $n_1 = n_2 = \dots = n_p = n-1$, l'espace produit direct sera noté $\mathfrak{F}_n^{(p)}$ et dans ce cas :

$$T_{U_n}^{(1, 2, \dots, p)} f(z) = f(t_{U_n} z^1, \dots, t_{U_n} z^{p(n-1)}), \quad (11)$$

où

$$T_{U_n}^{(1, 2, \dots, p)} = T_{U_n}^{(1)} \boxtimes T_{U_n}^{(2)} \boxtimes \dots \boxtimes T_{U_n}^{(p)}. \quad (12)$$

2.3.2. Représentation irréductible continue dans le produit direct

Nous désignons par $\Gamma_n \begin{pmatrix} [h^k] \\ (h^k) \end{pmatrix}$ la base du sous-espace $D_{[h^k]}$. La base du produit direct $\prod_{i=1}^p \otimes D_{[h^k]}$ de n^p est $\prod_{k=1}^p \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^k] \\ (h^k) \end{pmatrix} (z^{(k-1)(n-1)+1}, z^{(k-1)(n-1)+2}, \dots, z^{k(n-1)})$,

avec

$$C_k^{ii} \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^k] \\ (h^k) \end{pmatrix} = h_i^k \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^k] \\ (h^k) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$C_k^{ij} \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^k] \\ (h^k) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{si } i < j. \quad (14)$$

Pour déterminer la base de la représentation irréductible de l'espace

produit direct $\prod_{k=1}^p \otimes D_{[h^k]}$, nous suivons la méthode proposée par

Moshinsky (1963). Nous cherchons les polynômes $P(z_1, \dots, z_{(n-1)p})$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$C_k^{ii} P = h_i^k P \quad \text{avec } k = 1, 2, 3 \quad (15)$$

$$C_k^{ij} P = 0 \quad \text{si } i < j, j = (k-1)(n-1) + 1, \dots, k(n-1). \quad (16)$$

Pour analyser le produit direct de $SU(n)$, Moshinsky observe que l'on peut se limiter au sous-ensemble des polynômes qui forment les éléments de la base des sous-espaces irréductibles de la base de la représentation de $SU(p(n-1))$, vérifiant les conditions (15-16). Dans la suite de ce travail, nous déterminons une partie de ces polynômes à l'aide

de la fonction génératrice de la base de Bargmann-Moshinsky des groupes unitaires que nous avons construite (Hage Hassan 1982).

3. Fonction génératrice des invariants de Weyl

3.1. Les invariants de Weyl

Les invariants de Weyl, $\{h_\rho\}$ (ou invariants de Van der Waerden) sont les vecteurs du produit direct $\prod_{k=1}^3 \mathbb{D}_{[h^k]} \cong \mathfrak{D}_n^{(3)}$ qui sont invariants par la transformation $T_{U_n}^{(1,2,3)}$.

$$T_{U_n}^{(1,2,3)} h_\rho = h_\rho \quad (17)$$

Ces vecteurs se développent (Resnikoff 1967) sur la base du produit

direct $\prod_{k=1}^3 \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h^k] \\ (h^k) \end{matrix} \right)$ comme suit :

$$h_\rho(z_1, \dots, z_{3(n-1)}) = \sum_{(h^1)(h^2)(h^3)} \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{pmatrix}$$

$$\times \prod_{k=1}^3 \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h^k] \\ (h^k) \end{matrix} \right) (z^{(k-1)(n-1)+1}, \dots, z^{k(n-1)}) \quad (18)$$

$\begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{pmatrix}$ sont les coefficients de couplage ou symboles $3[h]$ des groupes $SU(n)$.

Les invariants h_ρ sont des polynômes invariants par $T_{U_n}^{(1,2,3)}$.

Ceci implique que ces polynômes sont fonction de scalaires élémentaires. Par exemple, dans le cas où $n = 3$, la base de la représentation du produit direct $\prod_{i=1}^3 \mathbb{D} [h^i]$ est :

$$\Gamma_3 \begin{pmatrix} \lambda^1 & \mu^1 \\ y^1 & t^1 & t^1 \\ z^1 & z^2 & z \end{pmatrix} \Gamma_3 \begin{pmatrix} \lambda^2 & \mu^2 \\ y^2 & t^2 & t^2 \\ z^3 & z^4 & z \end{pmatrix} \Gamma_3 \begin{pmatrix} \lambda^3 & \mu^3 \\ y^3 & t^3 & t^3 \\ z^5 & z^6 & z \end{pmatrix} \quad (19)$$

avec $z^i = (z^i_1, z^i_2, z^i_3)$.

