FR8301974

82H406487

ELECTRICITE DE FRANCE
DIRECTION DES ÉTUDES ET RECHERCHES

Service Applications de l'Electricité
et Environnement

DEPARTEMENT
LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE

6, quai Watier
78400 CHATOU
Tél. : 071.72.44

14 EDF-82H406487

BENQUE J.P.

CHAMP DE TEMPERATURE MOYEN DANS UN FAISCEAU DE TUBES

—

MEAN TEMPERATURE FIELD IN ROD BUNDLES

HE41/82.01

14 pages

Resume :

On traite dans ce rapport de l'équation qui régit le champ de température moyen dans un faisceau de tubes. A l'aide de techniques d'homogénéisation on met en évidence une équation (la plus simple possible) qui fait apparaître une conductibilité équivalente du milieu homogénéisé. Celle-ci pourtant ne possède pas les propriétés classiques : sa partie antisymétrique semble être non négligeable.

Abstract : In this report we deal with the equation of the mean temperature field in rod bundles. Using homogeneization techniques an equation is given (the simplest) in which an equivalent conductivity tensor appears. This conductivity has not the standard properties : the non symetric part seems to be important.

☐ Confidentiel
☐ Diff. restreinte
☐ Diff. EDF
☒ Diff. generale
☐ Non signale

S O M M A I R E

Pages

INTRODUCTION

Considérons un milieu constitué d'un fluide qui circule autour d'un faisceau de tubes. On cherche à déterminer l'équation que vérifie le champ de température moyen. On suppose que le champ de vitesse est donné et que la conduction de la chaleur turbulente est également donnée (indépendante de la température).

Le but de la présente étude est de caractériser la façon dont la chaleur se propage dans un matériau homogène (i.e. sans tube), c'est-à-dire de connaître les caractéristiques de ce matériau équivalent.

Cette approche fait appel aux techniques d'homogénéisation qui ont été développées par de nombreux auteurs (on trouve dans [1] une bibliographie complète). Il s'agit de les appliquer au cas d'une équation de transport diffusion

La présentation qui est faite ici des techniques d'homogénéisation n'est peut être pas toujours d'une rigueur extrême, elle repose plutôt sur l'intuition physique que l'on peut avoir du phénomène. On a préféré cette façon de procéder, par soucis de clarté...

I - EQUATION LOCALE

L'équation locale qui régit la température est bien connue, elle s'écrit :

$$u_\ell \frac{\partial \theta}{\partial x^\ell} = \frac{\partial}{\partial x^\ell} \left(K_t \frac{\partial \theta}{\partial x^\ell}\right) + f \qquad (1)$$

θ désigne la température à la fois dans le métal et dans le fluide.

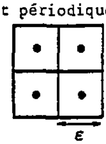
u_ℓ désigne le champ de vitesse dans le fluide, on le suppose incompressible.

K_t représente la diffusion thermique turbulente ou moléculaire du métal.

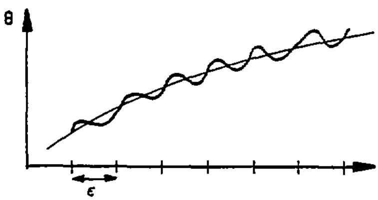
f représente les termes sources dus à la puissance échangée entre primaire et secondaire. On adopte la convention d'Einstein : tout indice répété signifie la sommation.

Les champs vectoriels et scalaires u_ℓ (m), K_t (m), et f (m) sont trés variables spatialement. Cela induit sur la solution θ (m) également une très grande variabilité en espace.

Compte tenu de la position des tubes, la variabilité de u_ℓ, K_t et f est périodique. En effet, plaçons nous à deux dimensions pour simplifier



et représentons une coupe transversale aux tubes. La géométrie de l'écoulement est périodique et les quantités propres à écoulement et au transfert de chaleur peuvent être considérées également comme ayant la même périodicité ε.



Ainsi la température θ (m) est très variable en espace, mais on peut penser que ses fluctuations autour d'une valeur moyenne posséderont également une périodicité analogue à celle relative à l'écoulement.