Les scalaires élémentaires s'expriment dans ce cas à l'aide de produits scalaires et de produits vectoriels de l'espace à trois dimensions et nous obtenons huit scalaires élémentaires :

$$z^1 \cdot (z^3 \wedge z^5), z^1 \cdot (z^3 \wedge z^4), z^1 \cdot (z^5 \wedge z^6), z^3 \cdot (z^1 \wedge z^2) \quad (20)$$

$$z^3 \cdot (z^5 \wedge z^6), z^5 \cdot (z^1 \wedge z^2), z^5 \cdot (z^3 \wedge z^4), (z^1 \wedge z^2) \cdot [(z^3 \wedge z^4) \wedge (z^5 \wedge z^6)].$$

Ces scalaires sont invariants par $T_{U_3}^{(1,2,3)}$ et vérifient les conditions (15-16).

Nous pouvons classer les invariants de Weyl en deux groupes (Chew et Sharp 1967), les invariants qui sont fonction des sept premiers scalaires, et les invariants qui sont fonction des sept derniers. Ces invariants sont des polynômes homogènes et orthogonaux entre eux (Bargmann 1962, Resnikoff 1967). Nous savons que parmi les déterminants qui constituent les variables de la base de la représentation du groupe $SU(6)$ figurent les sept premiers déterminants. Ainsi, nous pouvons choisir pour h_p , les vecteurs de la base de la représentation de $SU(6)$ qui vérifient les conditions (15-16) et nous notons ces invariants

$$h_6 \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix}.$$

Le développement de $h_6 \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix}$ sur la base (19) permettrait la détermination des symboles $3[h]$ de Wigner (Chew et Sharp 1967). Mais nous exposerons dans la suite de ce travail, une autre méthode de calcul des symboles $3[h]$ qui utilise la fonction génératrice de ces symboles.

Pour $n \geq 4$, la base $\prod_{i=1}^3 \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^i] \\ (h^i) \end{pmatrix} (\Delta^i)$ de $\prod_{i=1}^3 \mathbb{R} D [h^i]$

étant fonction de déterminants (Δ^i) , nous pouvons construire les scalaires élémentaires à l'aide de ces déterminants (Sharp et Lee 1971, Hongoh 1974). Les scalaires élémentaires sont invariants par $T_{U_n}^{(1,2,3)}$

et vérifient les conditions (15-16), de plus les invariants de Weyl $h_p(\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$ sont fonctions de ces scalaires. Les invariants de Weyl étant orthogonaux (Resnikoff 1967) et étant fonctions de scalaires, peuvent être classés en plusieurs groupes (Sharp et Lee 1971). Mais pour le calcul des coefficients de couplage des groupes unitaires, nous nous limitons à la recherche des invariants de Weyl qui constituent les éléments de la base de la représentation irréductible du groupe $SU(3(n-1))$ et nous désignons ces invariants par $h_n \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix} (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$.

3.2. Fonction génératrice des invariants de Weyl

La fonction génératrice des invariants de Weyl se déduit de la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe $U(3(n-1))$:

$$\sum_{h \ u \ v} A_{3(n-1)} \varphi_{3(n-1)}(h_{uv}, (y, z)) \Gamma_{3(n-1)} \begin{pmatrix} [h] \\ (h) \end{pmatrix} (\Delta(z))$$

$$= \exp \left[\sum_i \varphi_{3(n-1)}^i x_i(z_{3(n-1)}) \right] \quad (21)$$

En sélectionnant, les scalaires élémentaires ${}^s x_i(z_{3(n-1)})$ parmi les variables $x_i(z_{3(n-1)})$ nous déterminons les variables ${}^s \varphi_{3(n-1)}^i$ correspondantes de $\varphi_{3(n-1)}^i$. En examinant les paramètres (y, z) des variables $\varphi_{3(n-1)}^i$ nous remarquons qu'un ensemble de ces paramètres ne figure pas dans toutes les variables ${}^s \varphi_{3(n-1)}^i$. Si nous remplaçons ces paramètres par zéro dans l'expression (21) nous obtenons la fonction génératrice des invariants de Weyl $h_{3(n-1)} \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$. Ainsi nous écrivons :

$$\sum_{h_{uv}} A_{3(n-1)} \varphi_{3(n-1)}(h_{uv}, (y, z)) h_{3(n-1)} \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3) \\ = \exp \left[\sum_i {}^s \varphi_{3(n-1)}^i {}^s x_i(z_{3(n-1)}) \right]. \quad (22)$$

Les scalaires ${}^s x_i(z_{3(n-1)})$ sont fonctions de $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$ et nous les notons ${}^s x_i(\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$. La fonction génératrice (22) joue un rôle important puisque c'est grâce à elle que nous obtenons la fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires.

4. Fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires

Pour déterminer la fonction génératrice des coefficients de couplage, nous disposons de deux expressions de la fonction génératrice de la base de la représentation de la base de Bargmann-Moshinsky des groupes unitaires (Hage Hassan 1982) :

$$\begin{aligned} \exp \left[\sum_i \varphi_n^i x_i(z_n) \right] &= \sum_{h_{\mu\nu}} A_n \varphi_n(h_{\mu\nu}, (y, z)) \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta(z_n)) \\ &= \sum_{h_{\mu\nu}} \frac{1}{B_n} k'_n \left[x(z_n), \varphi_n \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$k'_n(x(z_n), \varphi_n)$ se déduit de la fonction noyau :

$$k_n(\Delta(z), \Delta(z')) = \sum_{(h)_n} \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta(z)) \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta(z')), \text{ par la substitu-}$$

tion dans cette expression de $x_i(\bar{z}'_n)$ par φ_n^i . Ainsi nous écrivons :

$$k'_n \left[\Delta(z), \varphi \right] = \sum_{(h)_n} \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\varphi_n) \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta(z)), \quad (24)$$

$$= \sum_{(h)_n} A_n B_n \varphi_n(h_{\mu\nu}, (y, z)) \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta(z)). \quad (25)$$

Dans le produit direct $\prod_{i=1}^3 \mathfrak{E} D_{[h]}$, nous désignons par

$$\prod_{i=1}^3 k_n^i = \prod_{i=1}^3 k'_n \left[\varphi_n^i, \Delta^i \right] \text{ et nous considérons le produit scalaire } \left(h\rho, \prod_{i=1}^3 k_n^i \right). \text{ Nous remarquons en nous servant des expressions}$$

(24) et (18) que :

$$\begin{aligned} \left(h_p, \prod_{i=1}^3 k'^i_n \right) &= \sum_{(h^i)} \left(\begin{matrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{matrix} \right)_{i=1}^3 \Gamma_n \left(\begin{matrix} [h^i] \\ (h^i) \end{matrix} \right) \left(i_{\varphi_n} \right) \\ &= h_p \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi & \varphi & \varphi \end{matrix} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Nous obtenons une autre expression du produit scalaire $\left(h_p, \prod_{i=1}^3 k'^i_n \right)$

en utilisant les expressions (25) et (18) :

$$\left(h_p, \prod_{i=1}^3 k'^i_n \right) = \sum_{(h^i)} A_n^i B_n^i i_{\varphi_n} \left(h_{\mu\nu}^i(y, z) \right) \left(\begin{matrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{matrix} \right), \quad (27)$$

A_n^i et B_n^i se déduisant de A_n et B_n en remplaçant $h_{\mu\nu}$ par $h_{\mu\nu}^i$.

En comparant les relations (26) et (27), nous obtenons :

$$h_p \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi & \varphi & \varphi \end{matrix} \right) = \sum_{(h^i)} A_n^i B_n^i i_{\varphi_n} \left(h_{\mu\nu}^i(y, z) \right) \left(\begin{matrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{matrix} \right). \quad (28)$$

Le développement du premier membre et la comparaison du résultat obtenu avec le second membre, nous donne l'expression des coefficients de couplage des groupes unitaires.