Il apparaît alors naturel de repérer un point m quelconque du plan, soit par ses coordonnées par rapport à un repère fixe (x), soit par sa position dans une cellule y de périodicité ε. Tous les champs auxquels nous aurons affaire pourront s'écrire de la manière suivante :

$\theta\ (m) = \theta\ (x, y)$ x et y étant bien sûr reliés par le changement de repère.

On va chercher à déterminer les équations du champ moyen :

$$\bar{\theta}\ (x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \theta\ (x, y)\ dy.$$

En fait, on ne peut qu'espérer trouver une approximation de ces équations et pour cela on va introduire une forme a priori de θ (m).

II - FORME A PRIORI DES VARIATIONS DE TEMPERATURE

L'idée essentielle consiste à se placer au niveau d'une cellule de taille ε et à admettre que le champ de température est directement influencé par le champ moyen. Une façon assez systématique de procéder consiste à développer le champ de température local en fonction des dérivées à différents ordres du champ moyen.

En se limitant au premier gradient, on a :

$$\theta\,(x,\,y) = \theta_1 + \bar{\theta}\,(x)\,\,(1 + \theta_2(y)) + \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x^k}\,\,\theta_3^k\,(y) \qquad (2)$$

θ_1, θ_2, θ_3^k sont des fonctions périodiques sur la maille ε, et on impose d'autre part que leur moyenne est nulle sur cette maille

$$\int_0^{\varepsilon} \theta_i\,(y)\,dy = 0 \qquad \forall i = 1,\,2,\,3$$

On pourrait bien sûr pousser plus loin le développement en fonction des divers gradients de $\bar{\theta}$, on s'est limité dans cette étude au premier gradient. Il faut encore déterminer les équations du champ moyen ainsi que celles relatives à θ_1, θ_2, θ_3^k ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

III - EQUATION DU CHAMP MOYEN

A partir de l'expression que l'on a supposé pour θ (m), on obtient une équation qui lie les quantités moyennes et instantanées en remplaçant θ par l'expression (2) dans l'équation (1).

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}\left(u^\ell(\theta_1+(1+\theta_2)\bar\theta + \theta_3^k \frac{\partial\bar\theta}{\partial x^k}\right) - K_t \frac{\partial}{\partial x^\ell}\left(\theta_1+(1+\theta_2)\bar\theta + \theta_3^k \frac{\partial\bar\theta}{\partial x^k}\right)) = f \qquad (3)$$

Pour connaître l'équation du champ moyen, il suffit d'intégrer cette équation sur la maille ε. Pour cela nous allons établir une propriété au préalable :

3.1 - Commutations de la moyenne et de la dérivation

Considérons une fonction quelconque F (x, y) de la forme suivante :

$$F(x, y) = f(x)\, g(y)$$

où g est une fonction périodique sur la maille.

$$\overline{\frac{\partial F}{\partial x^\ell}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon \frac{\partial f}{\partial x^\ell} g + f \frac{\partial g}{\partial y^\ell}\; dy^1\, dy^2$$

Compte tenu de la périodicité de g il vient :

$$\overline{\frac{\partial fg}{\partial x^\ell}} = \frac{\partial f}{\partial x^\ell}\,\bar g = \frac{\partial(\overline{fg})}{\partial x^\ell} \quad .$$

Il y a permutation de l'opérateur de moyenne et de la dérivation.

On suppose que f ou ses dérivées peuvent être considérées comme constantes sur la maille (ε).

3.2 - Equation de la moyenne

Prenons la moyenne de l'équation (3) en utilisant la propriété 3.1. On désigne par u'_ℓ et K'_t les quantités suivantes :

$$u'_\ell\ (y) = u_\ell - \bar{u}_\ell\ (x)$$
$$K'_t\ (y) = K_t - \bar{K}_t\ (x)$$

On suppose que les fluctuations de vitesse et de conductibilité ne dépendent que de la coordonnée locale. En utilisant ces quantités ainsi que le fait que θ_1, θ_2, θ_3^k sont de moyenne nulle, on obtient l'équation sur le champ moyen suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}\left(\left(\bar{u}_\ell+\overline{u'_\ell\ \theta_2} - \overline{K'_t\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x^\ell}}\right)\bar{\theta}+\left(\overline{u'_\ell\ \theta_3^k} - \bar{K}_t\delta^{k\ell}-\overline{K'_t\theta_2}\delta^{k\ell}-\overline{K'_t\ \frac{\partial\theta_3^k}{\partial x^\ell}}\right)\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x^k}-\overline{K'\theta_3^k}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x^\ell\partial x^k}\right)=\bar{f} \tag{4}$$

On constate que θ_1 n'intervient pas dans cette équation, seules les fluctuations proportionnelles aux valeurs de la température moyenne et de son gradient interviennent sur la température moyenne ; ceci tient au fait qu'il n'y a pas de termes non dérivés dans l'équation locale.