Dans le chapitre suivant, nous utilisons cette expression pour calculer les coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du groupe SU (3). Nous nous limitons au cas où les invariants de Weyl, h_p , sont les éléments de la base de la représentation de SU (3 (n-1)) et

$h_p \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi & \varphi & \varphi \end{matrix} \right)$ devient $h_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \varphi & \varphi & \varphi \end{matrix} \right)$. La fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires se déduit de

l'expression (22) par la substitution de Δ^i par i . Ainsi nous obtenons :

$$\sum_{h_{uv}} A_{3(n-1)} \varphi_{3(n-1)}(h_{uv}, (y, z)) h_n \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 \\ \varphi \end{matrix}, \begin{matrix} 2 \\ \varphi \end{matrix}, \begin{matrix} 3 \\ \varphi \end{matrix} \right)$$

$$= \exp \left[\sum_i s_i \varphi_{3(n-1)}^i \chi_i \left(\begin{matrix} 1 \\ \varphi \end{matrix}, \begin{matrix} 2 \\ \varphi \end{matrix}, \begin{matrix} 3 \\ \varphi \end{matrix} \right) \right]. \quad (29)$$

Cette fonction génératrice présente un grand intérêt, non seulement pour le calcul des symboles $3[h]$ des groupes unitaires, mais aussi, pour l'étude des symétries de ces coefficients de couplage.

5. Expression des coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du groupe SU (3)

Les invariants de Weyl h_ρ sont des polynômes homogènes de z^1, \dots, z^6 et ils vérifient les conditions (15) et (16) ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} C^{11} h_\rho &= (\lambda^1 + u^1) h_\rho, & C^{22} h &= u^1 h_\rho, & C^{12} h_\rho &= 0, \\ C^{33} h_\rho &= (\lambda^2 + u^2) h_\rho, & C^{44} h &= u^2 h_\rho, & C^{34} h_\rho &= 0, \\ C^{55} h_\rho &= (\lambda^3 + u^3) h_\rho, & C^{66} h_\rho &= u^3 h_\rho, & C^{56} h_\rho &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Pour déterminer les invariants de Weyl h_ρ , dans le cas général, il faut utiliser la méthode que nous avons déjà exposée au paragraphe (3). Mais dans le cas où l'un des $\mu_i = 0$, nous pouvons chercher les invariants qui sont fonctions des scalaires élémentaires et qui satisfont aux conditions (30). La solution dans ce cas est déjà connue (Resnikoff 1967) :

$$h_{[k_i]} = \Delta(k_i) \frac{[z^1 \cdot (z^3 \wedge z^5)]^{k_0} [z^3 \cdot (z^5 \wedge z^6)]^{k_1}}{k_0! k_1!} \times \frac{[z^1 \cdot (z^5 \wedge z^6)]^{k_2} [z^5 \cdot (z^3 \wedge z^4)]^{k_6}}{k_5! k_6!} \quad (31)$$

Le coefficient de normalisation $\Delta(k_i)$ a pour valeur

$$\Delta(k_i) = \left[\frac{2 k_0! k_1! k_2! k_5! k_6! (k_0+k_1+1)! (k_0+k_6+1)!}{(p+2)! (k_0+k_1+k_2+1)! (k_0+k_1+k_6+1)! (k_0+k_5+k_6+1)!} \right]^{1/2} \quad (32)$$

avec $p = k_0+k_1+k_2+k_5+k_6$.

Pour déterminer les coefficients de couplage, nous devons calculer

$h_p(i\varphi, {}^2\varphi, {}^3\varphi)$, (voir (28)), ce qui implique la connaissance des variables $i\varphi_n$. Ces variables se déduisent de la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe SU (3) qui est donnée par :

$$\sum_{\substack{h \\ \mu\nu}} A_3 \varphi_3(h_{\mu\nu}, (w, u, v)) \Gamma_3 \left(\begin{matrix} [h] \\ (h) \end{matrix} \right) (\Delta) = \exp \left[\left(\Delta_1 w_1 + \Delta_2 w_2 \right) u_1 + \Delta_3 v_1 + \left(\Delta_{13} w_1 + \Delta_{23} w_2 \right) u_2 + \Delta_{12} v_2 \right], \quad (33)$$

avec

$$\varphi_3(h_{\mu\nu}, (w, u, v)) = (w)^{h_{12}-h_{11}} (v_1)^{h_{13}-h_{12}} (u_2)^{h_{23}-h_{22}} \times (w_1)^{h_{11}-h_{22}} (u_1)^{h_{12}-h_{23}} (v_2)^{h_{22}} .$$