Dans cette équation il intervient les corrélations entre θ_i et les variations de vitesse et de diffusion sur une maille. Pour déterminer complétement l'équation portant sur le champ moyen, il faut connaître les fonctions de base θ_i.

3.3 - Détermination des fonctions de base

Pour obtenir une équation sur les fluctuations de température, il suffit de soustraire à l'équation locale (3) l'équation moyenne (4) ; cela donne :

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big(u_\ell\theta_1-K_t\ \frac{\partial\theta_1}{\partial x^\ell} + \Big(u'_\ell+u_\ell\theta_2-\overline{u_\ell\theta_2}-K_t\ \frac{\partial\theta_2}{\partial x^\ell} + \overline{K_t\frac{\partial\theta_2}{\partial x^\ell}}\Big)\bar{\theta}+\Big(u_\ell\theta_3^k - \overline{u_\ell\theta_3^k} - K'_t\ \delta^{k\ell}$$
$$- (K_t\theta_2 - \overline{K_t\theta_2})\delta^{k\ell}-\Big(K_t\ \frac{\partial\theta_3^k}{\partial x^\ell} - \overline{K_t\ \frac{\partial\theta_3^k}{\partial x^\ell}}\Big)\Big)\ \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x^k} -(K_t\theta_3^k - \overline{K_t\theta_3^k})\ \frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x^\ell\partial x^k}\Big) = f' \quad (5)$$

Nous allons développer cette expression, mais pour simplifier l'écriture posons :

$$L(*) = \frac{\partial}{\partial x^\ell} (u_\ell * - K_t \frac{\partial *}{\partial x^\ell})$$

$$A_\ell = u_\ell \theta_2 - \overline{u_\ell \theta_2} - K_t \frac{\partial \theta_2}{\partial x^\ell} + \overline{K_t \frac{\partial \theta_2}{\partial x^\ell}}$$

$$B_{k\ell} = u_\ell \theta_3^k - \overline{u_\ell \theta_3^k} - (K_t \theta_2 - \overline{K_t \theta_2}) \delta^{k\ell} - (K_t \frac{\partial \theta_3^k}{\partial x^\ell} - \overline{K_t \frac{\partial \theta_3^k}{\partial x^\ell}})$$

$$C_k = K_t \theta_3^k - \overline{K_t \theta_3^k}$$

$$D = K_t \theta_2 - \overline{K_t \theta_2}$$

L'équation (5) devient alors :

$$L(\theta_1) + (\frac{\partial u'_\ell}{\partial x^\ell} + L(\theta_2))\bar{\theta} + (A_\ell \delta^{\ell k} - \frac{\partial}{\partial x^k}(K'_t) - \frac{\partial}{\partial x^k}(D) + u'_k + L(\theta_3^k)) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x^k}$$

$$+ \quad (B_{k\ell} - K'_t \delta^{k\ell} - \frac{\partial C_k}{\partial x^\ell}) \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^\ell \partial x^k} - C_k \frac{\partial^3 \bar{\theta}}{\partial x^{2\ell} \partial x^k} = f' \qquad (6)$$

Pour que cette équation soit satisfaite, <u>quelque soit</u> $\bar{\theta}$ et $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x^k}$, il faut que :

$$L\theta_1 = f' \qquad (7)$$

$$\frac{\partial u'_\ell}{\partial y^\ell} + L\theta_2 = 0 \qquad (8)$$

$$A_\ell \delta^{\ell k} - \frac{\partial K'_t}{\partial x^k} - \frac{\partial D}{\partial x^k} + u'_k + L\theta_3^k = 0 \qquad (9)$$

<u>et que l'on puisse négliger les termes faisant intervenir des dérivées plus élevées</u>.

C'est sur cette hypothèse que repose la possibilité de trouver les équations sur le champ de température moyenne en ne développant le champ local qu'en fonction de la valeur du champ moyen et de son premier gradient (2). Si on pense que les dérivées plus élevées peuvent intervenir, il faut reprendre le raisonnement et pousser plus loin le développement de θ.

Les équations (7), (8), (9) a priori sont à résoudre dans une maille ε avec des conditions aux limites périodiques. Nous avons vu que θ_1 n'intervenait pas dans l'équation moyenne ; notons simplement ici que θ_1 est due essentiellement aux fluctuations sur la maille des termes sources.

Le champ de vitesse u'_ℓ est à divergence nulle, ceci signifie que l'équation (8) devient :

$$L(\theta_2) = 0$$

La solution de cette équation est $\theta_2 = ct$. Comme θ_2 est astreint à vérifier $\int_\varepsilon \theta_2 d\varepsilon = 0$ cette constante ne peut être que nulle.

L'équation (9) devient alors :

$$L(\theta_3^k) = \frac{\partial K'_t}{\partial y^k} - u'_k \qquad (10)$$

θ_3^k vérifiant des conditions aux limites de périodicité

θ_3^k est défini à une constante près qui est déterminée par la condition :

$$\int_\varepsilon \theta_3^k \, d\varepsilon = 0.$$

En résolvant l'équation (10) dans la maille ε cela détermine θ_3^k. On est maintenant en mesure de déterminer l'équation portant sur le champ moyen.

3.4 - Conductibilité équivalente

L'équation du champ de température moyen s'écrit alors en reprenant (4) :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\ell}\left(\bar{u}_\ell\,\bar{\theta} - (\bar{K}_t\delta^{\ell k} + a_{\ell k})\,\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x^k}\right) = \bar{f}}$$

Avec :

$$a_{\ell k} = \overline{-\,u'_\ell\ \theta_3^k + K'_t\,\frac{\partial\theta_3^k}{\partial y^\ell}}$$

θ_3^k est déterminé par la résolution sur une maille ε de l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell}\left(u_\ell\,\theta_3^k - K_t\,\frac{\partial\theta_3^k}{\partial y^\ell}\right) = \frac{\partial K'_t}{\partial y^k} - u'_k$$

θ_3^k vérifiant des conditions de périodicité sur la maille ε et la condition $\int_\varepsilon \theta_3^k\, d\varepsilon = 0$.

On constate que le champ de vitesse ainsi que l'hétérogénite de conduction produisent sur le champ moyen l'effet d'un matériau de conductibilité équivalente $a_{\ell k}$. Nous allons maintenant examiner quelques propriétés du tenseur $a_{\ell k}$.

3.5 - Propriétés du tenseur de conductibilité équivalente

$$a_{\ell k} = \frac{1}{S\varepsilon}\int_\varepsilon -\,u'_\ell\,\theta_3^k + K'_t\,\frac{\partial\theta_3^k}{\partial y^\ell}\,d\varepsilon$$

$S\varepsilon$ désigne la surface ou le volume de la maille ε.

θ_3^k est dûe à deux contributions - les fluctuations de vitesse sur une maille et celles de la conduction ; nous allons distinguer ces deux contributions, pour cela écrivons :

$$\star \qquad \frac{\partial}{\partial y^\ell}\left(-u_\ell \tilde{\theta}^j + K_t \frac{\partial \tilde{\theta}^j}{\partial y^\ell}\right) = -\frac{\partial K'}{\partial y^j}$$

$\tilde{\theta}^j$ est périodique sur la maille et de moyenne nulle

et

$$\star \qquad \frac{\partial}{\partial y^\ell}\left(u_\ell \theta^{\star j} - K_t \frac{\partial \theta^{\star j}}{\partial y^\ell}\right) = -u'_j$$

$\theta^{\star j}$ est périodique sur la maille et de moyenne nulle.