Les variables $i\varphi_n$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
 e_1^i &= w_1^i u_1^i, & e_2^i &= w_1^i u_1^i, & e_3^i &= v_1^i \\
 f_1^i &= w_1^i u_2^i, & f_2^i &= w_2^i u_2^i, & f_3^i &= v_3^i
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Dans $h_{[k_i]}$, nous remplaçons $z^1 \cdot (z^3 \wedge z^5)$, $z^1 \cdot (z^5 \wedge z^6)$, $z^5 \cdot (z^3 \wedge z^4)$, $z^3 \cdot (z^5 \wedge z^6)$ et $z^1 \cdot (z^3 \wedge z^4)$ respectivement par $e^1 \cdot (e^2 \wedge e^3)$, $e^1 f^3$, $e^3 f^2$, $e^2 f^3$, et $e^1 f^1$. L'expression (28) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Delta(k_i) [e^1 \cdot (e^2 \wedge e^3)]^{k_0} (e^2 \cdot f^3)^{k_1} (e^1 f^3)^{k_2} (e^1 f^2)^{k_5} (e^3 f^2)^{k_6}}{k_0! k_1! k_2! k_5! k_6!} \\
 &= \sum_{(h^i)} \binom{[h^1] \ [h^2] \ [h^3]}{(h^1) \ (h^2) \ (h^3)} A_3^i B_3^i \varphi(h_{\mu\nu}^i, (w^i, u^i, v^i))
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Nous développons le premier membre de (35) en utilisant les relations (34) et la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe SU (2) (Schwinger 1965) :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{(T+1)!}} \frac{[w^1 w^2]^{T-2t^3} [w^1 w^3]^{T-2t^2} [w^2 w^3]^{T-2t^1}}{\left[\prod_{i=1}^3 (T-2t^i)! \right]^{1/2}} \\
 &= \sum_{t_z^i} \binom{t^1 \ t^2 \ t^3}{t_z^1 \ t_z^2 \ t_z^3}_{i=1}^3 \frac{(w_1^i)_{t-t_z^i} (w_2^i)_{t+t_z^i}}{\left[(t-t_z^i)! (t+t_z^i)! \right]^{1/2}}
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

avec $T = t^1 + t^2 + t^3$, $[w^i w^j] = w_1^i w_2^j - w_2^i w_1^j$,

où $\binom{t^1 \ t^2 \ t^3}{t_z^1 \ t_z^2 \ t_z^3}$ sont les coefficients de couplage du groupe SU (2), et

nous obtenons l'expression des symboles 3 ($\lambda \mu$) du groupe SU (3), avec $u^1 = 0$, qui s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 0 & \lambda^2 u^2 & \lambda^3 u^3 \\ (\alpha^1) & (\alpha^2) & (\alpha^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^1 0 & \lambda^2 u^2 & \lambda^3 u^3 \\ y^1 t^1 & y^2 t^2 & y^3 t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \\ t^1_z & t^2_z & t^3_z \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\text{avec } (\alpha^i) = (y^i t^i t^i_z).$$

Le premier facteur du second membre de l'expression (37) est le facteur isoscalaire du groupe SU (3). Nous donnons son expression en conservant les indices de Gel'fand h^i_{uv} pour ne pas en alourdir la forme.

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 0 & \lambda^2 u^2 & \lambda^3 u^3 \\ y^1 t^1 & y^2 t^2 & y^3 t^3 \end{pmatrix} = \frac{\Delta(k_i) (-1)^{h^3_{13} h^3_{12} - s}}{\prod_{i=1}^3 (A^i_3 B^i_3)} \quad (38)$$

$$\times \frac{\left[(T+1)! \prod_{i=1}^3 (T-2t^i)! \left[(t^i - t^i_z)! (t^i + t^i_z)! \right]^{-1} \right]^{1/2}}{i! r! s! j_1! j_2! j_3! j_4! (k_1 - j_1)! (k_2 - j_2)! (k_5 - j_3)! (k_6 - j_4)!}$$

$$\text{avec } p = \frac{1}{3} (\lambda^1 + \lambda^2 + 2u^2 + 2\lambda^3 + u^3)$$

$$k_0 = p - (\lambda^3 + u^3), \quad k_1 = (\lambda^2 + u^2 + \lambda^3) - p, \quad k_2 = p - (\lambda^2 + u^2),$$

$$k_5 = p - (\lambda_3 + u_3), \quad k_6 = (\lambda^3 + u^3 + u^2) - p,$$

$$r = (h^2_{13} + T - h^3_{22} - h^2_{12} - 2t^2) \times \frac{1}{2},$$

$$s = (T - 2t_3 - h^2_{22} - h^3_{12} + h^3_{13}) \times \frac{1}{2},$$

$$i = k_0 - r - s, \quad j_1 = h^2_{13} - h^2_{12} - r, \quad j_2 = h^3_{22} + h^2_{12} - h^2_{13} + r$$

$$j_3 = h^2_{22} + h^3_{12} - h^3_{13} + s, \quad j_4 = h^3_{13} - h^3_{12} - s.$$

Les symboles $3(\lambda \mu)$ du groupe $SU(3)$ sont factorisés en produit de deux coefficients, le symbole $3(t)$ de $SU(2)$ et le facteur isoscalaire du groupe $SU(3)$. Nous obtenons une expression du facteur isoscalaire qui ne comporte pas de sommations. La comparaison entre notre expression et celle obtenue d'abord par Moshinsky (1962) et ensuite par Resnikoff (1967), qui comporte cinq sommations, montre l'importance considérable de notre technique de calcul.

Conclusion

Nous avons construit de deux manières différentes la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires. D'une part, nous utilisons les résultats de la méthode infinitésimale (Nagel et Moshinsky 1965) et la propriété des fonctions génératrices que nous avons établie, d'autre part nous construisons cette fonction par un calcul de récurrence et utilisation des fonctions noyaux. Disposant ainsi de deux développements différents de la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires nous obtenons deux expressions différentes des invariants de Weyl exprimées en termes de paramètres de la fonction génératrice et en comparant les deux expressions nous déterminons les coefficients de couplage des groupes unitaires. Il est important de souligner que notre méthode est une méthode globale ne faisant pas appel aux opérateurs échelle dans la détermination des invariants de Weyl.

L'application de notre méthode au calcul des coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du groupe $SU(3)$, dont Moshinsky donne l'expression qui comporte cinq sommations, nous donne ces coefficients sous la forme d'un produit de deux termes, où l'un des facteurs est le symbole $3-j$ du groupe $SU(2)$ et l'autre terme est le facteur isoscalaire du groupe $SU(3)$. Il est important d'observer que l'expression du facteur isoscalaire du groupe $SU(3)$ que nous obtenons

ne fait intervenir aucune sommation. Ceci montre l'intérêt fondamental de notre approche. Nous menons à bien, les calculs de tous les coefficients de couplage, des groupes SU (3), SU (4), SU (5) en appliquant notre méthode parce qu'ils présentent un grand intérêt en physique. Nous nous proposons d'utiliser notre méthode dans le calcul des coefficients de couplage des groupes orthogonaux, symplectiques et autres groupes semi-simples.

Remerciements

Ayant été contraint par faits de guerre, de quitter le Liban et de refaire ce travail, je tiens à remercier pour leur accueil chaleureux lors de mon arrivée à Lyon, tous les membres de l'Institut de Physique Nucléaire et plus particulièrement le Dr. M. Kibler qui m'a beaucoup aidé et a mis à ma disposition toute la documentation nécessaire.

Références

- Bargmann V 1962 Rev. Mod. Phys. 34 829
- Biedenharn LC, Giovanni A, Louck J D , 1979 J. Math. Phys. 8 691
- Brody T A , Moshinsky M et Renero I, 1965 J. Math. Phys. 6 1540
- Chew C K et Sharp R T 1967 Nuclear Physics B2 697
- Hage Hassan M soumis à publication 1982
- Henrich C 1975 J. Math. Phys. 16 2271
- Hongoh M 1974 3rd Int. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics, Marseille
- Moshinsky M 1962 J. Math. Phys. 34 813
- Moshinsky M 1963 J. Math. Phys. 4 1128
- Nagel J G et Moshinsky M 1965 J. Math. Phys. 6 682
- Resnikoff M 1967 J. Math. Phys. 8 63
- Sharp R T et Lee D 1971 Rev. Mex. Fis. 20 203
- Van der Waerden B L 1932 Die gruppentheoretische Method in der Quantenmechanik (Julius Springer Verlag Berlin 1932)