Il est évident que l'on a

$$\theta_3^j = \tilde{\theta}^j + \theta^{\star j}$$

Le tenseur de conductibilité équivalente s'écrit :

$$S_\varepsilon \, a_{jk} = \int_\varepsilon -u'_j(\tilde{\theta}^k + \theta^{\star k}) + K'_t\left(\frac{\partial \tilde{\theta}^k}{\partial y^j} + \frac{\partial \theta^{\star k}}{\partial y^j}\right) d\varepsilon$$

Soit après intégration par parties :

$$S_\varepsilon \, a_{jk} = \int_\varepsilon -u'_j(\tilde{\theta}^k + \theta^{\star k}) - \frac{\partial K'_t}{\partial y^j}(\tilde{\theta}^k + \theta^{\star k}) \, d\varepsilon$$

Il est alors possible de distinguer deux parties de a_{jk}. L'une symétrique, l'autre antisymétrique ; en utilisant la définition de $\tilde{\theta}$ et $\theta^\star$ on obtient :

$$S_\varepsilon \, a_{jk} = \int_\varepsilon \underbrace{K_t\left[\frac{\partial \theta^{\star j}}{\partial y^\ell}\frac{\partial \theta^{\star k}}{\partial y^\ell} - \frac{\partial \tilde{\theta}^j}{\partial y^\ell}\frac{\partial \tilde{\theta}^k}{\partial y^\ell}\right] - u_\ell\left[\theta^{\star j}\frac{\partial \tilde{\theta}^k}{\partial y^\ell} - \tilde{\theta}^j \frac{\partial \theta^{\star k}}{\partial y^\ell}\right] d\varepsilon}_{\text{Partie symétrique}}$$

$$\underbrace{+ \int_\varepsilon K_t\left[\frac{\partial \theta^{\star j}}{\partial y^\ell}\frac{\partial \tilde{\theta}^k}{\partial y^\ell} - \frac{\partial \tilde{\theta}^j}{\partial y^\ell}\frac{\partial \theta^{\star k}}{\partial y^\ell}\right] - u_\ell\left[\theta^{\star j}\frac{\partial \theta^{\star k}}{\partial y^\ell} - \tilde{\theta}^j \frac{\partial \tilde{\theta}^k}{\partial y^\ell}\right]}_{\text{Partie antisymétrique}}$$

On constate que le tenseur de conductibilité équivalente n'est pas symétrique et que les hétérogénéites de vitesse et de conductibilité de la chaleur ont toutes deux une contribution symétrique et anti-symétrique. Dans le cas où on néglige les variations de conductibilité $(K_t' = 0)$ le tenseur de conductibilité équivalente s'écrit plus simplement :

$$S_\varepsilon\, a_{jk} = \int_\varepsilon \underbrace{K_t \frac{\partial \theta_3^j}{\partial y^\ell} \frac{\partial \theta_3^k}{\partial y^\ell}}_{\text{Partie symétrique}} \underbrace{- u_\ell\, \theta_3^j \frac{\partial \theta_3^k}{\partial y^\ell}}_{\text{Partie antisymétrique}} \, d\varepsilon$$

Dans ce cas, la contribution symétrique provient de la conduction de la chaleur (supposée constante dans la maille) et la partie antisymétrique provient de la convection. La partie antisymétrique est donc vraisemblablement très loin d'être négligeable. Il semble donc que le comportement de ce tenseur de conduction équivalente se situe assez loin du comportement habituel de la conduction qui donne lieu à des formes quadratiques symétriques définies et positives.

CONCLUSION

L'objet de ce rapport était de fournir une équation qui régisse le champ de température moyen dans un faisceau de tubes. A l'aide de techniques d'homogénéisation, il est possible de mettre en évidence une conductivité équivalente pour un milieu homogène (tube + fluide). Il s'agit du moins d'une première approximation, l'équation proposée étant la plus simple que l'on puisse trouver dans l'approche qui a été entreprise. On a en effet supposé que le premier gradient de la température moyenne suffisait à caractériser la température locale. Il serait, bien sûr, possible de faire intervenir les dérivées plus élevées ; les équations du champ moyen se compliquent en conséquence.

La conductibilité équivalente mise en évidence possède une partie antisymétrique qui semble assez importante. Celle-ci est principalement dûe à la convection. Il serait intéressant de confronter ces résultats à ceux d'expériences, afin de vérifier les hypothèses de départ du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Enrique Sanchez - Palencia - Non homogeneous media and vibration theory - Springer Verlag.